

# Webinaari 1

## Esi- ja alkuopetuksen matematiikkaa

Pekka Muotka

2024

# Kurssin sisällöt

---

- Esimatemaattiset taidot ja niiden harjoittelu
- Lapsen lukukäsitteen kehittyminen
- Kymmenjärjestelmä ja sen opettaminen
- Peruslaskutoimitukset sekä niiden opettaminen toiminnallisesti
- Matematiikan oppimisen tuen suunnittelu sekä osaamisen kartoitus

# Kurssin toteutus

---

## Kontaktiopetus:

- 6 h webinaareja esi- ja alkuopetuksen matematiikasta (2 iltapäivää)
- 6 h lähiopetuspäivä toiminnallisesta matematiikan opetuksesta esi- ja alkuopetuksessa
- 3 h webinaari oppimistehtävistä sekä osaamisen mittauksesta ja oppimisen tuen suunnittelusta (1 iltapäivä)

## Yhteisöllinen ja itsenäinen työskentely:

- Opetuskokeilu oppilasryhmässä ja oppimispäiväkirjan kirjoittaminen
- Oppilaan osaamisen mittaamisen kokeilu ja oppimispäiväkirjan kirjoittaminen
- Oppilaan oppimisen tuen suunnittelun kokeilu ja oppimispäiväkirjan kirjoittaminen

# Teoriaosan webinaarit

## Webinaari 1

- Matematiikan sisällöt esi- ja alkuopetuksessa
- Matemaattinen ajattelu ja oppiminen
- Esimatemaattiset taidot
- Lukukäsitteen kehittyminen
- Lukujonotaidot
- Pienten lukujen oppiminen
- Pienten lukujen hajotelmat
- Kymmenjärjestelmä
- Laskutoimitukset ja –strategiat

## Webinaari 2

- Matemaattisen ajattelun kielentäminen
- Oppimisen eheyttäminen ja projektioppiminen
- Arviointi ja osaamisen kartoitus oppimisen tuen suunnittelun työkaluna
- Eriyttäminen

# Lähikoulutuspäivä

## Osa 1

---

- Matemaattisen ajattelun kielentäminen
- Esimatemaattiset taitojen harjoittelu toiminnallisesti
- Lapsen lukukäsitteen kehittyminen harjoituksia toiminnallisesti
- Kymmenjärjestelmä ja sen opettaminen toiminnallisesti
- Mittaamisen harjoittelu toiminnallisesti
- Ohjelmoinnillisen ajattelun harjoittelu toiminnallisesti

## Osa 2

---

- Toiminnallinen kokeilu eheyttävästä matematiikan oppimisesta
- Arviointi ja osaamisen kartoitus oppimisen tuen suunnittelun työkaluna
  - tutustuminen mittariin
  - tulosten kirjaaminen ja kokoaminen
  - tulosten tulkinta

# Kehittämistehtävät

## Opetuskokeilu ja oppimispäiväkirja

- Kokeile toiminnallista matematiikan harjoitusta oppilasryhmässä
- Sopivia aiheita voit löytää webinaareista 1 ja 2 tai lähikoulutuspäivän toiminnallisista harjoituksista
- Kirjoita oppimispäiväkirjaan mitä olet kokeillut, mitä havaitsit kokeilussa oppilaiden oppimiseen liittyen sekä reflektoi kokemuksiasi. Reflektion tukena voit käyttää webinaarien 1 ja 2 materiaaleja.

## Oppilaan osaamisen mittaamisen kokeilu ja oppimispäiväkirja

- Kokeile mitata oppilaan osaamista
- Sopivia osaamisen mittaamisen välineitä voit löytää webinaarista 2 tai lähikoulutuspäivän iltapäivän materiaaleista. Voit myös käyttää jotain muuta matematiikan oppimisen mittaria
- Kirjoita oppimispäiväkirjaan mitä olet kokeillut, mitä havaitsit kokeilussa oppilaiden oppimiseen liittyen sekä reflektoi kokemuksiasi. Reflektion tukena voit käyttää webinaarien 1 ja 2 materiaaleja.

## Oppilaan oppimisen tuen suunnittelun kokeilu ja oppimispäiväkirja

- Kokeile oppilaan oppimisen tuen suunnittelua
- Sopivia oppimisen tuen suunnittelun työkaluja voit löytää webinaarista 2 tai lähikoulutuspäivän iltapäivän materiaaleista. Voit myös käyttää jotain muuta matematiikan oppimisen tuen materiaaleja
- Kirjoita oppimispäiväkirjaan mitä olet kokeillut, mitä havaitsit kokeilussa oppilaiden oppimiseen liittyen sekä reflektoi kokemuksiasi. Reflektion tukena voit käyttää webinaarien 1 ja 2 materiaaleja.

# Matematiikan sisällöt esi- ja alkuopetuksessa

- Esiopetuksen sisällöt ja matemaattiset taidot s. 35-37.
  - [esiopetuksen\\_opetussuunnitelman\\_perusteet\\_2014.pdf](#) ([oph.fi](#))
- Alkuopetuksen sisällöt ja matemaattiset taidot s. 129-130
  - [perusopetuksen\\_opetussuunnitelman\\_perusteet\\_2014.pdf](#) ([oph.fi](#))

# Keskeistä sisältöä

## Esiopetus

- Lapsen arjen ja ympäristön matematiikka
- Muutoskäsite; löytää ja tuottaa muutoksia
- Aikakäsitteitä; esim. joskus, eilen ja vuorokauden ajat
- Lukukäsite; havaitsee ympäristöstään lukumääriä, käyttää oikeaa lukusanaa ja numeromerkkiä
- Tason hahmottaminen
- Avaruuden (tilan) hahmottaminen
- Mittaamisen taito; kehomitat ja mittausvälineiden käyttö
- Vertailu, luokittelu ja järjestykseen asettelu; käyttäen asioita ja esineitä
- Säännönmukaisuuden tuottaminen ja havaitseminen

## Alkuopetus

- S1 Ajattelun taidot
  - Yhtäläisyydet, erot, säännönmukaisuus
  - Vertailu, luokittelu ja järjestykseen asettelu
  - Syy- ja seuraussuhteet
  - Vaihteelliset toimintaohjeet
- S2 Luvut ja laskutoimitukset
  - Lukukäsite: Lukusana, lukumäärä ja numeromerkintä kokonaisuutena
  - Lukumääräisyyden jäsentäminen: laskeminen, hahmotus ja määrän arviointi
  - Lukujonotaidot
  - Lukujen vertailu ja asettaminen järjestykseen
  - Lukujen ominaisuudet: Parillisuus, moninkerrat ja puolittaminen.
  - Lukujen 1-10 hajotelmat
  - Lukujen tarkoituksen mukainen käyttö
  - Kymmenjärjestelmän periaate konkreettisin mallein
  - Yhteen- ja vähennyslasku lukualueella 1-20 ja sen jälkeen 0-100
  - Päässälaskustrategiat
  - Yhteenlaskun vaihdannaisuus ja liitännäisyys
  - Kertolaskun käsite ja kertolaskut 1-5 ja 10
  - Murtoluvun käsitteen pohjustus jakamalla kokonainen yhtä suuriin osiin
- S3 Geometria ja mittaaminen
  - Avaruusgeometrian ja tasogeometrian hahmottaminen ja erottaminen toisistaan
  - Suunta- ja sijaintikäsitteet
  - Tunnistaa ja rakentaa (ja piirtää) kuviota: ympyrä, kolmio, neliö ja suorakulmio.
  - Tunnistaa ja piirtää (ja rakentaa) kappaleita: pallo, kuutio, suorakulmainen särmiö, ympyrälieriö, ympyräkartio ja pyramidi.
  - Tunnistaa kuvioiden luokitteluun tarvittavia ominaisuuksia: sivu, kärkipiste (kärki), kulma, kehä, keskipiste ja säde.
  - Tunnistaa kappaleiden luokitteluun tarvittavia ominaisuuksia: tahko, särmä ja kärkipiste (kärki), kuori, pohja ja vaippa.
  - Mittaamisen periaatteen oivaltaminen
  - Käsittelee suureita ja keskeisiä mittayksiköitä suureiden yhteydessä:
    - Pituus: senttimetri ja metri
    - Massa: gramma ja kilogramma
    - Tilavuus: desilitra ja litra (vetomitat)
    - Aika: Kellonajat (tasatunnit ja puolet tunnit) ja ajanyksiköt
    - (Raha: Euro ja sentti)
- S4 Tietojenkäsittely ja tilastot:
  - Tiedon kerääminen
  - Tiedon tallentaminen
  - Laaditaan ja tulkitaan yksinkertaisia taulukoita
  - Laaditaan ja tulkitaan yksinkertaisia pylväsdiagrammeja

# Matemaattinen ajattelu ja oppiminen

- Alkuopetuksen matematiikan tavoitteet sisältää useita erilaisia osa-alueita:
  - Ajattelun taidot
  - Luvut ja laskutoimitukset
  - Geometria
  - Mittaaminen
  - Tietojen käsittely ja tilastot
- Matematiikan osaaminen kumuloituu. Yksilöiden väliset erot oppimisessa näkyy yksilöiden osaamisen eroina. (ks. Aunola & Nurmi, 2018; Metsämuuronen, 2017, 66-67)
- Matemaattisen ajattelun kielet (ks. Joutsenlahti & Tossavainen, 2018)
  - Matematiikan symbolikieli
  - Kuviokieli
  - Puhekieli
  - Taktiilinen toiminnan kieli
- Muistin toiminta oppimisessa (ks. Kyttälä & Kanerva, 2018)
  - Työmuisti prosessoi ja säilyttää lyhytaikaisesti tietoa
    - Ongelmanratkaisu tapahtuu työmuistissa
    - Rajallinen kapasiteetti
    - Keskusyksikkö
    - Visuaalisspatiaalinen luonnoslehtiö
    - Fonologinen silmukka
  - Pitkäkestoinen muisti säilyttää pitkään tietoa
    - Ongelmanratkaisussa palautetaan tietoa pitkäkestoisesta muistista
    - Matemaattisten rakenteiden yleistäminen tehostaa ajattelua

# Esimatemattisia taitoja

---

- Havaitseminen ja muutoksen havaitseminen
- Luokittelu
- Vertailu ja järjestäminen
- Jaksot jonossa, sarjoittaminen
- Yksi-yhteen vastaavuus
- Lukumäärän säilyvyys
- Subitisaatio
- Avaruudellisten ja aikaan liittyvien suhdekäsitteiden hallinta
- Perusmuodot
- Laskeminen yhdestä kymmeneen
  
- Toisaalta puhutaan esim. varhaisista matemaattisista taidoista ja taitoryppäistä (Aunio & Räisänen, 2016):
  - Lukumääräisyyden tajua
  - Matemaattisten suhteiden hallinta
  - Laskemisen taidot
  - Aritmeettiset perustaidot

# Lukukäsitteen kehittyminen luonnollisilla luvuilla

- Lukukäsite; havaitsee ympäristöstään lukumääriä, käyttää oikeaa lukusanaa ja numeromerkkiä (Esiopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014).
- Lukukäsite: Lukusana, lukumäärä ja numeromerkintä kokonaisuutena (Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014).
- Primaarit taidot
  - Subitisaatio
  - Suurten kappalelukumääräerojen havaitseminen
- Sekundaariset taidot
  - Lukujonot loruna
  - Toiminnan koordinointi lukujonon luettelussa yksi-yhteenvastaavuuden avulla
  - Viimeisen lukusanan merkityksen ymmärtäminen (joukossa olevien määrä yhteensä)
  - Lukumäärän säilymisen periaatteen ymmärtäminen (oivaltaa että kappalelukumäärä säilyy vaikka joukon kappaleita siirrellään tai järjestellään erilailla)
  - Ymmärrys siitä että joukossa on tietty kappalelukumäärä objekteja (kardinaalinen merkitys)
  - **Ymmärrys siitä että jokin objekti on tietyssä paikassa lukujonoa (ordinaalinen merkitys)**
  - Muut numeroiden käyttöilanteet
- SFON (Spontaneous focusing on numerosity) (Hannula, Lepola & Lehtinen, 2010)
  - Lapsen varhainen spontaani huomion kiinnittäminen lukumääriin ennustaa myöhempää artimeettista osaamista.
  - Virikkeisen ympäristön ja kulttuurin rakentaminen oppimisyhteisössä lukujen ja lukumäärien havaitsemiseen ympäristöstä.

# Lukujonotaidot

- Vahvat lukujonotaidot voivat toimivat varasuunnitelmana myöhemmin laskutoimitusten ja –strategioiden tekemiselle. Varhaiset lukujonotaidot ovat tärkein matemaattisten taitojen ennusmerkki. (Aunola & Nurmi, 2018).
- Lukualue etenee luonnollisilla luvuilla pienemmästä lukumäärästä kohti suurempia. Alkuopetuksen lopun tavoite on hallita luvut lukualueella 0-100.
- Ehdotus; Opetellaan sekä alhaalta ylös että ylhäältä alas:
  - 0-10
  - 0-20
  - (0-50)
  - 0-100
  - Lukujonot:
    - jokainen luku ja jostain luvusta johonkin lukuun
    - moninkerrat 2, 3, 4, 5 ja 10 (pohjustuksena ja johdantona kertotauluihin)

## Lukujonotaidon kehittymisen vaiheita:

1. Lukujonot loruna
2. Toiminnan koordinointi lukujonon luettelussa yksi-yhteen vastaavuuden avulla
3. Viimeisen lukusanan merkityksen ymmärtäminen (joukossa olevien määrä yhteensä)
4. Lukumäärän säilymisen periaatteen ymmärtäminen (oivaltaa että kappalelukumäärä säilyy vaikka joukon kappaleita siirrellään tai järjestellään erilailla)
5. Ymmärrys siitä että joukossa on tietty kappalelukumäärä objekteja (kardinaalinen merkitys)
6. **Ymmärrys siitä että jokin objekti on tietyssä paikassa lukujonoa (ordinaalinen merkitys)**

# Pienten lukujen oppiminen

---

- Lukukäsite: havaitsee ympäristöstään **lukumääriä**, käyttää oikeaa **lukusanaa** ja **numeromerkkiä** (Esiopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014).
- Subitisaatio: Havaitaan ilman luettelua pieniä lukumääriä (n. 1-4)
- Toisaalta lukujonotaitoihin tukeutuen muiden lukujen ymmärtäminen lukualueella 0-9

Matemaattisen ajattelun kielet (ks. Joutsenlahti & Tossavainen, 2018)

- Matematiikan symbolikieli
- Kuviokieli
- Puhekieli
- Taktiilinen toiminnan kieli

# Pienten lukujen hajotelmat

- Pienten lukujen hajotelmien ymmärtämisen pohjana toimii ymmärrys lukujonoista ja lukujen kappalelukumääräisyydestä. Toisaalta subitisaatiota voidaan hyödyntää hajotelmien hahmottamisessa.
- Alkuopetus
  - S2: Lukujen 1-10 hajotelmat; Päässä-laskustrategiat; Yhteen- ja vähennyslasku lukualueella 1-10
- Lukujen hajotelmien sujuva hallinta toimii pohjana yhteen- ja vähennyslaskutaidolle.
- Ymmärrys konkreettisilla kappalelukumäärillä ja lukujen malleilla (konseptuaalinen ymmärrys).
- Sujuva hallinta puhekielenä ja symbolisena esitysmuotona (automatisoituminen).

# Kymmenjärjestelmä

- Alkuopetus: S2: Kymmenjärjestelmän periaate konkreettisin mallein
- Numero vs. luku
  - Luku sisältää tiedon lukumäärästä (kaadinaalinen merkitys) ja/tai sijainnista lukujonossa (ordinaalinen merkitys).
  - Numeroita käytetään symbolina/merkinä luvulle
- Numeroilla voidaan suoraan merkitä luvut 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9
- Luku 10 ja sisältää kaksi numeromerkkiä ja luvun ymmärrys sisältää ymmärryksen kymmenjärjestelmästä paikkajärjestelmänä (yksien ja kymmenten alueella).
  - Ymmärrystä voidaan tukea konkreettisilla malleilla, missä yhdet ja kymmenet saadaan konkreettisesti mallinnettua (kardinaalinen merkitys)
  - Ymmärrystä voidaan tukea lukujonoajattelulla, sijainti lukujonossa (ordinaalinen merkitys).
    - Tuetaan luvun ymmärrystä tutkimalla sen viereisiä lukuja ja siten miten luku muodostuu lisäämällä tai vähentämällä pieniä lukuja.

# Laskutoimitukset ja –strategiat

- Ensin pienillä luvuilla
  - Luettelemalla laskeminen (päätely perustuu lukujonon luotteluun)
    - Hidas ja työmuistille työläs strategia
    - Siegler (1986): ”backup-strategia”, saadaan hankittua aritmeettista tietoa uusissa tilanteissa ( Aunola & Nürmi, 2018)
  - Pientenlukujen hajotelmien hallinnan automatisoiduttua niiden hyödyntäminen laskustrategioissa
    - Vaatii laskijalta luottamusta samaan ratkaisuun pääsemisestä, jos luottamusta puuttuu varmistellaan lukujonoihin tukeutumalla.
    - Nopea ja työmuistin kapasiteettia vapautuu ongelmanratkaisuun, hallittujen hajotelmien palautuessa nopeasti pitkäkestoisesta muistista ongelmanratkaisukäyttöön.
  - Yhteenlaskun vaihdannaisuus ja liitännäisyys
    - Vaihdannaisuus:  $3+1=1+3$
    - Liitännäisyys:  $(3+2)+1=3+(2+1)$
  - Yhteen- ja vähennyslaskun käänteisyys:
    - Koska  $1+3=4$  niin täytyy olla niin että  $4-3=1$
- Summan arvo yli kymmenen, vähenevä suurempi kuin kymmenen
  - Yhteenlasku kymmenen kautta
    - Hajotetaan toinen yhteenlaskettavista siten, että lasketaan ensin kymmeneen ja sitten loput.
      - Vaadittava osaaminen ennen laskustrategian käyttöönottoa: Pienten lukujen hajotelmat, luvun kymmenen hajotelmat, ymmärrys kymmenjärjelmässä kymmenistä ja yksistä
  - Vähennyslasku kymmenen kautta
    - Hajotetaan vähentäjä siten, että vähennetään ensin kymmeneen ja sitten loput
      - Vaadittava osaaminen ennen laskustrategian käyttöönottoa: Pienten lukujen hajotelmat, luvun kymmenen hajotelmat, ymmärrys kymmenjärjelmässä kymmenistä ja yksistä
- Tuplat ja muut suoraan kertolaskujen kautta päätelyt
- Lähes tuplat ja muut tiedetyn aritmeettisen faktan kautta tehdyt aritmeettiset päätelmät.

# Artikkeleita

---

- Aunola, K., & Nurmi, J.-E. (2018). Matemaattisten taitojen kehitys kouluiässä. In J. Joutsenlahti, H. Silfverberg, & P. Räsänen (Eds.), *Matematiikan opetus ja oppiminen* (pp. 54-69). Niilo Mäki Instituutti.
- Kyttälä, M., & Kanerva, K. (2018). Työmuisti ja matemaattiset taidot. Joutsenlahti, J., Silfverberg, H. & Räsänen, P.(toim.) *Matematiikan opetus ja oppiminen* (1. painos.). Jyväskylä. Niilo Mäki Instituutti.
- Metsämuuronen, J. (2017). Oppia ikä kaikki–Matemaattinen osaaminen toisen asteen koulutuksen lopussa 2015. Helsinki: Kansallinen koulutuksen arviointikeskus. Julkaisut, 1, 2017.
- Joutsenlahti, J., & Tossavainen, T. (2018). Matemaattisen ajattelun kielentäminen ja siihen ohjaaminen koulussa. . Joutsenlahti, J., Silfverberg, H. & Räsänen, P.(toim.) *Matematiikan opetus ja oppiminen* (1. painos.). Jyväskylä Niilo Mäki Instituutti.
- Hannula, M. M., Lepola, J., & Lehtinen, E. (2010). Spontaneous focusing on numerosity as a domain-specific predictor of arithmetical skills. *Journal of experimental child psychology*, 107(4), 394-406.