

# Jännitelähde-virtalähdemuunnos ja Théveninin teoreema

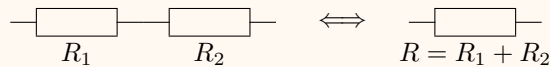
Vesa Linja-aho\*

25.1.2022 (versio 1.0)

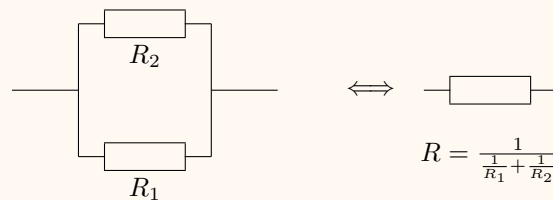
## 1 Lähdemuunnos

Piirimuunnoksella tarkoitetaan toimenpidettä, jonka avulla virtapiiri tai virtapiirin osa muunnetaan esitystavaltaan erilaiseksi mutta ulospäin samalla tavalla käyttäytyväksi piiriksi. Esimerkiksi jo sähkötekniikan perusteista tutut jännitelähteiden sarjaankytkentä, vastusten rinnankytkentä sekä vastusten sarjaankytkentä ovat piirimuunnoksia. Esimerkiksi  $3\text{ k}\Omega$  vastus käyttäytyy piirissä samalla tavalla kuin  $1\text{ k}\Omega$  ja  $2\text{ k}\Omega$  sarjassa. Toisin sanoen jos piiristä irrotetaan  $1\text{ k}\Omega$  ja  $2\text{ k}\Omega$  vastusten sarjaankytkentä ja tilalle laitetaan  $3\text{ k}\Omega$  vastus, muu piiri toimii kummassakin tapauksessa täsmälleen samalla tavalla.

### Sarjaankytkentä



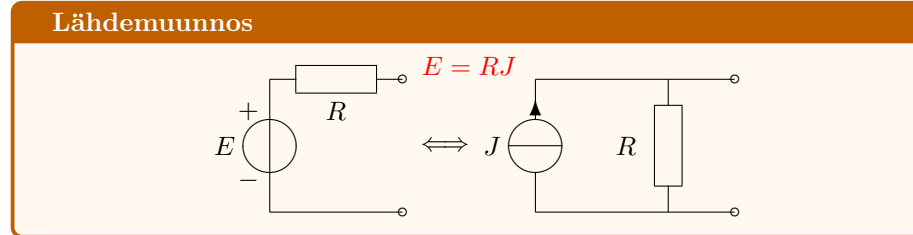
### Rinnankytkentä



Yksi kätevä piirimuunnos on jännitelähde-virtalähdemuunnos, joka perustuu siihen, että **jännitelähteen ja vastuksen sarjaankytkentä** käyttäytyy ulospäin

\*Sisältö on lisensoitu Creative Commons Nimeä 4.0 Kansainvälinen -lisenssillä. Tarkemmat tiedot ja L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-lähdekoodi ovat luettavissa osoitteessa <https://github.com/linjaaho/lahdemuunnos-thevenin/>

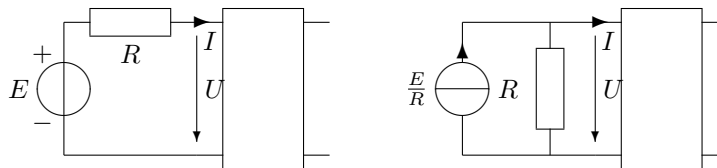
samalla tavalla kuin **virtalähteen ja vastuksen rinnankytkentä**.



Jos virtapiirissä on jännitelähteen ja vastuksen sarjaankytkentä, sen voi korvata virtalähteen ja vastuksen rinnankytkennällä ilman että muun piirin toiminta muuttuu. Huomaa, että pelkkää jännite- tai virtalähdettä ei voi muuntaa yllä olevalla tavalla. Jännitelähteellä on oltava sarja- ja virtalähteellä rinnakkaisresistanssi, jotta muunnoksen voi suorittaa. Vastuksen arvo pysyy muunnoksessa samana, jännite- ja virtalähteen arvo saadaan kaavasta  $E = RJ$ , joka perustuu Ohmin lakiin. Lähdemuunnos ei ole vain piiriteoreettista kikkailua: lähdemuunnos sopivassa paikassa säästää monen rivin kaavanpyörittelyltä, esimerkiksi diodipiirin, RC- ja RL-piirin ja transistorivahvistimien analyysissä.

### Lähdemuunnoksen teoreettinen perustelu

Kytetään molemmat lähteet resistansseineen mielivaltaiseen piiriin (kuvassa laatikko):



Vasemmassa kuvassa virta ja jännite ovat Kirchhoffin ja Ohmin lakien mukaan

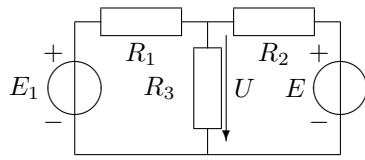
$$I = \frac{E - U}{R} \quad U = E - RI \quad (1)$$

Ja oikeassa kuvassa ne ovat yhtä suuret:

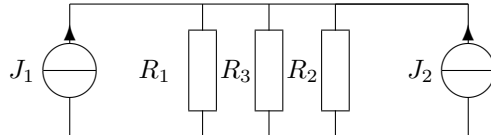
$$I = \frac{E}{R} - \frac{U}{R} = \frac{E - U}{R} \quad U = \left( \frac{E}{R} - I \right) R = E - RI \quad (2)$$

Molemmat piirit siis käyttäytyvät samalla tavalla.

Lähdemuunnos on kätevä oikotie monessa laskutehtävässä: esimerkiksi alla olevassa piirissä jännite  $U$  voidaan ratkaista ilman solmujännitemenetelmän yhtälönpyörittelyä käyttämällä lähdemuunnosta:



Muunnetaan piiri:



Ja nyt jännite saadaan helposti kertomalla virtalähteiden virta rinnankytkennän resistanssilla:

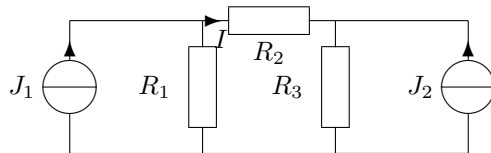
$$U = \frac{J_1 + J_2}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

### Varoitus

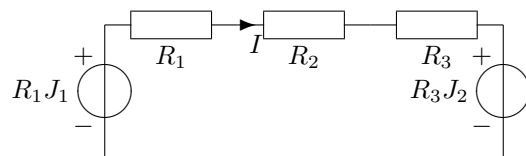
Vaikka vastuksen arvo pysyy samana muunnoksessa, vastus ei ole sama vastus! Esimerkiksi edellisessä esimerkissä muuntamattoman vastuksen virta ei ole sama kuin muunnetun vastuksen virta (vastusta  $R_3$  ei muunnettu joten sen jännite ja virta voidaan laskea näin, mutta vastusten  $R_1$  ja  $R_2$  tapauksessa virta ja jännite ovat muunnoksen jälkeen eri)!

### Esimerkki

Ratkaise virta  $I$  muuntamalla virtalähteet jännitelähteiksi.  $J_1 = 10 \text{ A}$ ,  $J_2 = 1 \text{ A}$ ,  $R_1 = 100 \Omega$ ,  $R_2 = 200 \Omega$  ja  $R_3 = 300 \Omega$ .



Ratkaisu:



$$I = \frac{R_1 J_1 - R_3 J_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{1000 \text{ V} - 300 \text{ V}}{600 \Omega} = \frac{7}{6} \text{ A} \approx 1,17 \text{ A}.$$

## 2 Théveninin teoreema ja Théveninin lähde

**Théveninin teoreeman** mukaan mikä tahansa lineaarinen piiri (ideaalista virtalähdettä lukuunottamatta<sup>1</sup>) voidaan esittää yhdestä portista katsottuna yhden jännitelähteen ja yhden vastuksen sarjaankytkentänä.<sup>2</sup> Tätä sarjaankytkentää kutsutaan **Théveninin lähteeksi**.

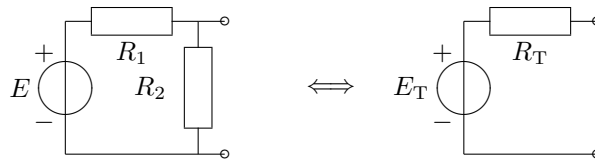
Théveninin lähdejännite  $E_T$  selvitetään yksinkertaisesti laskemalla alkuperäisen piirin portin **tyhjäkäyntijännite** eli jännite joka portissa on, kun siihen ei ole kytketty mitään ulkoista piiriä.

Théveninin lähteen resistanssi  $R_T$  voidaan selvittää kahdella tavalla:

**Lähteiden sammuttamismenetelmä** Sammuttamalla kaikki piirin riippumattomat<sup>3</sup> lähteet ja laskemalla portista näkyvä resistanssi.

**Oikosulkuvirtamenetelmä** Selvittämällä portin **oikosulkuvirta** ja soveltamalla Ohmin lakia.

Muodostetaan kuvan 1 vasemman puolen piiristä Théveninin lähde (oikealla).



Kuva 1: Théveninin lähde.

Portin jännite saadaan laskemalla vastusten läpi kulkeva virta ja kertomalla se  $R_2$ :lla<sup>4</sup>. Tämä portin jännite, niin sanottu **tyhjäkäyntijännite**, on sama kuin Théveninin lähdejännite  $E_T$

$$E_T = \frac{E}{R_1 + R_2} R_2$$

Kuten edellä sanottiin,  $R_T$  voidaan ratkaista kahdella tavalla: lähteiden sammuttamismenetelmällä tai oikosulkuvirtamenetelmällä.

### 2.1 $R_T$ lähteiden sammuttamismenetelmällä

Sammutetaan piirin kaikki lähteet, minkä jälkeen lasketaan napojen välinen resistanssi.

<sup>1</sup>Valtonen, Lehtovuori 2011

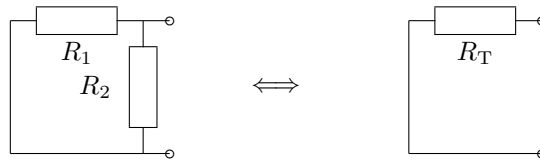
<sup>2</sup>Silvonen 2009

<sup>3</sup>Riippumattoman lähteen vastakohta on ohjattu lähde, jonka arvo riippuu piirin jostain toisesta jännitteestä tai virrasta, ks. luku 6.

<sup>4</sup>Tai suoraan käyttämällä *jännitteenjakosääntöä*.

Sammutettu jännitelähde on jännitelähde, jonka jännite on nolla voltia, eli pelkkä johdin. Sammutettu virtalähde on virtalähde, jonka virta on nolla ampeeria, eli katkaistu johdin. Eli jännitelähde sammutetaan korvaamalla se oikosululla (jolloin  $U = 0\text{ V}$ ) ja virtalähde sammutetaan korvaamalla se avoimella piirillä (jolloin  $I = 0\text{ A}$ ).

Piirissä on vain yksi lähde, jännitelähde, joka sammutetaan korvaamalla se oikosululla (kuva 2).



Kuva 2: Jännitelähde sammutetaan korvaamalla se johtimella.

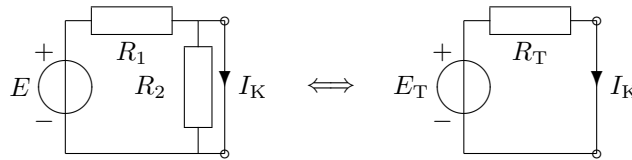
Nyt napojen välinen resistanssi on helppo laskea:  $R_1$  ja  $R_2$  ovat rinnan, joten resistanssi on

$$R_T = \frac{1}{G_1 + G_2} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Tämä tapa on yleensä helpompi ja nopeampi kuin oikosulkuvirtamenetelmä ja siten suositeltava silloin kun piirissä ei ole ohjattuja lähteitä (ks. luku 6).

## 2.2 $R_T$ oikosulkuvirtamenetelmällä

Asetetaan napojen väliin oikosulku, ja lasketaan oikosulun läpi kulkeva virta eli portin **oikosulkuvirta** (Kuva 3).



Kuva 3: Oikosulkuvirran määrittäminen

Koska vastus  $R_2$  on ohitettu oikosululla, sen läpi ei kulje virtaa ja oikosulkuvirran suuruus on

$$I_K = \frac{E}{R_1}$$

ja vastuksen  $R_T$  arvoksi saadaan (soveltamalla Ohmin lakia oikeanpuoleiseen kuvaan eli Théveninin lähteeseen)

$$R_T = \frac{E_T}{I_K} = \frac{E_T}{\frac{E}{R_1}} = \frac{\frac{E}{R_1 + R_2} R_2}{\frac{E}{R_1}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

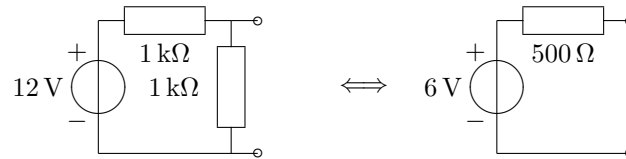
Tulos on sama kuin lähteiden sammuttamismenetelmälläkin — jos lasket virtapiirilaskun kahdella eri tavalla ja lopputulokset ovat erilaiset, jompikumpi (tai molemmat) ovat väärin.

### 3 Lopputuloksen tarkastelua

Théveninin lähde käyttäytyy ulkopuolelta katsottuna samalla tavalla kuin alkuperäinen muunneltu piiri. Esimerkiksi jos komponenttiarvot ovat

$$R_1 = 1 \text{ k}\Omega \quad R_2 = 1 \text{ k}\Omega \quad E = 12 \text{ V}$$

niin kuvan 4 vasemman- ja oikeanpuoleisia piirejä ei pysty mitenkään erottamaan toisistaan napojen välistä tehtävillä mittauksilla.

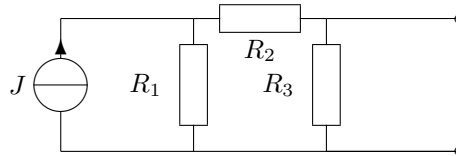


Kuva 4: Théveninin lähde.

Molemmissa piireissä portissa on 6 V tyhjäkäyntijännite, oikosulkuvirta on 12 mA ja jos porttiin kytkee minkä suuruisen vastuksen (tai muun komponentin) tahansa, on vastuksen virta ja jännite sama molemmissa piireissä. Jos piirit olisi rakennettu kahden mustan laatikon sisään, ulkopuolisilla mittauksilla ei voi mitenkään selvittää, kumpi piiri on missäkin laatikossa.<sup>5</sup>

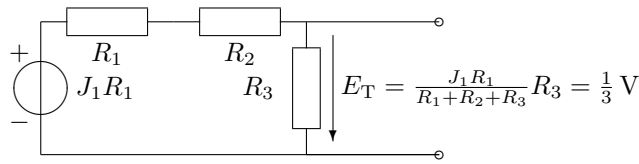
### 4 Toinen esimerkki

Muodostetaan alla olevasta piiristä Théveninin lähde. Kaikki komponenttiarvot ovat ykkösiä. (Vastukset ovat jokainen 1 Ω ja virtalähde  $J = 1 \text{ A}$ .)



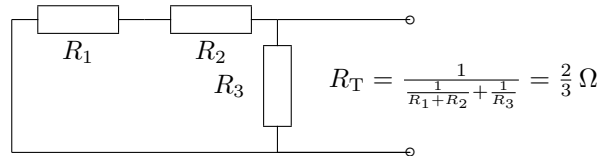
**Ratkaisu:** Selvitetään ensin Théveninin jännite  $E_T$ . Tämän voi tehdä esimerkiksi lähdemuunnoksen ja jännitteenjakosäännön avulla:

<sup>5</sup>Paitsi herkän lämpökameran avulla: vasemmanpuoleisessa piirissä kulkee jatkuvasti 6 mA virta vastusten  $R_1$  ja  $R_2$  läpi, joten piiri lämpenee kuormittamattomanakin  $6 \text{ mA} \cdot 12 \text{ V} = 72 \text{ mW}$  teholla, toisin kuin oikeanpuoleinen piiri.

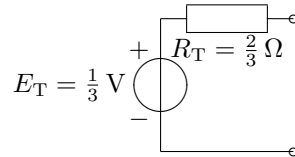


Ratkaistaan seuraavaksi Théveninin lähteen resistanssi  $R_T$ . Helpoiten tämä onnistuu sammuttamalla lähteet ja laskemalla portista näkyvä resistanssi (toinen tapa olisi oikosulkuvirran selvittäminen).

Resistanssin voi laskea joko alkuperäisestä tai muunnetusta piiristä, lopputulos on sama koska lähdemuunnos ei muuta piiri ulkoista toimintaa. Lasketaan muunnetusta piiristä, eli sammutetaan jännitelähde:



Vastukset  $R_1$  ja  $R_2$  ovat sarjassa, ja tämä sarjaankytkentä on rinnan  $R_3$ :n kanssa. Nyt  $E_T$  ja  $R_T$  tiedetään, joten meillä on valmis Théveninin lähde:



## 5 Sovelluksia

Théveninin lähde helpottaa joitain virtapiirilaskuja, kun monimutkainen osa piiristä voidaan pelkistää jännitelähteeksi ja vastukseksi.

Moni käytännön virtapiiri voidaan ajatella Théveninin lähteenä: esimerkiksi pistorasiasa voidaan mallintaa Théveninin lähteellä: tyhjäkäyntijännite voidaan mitata yleismittarilla ja sisäinen resistanssi asennustesterillä, jolloin saadaan laskettua oikosulkuvirta, jonka tulee olla riittävä, jotta vikasuojaus toimii (johdonsuojalaite laukeaa riittävän nopeasti). Nykyaikainen asennustesteri ilmoittaa oikosulkuvirrankin suoraan.

Käytännön elektroniikkalaitteet suunnitellaan yleensä tietyn toiminnon toteuttavina lohkoina ja on suunnittelijan kannalta kätevää, jos yhden lohkon toiminta voidaan mallintaa yksinkertaisella sijaiskytkennällä. Esimerkiksi vahvistimen lähtöä voidaan mallintaa Théveninin lähteellä, jolla on tietty lähdejännite ja lähtöresistanssi.

## 6 Ohjatut lähteet

Lähteiden sammuttamismenetelmässä sammutetaan kaikki riippumattomat lähteet ja lasketaan portista näkyvä resistanssi.

Resistanssin laskeminen piiristä, josta kaikki lähteet on sammutettu, on suoraviivaista, joten lähteiden sammuttamismenetelmä on kätevä silloin kun kaikki lähteet piirissä ovat riippumattomia.

Riippumattoman lähteen vastakohta on **ohjattu lähde**, jonka arvo riippuu piirin jostain toisesta jännitteestä tai virrasta.

**Ohjattuja lähteitä puolestaan ei saa sammuttaa** portista näkyvää resistanssia laskettaessa, ja resistanssin laskeminen piiristä jossa on ohjattuja lähteitä on tavallisesti työlästä.

Mikäli piirissä on ohjattuja lähteitä, Théveninin resistanssia selvitettyessä kannattaakin käyttää oikosulkuvirtamenetelmää.

Oikosulkuvirtamenetelmä toimii aina, olipa piirissä ohjattuja lähteitä tai ei.

## 7 Muuta

Théveninin lähde voidaan muodostaa myös pelkistämällä piiriä piirimuunnoksin avulla kunnes lopputuloksena on jännitelähteen ja vastuksen sarjaankytkentä.

Théveninin teoreema pätee myös vaihtosähköpiireille: tällöin lähteenä on vaihtojännitelähde ja resistanssin tilalla on impedanssi.

Théveninin teoreeman kehitti ensimmäisenä vuonna 1853 saksalainen fyysikko Hermann von Helmholtz. Vuonna 1883 ranskalainen lennätininsinööri Léon Charles Thévenin päätyi itsenäisesti samaan tulokseen.<sup>6</sup>

Théveninin teoreemalle läheistä sukua on **Nortonin teoreema**, jossa piiri esitetään virtalähteen ja resistanssin rinnankytkentänä, **Nortonin lähteenä**. Nortonin lähde on käytännössä Théveninin lähde, jolle on tehty jännitelähddevirtalähdemuunnos.

## 8 Lähteet

Kimmo Silvonen: *Sähkötekniikka ja piiriteoria*. Otatieto, Helsinki. 2009.

Martti Valtonen, Anu Lehtovuori: *Piirianalyysi. Osa 1, Tasa- ja vaihtovirtapiirien analyysi*. Unigrafia, Helsinki. 2011.

---

<sup>6</sup>Silvonen 2009