

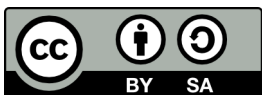
OPVA

MATEMATIIKAN TAIDOT

Sisällys

1 Johdanto	4
2 OPVA-matematiikan lähtökohtia	7
2.1 Perusteita OPVA-matematiikan sisältöihin.....	7
2.2 Lukukäsitteen ja matematiikan merkintöjen haasteita.....	9
2.3 Suhde-käsitteen, verrannollisuuden sekä ongelmanratkaisun haasteita	10
2.4 Käytännön keinoja OPVA-matematiikan opetukseen.....	12
3 Koulumatematiikan solmukohtat	16
4 Matematiikan taitojen lähtötason kartoittamisesta	28
4.1 Seuloista, testeistä ja kartoituksista	28
4.1.1 Matematiikan perustaitojen kartoituksia ja lähtötasotestejä	30
4.1.2 Maksullisia matematiikan perustaitojen lähtötasokartoituksia	32
4.2 Kartoitusten pohjalta tehtävistä jatkotoimenpiteistä	32
4.2.1 Esimerkki matematiikan perustaitojen kartoitukseen pohjautuvista jatkotoimista.....	33
4.2.3 Kohti yksilöllistä opinpolkua – Amispallot	33
4.2.4 Näkökulmia ja materiaaleja matematiikan perustaitojen solmukohtien tukemiseen	34
5 Matematiikkakuvan merkitys – tunteet pelissä	37
5.1 Matematiikkakuva ja matematiikan taidot rakentuvat vähitellen.....	38
5.2 Matematiikkakuvan taustaa ja lähtökohtia ammatillisissa opinnoissa	38
5.3 Keinoja opiskelijoiden matematiikkakuvan tukemiseen	38
6 Kielentäminen matematiikan oppimisen työkaluna	42
6.1 Matematiikan osaamisen, kielentämisen ja matemaattisen ajattelun määrittelyä.....	43
6.2 Kielentämisen näkökulma matematiikan oppimateriaaleissa - tehtäväesimerkkejä.....	44
6.2.1 Kirjallisen kielentämisen malleja.....	44
6.2.2 Esimerkkejä kielentämisen tehtävistä.....	44
6.3 Kieli matematiikan oppimisessa	48
6.4 Kielentäminen opettajan työkaluna	53

OPVA – Matematiikan taidot



Tämä teos on lisensoitu Creative Commons Nimeä-JaaSamoin 4.0 Kansainvälinen -lisenssillä. Lisenssi nähtävillä osoitteessa <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.fi>.



OPVA – Matematiikan taidot -verkkosivusto osoitteessa:
<https://sites.google.com/view/opva-matematiikka/opva-matematiikan-taidot>

1 Johdanto

Matemaattisten taitojen kehittyminen alkaa jo varhaislapsuudessa. On tärkeää, että lapset kiinnittävät spontaanisti huomiota kasvuympäristössä oleviin määriin ja niiden laskemiseen. Kyky hahmottaa lukumääriä perustuu synnynnäiselle havaintomekanismille, joka ohjaa lasta tunnistamaan ympäristöstä lukumääräisyyksiä. Aluksi tämä mekanismi on luonteeltaan epätarkka ja tähän perustuva hahmottaminen liittyy lähinnä suuruuserojen ja määrien muutosten tunnistamiseen. Lukumäärien havainnoiminen kasvuympäristöstä ja havaintomekanismin taso muodostavat perustan lukumäärien käsittelylle. Jotta käsitteellinen, matemaattinen ajattelu kehittyisi, lapsen tulisi kiinnittää ympäristön lukumääriin huomiota tietoisesti. Käsitteellisen, abstraktimman ymmärryksen syntyminen lukumäärästä edellyttää kasvuympäristöä, jossa lapsia ohjataan lukumäärien tunnistamiseen lukumäärätietoisesta ympäristön avulla. Lukumäärien tunnistaminen ja niiden ilmaiseminen symbolein sekä lukumäärien välisten suhteiden oivaltaminen vievät aikaa lapsen kehityksestä useita vuosia. Oppimisen kannalta on tärkeää, että lapsen kasvuympäristö on lukumäärätietoinen, joka saa lapset kiinnostumaan lukumäärästä ja hyödyntämään näitä toiminnassa yhdessä aikuisen ja lapsen välisessä vuorovaikutuksessa. Kielelliset käsitteet ilmauksille numerot ja luvut liittyvät olennaisella tavalla kulttuurimme ja ne opitaan kulttuurisessa vuorovaikutuksessa. Numeroiden ja lukujen merkityksen sekä niiden käytön ymmärtämiseen lapsi tarvitsee vuorovaikutusta lähikehityksen vyöhykkeellä toimivien aikuisten kanssa. Alle kouluikäisenä mitattu SFON-tendenssi (spontaani huomion kiinnittäminen lukumääriin) on yhteydessä matemaattisiin taitoihin 12-vuotiaana. (vrt. [1]). Mitä aiemmin lukukäsitys sekä peruslaskutaidot kehittyvät, sitä paremmin matematiikan oppiminen sujuu yleensä tulevaisuudessa. Kouluuntulovaiheessa lasten matemaattisissa taidoissa on eroja. Yhtenä vaikuttavana tekijänä on lukumääriin huomion kiinnittämisen taito varhaisina vuosina. Ne lapset, jotka eivät ole spontaanisti kiinnittäneet huomiota lukumääriin varhaisina vuosina, ovat usein matemaattisissa taidoissa takamatkalla. Lasten väliset erot matemaattisissa taidoissa kasvavat usein koulunkäynnin aikana entisestään.

Lukujärjestelmän varhainen hahmottaminen on tärkeä osa myöhempien laskutaitojen kehittymistä sekä niiden hallintaa. Vaikka eri ihmisillä on erilaisia vahvuuksia eri matemaattisissa osa-alueissa, on muistettava kuitenkin, että matemaattiset kokonaisuudet pohjautuvat toisiinsa. Myöhemmin näitä opittuja kokonaisuuksia yhdistetään siten, että useaa taitoa käytetään yhtäaikaaisesti. Mikäli jonkin asian perusteet eivät ole hyvin hallussa, voi joidenkin myöhempien asioiden opiskelu osoittautua vaikeaksi - ellei jopa mahdottomaksi.

Opetuksen kannalta on tärkeää löytää sopivia keinoja ja materiaaleja, joiden avulla saadaan helpotettua opiskelijan matemaattisten asioiden hahmottamista sekä ymmärtämistä. Myös myönteinen suhtautuminen matematiikkaan sekä aiemmin opittujen taitojen jatkuva käyttäminen auttavat uusien taitojen kehittymistä. Pohjatietojen ja -taitojen hallinnan sekä matemaattisen hahmottamisen kannalta on keskeistä, että opiskelija ymmärtää, mistä asiat johtuvat sen sijaan, että ne opeteltaisiin pelkästään ulkoa. Ulkoa opeteltu asia voi helposti unohtua ja myöhemmin aiheuttaa ongelman jossakin muussa matematiikan osa-alueessa. Kun matemaattiset perusasiat ovat hyvin hallussa, ja laskemiseen on muodostunut rutiini, onnistuu aiemmin opittujen asioiden soveltaminen ammattiopinnoissa myös helpommin. Ammatillisten opintojen alussa on hyvä kartoittaa koulutukseen tulevien opiskelijoiden matematiikan perustaidot, jotta opiskelija saa riittävän tuen heti opintojen alkuvaiheessa. Oikein kohdennettu tuki tukee opiskelijan minäpystyvyyttä sekä opiskelumotivaatiota ja parantaa näin opintojen edistymistä.

Opintojen alussa tehtävällä matematiikan lähtötasokartoituksella saadaan tietoa opiskelijoiden matemaattisten taitojen tasosta. Lähtötasokartoitusten perusteella voidaan opiskelijalle tarjota kohdennettummin yksilöllistä tukea. On tärkeää, että opiskelijoille painotetaan, että kartoitus antaa ennen kaikkea

opiskelijalle itselleen tietoa siitä, mitä asioita hänen tulee kerrata/ opiskella, jotta hän voisi edetä opinnoissaan. OPVA-matematiikan opinnot on tarkoitettu opiskelijan matemaattisten taitojen vahvistamiseen OPVA-opettajan tuella. OPVA-opinnot eivät ole erityistä tukea, vaan kuuluvat yleiseen tukeen. Tämä tarkoittaa sitä, että näihin opintoihin tulevilla opiskelijoilla ei ole varsinaista oppimisvaikeutta. He tulevat OPVA-tukeen kertaamaan ja / tai oppimaan sellaisia matematiikan taitoja, jotka ovat jääneet koulussa oppimatta esimerkiksi siitä syystä, että koulua on käyty vain muutama vuosi.

Lähtötasokartoitusten tulokset toimivat pohjana sille, miten opintojen aikaista tuen tarjontaa on hyvä suunnitella. Kartoituksen tulosten perusteella on löydettävissä kolme opiskelijaryhmää. Osalla opiskelijoista on hyvät taidot ja he suoriutuvat opinnoista. Toisella ryhmällä (OPVA-matematiikan ryhmä) on jonkin verran puutteita taidossa mutta he selviytyvät opinnoista, kun saavat ohjausta ja tukea. Kolmannen ryhmän (jakautuvat sekä OPVA-matematiikan ryhmään ja/tai erityistä tukea tarvitseviin) muodostavat ne opiskelijat, joilla on selkeitä puutteita matematiikan perustaidossa. Juuri opintojen edistymisen kannalta, on tärkeää tunnistaa nämä opiskelijaryhmät ja aloittaa tukitoimet mahdollisimman varhaisessa vaiheessa.

Matematiikka on oppiaine, johon liittyy tunteita, jotka vaikuttavat matematiikan opiskeluun. Yleensä matematiikasta joko pidetään tai sitä inhotaan. Osalla opiskelijoista on huonoja kokemuksia matematiikan opiskelusta. Heillä on ahdistusta ja itseluottamuksen puutetta matematiikan osaamisen suhteen. Sellaisilla tehtävillä, jotka kohtaavat opiskelijan osaamisen tason, voidaan matematiikan opiskeluun kohdistuvaa ahdistusta vähentää. Kun opiskelijalle tulee osaamisen kokemus, hän saa varmuutta, ahdistus vähenee ja luottamus matematiikan osaamiseen kasvaa. Näin päästään eteenpäin matematiikan opiskelussa. Opiskelijat kohtaava ja kannustava opettaja luo hyvän ja turvallisen oppimisympäristön, jossa opiskelija uskaltaa tuoda oman osaamisensa esille.

Kielentäminen tarjoaa monipuolisen menetelmän matematiikan oppimisen lähtökohtana. Joutsenlahti [2] on jakanut kielentämisen neljään osa-alueeseen: kehollinen/taktiilinen, piirroset/kuvat, luonnollinen kieli (opiskelijan oma äidinkieli) ja matematiikan symbolinen kieli. Kolmen ensimmäisen osa-alueen merkitys on tärkeä, koska niiden avulla opiskelija pyrkii jäsentämään ajatteluaan ja rakentamaan ymmärrystään matemaattisista käsitteistä ja tehtävistä. Kielentäminen toimii opiskelijan ja opettajan ajattelun tulkkina. Kun suomen kielen taito on heikko ja/tai matematiikan osaamisessa on puutteita, antavat kielentämiseen liittyvät multimodaaliset ilmaisutavat mahdollisuuden tuoda omaa ymmärrystä esille monipuolisesti joskus jopa ilman sanoja toimintamateriaalin ja kehollisten ilmausten avulla.

Yleisesti kielentämisen osa-alueiden kautta luotu ymmärrys antaa työkaluja asioiden ilmaistamiseen matematiikan kielellä. Toisaalta taas matematiikan symbolikielen tulkitseminen kolmella ensin mainitulla kielellä syventää ymmärrystä ja matemaattista ajattelua. Matematiikan kielentäminen antaa eväitä kielitietoiseen opetukseen. Kielitietoisessa lähestymistavassa painottuvat sekä luonnollisen kielen (opiskelijan oman äidinkielen) että opetuskielen roolit (tässä tarkoitetaan selitysten ja esimerkkien antamista matemaattisista käsitteistä /termeistä suomen kielellä, ja opiskelijoiden sekä opettajan että opiskelijoiden välisiä keskusteluja) opetuksessa. Kielentämisen avulla voidaan tukea kielitietoista opetusta vahvistamalla matematiikan sanastoa, käsitteiden syvällistä ymmärtämistä, ongelmanratkaisutaitoja sekä keskustelua ja yhteistyötä. Kielentäminen auttaa ymmärtämään opiskelijoiden kielellisiä ja kulttuurisia taustoja. Parhaimmillaan kielentäminen voi auttaa opiskelijoita yhdistämään käsitteitä omiin kokemuksiinsa. Omien kokemusten yhdistäminen matematiikan oppimiseen antaa ymmärrystä siitä, miten matematiikkaa voidaan soveltaa esimerkiksi omiin kulttuurisiin lähtökohtiin tai eri ammattialoilla. Näitä asioita olemme pyrkineet avaamaan OPVA-matematiikan taitojen teema-alueessa. Yhteenvetona voisi todeta, että kielentäminen oppimisen lähestymistapana voi tehdä matematiikasta saavutettavampaa ja merkityksellisempää opiskelijoille. Parhaimmillaan kielentäminen tarjoaa onnistumisen elämyksiä niin opettajalle kuin opiskelijalle.

Tarkasteltaessa OPVA-matematiikkaa on hyvä tiedostaa, että ei ole kyse YTO-matematiikasta. Mitä OPVA-matematiikka sitten on? OPVA-matematiikassa pyritään vahvistamaan opiskelijan matematiikan perustaitoja siten, että hän

1. saa paremmat valmiudet suoriutua YTO-matematiikasta, tai
2. selviytyy ammattinsa edellyttämistä käytännön matematiikan haasteista silloin, kun opiskelija suorittaa vain tutkinnon osan.
3. saa keinoja oman taloutensa hoitamiseen elämänhallinnan taitojen näkökulmasta.

OPVA-matematiikan avulla pyritään tarjoamaan opiskelijoille mahdollisuus kehittää matematiikan taitoja rauhassa, omien vahvuuksien ja oman ammatti-identiteetin tarpeiden mukaisesti. OPVA-opinnoissa on hyvä mahdollisuus havaita mahdollisia matematiikan pulmia tai oppimisvaikeuksia. Erityisen tuen tarve on voinut tulla esille jo ennen OPVA-opintoja. Suomen kielen heikko taito (tai kehittyvä kielitaito) tai harjaantumattomuus opiskelutaidoissa tuo oman haasteensa erityisen tuen tarpeen havaitsemiseen. Suosittelemme, että oppilaitoksissa olisi OPVA-tiimi suunnittelemassa ja toteuttamassa OPVA-tukea, jota ei pidä ymmärtää erityisopetuksen piiriin kuuluvaksi. OPVA-tiimiin olisi hyvä kuulua matematiikan opettaja, erityisopettaja, koulutussuunnittelija sekä OPVA-opettaja. Tiimin tehtävänä olisi suunnitella lähtötasokartoitusten perusteella OPVA-opintoja sekä sitä, että tarvitseeko osa opiskelijoista vielä lisätuesta matematiikan oppimisvaikeuden varmentamiseksi. Sellaiset opiskelijat, joilla havaitaan matematiikan oppimisvaikeutta, kuuluvat erityisen tuen piiriin, jossa heille suunnitellaan oma etenemispolku. OPVA-tiimi suunnittelee yhdessä opiskelijan kanssa yksilöllisiä oppimispolkuja ja ohjaa kertaamista sekä matematiikan sisältöjen täydentämistä tarvitsevan opiskelijan OPVA-opintoihin. Tämä materiaali on tarkoitettu pohjamateriaaliksi OPVA-matematiikan taitojen perehdytykseen OPVA-opettajalle ja OPVA-opintojen suunnittelun pohjaksi sekä koulutusmateriaaliksi.

2 OPVA-matematiikan lähtökohtia

Luvun 2 otsikkoon linkitettyssä diasarjassa on avattu ammatillisen koulutuksen matematiikan osaamistavoitteita, ammatilliseen koulutuksen tulevien opiskelijoiden matematiikan taitojen eroja sekä opetukseen liittyviä haasteita. OPVA-opinnot on tarkoitettu opiskelijan perustietojen ja -taitojen kertaamiseen ja varmentamiseen. Luvussa 4 avataan tarkemmin opiskelijoiden taitojen kartoittamiseen liittyviä asioita.

Ammatilliseen koulutukseen tullaan hyvin erilaisista lähtökohdista. OPVA-opintoihin tuleva opiskelija voi olla nuori tai aikuinen, maahanmuuttajataustainen tai kantaväestöä, opintojen keskeytykseltä palaava opiskelija tai opintojaan aloittava. Näistä kaikista ryhmistä tulevilla opiskelijoilla osalla voi olla tarvetta kerrata matematiikan perustaitoja tai heillä on haasteita matematiikan oppimisessa. Opiskelijalla voi olla myös haasteita ymmärtää suomen kieltä, jolloin hän tulee OPVA-opintoihin opiskelemaan matematiikan akateemista sanastoa. Suomalaisen peruskoulun käyneen opiskelijan oletetaan omaavan oletusarvoisesti jo tarvittavat taidot YTO-matematiikan opiskeluun. Tärkeä huomio on se, että peruskoulun käyneillä on yhteinen kulttuurillinen lähtökohta opetettavan sisällön kanssa, toisin sanoen matemaattiset ilmaisut ja kirjoitusmerkit ovat tuttuja, vaikka haasteita olisi matemaattisen osaamisen saralla. Monelle maahanmuuttajataustaiselle opiskelijalle matemaattinen ilmaisu ja merkinnät suomen kielellä tuottavat haasteita, vaikka matemaattista osaamista laskutehtävissä olisikin.

2.1 Perusteita OPVA-matematiikan sisältöihin

Keskusteluissa ammatillisten oppilaitosten matemaattisten aineiden opettajien kanssa, on noussut esille OPVA-matematiikan sisältöinä, sekä tuen tarpeen että osaamisen haasteiden näkökulmista, muun muassa seuraavia sisältöjä ja käsitteitä:

Käsitteisiin numero ja luku sekä lukualuleisiin liittyviä haasteita

- Käsitteiden *numero ja luku merkityseroja ei ymmärretä* (numero = numeromerkki, luku = määrä tai järjestystä ilmaiseva käsite)
- *Järjestysluvut ja niiden hahmottaminen* mm. tehtävänannossa (usein järjestysluvut lisätään laskutoimitukseen)
- *Käsitteet kaksinkertainen, kolminkertainen haastavat...*, myös joka toinen, joka kolmas ovat vaikeita.
- *Tuhaterotin* - neli- ja useampinumeroisten lukujen merkinnöissä aiheuttaa sekaannusta
 - *Luvut ja numerot*: Kielitoimiston lukujen ja numeroiden ryhmittelyn [3] ohjeen mukaan neli- ja useampinumeroiset luvut jaetaan hahmottamisen helpottamiseksi kolmen numeron ryhmiin ykkösistä alkaen välilyönnillä esimerkiksi seuraavalla tavalla:
3652500 asukasta kirjoitetaan 3 652 500 asukasta. Joissakin maissa käytetään tuhaterotinena pistettä välilyönnin tilalla ja tämä aiheuttaa sekaannusta desimaalipilkun kanssa.
- *Desimaalipilkku ja kertomerkit menevät sekaisin* (monissa maissa merkitään kertomerkkiä rastilla, x)
- *Negatiiviset luvut lukusuoralla haastavat* (tässä voi olla jo perustavanlaatuisia haasteita luonnollisten lukujen ymmärtämisessä)

- *Murtoluvut haastavat*
 - murtolukujen merkintä on haasteellinen: murtoluvun merkintä saatetaan tulkita vähennyslaskuksi (lukusuunta ylhäältä alas)
- *Lukualueiden ymmärtäminen on vaikeaa*: Esimerkiksi luonnolliset luvut vs. reaalityluvut (Lukualueelta toiselle siirtymiset haastavat – lukualueen laajeneminen on yksi oppimisen haaste.)

Laskutoimituksiin ja proseduureihin liittyviä haasteita

- *Vastausten oikeellisuuden arviointitaito* on heikkoa, voiko $5 \cdot 10$ olla 5 515?
- *Murtolukujen laskutoimitukset* ovat vaikeita
 - murtoluvun muuntaminen jakolaskuksi on vaikeaa (usein osoittaja merkitään jakajaksi, syynä lienee *miniteoria*: suurempi luku jaetaan aina pienemmällä luvulla (vrt. jakolasku luonnollisten lukujen alueella)
- *Yhtälönratkaisu*
 - Yhtälönratkaisu, sieventäminen (Vieraan kielen osaamisen ongelma vai käsitteiden puuttumisen haaste?)
- *Verrannollisuus*
 - Arkielämässä verrantojen käyttäminen sujuu päättelyn avulla, mutta verrantojen laskeminen matematiikan kielellä on vaikeaa (moni opiskelija käyttää verrantoja arkielämän tilanteissa, mutta matemaattisena operaationa se on heille vieras)
- *Prosenttilaskut*
 - Lisäys- ja vähennysprosentit / kuinka monta prosenttia hinta laskee (alennus) – television hinta nousee 2 %
 - Ymmärtämistä voi edellä mainittujen prosenttilaskujen kohdalla helpottaa seuraavat nuolimerkinnot prosenttilaskun yhteydessä: nuoli ylös (kuvaava kasvua); hinnan lasku /alennus (nuoli alas)
- *Sanalliset tehtävät*:
 - Sanallisten tehtävien ymmärtäminen; vs. kulttuurinen ymmärrys (esim. veroprosentin ymmärrys, vaikka osaisi laskea prosentteja, niin suomalainen progressiivinen verotuskäytäntö on vieras)
- *Ongelmanratkaisutaidot* (näkyvät soveltavissa tehtävissä)
 - Matematiikka vs. arjen ongelmien ratkaisu (opiskelijalla on käytännön arjen matemaattisia ongelmanratkaisutaitoja, mutta matemaattisten tehtävien tekeminen on vaikeaa)
 - Matemaattisten ongelmien ratkaisustrategiat
- *Kännykkään tai tietokoneeseen / laskimeen turvautuminen, kun laskutaito on heikko*
 - Silloin kun matematiikka tuntuu haastavalta (esim. laskutaito on heikko), opiskelijat saattavat turvautua puhelimeen /tietokoneeseen vs. laskimeen kynällä ja paperilla laskemisen sijaan (kun osaaminen on heikkoa, turvaudutaan apuvälineisiin "jotka ajattelevat opiskelijan puolesta" koskee kaikkia opiskelijoita, ei vain S2-opiskelijoita)

Edellä luetellut käytännön kautta esiin tulleet aihealueet ovat sellaisia, jotka voivat toimia lähtötasokartoitusten aihealueina sekä myös matematiikan OPVA-opintojen yksilöllisten polkujen suunnittelun tukena.

2.2 Lukukäsitteen ja matematiikan merkintöjen haasteita

Lukukäsitteestä

Luvussa 2.1 mainitut opettajien esittämät haasteet näyttävät liittyvän keskeisesti lukukäsitteeseen ja sen laajenemiseen liittyviin taitoihin (vrt. Solmukohdat luku 3), sillä yllä olevista asioista tähän kuuluvat

- Käsitteet: numero ja luku
- Järjestysluvut ja niiden hahmottaminen mm. tehtävänannossa (lisätään laskutoimitukseen)
- Tuhaterotin,
- Desimaalipilkku ja kertomerkit menevät sekaisin
- Negatiiviset luvut lukusuoralla
- Murtoluvun merkintä: Murtoluvun merkintä saatetaan tulkita vähennyslaskuksi (lukusuunta ylhäältä alas)
- Murtolukujen laskutoimitukset: Esimerkiksi murtoluvun muuntaminen jakolaskuksi on vaikeaa (usein osoittaja merkitään jakajaksi, syynä lienee *miniteoria*: suurempi luku jaetaan aina pienemmällä luvulla (vrt. jakolaskuun luonnollisten lukujen alueella))
- Luonnolliset luvut vs. Reaaliluvut (lukualueiden laajeneminen)

Peruskäsitteet numero ja luku liittyvät koulumatematiikan näkökulmasta alkuopetukseen sekä esiopetukseen. Näiden käsitteiden ymmärtämiseen liittyy niin matemaattisen ajattelun kehittymiseen (pohjaa rakennetaan jo varhaiskasvatuksessa) liittyviä asioita kuin myös kielellisiä haasteita. Käytössä olevassa lukujärjestelmässä, kymmenjärjestelmässä, meillä on 10 kappaletta numeromerkkejä 0,1, 2, ...,9. Näiden merkkien avulla muodostetaan lukuja. Luvuilla on sekä järjestykseen (ordinaalimerkitys, joka vastaa kysymykseen: *”Kuinka mones?”*) että suuruuteen / määrään liittyvä merkitys (kardinaalimerkitys, joka vastaa kysymykseen: *”Kuinka monta?”*). Yksittäisillä numeromerkeillä 0,1, 2, ...,9 voidaan ilmaista mittaa /suuruutta tai lukumäärää. Luvulla on aina joko määrään tai mittaan liittyvä merkitys. Lukuihin liittyvät ordinaali- ja kardinaaliluvun merkitysten ero olisi tärkeää oivaltaa, sillä ne ovat lukukäsitteen pohjaitaitoja. Luvun ordinaalimerkitys saadaan selville vastaamalla kysymykseen *”Kuinka mones?”* Esimerkiksi näin: *”Maija tuli sadan metrin juoksukilpailussa kolmanneksi (3.)”* On hyvä huomata, että *”kolmanneksi”* tarkoittaa vain yhtä sijalukua ja että ordinaaliluvun loppuun tulee piste (3.), joka kuvaa järjestystä. Kardinaaliluku (perusluku) tarkoittaa lukumäärää /suuruutta ja vastaa kysymykseen *”Kuinka monta?”*. Kardinaalilukuihin liittyy määrällinen merkitys. Lukujen ymmärtämiseen liittyy varhaiseen matemaattiseen kehitykseen liittyviä asioita, sillä varhaisina vuosina (ennen kouluikää) kehittyvät lukukäsitteen pohjatiedot ja -taidot. Kouluuntulovaiheessa lapsen tulisi ymmärtää luvun ja määrän välinen vastaavuus.

Lukujen ymmärtämiseen liittyy kehityksellisen perustan lisäksi myös eri kieliin liittyviä näkökulmia. Englannin kielessä on käytössä sanat *”digit”* ja *”number”*, jotka haastavat. *”Digit”* merkitsee numeromerkkiä (merkit 0, 1, ...,9) ja *”number”* taas liittyy suuruuteen / määrään.

On huomattava, että numero liittyy merkkien 0, 1, ..., 9 lisäksi erilaisiin pidempiin peräkkäin lueteltuihin numeromerkkeihin, joihin ei sisälly luvun ja määrän / suuruuden vaatimaa vastaavuutta. Näissä merkinnöissä on numeroita lueteltu peräkkäin, eikä niillä ole määrällistä tai suuruuteen liittyvää merkitystä. Tällaisia merkintöjä ovat esimerkiksi puhelinnumerot, sotu –tunnus tai jokin tunnusluku.

Kun tarkastelemme koulumatematiikan alkua, niin siellä opitaan rakentamaan kymmenjärjestelmän perusmerkkien (0, ...,9) avulla lukuja sekä opitaan ymmärtämään lukujen rakentuminen kymmenjärjestelmässä. Tämä tarkoittaa sitä, että vähitellen kehittyy ymmärrys lukupaikkojen (ykköset, kymmenet, sadat jne.) välisistä suhteista. Lukujen sujuva käsittelytaito (rakentuu esi- ja alkuopetuk-

nessa varhaisten matemaattisten taitojen pohjalta) tukee kymmenjärjestelmän ymmärtämistä. Kymmenjärjestelmän ymmärtäminen aiheuttaa monille haasteita. Kun siirrytään luonnollisista luvuista ensin rationaalilukualueella ja sitten myöhemmin reaalitylukualueelle, yhtä kokonaista pienemmät ilmaisut haastavat. Lukualueelta toiselle siirtyminen on haastavaa, koska esimerkiksi luonnollisten lukujen alueella opitut laskumenetelmät eivät enää päde samalla tavalla muilla lukualueilla. Tämä hämmentää. Edellä mainitut asiat liittyvät matematiikan solmukohtiin, erityisesti lukukäsitteen ymmärtämiseen. Erityisesti lukualueen laajenemiseen sekä lukujärjestelmän ymmärtämiseen (meillä kymmenjärjestelmä) liittyvät asiat ovat haastavia. Kouluuntulovaiheessa lukujonotaitojen sujuvat hallinta ennustaa myöhempiä suotuista matematiikan taitojen kehitystä. Näiden taitojen korjaaminen esimerkiksi toisen asteen opintojen alussa saattaa olla haastavaa.

Matemaattisista merkinnöistä

Lukukäsitteen ohella myös matemaattiset merkinnät haastavat ja hämmentävät. Matemaattiset merkinnät poikkeavat jonkin verran toisistaan eri puolilla maailmaa. Esimerkiksi laskutoimitusten merkinnät voivat vaihdella jonkin verran eri maissa: esimerkiksi jakolaskussa käytetään merkintöjä $/$, \div , tai kertolaskua merkintään symboleilla (piste) \cdot , (rasti) \times jne.. On huomattava, että opetamme niin kuin meillä Suomessa merkitään laskutoimituksia eli kertolaskussa ei käytetä \times -merkintää kertaa -ilmaisun mallintamiseen matematiikan kielellä. Opetuksessa kannattaa myös huomioida, että mm. meillä käytetty kertomerkki \cdot on arabiassa nolla, mikä voi aiheuttaa haastetta ymmärtää kansallisia matematiikan merkintöjä. Seuraavaan otsikkoon linkitettyssä tiedostossa on matemaattisia merkintöjä ja niiden välisiä eroja latinalaisen Amerikan ja USA:n välillä. Näitä merkintöjä on laajemminkin käytössä muuallakin maailmassa kuin vain Amerikan mantereella.

Lopez, N. R. Todos: [Mathematics for all. Mathematical notation comparison between U. S. and Latin American Countries](#). Harris County Department of Education, Houston.

Näitä merkintöjä on laajemminkin käytössä muuallakin maailmassa kuin vain Amerikan mantereella.

2.3 Suhde-käsitteen, verrannollisuuden sekä ongelmanratkaisun haasteita

Suhdekäsitteen haasteita

Suhdekäsitettä sivutaan jonkin verran alaluokkien loppuvaiheessa. Varsinaisesti suhdekäsite tulee yläluokilla ja tämän myötä tulee myös verrannollisuuden käsite. Suhdekäsite liittyy olennaisesti murtolukuun, sillä murtoluvun merkintä voidaan ymmärtää myös kahden luvun välisenä suhteena. Näin suhdekäsitettä olisi hyvä käsitellä myös murtolukujen yhteydessä. Esimerkiksi merkintä $\frac{2}{3}$ voidaan ymmärtää lukujen kaksi ja kolme suhteena eli $2 : 3$: *Kuinka monta punaista ja vihreää helmeä otat, kun punaisten ja vihreiden helmien lukumäärien suhde on $2 : 3$* (ks. kuva 1)? Suhdekäsitteen tarkastelussa mehutiivisteeseen ja veden sekoitussuhteet ovat hyviä ja konkreettisia esimerkkejä.

Suhdekäsité on opiskelijoille haastava ja sitä on hyvä harjoitella ihan konkreettisilla välineillä kuten kuvassa yksi esitetyillä laskukiekoilla. Suhdekäsitettä sivutaan alaluokilla mittakaavan sekä suuren-
noston ja pienennösten yhteydessä.

Kuva 1

Punaisten ja vihreiden helmien suhde, 2 : 3 eli helmien kokonaismäärästä on $\frac{2}{5}$ punaisia ja $\frac{3}{5}$ on vihreitä



Peruskoulun opetussuunnitelmassa ei ole erikseen nostettu esille suhdekäsitteen opettamista. Tämä tarkoittaa sitä, että opettajan tulee erikseen muistaa ottaa suhdekäsité opetuksessa esille. Suhdekäsitteen heikko ymmärtäminen aiheuttaa oppilaille haastetta esimerkiksi verrannollisuuden yhteydessä yläluokilla ja myöhemmin ammatillisissa opinnoissa.

Suoraan ja kääntäen verrannollisuus

Verrannollisuus rakentuu suhdekäsitteen päälle. Verrantoa voidaan soveltaa useiden eri ongelmien ratkaisemisessa. Suoraan verrannollisuus on usein helpompi ymmärtää, koska se kuvaa suoraan suhteellista muutosta. Jos toinen suure kasvaa, niin toinenkin kasvaa samassa suhteessa. Suoraan verrannollisuutta voidaan avata esimerkiksi seuraavalla arkeen liittyvällä esimerkillä omenoiden ostamisesta. Jos omenoiden kilohinta on 2 euroa, ja ostat omenoita 3 kilogrammaa, niin maksat ostamistasi omenoista 6 euroa. Toisin sanoen suoraan verrannollisuus kuvaa samassa suhteessa kasvua eli edellisen esimerkin mukaisesti, mitä enemmän ostat, sitä enemmän maksat.

Kääntäen verrannollisuus voi olla hankalampi hahmottaa, koska se kuvaa suureiden välistä käänteistä suhdetta. Jos toinen suure kasvaa, niin toinen pienenee. Tätä voisi konkretisoida nopeuden ja ajan välisellä yhteydellä kuten esimerkiksi auton keskinopeudella ja matkaan kuluvalle ajalla: Jos matkustat Turusta Helsinkiin keskinopeudella 60 km/h sinulla kuluu siihen tietty aika, mutta jos keskinopeus onkin 80 km/h, niin aikaa kuluu samaan matkaan vähemmän. Suoraan ja kääntäen verrannollisuuden ymmärtäminen vaatii omakohtaisia kokemuksia ja siksi on tärkeää, että näihin käsitteisiin liittyvät esimerkit ovat yhteydessä opiskelija kokemuksiin. Opiskelijalla voi hyvinkin olla ymmärrystä suoraan ja kääntäen verrannollisuudesta arjessa mutta hän ei osaa ilmaista näitä matematiikan kielellä. Tästä on hyvä esimerkki maahanmuuttajataustaisen naisen suoraan verrannollisuuden ymmärtämisestä käytännön kokemuksen kautta. Tämä opiskelija käytti suoraan verrannollisuutta muuntamalla ruokareseptejä kymmenhenkiselle perheelle sopiviksi. Nyt vain käytännön osaaminen piti tehdä hänelle näkyväksi matematiikan kautta. Opiskelijan oman ymmärryksen näkökulmasta on todella arvokasta, että hän osaa käytännön kautta päätellä asian ja kertoa päättelyprosessin vaiheet toisille. Vaikka osaisi kuinka hyvin verrantoyhtälön pyörittämisen, niin sillä ei tee mitään, jos omakohtainen ymmärrys puuttuu. Tästä syystä on hyvä painottaa sitä, että opiskelija osaa / oppii perustelemaan ratkaisunsa ja osaa kertoa, miten hän soveltaa asian käytäntöön.

Ongelmanratkaisu /arjen ongelmat

Ongelmanratkaisun kannalta on tärkeää, että opiskelijalla on ymmärrystä ongelmanratkaisutehtävään liittyvistä käsitteistä ja proseduureista. Kun pohjakäsitteet ja proseduurit ovat hallinnassa, opiskelijat pystyvät soveltamaan oppimaansa. OPVA-matematiikan kannalta on olennaista, että opiskelija osaa

soveltaa oppimaansa käytännön ongelmiin ja sitten opintojen edetessä oman ammattialan ongelmatehtäviin.

Ongelman määrittely on haasteellista, mutta yleisesti ongelmatehtävä voidaan ymmärtää sel-laiseksi tehtäväksi, johon opiskelijalla ei ole heti ratkaisua, mutta hänellä on kuitenkin valmiudet tehtävän ratkaisuun ajattelun ja opiskelun avulla [4]. Tämä tarkoittaa sitä, että ongelmanratkaisussa tarvitaan sinnikkyyttä ja hyvää minäpystyvyyden tunnetta. Ammatillisiin opintoihin hakeutuvien opiskelijoiden matematiikan osaamisessa on suuria eroja. Usein OPVA-opinnoissa matematiikan taitoja kertaa-villa saattaa olla haasteita minäpystyvyydessä, jolloin he eivät luota siihen, että osaavat ratkaista ma-tematiikan ongelmatehtäviä. Myös luetun ymmärtämiseen liittyvät ongelmat haastavat ongelmatehtä-vien ymmärtämistä. Lisäksi heikko sanavarasto haastaa ja kapeuttaa ongelmanratkaisua. Kajamiehen, Vauraksen, Kinnusen ja liskalan [4] mukaan erityisesti sanallisten ongelmatehtävien kohdalla taustalla on riittämätön ongelmaa koskevan tilannemallin rakentaminen ja tätä mallia vastaavan ratkaisun löy-täminen (mm. Verschaffel, Greer & De Corte, 2000). Tilannemallien rakentaminen (esimerkiksi kerää-mällä tehtävästä ne asiat, jotka tiedetään ja ne asiat, joita ei tiedetä ja kuvan piirtäminen tehtävän rakenteesta) saattaa olla opiskelijalle vierasta. Toisaalta myös luetun ymmärtämisen taidot vaikuttavat sanallisten tehtävien ymmärtämiseen ja ratkaisuun peruskoulun käyneilläkin opiskelijoilla. Edellisten lisäksi maahanmuuttajataustaisten opiskelijoiden suomen kielen ymmärtämisen taidot voivat olla hei-kot ja siksi etenkin sanallisista tehtävistä on vaikea saada ymmärrystä ilman käännskoneiden apua. Myös tehtävien konteksti voi olla maahanmuuttajataustaiselle opiskelijalle hyvin vieras. Tehtävien si-sällöissä näkyvät kulttuuriset erot ja suomalaiseen yhteiskuntaan sijoittuva tehtävä ei avaudu opiskeli-jalle. Opettajan olisi hyvä käyttää johdonmukaisesti selkokieltä sanallisten tehtävien yhteydessä. Huo-miota tulee kiinnittää etenkin siihen, että samankaltaisissa tilanteissa käytetään johdonmukaisesti sa-manlaisia kielellisiä ilmauksia.

Leppäaho [5] on tuonut esille LeBlancin (1977) ongelmanratkaisustrategioita, jotka on tarkaste-lussa jaettu (ks. taulukko 1) yleisiin ja auttaviin strategioihin. Taulukko 1 tarjoaa hyviä keinoja niin ma-temaattisten kuin arjen ongelmien ratkaisuun.

Taulukko 1

LeBlancin (1977) ongelmanratkaisustrategioiden jaottelu Leppäahon [5] mukaan

Yleiset strategiat	Auttavat strategiat
1. Yritys ja erehdys	Diagrammit
2. Järjestelmällinen lista eri mahdollisuuksista	Taulukot
3. Ongelman yksinkertaistaminen	Piirroket
4. Kaavan etsiminen ongelmasta	Luettelot
5. Kokeilu	Yhtälöt
6. Päätely	– Ovat välivaiheita yleisten strategioiden toteuttamisessa.
7. Yleistys	– Soveltuvat kaikkiin yleisiin ongelmanratkaisustrategioihin.
8. Takaperin työskentely	

Edellä oleva taulukko antaa hyviä viitteitä ongelmanratkaisutehtävien rakenteeseen ja siihen, millaisia ratkaisumalleja olisi hyvä opetella.

2.4 Käytännön keinoja OPVA-matematiikan opetukseen

Ammatillisten oppilaitosten matemaattisten aineiden opettajat ovat nostaneet keskusteluissa esille seuraavia matematiikan ymmärtämistä tukevia asioita OPVA-matematiikan opetuksessa erityisesti maahanmuuttajaopiskelijoiden näkökulmasta:

Hidas puhe ja selkokieliyys opetuksessa (ks. luku 6.3)

- *kulttuurisensitiivisyys* tulee muistaa (ei mielellään käytetä ilmaisuja possun liha, alkoholi jne.)
- *Tehtävien pilkkominen maahanmuuttajille pienemmiksi tehtäviksi (tästä hyötyvät kaikki opiskelijat)* (selkokieli; ks. luku 6.3)
- *Sanalistat helpottavat kielen ymmärtämistä* (vinkki: sanalistoja voi tehdä myös opiskelijoiden kanssa haastaville matematiikan alueelle).
- Opetushallitus on tuottanut sanastoja eri kieliin. Seuraavista linkeistä pääset tutkimaan sanastoja:

<https://sanapaja.edu.fi/words/search>

<https://jkorpela.fi/kielenopas/4.11.html>

<http://www.lukimat.fi/matematiikka/monimat/matematiikan-sanasto/matematiikan-sanasto>

S2-opiskelijoiden opetus haastaa opettajaa monin tavoin. Haasteet voivat liittyä suomen kielen heikkoon osaamiseen sekä matematiikan akateemisen sanaston ymmärtämisen haasteisiin että matematiikan taitoihin liittyviin ongelmiin. Heikko suomen kielen taito saattaa joissakin tilanteissa kätkeä alleen matematiikan oppimisvaikeuksiin liittyviä haasteita. Millaisiin asioihin opettajan olisi hyvä kiinnittää huomiota S2-opiskelijoiden matematiikan OPVA-opetuksen suunnittelussa? Kokenut S2-opiskelijaryhmien opettaja avasi ajatuksiaan ja suunnittelua S2 OPVA-matematiikan kurssin alkaessa tiivistämällä kokonaisuuden neljään ydinkysymykseen:

1. Minkälainen ryhmä minulla on ja kuinka paljon opetusta heillä on kurssin aikana?

- Opiskelijat ovat eri maista ja suurin osa nuoria aikuisia, mukana muutama vähän vanhempi.
- Opiskelijoiden tavoitteena on valmistua lähihoitajiksi.
- OPVA-matematiikan kurssin tarkoitus on varmistaa, että opiskelijat pystyvät suoriutumaan YTO matematiikasta ja lääkelaskuista. OPVA matemaattiset valmiudet kurssi kestää 30 tuntia eli 15 tapaamista (1 h 45 min) ryhmän kanssa ja tämä kaikki neljän viikon aikana.

2. Miten aloitan kurssin?

- Kurssin aluksi selvitän opiskelijoiden lähtötaidot (matematiikan taidot ja matematiikkakuvaan liittyviä asioita) keskustelemalla ja tehtävien avulla. Kokemuksesta tiedän, että ryhmässä opiskelijoiden taidot voivat vaihdella lähes olemattomista jo varsin monipuolisiin taitoihin.
- Ensimmäisellä tapaamisella harjoitellaan lukujen lausumista suomen kielellä sekä myös ääneen lausutun luvun kirjoittamista numeroina osaamisen mukaan. Ensimmäisellä kerralla aloitetaan myös peruslaskutoimitusten harjoittelua ja kertausta opiskelijoiden taitotaso huomioiden.
- Koska ryhmässä on vain S2-opiskelijoita, niin todennäköisesti kaikki hyötyvät matematiikan sanaston opiskelusta ja Suomessa käytettävien matemaattisten merkintöjen harjoittelusta.
- Kaikki hyötyvät myös sanallisten tehtävien tekemisestä, sillä tehtävät auttavat opiskelijaa jäsentämään matematiikka suomen kielellä.
- Kurssin edetessä pidemmälle on hyvä eriyttää ryhmä matematiikan taitojen mukaan, jotta kaikilla olisi mielekästä tekemistä.

3. Miten toimin tunnin aikana?

- Tunnin alussa sovitaan yhteiset tavoitteet.

- Puhun rauhallisesti yksi asia kerrallaan ja kiinnitän huomiota selkokielisyyteen.
- Annan opiskelijoille aikaa vastata ja tehdä tehtäviä.
- Sanallisten tehtävien laadinnassa otan huomioon kulttuuriset näkökulmat. Sanallisten tehtävien on hyvä liittyä hoitotyöhön /ammattialaan, sillä se on neutraali aihe.
- Annan opiskelijoille positiivista palautetta aina, kun siihen on aihetta.
- Rohkaisen opiskelijoita yrittämään ja asettamaan itselleen oppimisen tavoitteita.

4. Mitä haasteita tämän ryhmän suhteen voi tulla?

- Opiskelijat ovat melko nuoria ja useat 19–20-vuotiaita. Onko heillä riittävästi motivaatiota?
- Ryhmässä on 18 opiskelijaa. Pystynkö antamaan kaikille opiskelijoille riittävästi huomioita ja näkemään kenellä on enemmän hankaluuksia ja suurempi tuen tarve kuin muilla?
- Onko joukossa opiskelijoita, joilla on jonkin erityyinen oppimisen tai elämänhallinnan ongelma?

Edellä kuvattu suunnittelun rakenne on sovellettavissa eri ammattialojen OPVA-matematiikan ryhmille. Ajatukset OPVA-matematiikan kurssin suunnittelusta yhdistyvät seuraavan luvun OPVA-matematiikan tunnin sisältöön. OPVA-matematiikan tunnin kuvaus on linkitetty luvun 2.5 otsikkoon. Kielitietoista opetusta, joka sopii niin maahanmuuttajataustaisille opiskelijoille kuin suomenkielisille opiskelijoille, tarkastellaan vielä luvussa 6.3 ”Kieli matematiikan oppimisessa”.

2.5 Millainen on matematiikan taitojen OPVA-tunti? - esimerkki

Otsikkoon linkitettyssä OPVA-matematiikan tunnin kuvauksessa on hyvä kiinnittää huomiota siihen, että diasarjassa kuvattu tunti kohdentuu ihan perustaitojen harjoittamiseen ja lähinnä alaluokkien matematiikkaan kuuluviin perustaitoihin. Oppitunnista nousee hyvin esille se, että opettaja innosti oppilaat mukaan riittävän helpoilla tehtävillä, joiden avulla samalla arvioi oppilaiden osaamista. Samalla opettaja innosti opiskelijat mukaan matemaattiseen keskusteluun. Opiskelijat antoivat myönteistä palautetta juuri riittävän helpoilla tehtävillä aloittamisesta. On tärkeää, että opiskelijoita osallistetaan mukaan yhteisiin keskusteluihin matematiikan tunnilla. Oman ajattelun jakaminen toisille tukee omaa ja muiden osallistujien oppimista. Myös opettaja hyötyy tästä, koska hän kuulee, miten opiskelijat ajattelevat ja voi käyttää kuulemaansa opetuksen suunnittelun välineenä.

Tiivistelmä luku 2

OPVA-matematiikan suunnittelusta, toteutuksesta ja sisällöistä

- OPVA –matematiikan toteuttaminen perustuu huolelliselle suunnittelulle yhdessä moniammatillisen asiantuntijatiimin jäsenten kanssa (tiimin jäsenenä: OPVA-opettaja, matematiikan opettaja, erityisopettaja ja hallinnon edustaja (esim. koulutussuunnittelija))
- OPVA-matematiikka tulee nähdä oppilaitosten vahvuustekijänä ja sitä tulee tarjota opiskelijoille
- OPVA-matematiikka ei ole YTO-matematiikkaa, vaan sen tehtävänä on kerrata ja varmentaa peruskoulumatematiikan keskeisiä käsitteitä ja laskutoimituksia
 - OPVA-matematiikan tavoitteena on varmentaa opiskelijan osaaminen sellaiselle tasolle, että hän selviytyy ammattikoulun matematiikan opinnoista
- OPVA-matematiikan sisällöt painottuvat peruskoulun alaluokkien matematiikan sisältöihin (mm. lukukäsitteen pohjaitoihin, kymmenjärjestelmään ja mittayksikköihin, peruslaskutoimituksiin (erityisesti jakolaskun käsite haastaa))
- Opettajien esille nostamat haasteet matematiikan taidoissa ammatillisissa opinnoissa antavat hyvän lähtötasokartoituksen sisältöjen sekä yksilöllisten oppimiskojien suunnittelulle
 - OPVA-matematiikan opetuksen tulee painottaa hidasta puhetta ja selkokieli-syyttä

Pohdittavaksi

- Ketkä / kuka suunnittelee oppilaitoksessanne OPVA-opintoja?
- Onko oppilaitoksessanne moniammatillinen tiimi suunnittelemassa OPVA-opintoja ja matematiikan opintoja?
- Tarjotaanko OPVA-matematiikan opintoja opiskelijoille mahdollisuutena päästä opinnoissa eteenpäin? Miten olette tukeneet opiskelijoita näissä haasteissa?
- Onko oppilaitoksessanne käytössä jokin tietty lähtötasokartoitus vai onko kartoitus suunnitteilla?
- Millaisiin matematiikan sisältöihin OPVA-opetus oppilaitoksessanne keskittyy?

3 Koulumatematiikan solmukohdat

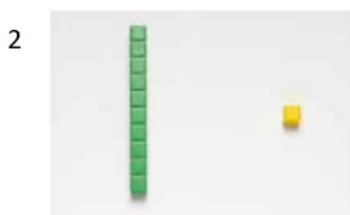
Luvussa 2 tarkasteltiin opettajien kokemuksen kautta esiin tulleita opiskelijoiden matematiikan taitojen haasteita. Koulumatematiikan solmukohdat sisältävät matematiikan opettajien esille nostamia haasteita ja näiden haasteiden taustakäsitteitä. Tämän luvun 3 otsikkoon linkitetyn diasarjan sisältönä olevista solmukohdista näkyy hyvin matematiikan kumulatiivinen luonne. Alkuopetuksen haasteet kertautuvat seuraaville luokille mentäessä. Tämä tarkoittaa sitä, että matematiikan osaamisen erot kasvavat heikosti suoriutuvien ja hyvin suoriutuvien välillä. Solmukohdat ovat niitä koulumatematiikan keskeisiä käsitteitä ja sisältöjä, joihin liittyy erityisesti oppimisen haasteita ja joiden osaamattomuus aiheuttaa haasteita matematiikan opiskelussa.

Kymmenjärjestelmän ja mittayksiköiden ymmärtämisen tukemisesta

Suoraan perusopetuksesta ammatilliseen koulutukseen tulleilla matematiikan haasteet näyttäytyvät jo peruslaskutoimitusten (ks. edellinen luku 2) hallinnassa (Huom! Peruslaskutoimitukset tulevat jo alkuopetuksessa). Esimerkiksi vaikeus hahmottaa kertolaskuja tai kymmenillä kertomista/jakamista on jo yleensä osoitus siitä, että prosenttilaskuissa tulee haasteita. Hahmottamisen vaikeudet näkyvät sekä kymmenjärjestelmän rakenteen hahmottamisessa että mittayksikkömuunnoksissa. Jos rakennusalan opiskelija ei osaa muuttaa senttimetrejä metreiksi, on hänellä luultavasti vaikeuksia oman alan laskuissa, jotka liittyvät eri materiaalimäärien ja pinta-alojen laskemiseen. Silloin, kun mittayksikkömuunnoksissa on haasteita, kannattaa varmistaa, että kymmenjärjestelmän hallinnassa ei ole puutteita esimerkiksi lukupaikalta toiselle siirryttäessä. Seuraavissa kuvissa 2–4 on konkretisoitu kymmenjärjestelmävälillä kymmenkertaisuutta kymmenkertaisuuden ja monikertojen kautta sekä lukujen rakentamista kymmenjärjestelmävälillä.

Kuvat 2,3,4

Kymmenjärjestelmän havainnollistamista aluksi kymmenkertaisen käsitteen kautta ja sitten monikertojen kautta [6]



- Otetaan kymmensauva ja ykköskuutio.
- Kuinka monta ykköskuutiota tarvitaan kymmensauvaan? (10)
- Siis kymmensauva on kymmenkertainen ykköskuutioon verrattuna.
- Se merkitään kymmenen on yhtä suuri kuin kymmenen kertaa yksi.

$$10 = 10 \cdot 1$$



- Otetaan satalevy ja ykköskuutio.
- Kuinka monta ykköskuutiota tarvitaan satalevyyn? (100)
- Siis satalevy on satakertainen ykköskuutioon verrattuna.
- Se merkitään sata on yhtä suuri kuin sata kertaa yksi.

$$100 = 100 \cdot 1$$



- Otetaan tuhatkuutio ja ykköskuutio.
- Kuinka monta ykköskuutiota tarvitaan tuhatkuutioon? (1000)
- Siis tuhatkuutio on tuhatkertainen ykköskuutioon verrattuna.
- Se merkitään tuhat on yhtä suuri kuin tuhat kertaa yksi.



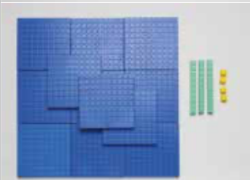

$$1000 = 1000 \cdot 1$$

Kuvassa 5 konkretisoitu lukua 1234 kymmenjärjestelmävälillä. Luvun 1234 havainnollistaminen ensin ykköskuutioilla, ja sitten ottamalla vaiheittain mukaan aina seuraavaa lukuyksikköä kuvaava väline,

kunnes viimeisessä vaiheessa on mukana luvun 1234 neljä lukuyksikköä, auttaa oppijaa jäsentämään lukuyksiköiden välisiä suhteita. Lisäksi on tärkeää, että luku luetaan jokaisessa vaiheessa ääneen ja kirjoitetaan myös numeroin.

Kuva 5

Luvun 1234 konkretisointi kymmenjärjestelmävälineillä [6]

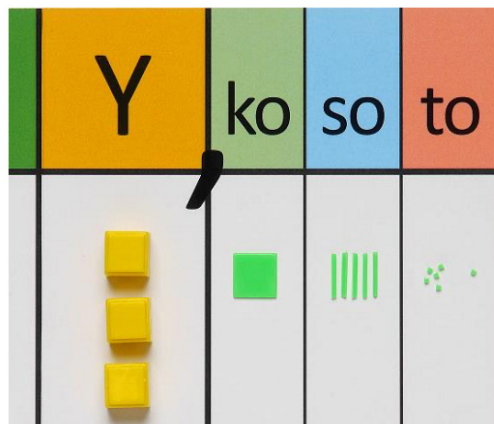
Luku 1234 välineillä	Luku 1234 laskuna (taululle) ja puhuen	
	Laskuna taululle	$1234 = 1234 \cdot 1$
	Puhuen	Tuhatkaksisataa kolmekymmentäneljä ykköskuutiota
	Laskuna taululle	$1234 = 123 \cdot 10 + 4 \cdot 1$
	Puhuen	Ykköskuutiot vaihdetaan kymmensauvoiksi ja ykköskuutioksi. Nyt meillä on satakaksikymmentäkolme kymmensauvaa ja neljä ykköskuutiota.
	Laskuna taululle	$1234 = 12 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 1$
	Puhuen	Sauvat vaihdetaan satalevyiksi ja kymmensauvoiksi. Nyt meillä on kaksitoista satalevyä ja kolme kymmensauvaa ja neljä ykköskuutiota.
	Laskuna taululle	$1234 = 1 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 1$
	Puhuen	Satalevyt vaihdetaan tuhatkuutioksi ja satalevyiksi. Nyt meillä on yksi tuhatkuutio ja kaksi satalevyä ja kolme kymmensauvaa ja neljä ykköskuutiota

Kuvassa 6 on esitetty kymmenjärjestelmävälineillä desimaaliluku 3,156. Desimaalilukujen konkretisointi kymmenjärjestelmävälineillä sekä niiden lukeminen ääneen kymmenjärjestelmän mukaisesti antaa ymmärrystä desimaalilukujen rakenteeseen. Luku 3,156 tulisi lukea matematiikan tunnilla kymmenjärjestelmän mukaisesti seuraavasti: *“Kolme kokonaista sataviisikymmentäkuusi tuhannesosaa”*.

Kuva 6

Desimaaliluvun konkretisointi kymmenjärjestelmävälineillä [6]

Desimaaliluku **3,156** konkreettisesti esitettynä:
 $3,156 = 3 + 0,1 + 0,05 + 0,006$.
 Se luetaan 3 kokonaista 156 tuhannesosaa.
 Se on myös kolme ykköstä, yksi kymmenesosa, viisi sadasosaa ja kuusi tuhannesosaa.



Kuvassa 7 on havainnollistettu kymmenjärjestelmän ja dekadisten mittayksiköiden välistä yhteyttä. Taulukossa on ylimmällä rivillä kymmenjärjestelmän lukuyksiköiden lyhenteet havainnollistamassa kymmenjärjestelmää ja niiden alapuolella pituuden, massan sekä litratilavuuden yksiköiden lyhenteet. Näiden yksiköiden välinen suhdeluku on 10. [6] Mittayksiköiden yhteydessä tulee opettaa arjessa esiintyvät ns. välimitat (esim. dam, hm), koska muuten mittayksiköiden välinen yhteys kymmenkertaisuuteen saattaa jäädä epäselväksi.

Kuva 7

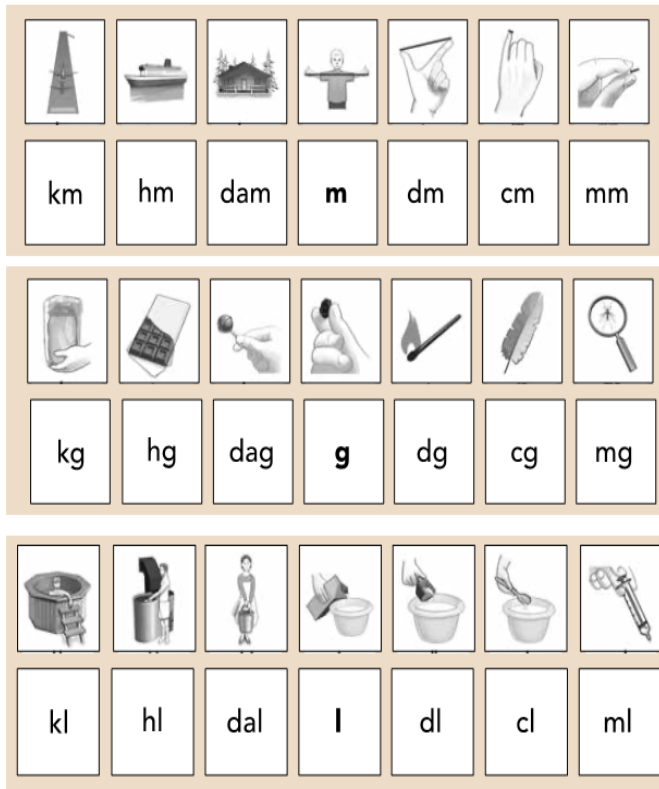
Kymmenjärjestelmän ja dekadisten mittayksiköiden välinen yhteys [6]

Kymmenjärjestelmä	T	S	K	Y	ko	so	to
Pituus	km	hm	dam	m	dm	cm	mm
Massa	kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
Litratilavuus	kl	hl	dal	l	dl	cl	ml

Mittayksiköitä on hyvä konkretisoida ja vahvistaa omilla mittauksilla. OPVA-matematiikan opetuksessa tulisi konkretisoida mittoja mittaamalla opiskelijoiden kanssa mittayksiköille tukipisteet vaikkapa opiskelijan ammattialan näkökulmasta. Tukipisteet helpottavat mittayksiköiden muistamista ja suuruuden arviointia. Tukipisteitä voi muodostaa ensin arvioinnin kautta ja sitten tarkistamalla mittaamalla, mikä voi olla yhden metrin mittainen ja mikä olisi yhden millimetrin mittainen. Omat mittaukset valokuvataan ja kuvien alle merkitään kuvassa esiintyvä mittayksikkö. Näin opiskelijat voivat rakentaa omat mittayksikkökortit. Mittayksikkökortteja on saatavilla myös kaupallisina versioina. Seuraavassa kuvassa 8 on mittayksikkökortit tukipisteineen.

Kuva 8

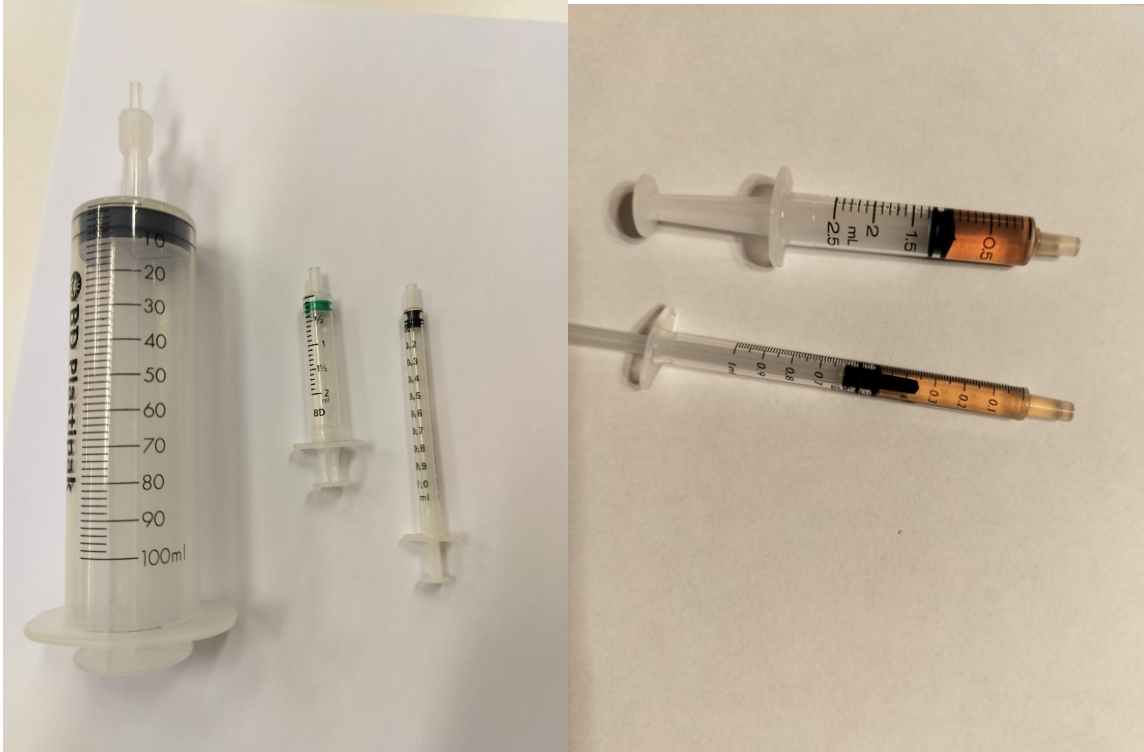
Mittayksikkökortit tukipisteineen [6]



Mittayksikkökortteja on saatavilla niin dekadisille mittayksiköille kuin myös pinta-ala- ja tilavuusmitoille. Mittayksiköiden ja mittayksiköiden tukipisteiden lisäksi OPVA-matematiikassa mittaamista ja mitta-asteikoiden lukemista tulisi harjoitella myös oman ammattialan mittavälineillä. Seuraavissa kuvissa 9–11 on esimerkkejä muutamiin ammattialoihin liittyvistä mittavälineistä, joilla mittaamista sekä mitta-asteikkojen lukemista tulisi harjoitella opiskelijan ammatillisen suuntautumisen mukaisesti. Kuvassa 9 on SOTE –alalle tyypillisiä välineitä, lääkeruiskuja, joiden käyttöä ja mitta-asteikkojen lukutaitoa tulee harjoitella.

Kuva 9

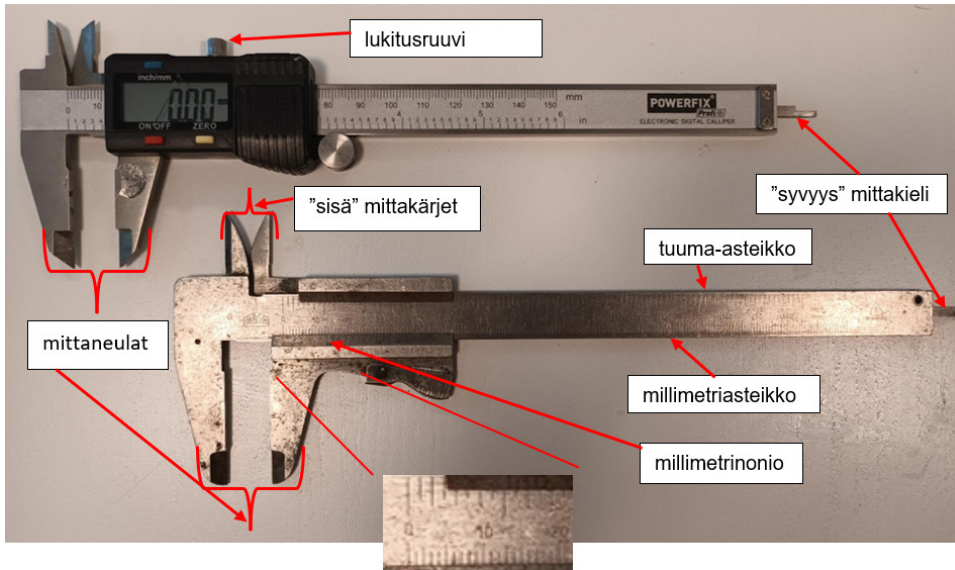
Erilaisia lääkeruiskuja (SOTE-ala)



Kuvassa 10 on esitetty kuvia työntömitoista (arkikielellä työntömitasta käytetään mm. seuraavia nimityksiä “tönäri”, “mauseri”), jotka kuuluvat tekniikan alan perustyökaluihin. Tekniikan alan ammattilaisen on hallittava työntömitan oikeaoppinen käyttö ja siksi työntömitan käyttöä on hyvä harjoitella jo OPVA-opinnoissa. Työntömittoja on valmistettu eri käyttötarkoituksia varten satoja erilaisia malleja.

Kuva 10

Digitaalinen työntömitta ja perinteinen työntömitta ja sen osien nimityksiä



Kuvassa 11 on esitetty painemittari, jota voidaan käyttää auto- ja kuljetustekniikan alalla rengaspaineen mittaamiseen.

Kuva 11

Rengaspainemittari



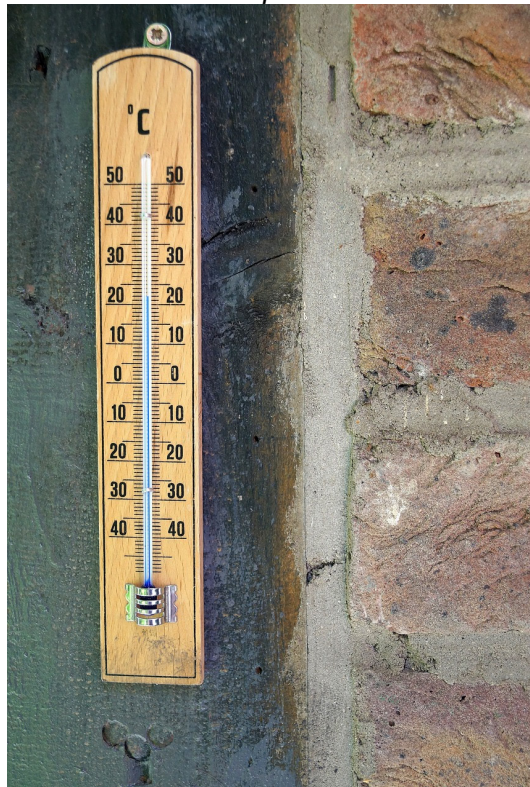
Rengaspainemittarin lukemat ilmaistaan baareina (bar), jota usein käytetään ilmoitettaessa nesteen tai kaasun painetta. Rengaspainetta voidaan ilmaista myös psi-mittayksiköllä (naulaa neliötuumaa kohti), mikä on angloamerikkalaisissa maissa käytetty paineen yksikkö. Yksi psi on 6,894 76 kPa (kilopascal) eli 0,068 947 6 bar. Yksi baari vastaa 100 000 pascalia eli yhtä kilopascalia. Baari ei ole SI-järjestelmän mittayksikkö, mutta siitä voidaan muodostaa kymmenjärjestelmän mukaisia kerrannaisia. Esimerkiksi millibaari on 0,001 baaria eli 100 pascalia. Myös paineen mittayksiköitä ja niiden lukemista on hyvä harjoitella OPVA-matematiikassa.

Lukusuora peruslaskutoimitusten tukena

Ammatillisiin opintoihin tulevilla opiskelijoilla haasteet näkyvät usein matematiikan perussisällöissä (mm. lukukäsite, peruslaskutoimitukset) tai/ja sanallisissa tehtävissä. Jos maahanmuuttajataustaisilla on paljon puutteita koulumatematiikan perussisällöissä (esimerkiksi kotimaassa koulua on käyty esimerkiksi vain kaksi vuotta), niin haasteita tulee usein yhteen- ja vähennyslaskuissa, ja etenkin silloin kun siirrytään negatiivisiin lukuihin. Jos lukukäsitteeseen liittyy haasteita jo luonnollisten lukujen alueella, niin lukualueiden laajeneminen aiheuttaa haasteita. Esimerkiksi seuraava laskutehtävä $2-5 = -3$ on haastanut juuri niitä opiskelijoita, joiden koulutausta on ollut vähäinen ja/tai luonnollisten lukujen peruslaskutoimituksissa on ollut haasteita. Tällaisen tehtävän ohjauksessa on ymmärtämistä tukenut tehtävän konkretisointi lukusuoran avulla. Lukusuoraa on aluksi lähestytty perinteisen ulkolämpömittarin avulla, joka konkretisoi hyvin pystyasennossa olevaa lukusuoraa (ks. kuva 12) Ulkolämpömittari voi olla tuttu myös maahanmuuttajaopiskelijalle. Lämpömittarin tarkastelu auttaa ymmärtämään ennen nollaa olevia negatiivisia lukuja.

Kuva 12

Perinteisen ulkolämpömittarin avulla voi konkretisoida lukusuoraa ja negatiivisia lukuja



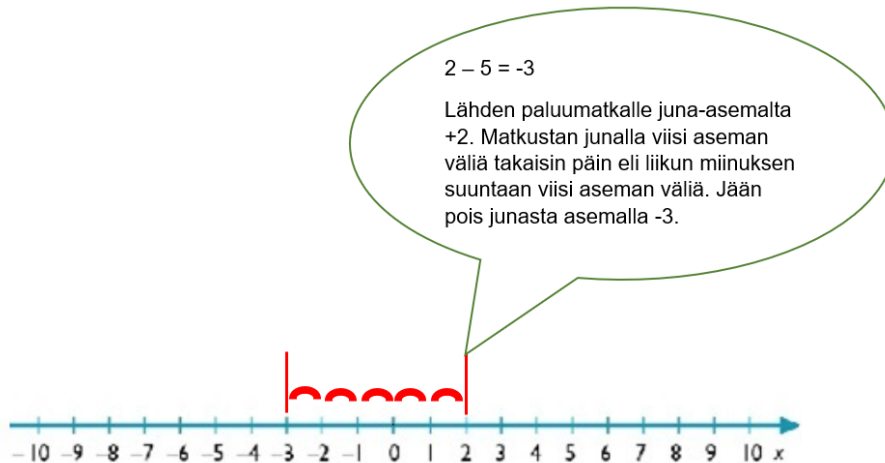
Kuva Pixabay MIH83

Ulkolämpömittarin tarkastelu on helpottanut etenemistä negatiivisten ja positiivisten lukujen havainnollistamiseen vaakasuoran lukusuoran avulla. Tehtävän $2-5 = -3$ ratkaisu lukusuoran avulla on esitetty kuvassa 13. Tehtävän ratkaisun eteneminen voidaan ajatella seuraavasti: Tutkitaan ensiksi lukusuoraa piirtämällä lukusuora, johon merkitään sekä positiivisia että negatiivisia kokonaislukuja. Tarkastellaan lukusuoralle merkityjä kokonaislukuja yhdessä opiskelijan kanssa ja todetaan, että etumerkki kertoo, kummalla puolella nolaa luku on. Luku (luvun itseisarvo) kertoo etäisyyden nolasta. Lukusuoran tarkastelun jälkeen ratkaistaan opiskelijan kanssa tehtävä $2-5 = -3$ lukusuoralla esimerkiksi tarinankerroksen avulla. Matkustetaan junalla ja merkitään lähtöasemaksi vähenevä, $+2$, jonka kohdalle kirjoitetaan merkki (kuvassa 13 pystysuora punainen viiva). Todetaan, että lähtöasema on $+2$ kohdalla. Tarkastellaan laskulauseketta, josta nähdään, että luvusta $+2$ tulee vähentää luku 5. Koska kyseessä on

vähennyslasku, niin meidän täytyy liikkua asemalta +2 viisi askelta taaksepäin eli juna liikkuu miinuksien suuntaan viisi aseman väliä (koska luvusta 2 otetaan pois 5). Lopuksi katsotaan, mille asemalle päädyttiin. (Ks. kuva 13)

Kuva 13

Lasku $2 - 5 = -3$ konkretisoiminen lukusuoran avulla



Vaikka kuvassa 13 esitetyn esimerkin kaltaisia tehtäviä olisi harjoiteltu sekä OPVA-matematiikassa että pakollisen matematiikan opetuksessa, niin kuvan 13 esimerkin kaltaiset tehtävät saattavat olla haasteellisia. Tällaiset peruslaskut kokonaisluvuilla ovat vaikeita opettaa alusta alkaen, jos mitään aikaisempaa koulutuksellista pohjaa ei ole niille luotu aikaisemmin. Tästä syystä olisikin hyvä kerrata ensiksi ihan perustaitoja kuten lukujonotaitoja sekä yhteen- ja vähennyslaskuja luonnollisten lukujen alueella ja varmentaa opiskelijoiden taitoja luonnollisten lukujen alueella. Kertauksen jälkeen voidaan siirtyä kokonaislukujen alueella tutkimaan sekä lukujonoja että yhteen- ja vähennyslaskuja. Jotta peruslaskutoimituksiin tulee sujuvuutta, tulee lukujonotaitoja harjoitella, niin että lukujen käsittely on sujuvaa. Seuraavassa pieni esimerkki lukujonotaitojen harjoitteluun.

Esimerkki

a) Jatka seuraavia lukujonoja kolmella jäsenellä.

a) 1, 3, 5, __, __, __

b) 3, 6, 9, __, __, __

c) 5, 10, 15, __, __, __

d) 15, 13, 12, __, __, __

e) 10, 8, 6, __, __, __

f) 18, 15, 12, __, __, __

b) Ympyröi suurempi luku. a) 5 8 b) 15 8

c) Kirjoita naapuriluvut. a) __, 7, __ b) __, 15, __

Edellä olevan esimerkin kaltaisia harjoituksia on hyvä tehdä myös suuremmilla luonnollisilla luvuilla sekä desimaaliluvuilla (desimaaliluvuilla, joissa on vain kymmenesosa). Lisää edellä mainittuja harjoituksia on Ikäheimon [\[7\]](#) Materiaalikirjassa. Materiaalikirjasta löytyy hyviä harjoituksia lukujonotaitojen ja yhteen- ja vähennyslaskujen laskustrategioiden harjoittamiseen analogioiden avulla sujuvaksi luon-

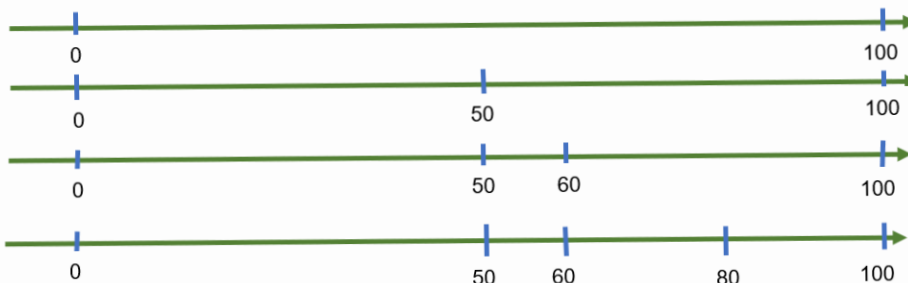
nollisten lukujen alueella kuin myös desimaaliluvuilla. Lukusuoraa olisi hyvä käyttää lukujonojen harjoittelussa tukena. Näin opiskelijoiden olisi luontevaa siirtyä harjoittelemaan myös yhteen- ja vähennyslaskuja konkreettisesti lukusuoralla tehtävinä siirtyminä laskutoimitusten mukaisesti (ks. ed. kuva 13). Samalla myös lukusuoran käyttö tulisi tutuksi ja sitä olisi helpompi hyödyntää lukualueen laajetessa rationaali- ja reaali-lukualueille.

Lukujen tutkimisesta blankolukusuoran avulla

Lukujen käsittelytaidot (mm. lukujonotaidot, lukujen vertailun taidot) tulee osata sujuvasti luonnollisten alueella ennen kuin voidaan siirtyä tutkimaan lukuja muilla lukualueilla. Lukusuora on hyvä väline lukujen tutkimiseen ja niiden suuruusvertailuun. Lukujen vertailuun soveltuu erityisesti blankolukusuora, jonka ideaa on avattu kuvassa 14. Aloitetaan lukujen vertailu piirtämällä seuraavan kuvan 14 mukaisesti blankolukusuora. Blankolukusuoran ideana on se, että siinä on vain muutama luku valmiina. Kuvan 14 esimerkissä on tehtävänä löytää vertailtaville luvuille paikat lukusuoralta ja näin päätellä kumpi luku 60 vai 80 on suurempi. Tehtävä aloitetaan piirtämällä lukusuora, johon merkitään vain luvut 0 ja 100, koska vertailtavana olevat luvut sijoittuvat tälle välille. Seuraavaksi etsitään blankolukusuoralta luku 50, koska tämä luku on lukujen 0 ja 100 puolivälissä. Jatketaan tästä määrittämällä luvun 60 paikka pohtimalla, mitkä tasakymmenet ovat lukujen 50 ja 100 välillä ja miten nämä tasakymmenet sijoittuvat lukusuoralle. Seuraavaksi etsitään luvulle 80 paikka blankolta lukusuoralta. Merkitään luvut lukusuoralle ja vertaillaan lukuja 60 ja 80 toisiinsa. Kumpi näistä luvuista on suurempi eli kumpi luvuista on lähempänä lukua 100? Kuvasta 14 voidaan havaita, että luku 80 on lähempänä lukua 100. Luku 60 on taas lähempänä lukua 50 kuin lukua 100, joten luku 80 on suurempi kuin lukua 60.

Kuva 14

Lukujen 60 ja 80 vertailun eteneminen blankolukusuoran avulla. Havaitaan, että luku 80 on suurempi kuin luku 60



Tätä samaa ideaa voi mainiosti soveltaa myös suuremmille luvuille ja desimaaliluvuille. Desimaalilukujen välinen vertailu voi olla opiskelijoille haastavaa etenkin silloin, jos kymmenjärjestelmän ymmärtämisessä on haasteita. Esimerkiksi seuraava tehtävä voi aiheuttaa haasteita: Kumpi luku on suurempi 0,235 vai 0,36? Näiden lukujen väliseen vertailuun opiskelijaa voi aluksi johdatella tavallisen viivoittimen avulla. Tutkitaan opiskelijan kanssa viivoitinta ja todetaan, että viivoitin on jaettu senttimetreihin ja senttimetrit edelleen millimetreihin. Kiinnitetään huomiota siihen, montako millimetriä sisältyy yhteen senttimetriin. Huomataan, että yksi senttimetri on jaettu 10 pienempään osaan ja yhden osan suuruus vastaa yhtä millimetriä. Seuraavaksi voidaan piirtää blankolukusuora, johon on merkitty luvut 0 ja 1. Jaetaan tämä lukusuoralle merkitty väli kymmeneen yhtä suureen osaan etsimällä aluksi luvulle 0,5 paikka lukusuoralta. Sijoitetaan sitten muut kymmenesosan tarkkuudella merkityt desimaaliluvut lukusuoralle. Todetaan vielä, että lukujen 0 ja 1 väli on jaettu kymmeneen yhtä suureen osaan ja yhden osan pituus 0,1 verran. Samalla painotetaan myös desimaalilukujen ääneen lukemista kymmenjärjes-

telmän mukaisesti. Luku 0,1 luetaan kymmenjärjestelmän mukaisesti “*Nolla kokonaista, yksi kymmenesosa*”. Näin saadaan kymmenesosalle merkitys. Kymmenesosa ei sisällä yhtään kokonaista ja kymmenesosat merkitään heti desimaalipilkun jälkeen oikealle. Vastaavasti tarkastellaan sadasosia. Piirretään lukusuora, johon on merkitty kuvan 14 mukaisesti luvut 0 ja 0,1. Jaetaan lukujen 0 ja 0,1 väli samalla periaatteella kymmeneen yhtä suureen osaan. Tällä tavalla saadaan sadasosille merkitys. Huomataan, että sadasosat ovat kymmenesosia pienempiä ja yhteen sadasosaan sisältyy kymmenen kymmenesosaa. Huomataan, että sadasosien lukupaikka on kymmenesosien vieressä toisena oikealla desimaalipilkun jälkeen. Jatketaan samalla tavalla tuhannesosien tarkastelua. Työskentelyn edetessä desimaalilukujen paikat alkavat konkretisoitua opiskelijalle. Työskentely blankolukusuoran avulla auttaa opiskelijaa vertailemaan desimaalilukujen suuruuksia keskenään sekä avaa opiskelijalle desimaalilukujärjestelmää. Vähitellen opiskelijalle alkaa hahmottua, että lukusuora on täynnä lukuja.

Kielelliset haasteet vaikuttavat koulumatematiikan solmukohtien osaamiseen

Kielelliset haasteet näkyvät pakollisessa matematiikassa erityisesti prosenttilaskennassa ja talous- ja tilastomatematiikan perusteissa, koska näissä osioissa on eniten sanallisia tehtäviä. Näiden tehtävien yhteydessä tulisi kiinnittää huomiota tehtävien selkokielistämiseen sekä selkokielen käyttöön opetuksessa. Selkokieliisyys tukee tehtävien sisältöjen ymmärtämistä, vaikka opiskelija käyttäisikin käännösohjelmia tehtävän sisällön ymmärtämisen tukena (ks. Kielentämisen osiossa luvussa 6 tehtyjä avauksia selkokielen käyttöön). Suomen kielen ymmärtämisen haasteisiin auttaa pääsääntöisesti Google-kääntäjän tai sanaston käyttö matematiikan tunneilla. Talous- ja tilastomatematiikan kokeessa hyväksi todettu keino on ollut tärkeimmistä sanoista yhdessä opiskelijan kanssa laadittu sanastomoniste, johon opiskelijat kääntävät omalle kielelleen talous- ja tilastomatematiikan keskeisimmät käsitteet. Käsitteiden kääntäminen toiselle kielelle käännösohjelmien avulla voi olla joskus ongelmallista, sillä esimerkiksi Google-kääntäjä ei tunnista kaikkia suomen kielen ilmauksia. Yksi tällaiseksi osoittautunut termi on “vuotuinen korkoprosentti”, jonka merkitys on monille opiskelijoille vaikea ymmärtää. Esimerkiksi opetustilanteessa venäjää äidinkielenä puhuva opiskelija ymmärsi korkoprosentin, mutta ei vuotuisen termiä. Google -kääntäjästä ei ollut tässä tilanteessa apua. Kääntäjä ei tuntenut sanaa vuotuinen eikä osannut kääntää vuotuisen-sanaa suomen kielestä venäjän kielelle. Lopulta opettajan sanallisen selityksen avulla opiskelija ymmärsi koko fraasin, ja kirjoitti sen omalle kielelleen sanastoon, jota hän sai käyttää apuna kokeessa.

Tukimateriaalia koulumatematiikan solmukohtien tukemiseen

OPVA-opettaja saa hyvää tukea konkreettiseen matematiikan opetukseen sekä peruskoulun matematiikan solmukohtien avaamiseen Ikäheimon [6] julkaisemasta käsikirjasta. Käsikirjassa avataan perusopetuksen keskeisiä käsitteitä koulumatematiikan näkökulmasta. Kirja antaa hyviä näkökulmia oppimisvälineiden käyttöön matematiikan opetuksessa. Kirja perustuu seuraavalle ajatukselle: “*Tie matematiikan oppimiseen on ymmärtäminen.*” [6]. Suosittelemme tätä kirjaa OPVA-opettajan sekä matematiikkaa opettavan opettajan käsikirjaksi toisella asteella. Seuraavilla kahdella videolla Ikäheimo avaa “*Matematiikan osaaminen vahvaksi*” –kirjan perusteita.

Ikäheimo, H. (2022). [Lukukäsite matematiikan oppimisen perustana](#). Johdantoluento 1/2 Matematiikan osaaminen vahvaksi -kirjan käyttöön. *ELLI*.

Ikäheimo, H. (2022). [Peruslaskujen käsitteet vahvoiksi](#). Johdantoluento 2/2 Matematiikan osaaminen vahvaksi –kirjan käyttöön. *ELLI*.

Kuten jo aiemmin on tuotu esille, niin Ikäheimon [6] käsikirjaan on valmistunut oheismateriaalina 'Materiaalikirja' [7]. Materiaalikirjassa on hyviä täsmäkartoituksia ja -harjoitteita lukukäsitteeseen, peruslaskutoimitusten strategioihin, päässälaskuihin, kymmenjärjestelmään ja mittayksiköiden hallintaan. Materiaalikirjan kartoitusten ja harjoitteiden tavoitteena on sujuvoittaa peruslaskutoimitusten taustalla olevia käsitteitä sekä peruslaskutoimituksia. Nämä kartoitukset ja junnaukset soveltuvat mainiosti OPVA-harjoituksiksi etenkin niille, joilla on peruslaskutoimituksissa ja niihin liittyvissä käsitteissä haasteita. Materiaalikirjan junnauksia ja kartoituksia on avattu sekä edellä mainitussa Ikäheimon käsikirjassa että johdantoluennon 2/2 osassa "Peruslaskujen käsitteet vahvoiksi". Sekä 'Matematiikan osaaminen vahvaksi'-kirja että 'Materiaalikirja' soveltuvat mainiosti OPVA-opetukseen ja työkaluksi matematiikan perustaitojen harjoittamiseen sujuvaksi. Ikäheimon kirjoista on saatavilla lisätietoa kirjallisena Opperin sivuilta, jotka on linkitetty seuraavaan otsikkoon.

Ikäheimo, H. (2022). [Matematiikan osaaminen vahvaksi –kirjat](#). Opperi.

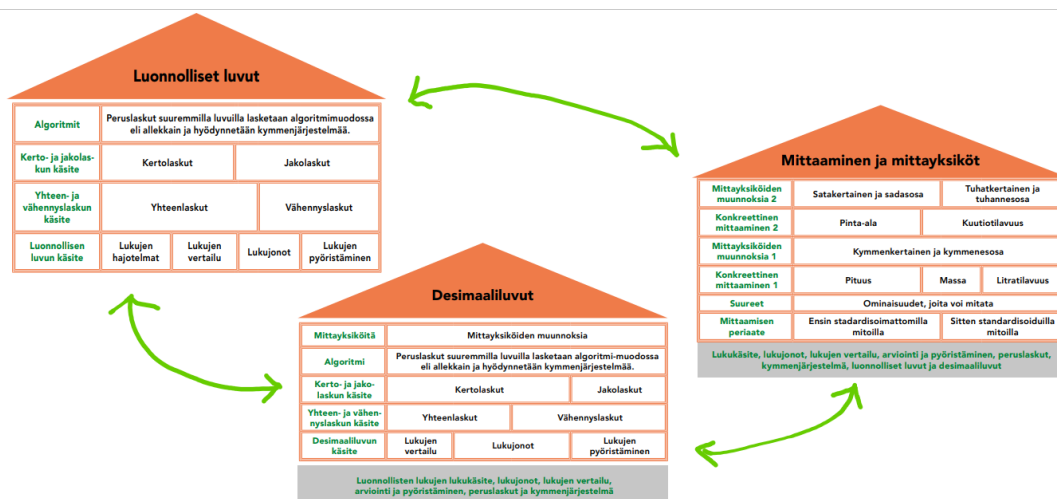
Opperin sivuille linkitetyillä YouTube -videoilla Ikäheimo avaa mm. koulumatematiikan solmukohtia oppimisvälineiden avulla sekä näihin liittyvää konkreettista matematiikan opetusta. Videoita on kaikkiaan 26 kappaletta ja niiden sisältöinä on koulumatematiikan peruslaskutoimituksiin ja solmukohtiin liittyviä keskeisiä käsitteitä.

Ikäheimo, H. & Voipio, P. (2022). [Opperin You Tube –videot matematiikan opetuksesta](#).

Ikäheimon [6] kuvaamat matematiikan tiilitalot liittyvät olennaisella tavalla koulumatematiikan solmukohtiin ja tuovat hyvin esille matematiikan taitojen kumulatiivista rakentumista. Matematiikassa uudet taidot rakennetaan edellisten taitojen pohjalta ja näin oppijan tulisi voida liittää uusi asia aiempaan tietorakenteeseen. Tässä voidaan puhua konstruktivisesta ja myös sosiaalisesta tiedonrakentelusta, koska oppijan tulee saada pohtia matemaattisia käsitteitä yhdessä opettajan ja toisten oppijoiden kanssa (vrt. kielentämisen periaatteet). Seuraavassa kuvassa 15 on esitetty Ikäheimon [6] esittämät matematiikan tiilitalot. Kuvan jälkeen tiilitalot on linkitetty pdf-tiedostona, josta ne on saavilla selkeämpinä.

Kuva 15

Ikäheimon [6] esittämät matematiikan tiilitalot



Luonnollisen luvun käsite luo pohjan peruslaskuille ja kymmenjärjestelmälle.

Desimaaliluvun käsite luo pohjan myös mittayksiköiden muunnoksille.

Mittaamista kotona ja koulussa ennen mittayksiköiden muunnoksia.

Ikäheimo, H. (2022). [Matematiikan tiilitalot](#). *Opperi*.

Matematiikan perustaitojen harjoittamiseen on monissa oppilaitoksissa laadittu harjoituspaketteja. Yksi tällainen on tuotettu Opetushallituksen rahoittamassa Polkuja -hankkeessa. Tähän materiaaliin voi tutustua seuraavaan otsikkoon liitetystä linkistä.

Kankainen, J. & Malila, A. (2022). [MATIKKAKERTAUS. Matematiikan preppaus laskennan perusteiden harjoitteluun](#). (lisenssi [CC BY-NC-SA 4.0](#)) Koulutuskeskus Salpaus -kuntayhtymä.

Matikkakertaus on tarkoitettu matematiikan perusteiden harjoitteluun toisella asteella opiskeleville. Teoksen ensimmäinen osa keskittyy peruslaskutaitojen varmentamiseen, toisessa osassa harjoitellaan prosenttilaskennan taitoja ja kolmannessa osassa kerrataan geometrian perusteita. Matikkakertaus soveltuu hyvin OPVA-matematiikan taitojen harjoitteluun.

Tiivistelmä luku 3

Solmukohdat

- Koulumatematiikan solmukohdat näkyvät opiskelijan matematiikan osaamisen haasteissa - matematiikan taitojen haasteet ovat usein jo alaluokkien peruskäsitteissä (Vrt. Kuva 11 Matematiikan tiilitalot [6])
- OPVA-opetuksessa painotetaan matematiikan taitojen peruskäsitteitä
- Opiskelijan peruslaskutaidot tulisi saada vähintäänkin hyvälle tasolle.
- Opetuksessa on tärkeää konkretisoida opetusta joko matematiikan oppimisvälineillä tai muilla sopivilla välineillä ja piirroksilla
- Oppimisen kannalta on tärkeää, että opiskelijat perustelevat ratkaisunsa
- Opetuksen tulee olla selkokieleistä
- Solmukohdat ovat hyvä tuki lähtötasokartoituksen laadinnassa

Pohdittavaksi

- Millaisia matematiikan taitojen haasteita on oppilaitoksenne opiskelijoilla?
- Millä tavoin opiskelijoiden oppimisen haasteet vaikuttavat OPVA-matematiikan taitojen suunnitteluun ja toteuttamiseen?
- Millä tavoin ohjaatte opiskelijoita OPVA-matematiikan taidoissa? Millaisia työskentelytapoja käytätte?

4 Matematiikan taitojen lähtötason kartoittamisesta

Ammatillisten opintojen alussa tulee kartoittaa opiskelijoiden matematiikan perustaidot, jotta saadaan selville matematiikan perustaitojen osaamisen taso. Matematiikan taitoja kartoitetaan myös silloin, jos opettajalle tulee huoli siitä, että opiskelijalla on joko matematiikan oppimisvaikeus tai hänellä on sellaisia puutteita matematiikan perustiedoissa ja -taidoissa, jotka vaikeuttavat matematiikan opiskelua. Opiskelijoiden lähtötason kartoittaminen on tärkeää, koska matematiikan oppimisen kannalta on monia tärkeitä pohjataitoja ja -tietoja, jotka on hyvä hallita, jotta matematiikan osaamisesta tulisi sujuvaa. Tällaisia asioita ovat mm. lukukäsite ja sen taakse kätkeytyvät pohjataidot (kuten esimerkiksi lukujonotaidot, luvun ja määrän välinen yhteys) sekä lukukäsitteen laajeneminen eri lukualueille, laskustrategiat (tarkoittaa sujuvaa lukujen käsittelytaitoa sekä laskulakien hallintaa), sujuvat päässälaskut (liittyvät myös sujuviin lukujen käsittelytaitoihin), peruslaskutoimitukset, kymmenjärjestelmän hallinta sekä mitattayksiköt ja niiden muunnokset ja geometrian peruskäsitteet. Kun peruskäsitteiden pohja on vahva, opiskelijan on helpompi soveltaa oppimaansa sanallisiin tehtäviin ja ongelmien ratkaisuun. Seuraavalla pdf-monisteella Ikäheimo tuo esille jo aiemmin vinkatun Ikäheimon [\[7\]](#) Materiaalikirjan sisältöä (täsmäkartoituksia ja -harjoituksia), matematiikan osaamisen kartoittamisen sekä korjaavan opetuksen merkitystä.

Ikäheimo, H. (2021). [Ota selvää, mitä oppilaat osaavat ja suunnittele korjaava opetus](#). *Opperi*.

Ikäheimon tekstistä välittyy hyvin, miten matematiikan osaamista rakennetaan pohjatietojen ja -taitojen päälle. Jos pohjatiedoissa ja -taidoissa on aukkoja, niin matematiikan oppimista on vaikeaa rakentaa kestäväälle pohjalle.

4.1 Seuloista, testeistä ja kartoituksista

Seuloista ja testeistä

Yksi tapa luokitella matematiikan arviointivälineitä on se, perustuvatko ne kriteereihin vai normeihin. Kriteerillä ymmärretään jotakin arviointivälineen ulkopuolista perustetta kuten teoriasta ja tutkimuksesta nousevaa perustetta tai esimerkiksi opetussuunnitelmasta nousevaa perustetta. Opetussuunnitelmaan perustuvat mittarit ovat kokeita. Kehityopsykologiaan ja tutkimukseen perustuvat mittarit ovat seuloja ja testejä. Sekä seulat että testit ovat joko normiperusteisia tai kriteeripohjaisia. Kriteeri on jokin mittarin ulkopuolinen peruste kuten esimerkiksi opetussuunnitelmasta nousevat arvosanan 8 kriteerit, joilla on jokin sisällöllinen vaatimus kuten kaikki kuudennen luokan matematiikan tavoitteet. Osaamiseen perustuva kriteeri voi olla esimerkiksi taito käyttää lukusuoraa kahden luvun erotuksen laskemisessa tai peruskoulunsa päättävien taito ratkaista ensimmäisen asteen yhtälöitä matematiikan kielellä (symbolisesti). Normi puolestaan perustuu tutkimukseen, johon on koottu iso tai edustava näyte tai satunnaisotanta suomalaislapsista siitä, miten he osaavat tehdä tiettyjä tehtäviä. Tutkimukseen sisältyvien osioiden tehtävien ratkaisuprosentin ja kokonaispistemäärän perusteella voidaan määrittää ja-

kaumia esimerkiksi iän, sukupuolen, kotikielen tai muun tekijän suhteen. Jakaumasta saatavien tunnuslukujen (kuten keskiarvon, keskihajonnan) avulla voidaan kaikille tunnuslukujen arvoille laskea paikka jakaumassa. Useimmiten mittareiden kehitystavoitteena ja tuloksena on aineisto, joka noudattaa normaalijakaumaa. Normaalijakauma auttaa mittarin käyttäjää tulkitsemaan, millainen testiin osallistuvan olevan lapsen osaaminen on verrattuna saman ikäryhmän muihin lapsiin. [8] Seuraavassa taulukossa (2) on esitetty Aunion, Hautamäen ja Monosen [8] kokoama taulukko kehityspsykologiseen tietoon perustuvista mittareista aakkosjärjestyksessä.

Taulukko 2

Kehityspsykologisen tiedon ja tutkimuksen pohjalta rakennetut mittarit aakkosjärjestyksessä Aunion, Hautamäen ja Monosen mukaan [8]

Mittari	Ikä /kohderyhmä	Keskeiset mitattavat taidot	Tarkempi kuvaus mitattavista taidoista	Normit
Banuca	1.– 3. lk	Lukukäsite ja peruslaskutaito (Vertailu, määrä; Laskeminen, yhteenlasku; Vastaavuus, määrä ja luku; Laskeminen, vähennyslasku; Lukujono; Lukujen vertailu; Vastaavuus, sanottu ja luku; Laskemisen, laskut; Aritmeettinen päättely)	Vertailu, määrä: suurimman lukumäärän (4 vaihtoehtoa) valitseminen; Laskeminen, yhteenlasku: yksinkertaisia yhteenlaskuja symboleilla (lukualue 1-20) (aikaa 3 min). Vastaavuus, määrä ja luku: pisteiden lukumäärän ja sitä kuvaavaan symbolin (4 vaihtoehtoa) yhdistäminen; Laskeminen, vähennyslasku: yksinkertaisia vähennyslaskuja symboleilla (lukualue 1-20) (aikaa 3 min); Lukujono: annetun lukujonon täydentäminen (3 lukua annetaan symboleilla ja yksi puuttuu välistä); Lukujen vertailu: suurimman luvun valitseminen (4 lukua annetaan symboleilla, 0-15 000); Vastaavuus, sanottu ja luku: sanotun luvun tunnistaminen (4 vaihtoehtoa); Laskeminen, laskut: yhteen- ja vähennyslaskuja symboleilla, osasta puuttuu vastaus, osasta joku muu tekijä; Aritmeettinen päättely: annetun lukusarjan jatkaminen (4 vaihtoehtoa)	Kyllä
KTLT	7.-9. lk	Laskutaito	Sanallisia ongelmanratkaisutehtäviä (yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolasku); Yhteen-, vähennys-, kerto-, ja jakolasku symboleilla; Mittayksikkömuunnoksia; Geometria ja mittaminen; Algebra; Lukujen pyöristäminen	Kyllä
LukiMat-seulaut	esiopetus	Matemaattiset perustaidot (lukumääräisyyden taju, matemaattisten suhteiden hallinta, laskemisen taidot, aritmeettiset perustaidot)	Lukumääräisyyden taju: suuruusluokan vertailu; Matemaattislogiset taidot: vertailu, sarjoittaminen; Laskemisen taidot: lukujonon luettelutaidot; Numerosymbolien hallinta: Lukusana-määrä-numero-vastaavuus; Lukumäärän määrittäminen laskemalla: osan laskeminen kokonaisuudesta; Yhteenlasku: sanallisen yhteenlaskun ratkaiseminen; Vähennyslasku: sanallisen vähennyslaskun ratkaiseminen	Kyllä
LukiMat-seulaut	1.lk	Matemaattiset perustaidot (lukumääräisyyden taju, matemaattisten suhteiden hallinta, laskemisen taidot, aritmeettiset perustaidot, lukujärjestelmätiedon soveltaminen laskemisessa)	Lukumääräisyyden taju: suuruusluokan vertailu; Matemaattislogiset taidot: vertailu, sarjoittaminen; Laskemisen taidot: lukujonon luettelutaidot; Numerosymbolien hallinta: yksi- ja kaksi enemmän/ vähemmän; Lukumäärän määrittäminen laskemalla: osan laskeminen kokonaisuudesta; Yhteenlasku: sanalliset ja symboleilla esitetyt yhteenlaskut; Vähennyslasku: sanalliset ja symboleilla esitetyt vähennyslaskut; Lukujärjestelmätiedon soveltaminen laskemisessa: rahayksiköiden yhteenlaskeminen	Kyllä
LukiMat-seulaut	2.lk	Matemaattiset perustaidot (lukumääräisyyden taju, matemaattisten suhteiden hallinta, laskemisen taidot, aritmeettiset perustaidot, lukujärjestelmätiedon soveltaminen laskemisessa)	Lukumääräisyyden taju: suuruusluokan, vertailu/järjestäminen; Matemaattislogiset taidot: sarjoittaminen; Numerosymbolien hallinta: lukujen kirjoittaminen; Yhteenlaskun sujuvuus, päässä- ja allekkainlasku; Vähennyslaskun sujuvuus, päässä- ja allekkainlasku; Lukujärjestelmätiedon soveltaminen laskemisessa: rahojen laskeminen, yhteen- ja vähennyslaskun täydentäminen	Kyllä
Luku-käsitesti	4 v 6 kk – 7 v 6 kk	Matemaattiset suhdetaidot (vertailu, luokittelu, vastaavuus, järjestäminen); Lukujonotaidot (lukusanojen luetteleminen, samanaikainen laskeminen, tuloksen laskeminen, lukukäsitteen soveltaminen)	Vertailu: vertailukäsitteiden hallinta (eniten, vähiten, korkeampi, matalampi); Luokittelu: esineiden erottaminen toisistaan ja niiden ryhmittely samankaltaisuuden tai erilaisuuden perusteella; Vastaavuus: yksi-yhteen suhteen hallinta; Järjestäminen: esineiden järjestäminen annetun kriteerin perusteella (esim. enemmästä vähempään); Lukusanojen luetteleminen: lukujonon luetteleminen eteen- ja taaksepäin; Samanaikainen ja lyhentyneet laskeminen: konkreettien lukumäärien laskeminen siten, että lapsi voi esim. koskettaa laskettavia esineitä; Tuloksen laskeminen: lukumäärän laskeminen niin, että esineitä ei voi enää koskettaa ja niiden järjestys ei ole selkeä; Lukukäsitteen soveltaminen: laskemisen taidon hyväksi käyttäminen yksinkertaisissa ongelmanratkaisutehtävissä.	Kyllä
Matte	3.– 5. lk	Matematiikan sanallisten tehtävien ratkaisutaito ja laskutaito	Matematiikan sanallisten tehtävien ratkaisutaidot (yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskut, kokonaisluvut 0-999, myös desimaaliluvut), laskutaito päässä-laskutaidot (yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskut, lukualue 0-999) matematiikka-asenteiden arvioiminen	Kyllä
RMAT	1.- 6. lk	Laskutaito	Yhteen- ja vähennyslaskut: ei allekkain, lukualue 0-60; Yhteen- ja kyllä vähennyslasku allekkain, lukualue 1-13 500; Kertolaskut ei allekkain ja allekkain, lukualue 0-500; Jakolaskut: ei jakokulmassa ja jakokulmassa; Mittayksiköt (eurot, sentit, litra, desilitra, minuutit, sekunti); Desimaaliluvuilla kertominen ja yhteenlasku; Murtoluvun muuttaminen desimaaliluvuksi; Yhteenlasku murtoluvuilla; Algebra: yhtälön ratkaiseminen	Kyllä

Matemaattisten oppimisvaikeuksien arvioinnissa käytetään mittareina usein seuloja ja testejä. Seulat ovat luonteeltaan herkkiä, koska niiden avulla pyritään tunnistamaan ensin opetusryhmästä kaikki ne, joilla voi mahdollisesti olla matematiikan osaamisen vaikeutta tai haittaa. Testi puolestaan on välineenä tarkka, koska sen tehtävänä on erotella seulan perusteella saadusta ryhmästä ne, joilla on todellinen matematiikan oppimisen vaikeus. Seulojen ja testien teoreettisen perustan lisäksi vertailuaineistoina on tutkimusaineisto, esimerkiksi tietyn ikäryhmän oppilaiden tulokset, joihin tuloksia verrataan. Näin voidaan nähdä, ovatko oppilaan taidot keskimäärin samanikäisten oppilaiden taitojen tasolla ja onko mahdollisesti erityisen tuen tarvetta. (vrt. [8])

Kartoituksista

Kartoitukset ovat yksilöllisesti tehtäviä matematiikan taitojen arviointeja, jotka antavat lähtökohdan opetuksen suunnitteluun. Kartoitukset tukeutuvat kehityspsykologisiin lähtökohtiin ja/tai esimerkiksi opetussuunnitelman keskeisiin tavoitteisiin. Kartoitusten pisterajat perustuvat useimmiten välineen laatijoiden syvälliseen kokemukseen tai niillä on kehityspsykologiaan perustuvia kriteerejä. Kartoituksia ei ole kuitenkaan normitettu tutkimusaineiston pohjalta, mikä vaikeuttaa varsinaisten oppimisvaikeuksien tunnistamista niiden pohjalta. Luonteensa puolesta kartoitukset soveltunevat hyvin juuri matematiikan taitojen kartoittamiseen lähtötasotestin ominaisuudessa ammatillisissa opinnoissa. Kartoitusten tarkoituksena on saada selville, mitkä asiat ovat hallinnassa ja mitkä eivät. Opiskelijoiden matematiikan taitojen kartoitus on tärkeää, koska kartoitusten avulla saadaan selville niitä asioita, joihin tarvitaan tukea ja kertausta. Oikein kohdennetulla tuella säästetään aikaa ja opiskelijan opinnot etenevät. Kun löydetään ne asiat, joihin tarvitaan tukea, on helpompi suunnitella yksilöllisesti suunnattua OPVA-tukea. Näin ne tarjoavat perustan OPVA-tuen tarpeen määrittelyyn, sillä OPVA-tuki on yleistä tukea, joka kohdentuu opiskelijan matematiikan taitojen vahvistamiseen ja matematiikan sisältöjen kertaukseen. Valmiita kartoituksia ovat, mm. ALVA (*Arvioidaan, Lasketaan ja VAhvistetaan taitoja*) -matematiikan perustaitojen kartoitus [9] tai MaKeKo-digikokeet [10]. Näitä esitellään tarkemmin seuraavassa luvussa 5. Kartoitusten etuna on myös se, että niissä useimmiten on konkreettista materiaalia opiskelijoiden taitojen harjoittamiseen. Seulat ja testit painottavat erityisopetuksen näkökulmaa ja niitä tulee käyttää silloin, kun on syytä epäillä matematiikan oppimisen vaikeutta.

4.1.1 Matematiikan perustaitojen kartoituksia ja lähtötasotestejä

Tässä luvussa tuodaan esille sellaisia lähtötasotestejä, joita voidaan luonteensa puolesta tarkastella kartoituksina, ja jotka soveltuvat hyvin OPVA-opintoihin ohjaamisen kriteereinä.

Polkuja-hankkeessa tuotettu lähtötasotesti-paketti YTO-aineisiin

Opetushallituksen rahoittamassa *Polkuja-hankkeessa* on Koulutuskeskus Salpauksessa valmistunut lähtötasokartoitus -tehtäväpaketti '*Yhteisten tutkinnon osien lähtötasotesti'*, joihin liittyvä ohjeistus on löydettävissä Avointen oppimateriaalien kirjastosta. Seuraavasta linkistä pääset lukemaan avointen oppimateriaalien kirjastosta edellä mainitun lähtötasokartoitus -paketin ohjeistuksen:

Polkuja-hanke (2022). [Ohje yhteisten tutkinnon osien lähtötasotestien käytänteisiin](#). Koulukeskus Salpaus-kuntayhtymä.

Edellä mainitussa hankkeessa tuotettuja yhteisten tutkinnon osien lähtötasotestejä pääset katsomaan seuraavasta linkistä:

Yhteisten tutkinnon osien lähtötasotestien monisteessa on myös vastaukset lähtötasotestien tehtäviin.

Origo-testi

Osana TASE-hanketta on kehitetty Turun yliopiston Ville-oppimisalustalle toisen asteen opintojen alkuun tarkoitettu matematiikan taitojen lähtötason *Origo-testi*. Kehitystyössä on ollut mukana Turun kaupungin yläkoulujen ja lukioiden matematiikan opettajia sekä erityisopettajia ja ammattikoulujen matematiikan opettajia sekä yliopiston tutkijoita. *Origo-testin* pohjana on 9. luokan matematiikan perusopetuksen keskeiset oppisisällöt. Testi on saatavilla vapaasti kaikkien opettajien käyttöön. Käytön edellytyksenä on Ville-oppimisalustan käyttäjätunnukset.

Otsikkoon on linkitetty diasarja, jossa on avattu Origo-testiä ja sen käyttöä sekä osittain KPedun ammatillisen oppilaitoksen Origo-testin vuoden 2022 tuloksia. Tarkastelun kohteena olevassa ammatillisessa oppilaitoksessa käytetään Ville-oppimisalustan *Origo-testiä* opiskelijoiden matematiikan taitojen kartoittamiseen. Kaikki uudet opiskelijat tekevät Origo-testin ennen kuin matematiikan opetus alkaa. Tulokset muutetaan Excel-taulukoiksi ja erityisopettajat käyttävät tuloksia mm. erityisen tuen suunnitelmien tekoon. Jos testin tulos jää alle 13 pistettä eli alle pronssitason, niin yleensä erityisen tuen suunnitelmalle on tarvetta. Testin tuloksia verrataan myös opiskelijan saattaen tietoihin erityisen tuen suunnitelmaa tehdessä.

Origo-testin sisältö on laaja ja kattaa enemmän aihepiirejä kuin ammatillisen koulutuksen pakollinen matematiikka sisältää. Muun muassa polynomit on koettu vaikeaksi ainakin KPedu:n 2022 testitulosten mukaan. Nämä vaikeat osiot saattavat lannistaa opiskelijoita, jotka kamppailevat jo ihan peruslaskutaitojen kanssa. Esimerkiksi elintarvikeryhmässä oli vuonna 2022 yksi opiskelija, joka pystyi tekemään viisi osiota testin yhdeksästä osiosta. Hän jätti neljä osiota tyhjäksi, koska kysymykset olivat hänelle liian vaikeita. Hänen keskittymistään koetilanteessa häiritsi myös se, että muut opiskelijat tekivät testiä samaan aikaan. Opiskelijan mielestä nämä opiskelijat vaikuttivat osaavan paremmin vastata kysymyksiin. Kyseisen opiskelijan tulos testistä oli 11 pistettä. Tällaisten opiskelijoiden kohdalla voidaan miettiä, olisiko jokin toinen lähtötasotesti parempi mittaamaan heidän taitojaan. Lisäksi olisi aiheellista huomioida matematiikkaan suhtautuminen, koska edellä mainitulla opiskelijalla oli selkeästi epäonnistumisen pelko (hän vertasi itseään muihin, ja vähätteli omia taitojaan), joka häiritsi testistä suoriutumista. Alle 13 pisteen tuloksella myös matematiikan OPVA-opetukselle voisi olla tarvetta. Edellä mainitun opiskelijan kohdalla päädyttiin kuitenkin erityisopettajan antamaan tukiopetukseen.

Alhaisimmat pisteet (koko ryhmän keskiarvo alle 20 pistettä) olivat elintarvikealalla (1 ryhmä), rakennusalalla (1 ryhmä) ja kone- ja metallialalla (1 ryhmä). Näistä kolmesta ryhmästä kone- ja metalliryhmälle tarjottiin matematiikan OPVA-opetusta. Kone- ja metallialan ryhmissä on ollut myös aiemmilla vuosikursseilla heikkotasoisia opiskelijoita, joten vuonna 2022 syksyllä kaikille kone- ja metallialan ensimmäisen vuoden opiskelijoille tarjottiin 6 tuntia matematiikan OPVA-opetusta. Elintarvike- ja rakennusalan ryhmistä matematiikan OPVA-opetukseen osallistuivat ne, joilla oli eniten haasteita joko matematiikassa tai suomen kielen osaamisessa.

4.1.2 Maksullisia matematiikan perustaitojen lähtötasokartoituksia

Esimerkkeinä ammatillisiin oppilaitoksiin soveltuvista maksullisista kartoituksista ovat MaKeKo-digikokeet [10] sekä ALVA (*Arvioidaan, Lasketaan ja VAhvistetaan taitoja*) -matematiikan perustaitojen kartoitus (alkuperäinen kartoitus Ikäheimo, 2010; uusittu kartoitus [9]). ALVA-paketti sisältää myös harjoituksia ja materiaaleja matematiikan taitojen tukemiseen sekä yläkoulussa että toisella asteella.

Vaikka MaKeKo -digikokeet koskevat lähinnä peruskoulua, niin niiden sisältö palvelee hyvin toisen asteen opintojen alussa toteutettavia matematiikan taitojen kartoituksia. MaKeKo perustuu opetussuunnitelmassa mainittujen keskeisten sisältöjen arviointiin kullakin peruskoulun luokka-asteella. MaKeKo voidaan nähdä summatiivisen arvioinnin välineenä, joka antaa opettajalle tietoa siitä, miten oppilas saavuttanut opetussuunnitelmaan kirjatut tavoitteet. MaKeKoa voidaan ajatella myös seulana, koska siinä on esitetty oikeiden ratkaistujen tehtävien prosenttiluku huolen raja-arvoksi. Tämä perustuu siihen, että matematiikan opetussuunnitelmassa mainittujen asioiden hallitseminen on yhteydessä oppilaiden iänmukaiseen kehitykseen ja sisältöjen opettamisen aikatauluun. Edellä mainitusta syystä MaKeKossa on määritelty mittausajankohta, jonka avulla pyritään vakioimaan suoritus. arviointivälinettä ei ole normitettu tutkimusaineiston pohjalta, mikä rajoittaa sen käyttöä oppimisvaikeuksien tunnistamisen perusteena. (vrt. [8]) Diasarjassa, joka on linkitetty alla olevaan otsikkoon matematiikan taitojen lähtötason kartoittamisesta opintojen alussa, avataan MaKeKo 1–9-digikokeita. Diasarjan lopussa on pieni avaus ALVA-kartoituksesta.

[Matematiikan taitojen lähtötason kartoittamisesta opintojen alussa – MaKeKo 1–9 –digikokeet.](#)

MaKeKo 1–9-digikokeisiin voi hankkia oppilaitoskohtaisen lisenssin SanomaPro:lta. Seuraavasta MaKeKo:a koskevasta linkistä pääset SanomaPro:n sivuille katsomaan kuvausta:

Ikäheimo, H., Putkonen, H., & Voutilainen, E. (2018). [MaKeKo –digikokeet](#). *SanomaPro*.

ALVA [9] - matematiikan perustaitojen kartoitus sekä harjoituksia yläkouluun ja toiselle asteelle on käytössä vaihtelevasti ammatillisissa oppilaitoksissa. Kartoitus sisältää kattavasti matematiikan perustaitoihin, kymmenjärjestelmään, sekä mittayksikköjen muutoksiin liittyviä tehtäviä. ALVAa julkaisee OPIKKO (<https://www.opikko.fi/alva/>), josta voi hankkia lisenssin kartoituksen käyttöön.

Ikäheimo, H. & Kokko, L. (2023). [ALVA \(Arvioidaan, Lasketaan ja VAhvistetaan\)](#). Matematiikan perustaitojen kartoitus, opetusmateriaaleja ja harjoitustehtäviä yläkouluun ja toiselle asteelle. *Opikko*.

Hankkimalla lisenssin ALVAN käyttöön saat samalla oikeuden käyttää korjaavaan opetukseen tarkoitettua sähköistä materiaalia.

4.2 Kartoitusten pohjalta tehtävistä jatkotoimenpiteistä

Kartoituksen avulla voidaan tunnistaa ne matematiikan osa-alueet, joissa on puutteita ja jotka myöhemmin tulisi vaikeuttamaan uuden asian oppimista. Tällöin pystytään OPVA-opinnoissa antamaan tukea ja harjoitusta riittävä määrä, jolloin opiskelija voi edetä opinnoissaan.

4.2.1 Esimerkki matematiikan perustaitojen kartoitukseen pohjautuvista jatkotoimista

Lehtorina ja työpaikkakoordinaattorina toiminut opettaja Mikko Halonen (2021), Turun ammatti-instituutista, on avannut matemaattisten perustaitojen tukemista oppimisvalmiuksia tukevien OPVA-opinnoissa. Tämä avaus täydentää otsikkoon liitettyä diasarjaa. Halonen on tarkastellut erityisesti vieraskielisten lähihoitajaopiskelijoiden opintomenestystä opintojen alussa tehdyn yksinkertaisen matematiikan taitojen kartoituksen pohjalta. Halonen on käyttänyt kartoituksena Hanna Peltosen 2013 suunnittelemaa kartoitusta, jonka saat käyttöösi seuraavaan otsikkoon liitetystä linkistä.

Peltonen, H. (2013). [Matematiikan oppimisvaikeuksien kartoitus maahanmuuttajille](#). *Hämeen ammattikorkeakoulu*.

Kartoituksen tulosten ja opintomenestyksen tarkastelun pohjalta laaditulla videolla Halonen pohtii matematiikan taitojen lähtötasokartoituksen merkitystä suhteessa opiskelijan opintomenestykseen. Videon on katsottavissa avointen oppimateriaalien kirjastosta seuraavaan otsikkoon liitetystä linkistä.

Halonen, M. (1.3.2022). [Yksinkertainen matematiikan pääsykoe vieraskielisille opiskelijoille: kuinka testatut ovat menestyneet opinnoissaan ja vieraskielisten ryhmien matemaattisten perustaitojen vahvistaminen lähihoitajakoulutuksessa](#). (Lisenssi [CC BY-SA 4.0](#)). *Jyväskylän ammattikorkeakoulu, Ammatillinen opettajakorkeakoulu*.

Videolla tuodaan esille, minkä verran tukea kullekin opiskelijalle annetaan lähtötasokartoituksen perusteella ja millaista osallistumista opiskelijalta edellytetään. Lisäksi tuodaan esille hyviä ja konkreettisia esimerkkejä, miten puutteellisia matematiikan taitoja voidaan tukea OPVA-opinnoissa.

4.2.2 Kaksi esimerkkiä matematiikan taitojen korjaavasta tuesta

Otsikkoon linkitetystä diasarjassa kuvataan esimerkkien avulla kahden opiskelijan matematiikan opiskelua korjaavan tuen merkitystä ammattiin valmistumisen kannalta. Näistä kuvauksista käy selkeästi ilmi, miten matematiikan opetuksen haasteet näkyvät alaluokkien sisällöissä. On hyvä myös huomata, että silloin kun ongelmat ovat ihan perusasioissa, ne eivät korjaannu hetkessä, vaan pitkäkestoisella ja järjestelmällisellä tuella.

4.2.3 Kohti yksilöllistä opinpolkua – Amispallot

Amispalloihin (ks. otsikkoon linkitetty diasarja, josta Amis-pallot on saatavilla) on koottu ammattikoulun matematiikan solmukohtiin liittyviä aihekokonaisuuksia, jotka koetaan tärkeäksi ammattikoulun matematiikan opinnoissa selviytymisen kannalta. Solmukohtia on pohdittu tässä tiedostossa aiemmin. Amispallojen sisällöt on valittu käytännön kokemusten perusteella. Näistä esimerkiksi kymmenjärjestelmän ymmärtäminen vaikuttaa todella monenlaisten tehtävien ymmärtämiseen. Näistä keskeisin ammatillisten opintojen kannalta lienee yksikönmuunnokset. Keskustelu opiskelijan kanssa amispallojen yhteydessä auttaa matematiikkasuhteen selvittämisessä. Opettaja kuulee, mitä opiskelija ajattelee omista matematiikan taidoistaan ja miten opiskelija suhtautuu matematiikkaan. Näin opettaja saa parhaimmillaan työkaluja opiskelijan kohtaamiseen ja oman opetuksensa suunnitteluun.

Amispalloja voi hyödyntää mm. uuden OPVA-ryhmän kanssa ensimmäisen tunnin aikana tutustumiseen ja koko OPVA-jakson aikana kurssin sisältönä. Lisäksi amispallojen avulla opiskelija joutuu heti ensimmäisellä oppitunnilla miettimään, että millaista matematiikkaa ja mitä matematiikan taitoja hän tulevassa ammatissaan tarvitsee. Amis-pallot tukevat opiskelijan tavoitteiden asettamista matematiikan taitojen opiskelulle ja voivat parhaimmillaan toimia hyvänä motivointikeinona matematiikan opiskeluun.

Esimerkki amispallojen käytöstä

Opettaja voi suunnitella omat Amispallot lähtötasokartoitusten perusteella tai ottaa tähän lukuun linkitetystä diasarjasta valmiit Amispallot käyttöön. Amispallot-moniste jaetaan opiskelijoille. Kukin opiskelija ympyröi paperista vihreällä kynällä ne sisällöt, jotka kokevat osaavansa. Vastaavasti opiskelijat merkitsevät punaisella rastilla ne sisällöt, joissa tarvitsevat mielestään harjoitusta tai joita eivät osaa. Opiskelijoiden kanssa on hyvä yhdessä keskustella monisteen sisällöistä - ymmärtävätkö kaikki, mitä Amispallot-monisteessa lukee, ja mitä paperiin kirjoitetuilla asioilla tarkoitetaan.

Kun Amis-pallot moniste on käyty läpi, aloitetaan opiskelu esimerkiksi kymmenjärjestelmästä tai jostakin muusta perustaitojen alueesta, jossa on haasteita. Aluksi ratkaistaan yhdessä muutama tehtävä. Ne, jotka ovat merkinneet osaavansa kymmenjärjestelmään liittyvät tehtävät, voivat siirtyä jo seuraavien tehtävien pariin. Ne, jotka ovat merkinneet tarvitsevansa harjoitusta kymmenjärjestelmään liittyvistä tehtävistä, saavat aiheeseen liittyviä lisätehtäviä ja asioita käydään yhdessä läpi. Opettajalta tämä vaatii yhdelle ja samalle oppitunnille monenlaisia tehtäviä ja paljon etukäteisvalmisteluja. Nopeammin eteneville voi tarjota myös sähköisiä tehtäviä, kuten esimerkiksi Ville-oppimisalustan tehtäviä (<https://ville.utu.fi/>). Amispallot tarjoavat siis mahdollisuuden edetä ryhmän sisällä yksilöllisesti ja keskittyä niihin asioihin, missä kukin opiskelija tarvitsee eniten tukea.

4.2.4 Näkökulmia ja materiaaleja matematiikan perustaitojen solmukoh-tien tukemiseen

Ikäheimo ylläpitää Opperi-verkkosivustoa "*Iloa ja Ymmärrystä matematiikkaan!*", joka tarjoaa vinkkejä ja materiaalia matematiikan opetukseen.

Ikäheimo, H. (2023). *Iloa ja ymmärrystä matematiikkaan!* Opperi. <https://www.opperi.fi/>

Opperin sivustolla on linkki Hannele Ikäheimon YouTube -videoihin Ikäheimon YouTube -kanavalle. Tällä kanavalla on 26 opetusvideota koulumatematiikan peruskäsitteiden opettamiseen toiminnallisesti. Hannele työskentelee videoilla aina yhden oppilaan kanssa. Videoiden sisältö niveltyy hyvin edellä mainitun käsikirjan "*Matematiikan osaaminen vahvaksi. Iloa opetukseen ja oppimiseen*" [6] työskentelytapoihin. Videoilta välittyy oppilaan ja opettajan välinen aito vuorovaikutus. Pääset kanavalle seuraavasta linkin kautta:

Ikäheimo, H. (2022). [Opperin YouTube –videot matematiikan opetuksesta](#). *Hannele Ikäheimon YouTube –kanava*.

Mittayksikkömuunnokset ovat yksi peruskoulun matematiikan solmukohdista ja ne haastavat opiskelijoita myös toisen asteen opinnoissa. Mittayksikkömuunnosten taustalla on kymmenjärjestelmän hallinta sekä kymmenjärjestelmän yhdistäminen dekadisiin (10-kantaisiin) mittoihin olisi tärkeää. Kymmenjärjestelmän ja mittayksikkömuunnosten välisen yhteyden Tämä tukisi sekä kymmenjärjestelmän ymmärtämistä että kymmenjärjestelmän yhteyttä mittayksikkömuunnoksiin. Toisaalta tähän liittyy myös kymmenjärjestelmään liittyvien matematiikan pohjataitojen ja -tietojen syvälinen ymmärrys. Edellä mainittuja pohjatietoja ja -taitoja ovat mm. lukukäsite, lukujonotaidot, lukujen vertailu, arviointi ja pyöristäminen, peruslaskutoimitukset, kymmenjärjestelmä, luonnolliset luvut ja desimaaliluvut. Mittayksiköitä uteliaille pdf-tiedostossa Hannele Ikkäheimo avaa kymmenjärjestelmän lukupaikkojen suhteita ja tuo esille, miten tämä osaaminen yhdistetään mittayksikkömuunnoksiin.

Ikkäheimo, H. (2023). [Mittayksiköitä uteliaille](#). *Opperi*.

Kymmenjärjestelmän hallinta tarkoittaa sitä, että opiskelija ymmärtää lukupaikkojen välisen suhteen liikuttaessa lukupaikalta toiselle ja tämä ajattelu tulisi siirtää myös mittayksikkömuunnoksiin. Tämä taito yhdistyy analogisesti kymmenkantaisten yksiköiden muunnoksiin.

Tiivistelmä luku 4

Perusteita matematiikan lähtötasokartoituksille

- Ammatillisiin opintoihin tullaan erilaisista lähtökohdista:
 - suoraan 9-vuotisesta peruskoulusta
 - vuosia peruskoulun ja/tai jonkin aikaisemman koulutuksen jälkeen
 - opiskelijan koulutausta on vähäinen ja sitä on lyhyessä ajassa täydennetty
 - opiskelijan kielitaito on puutteellinen ja haittaa tehtävien ymmärtämistä.
 - maahanmuuttajataustaisella aikuisella voi olla paljon koulutusta, mutta kielitaidossa puutteita.
- kartoituksen avulla pyritään selvittämään, onko opiskelijalla riittävät matemaattiset valmiudet ammatillisten opintojen suorittamiseen.

Mitä lähtötasokartoituksella saadaan selville

- Jos lähtötasokartoitus on mennyt hyvin, opiskelijalla on mahdollisuus edetä ammatillisiin opintoihin liittyvistä matematiikan opinnoista.
- Heikko tulos lähtötasokartoituksessa ja myös matematiikan opintojen heikko eteneminen kertovat tuen tarpeesta.
- Heikko lähtötasokartoituksen tulos ja ongelmat opintojen etenemisessä voivat olla merkkejä matematiikan oppimisvaikeuksista tai hahmottamisongelmista.

Millainen on hyvä lähtötasokartoitus?

- Kaikille ammattialoille suunnattu hyvä kartoitus sisältää ainakin peruslaskutoimitukset, prosenttilaskuja ja yksikönmuunnoksia ammattialan mukaan.
- Kartoituksen on hyvä olla jonkin verran sanallisia tehtäviä, mutta kieliasun on hyvä olla selkeä.
- Kartoituksen on hyvä olla sellainen, että opiskelija tekee sen alle puolessa tunnissa.

Pohdittavaksi lukijalle

- Mitä lähtötasokartoituksen tulosten perusteella voidaan tehdä?
- Onko matematiikan OPVA-ryhmä tarpeen opiskelijalle ennen YTO-matematiikkaa?
- Millaisia eriyttämisen keinoja voisi suunnitella lähtötasokartoitusten perusteella? Olisiko hyvä jakaa opiskelijoita tason mukaisiin ryhmiin? Entä millaista eriyttämistä voisi tehdä tehtävien avulla?

5 Matematiikkakuvan merkitys – tunteet pelissä

Matematiikkakuva rakentuu vähitellen kouluvuosien myötä. Ammatillisiin opintoihin tulevien opiskelijoiden matematiikkakuvalla tarkoitetaan tässä tunneperäistä suhtautumista matematiikkaan sekä myös matematiikkaan liittyvää motivaatiota ja uskomuksia. Opiskelijan matematiikkakuvaan on vaikuttanut hänen kouluaikaiset kokemuksensa matematiikan olemuksesta, oppimisesta ja opetuksesta sekä sosiaalisesta ympäristöstä, jossa opiskelu tapahtuu. Luokan oppimisilmapiirillä ja opiskelukulttuurilla on todettu olevan merkitystä matematiikkakuvan muodostumiselle. Kodin ja kaveripiirin vaikutusta matematiikkakuvan muodostumisessa ei voi unohtaa. Vuonna 2016 [11] julkaistun PISA-tutkimuksia koskevan raportin mukaan suomalaisten oppilaiden matematiikan osaamistaso on laskenut todella nopeasti. Myös tuoreimman PISA-tutkimuksen 2022 [12] mukaan suomalaisoppilaiden osaaminen on edelleen heikentynyt. Vuonna 2016 [11] julkaistun raportin ja vuoden 2022 PISA-tutkimuksen [12] mukaan Suomi on kuitenkin OECD-maiden matematiikan osaamistason keskiarvoa parempi. Suomalaisoppilaat pitävät matematiikan opiskelusta vähemmän kuin OECD-maiden oppilaat keskimäärin. Vaikka he eivät oikein pidä matematiikan opiskelusta, niin he kokevat vähemmän matematiikka-ahdistusta kuin PISA-tutkimuksen huippumaat. Esimerkiksi Koreassa ja Japanissa parhaimmat suoritukset ovat yhteydessä suurempaan matematiikka-ahdistukseen sekä kielteisempään minäkuvaan matematiikan oppijana sekä minäpystyvyyteen, joka käsitykseen matematiikan tehtävien osaamisesta. [13, 11] On tärkeää huomioida se, että suomalaisten peruskoululaisten matematiikkakuva on alaluokilla myönteinen, mutta muuttuu kielteisemmäksi peruskoulun loppuun mennessä. Kun matematiikkakuva on muuttunut kielteiseksi, niin sitä on yleensä vaikea muuttaa jälleen myönteiseksi. Matematiikkakuvalla on vaikutusta siihen, millaisia valintoja peruskoululaiset tekevät valitessaan toisen asteen opiskelupaikkaa. (vrt. [13]). Ammatillisiin opintoihin suuntautuvat peruskoululaiset tulevat hakemaan nimenomaan ammattia. Näin monet heistä eivät tule ajatelleeksi, että myös ammatillisissa opinnoissa opiskellaan matematiikkaa. Näille opiskelijoille matematiikka on saattanut näyttäytyä vastenmielisenä oppiaineena. Tästä syystä on tärkeää, että ammatillisten opintojen alussa selvitetään opiskelijoiden sitoutumista matematiikan opintoihin ja matematiikkakuvaa.

Ammatillisiin opintoihin hakeutuvia maahanmuuttajataustaisia opiskelijoita voivat haastaa koulunkäynnin vähäisyys sekä vasta kehitymässä oleva suomen kielen taito. Edellä mainitut asiat saattavat aiheuttaa näille opiskelijoille huolta ja ahdistumista matematiikan opintojen edistymisen suhteen. Usein matematiikan opettaja sekä OPVA-opettaja ovat niitä, jotka kohtaavat niin suomalaisten kuin maahanmuuttajataustaisten opiskelijoiden huolen matematiikan opintojen edistymisestä sekä opiskelijoiden matematiikka-ahdistuksen tuntemukset.

Opettajan on hyvä kiinnittää huomiota omaan matematiikkakuvaansa sekä siihen, miten hän, matematiikka ja opiskelija kohtaavat. Myönteisellä ja kannustavalla suhtautumisella on merkitystä. Opettaja saattaa haastaa vähäiset tuntiresurssit. Tällaisissa tilanteissa opettajat voivat kokea riittämättömyyden tunnetta. Edellä olevan perusteella on tärkeää, että opiskelijoiden matematiikkakuvaa selvitetään, jotta voidaan paremmin löytää keinoja opiskelijan tukemiseen sekä opintojen tavoitteistamiseen. (vrt. [14, 15]) Seuraaviin otsikkoihin (5.1; 5.2; 5.3) linkitetyistä diasarjoista saat tietoa matematiikkakuvan synnystä sekä siitä, miten matematiikkakuvaan voi vaikuttaa ja miten opiskelijoiden matematiikkakuvaa voidaan kartoittaa esimerkiksi Furnerin [16] laatiman kyselyn avulla. Tämä kysely on helppo liittää mukaan esimerkiksi sähköisiin /paperilla tehtäviin matematiikan lähtötasokartoituksiin tai

sitten OPVA-opettaja ja matematiikan opettaja voivat yhdessä opiskelijan kanssa käydä kyselyä keskustelemalla kyselyä läpi. Opiskelijan matematiikkakuvan selvittämisen tavoitteena on nimenomaan pyrkiä löytämään tavoitteita ja mielekkyyttä matematiikan opiskeluun sekä tukea matematiikan opintojen edistämiseen.

5.1 Matematiikkakuva ja matematiikan taidot rakentuvat vähitellen

Otsikkoon liitettyssä diasarjassa avataan lyhyesti matematiikkakuvan rakennetta, koulukokemusten merkitystä matematiikkakuvan näkökulmasta ja matematiikan taitojen eriytymistä. Matematiikan taidot kehittyvät aiemmin hankittujen taitojen pohjalta eli tämä muistuttaa ns. lumipalloefektiä. Jos aiemmin hankittujen taitojen pohja on vankka, niin aiemmin hankittu osaaminen nopeuttaa oppimista ja tukee myös myönteistä matematiikkakuvaa.

5.2 Matematiikkakuvan taustaa ja lähtökohtia ammatillisissa opinnoissa

Otsikkoon liitettyssä diasarjassa pohditaan matematiikkakuvan syntyä ja lähtökohtia ammatillisissa opinnoissa. Ammatillisiin opintoihin hakeutuvat opiskelijat tulevat useimmiten hakemaan ammattia ja toivovat käytännönläheistä opetusta. Heille ei välttämättä ole tullut mieleen, että myös ammatillisissa opinnoissa ja tulevassa ammatissa tarvitaan matematiikkaa ja myös teorian tietoja. On hyvä muistaa, että ammatillisiin opintoihin hakeutuvilla peruskoulusta tulevilla opiskelijoilla on pitkä tuttavuus matematiikan kanssa, ja heille on muodostunut näkemys siitä, mitä on matematiikka ja millaisia matematiikan oppijoita he ovat. Toisaalta ammatillisia opintoja aloittavat jo työelämässä olleet aikuiset ovat saattaneet unohtaa keskeisiä koulumatematiikan taitoja ja saattavat kokea pelkoa ja ahdistusta matematiikan opintojen alkaessa ammatillisissa opinnoissa. Näitä aikuisia olisi hyvä tukea OPVA-matematiikan opinnoilla, jotta he saisivat vahvistusta ja tukea matematiikan osaamiseen sekä myönteiseen suhtautumiseen matematiikkaa kohtaan.

5.3 Keinoja opiskelijoiden matematiikkakuvan tukemiseen

Otsikkoon liitettyssä diasarjan sisällöissä painotetaan matematiikan taitojen lähtötasokartoituksen sekä matematiikkakuvan kartoittamisen merkitystä opintojen alussa, jotta opiskelijalle voitaisiin kohdentaa yksilöllistä OPVA-matematiikan taitojen tukea. Heikko menestys lähtötasokartoituksessa sekä kielteinen matematiikkakuva usein liittyvät toisiinsa. Silloin kun osaaminen on heikkoa, niin helposti vieraannutaan matematiikasta ja kieltäydytään opiskelusta. Näille opiskelijoille tulisi saada sellaisia kokemuksia matematiikan parissa, että he kokisivat onnistumisen elämyksiä. Esimerkiksi OPVA-matematiikan tunnin kuvauksessa luvussa 2 opettaja kiinnitti erityistä huomiota siihen, että tehtävät olisivat riittävän helppoja opiskelijoille, jotta opiskelijat kokisivat onnistumisen elämyksiä. Kun kiinnitetään huomiota

myönteiseen matematiikkakuvaan ja opiskelijan taitotasoon, opiskelija hyötyy OPVA-tuesta ja pääsee matematiikan opinnoissa eteenpäin ja kokee ennen kaikkea onnistuvansa.

Furnerin [16] kehittämä matematiikkakuvan haastattelupohja antaa hyvä mallin siihen, miten lyhyesti opiskelijan matematiikkakuvaa voisi kartoittaa joko yhteisesti käydyn keskustelun tai sitten lähtötasokartoitukseen liitetyn matematiikkakuvan kyselyn avulla. Seuraavassa kuvassa 16 on Furnerin kehittämän haastattelupohjaan perustuva matematiikkakuvan kartoitus. Kuvassa 16 on myös opiskelijan vastaukset Huhtalan ja Janhosen [15] artikkelissa kuvatut opiskelijan vastaukset.

Kuva 16

Furnerin [16] kehittämä matematiikkakuvan haastattelupohja Huhtalan ja Janhosen [15] mukaan

Lauseen alku (opettajan antama)

1. Matikka herättää minussa sellaisen fiiliksen, että...
2. Kun kuulen sanan matematiikka, ...
3. Matikan opiskelusta tulee aina mieleen...
5. Haluaisin oppia matikassa... (Miksi?)
6. Haluaisin välttää matikassa... (Miksi?)
7. Lempiasiani matikassa on...
8. Jos voisin kysyä yhdestä asiasta matikassa, se olis...

EXTRA: Haluaisin vielä kertoa, että...

Lauseen jatko (opiskelijan laatima)

- Olen väärässä paikassa.*
- tulee fiilis että haluaisin kyllä oppia mutta en usko että opin. en oo ainakaan tähän mennessä oppinu.*
- ala-aste*
- Musta tuntuu suoraan sanoen järkyttä tulla matikan opetukseen. Se ei liity sinuun mutta kuitenkin.*
- En osaa sanoo asioita. Ainakaan oikeilla nimillä, Haluaisin kuitenkin valmistua ammattiin ja opettajan mukaan jotakin matikkaa täytyis osata.*
- Mielellään ihan kaikkea. Mutta ainakin prosenttilaskuja niitä muunnoksia, kun veivataan niitä jakolaskuja ja näitä.*
- Koominen kysymys. Ehkä mittaaminen. Jostakin syystä osaan hyvin ne keittiömitat.*
- Miks tää on niin vaikeeta.*
- Mä pelkään että tää katu tähän matikkaan. Nyt jo tarviin jotakin tukiopetusta vaikka nuoremmatki pärjää hyvin. Tosin ne on kyllä harjottellu vähemmän aikaa sitten.*

Furnerin [16] kehittämää haastattelupohjaa voi käyttää opiskelijan kanssa Amispallojen (ks. luku 4.2.3) yhteydessä ensimmäisellä OPVA-matematiikan tunnilla tai haastattelupohjan voi liittää osaksi matematiikan taitojen lähtötasokartoituksen yhdeksi osa-alueeksi. Jos kielitaidossa tai luetun ymmärtämisessä on kovasti haasteita, voidaan kuvan 16 matematiikkakuvan kartoituksen tilalla käyttää kuvan 17 kaltaista helpotettua haastattelupohjaa.

Kuva 17

Lähtötasokartoitukseen liitettävä haastattelupohja Furneria [16] mukailten

Vastaa kysymyksiin 1–3. Valitse kolmesta vastausvaihtoehdosta sinulle sopivin. Merkitse valintasi rastilla.

- | | | | |
|---|--------------------------------|-------------------|----------------------------------|
| 1. Matematiikka tuntuu minusta | 😊 kivalta | 😐 ei miltään | 😞 kurjalta |
| 2. Kun kuulen sanan matematiikka | Haluaisin oppia matematiikkaa | En osaa sanoa | En usko, että opin matematiikkaa |
| 3. Matematiikan opiskelusta tulee mieleen | Matematiikan opiskelu koulussa | Pelko ja ahdistus | Innostus |

Kirjoita lyhyt vastus seuraaviin lauseisiin 4–8.

4. Haluaisin oppia matematiikassa
5. Haluaisin välttää matematiikan opiskelussa
6. Paras asia matematiikan opiskelussa on
7. Esitä yksi kysymys matematiikasta
8. Haluaisin vielä kertoa matematiikan opiskelusta, että

Kuvan 17 haastattelupohjan voi liittää mukaan matematiikan taitojen lähtötasokartoitukseen tai sitä voidaan käyttää esimerkiksi Amispallojen käytön yhteydessä haastattelupohjana.

Tiivistelmä luku 5

Mitä on matematiikkakuva?

- tunneperäinen suhtautuminen matematiikkaan
- uskomukset itsestä opettajana tai oppijana
- uskomukset matematiikasta (Mitä ja millaista matematiikka on? Miten opitaan/opetetaan?)

Miten matematiikkakuva syntyy?

- Synty vähitellen kouluvuosien aikana
- Matematiikkakuvan rakenteeseen vaikuttavat
 - kokemukset oppimistilanteissa, oppimisympäristön ilmapiiri ja kulttuuri
 - matematiikan luonne: *Millaisena matematiikka koetaan?; Miten matematiikkaa opetetaan ja opitaan?*
- *Opettajan ammatillinen identiteetti ja tapa kohdata opiskelija matematiikan oppimis- ja opetustilanteissa ovat keskeisiä opiskelijan matematiikkakuvan rakenteeseen vaikuttavia tekijöitä*

Miten vaikuttaa?

- Matematiikkakuva vaikuttaa toisen asteen koulutuksen valintaan
 - ajatus, että ammatillisissa koulutuksissa ei tarvita matematiikkaa
- Heikosti matematiikassa pärjänneiden oppilaiden tuntemukset usein negatiivisia
 - johtaa matematiikan välttämiseen ja matematiikka-ahdistukseen: fysiologisia reaktioita, välttelyä ja mielen kuormittumista

Miten tukea opiskelijan matematiikkakuvaa?

- Opiskelijan matematiikkakuva on tärkeä selvittää
 - Tavoitteena löytää keinoja opiskelijan tukemiseen
- Hyvä vuorovaikutus ja itsearviointi (vahvuudet ja heikkoudet)
- Minäpystyvyyden tukeminen ja onnistumisen tunne
- Kielentäminen oppimisen keinona
- Itselle sopivien opiskelutapojen löytäminen ja oman edistymisen seuraaminen (konkreetia)

Pohdittavaksi

- Miten kannattaa tukea opiskelijaa, jolla on matematiikka-ahdistusta?
- Miten vaikutan omalla suhtautumisellani opiskelijoiden matematiikkakuvaan?
- Kartoitetaanko oppilaitoksessanne matematiikan taitojen ohella matematiikkakuvaa?

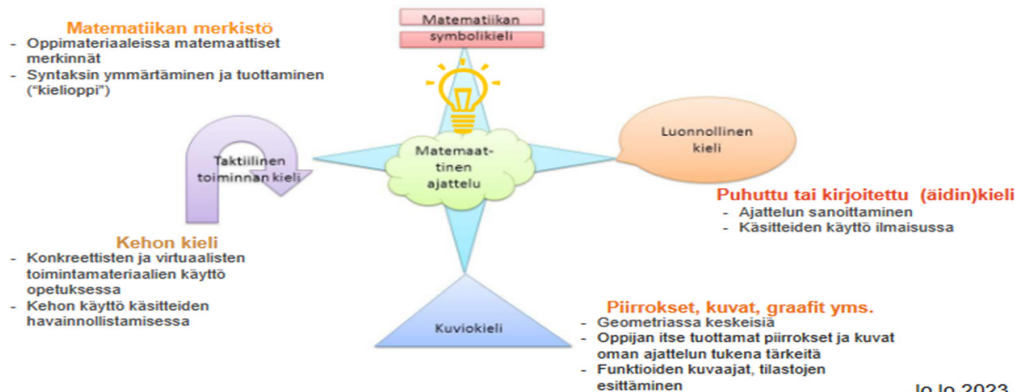
6 Kielentäminen matematiikan oppimisen työkaluna

Kielentämisen perusajatuksena on saada opiskelijan matemaattinen ajattelu näkyväksi. Edellä mainittu on myös haaste kouluopetukselle. Joutsenlahti ja Tossavainen [17] nostavat kielentämisen yhdeksi lähestymistavaksi informaation eli tiedon prosessoinnin, jota säätelevät affektiiviset tekijät (vrt. matematiikkakuva) sekä yksilön aikaisemmat tiedot ja taidot (metakognitiot). Metakognitioilla voidaan ymmärtää yksilön ajattelua omasta ajattelustaan, johon kuuluu omien ajatteluprosessien tunteminen, kontrolli ja uskomukset sekä intuitiot [18, 19]. Kielentämisen ydinajatuksena on saada opiskelija ymmärtämään matemaattisia käsitteitä ja sisältöjä oman matemaattisen ajattelun avaamisen avulla. Kun opiskelija avaa matemaattista ajatteluaan näkyväksi, samalla toiset opiskelijat (vertaisoppijat) ja opettaja voivat oppia tästä ajattelun avauksesta. Lisäksi opettaja saa arvokasta tietoa opiskelijan ajattelun tasosta ja voi ohjata opiskelijan ajattelua. Opettaja voi myös arvioida ja suunnitella mahdollista tuen tarvetta. Kielentäminen innostaa keskusteluun ja jopa väittelyyn esimerkiksi erilaisista ratkaisutavoista. Kielentäminen välittää opiskelijalle kuvaa siitä, että tehtäviin ei ole olemassa yhtä ainoaa ratkaisutapaa, vaan tehtävän voi ratkaista monella eri tapaa (ks. kuva 18). Kielentämisen yhteydessä matemaattinen ajattelu ymmärretään *konseptuaalisen* (käsitteellisen), *proseduraalisen tiedon* eli *menetelmällisen tiedon* (matematiikan symbolinen järjestelmä ja myös matematiikan algoritmit, proseduurit sekä säännöt matemaattisten ongelmien ratkaisemiseksi) tai *strategisen tiedon* (ongelmanratkaisussa esille tuleva tieto) prosessointina [19, 18]. Matemaattisen ajattelun ilmaiseminen voi tapahtua seuraavassa kuvassa 18 esitetyillä kielillä erikseen tai näitä kieliä yhdistellen. Kuvassa 18 on annettu myös esimerkkejä, mitä ilmaisullisia keinoja voidaan eri kielillä käyttää.

Kuva 18

Matematiikan opiskelussa käytetyt kielet: matematiikan symbolikieli, luonnollinen kieli (puhuttu kieli), taktiilinen toiminnan kieli (tähän liitetään myös kehon kieli) sekä kuviokieli [2]

Matemaattisen ajattelun ilmaiseminen kielentämällä: neljän kielen malli (Joutsenlahti & Rättyä 2015)



Kuvan 18 kielet täydentävät hyvin toisiaan ja niillä on omat ilmaisulliset vahvuutensa. *Luonnollinen kieli* (puhuttu kieli) on merkityksellistä etenkin silloin, kun käsitteitä halutaan avata ja niille haetaan merkityksiä. *Matematiikan symbolikieli* näyttäytyy tehokkaana silloin, kun halutaan kuvata käsitteiden / asioiden laadullisia muutoksia. *Kuviokielen* vahvuus näyttäytyy erityisesti käsitteiden välisissä yhteyksissä. *Taktiilista toiminnan kieltä* ja *kehon kieltä* käytetään edellisten kielten rinnalla asioiden havainnollistamiseen. Yleensä matemaattisten käsitteiden määritelmät voidaan ilmaista luonnollisella kielellä, kuviokielellä ja matematiikan symbolikielellä. (vrt. [17])

OPVA-opettaja ja matematiikan opettaja joutuvat kohtaamaan matematiikan opinnoissa maahanmuuttajataustaisten opiskelijoiden erilaisia kieliä (äidinkieli ja suomen kieli). Maahanmuuttajataustaisille ja myös suomalaisille peruskoulusta tuleville opiskelijoille on tärkeää matematiikan oppimisen kannalta, että kuvan 18 kieliä käytetään opetuksessa rikkaasti ja monipuolisesti. Kuvan 18 kielten monipuolinen käyttö rakentaa ymmärrystä sekä matemaattisten käsitteiden ja merkintöjen että suomen kielen opiskeluun. Kun käytetään useita kieliä (ks. kuva 18) samassa tilanteessa, niin silloin voidaan puhua koodinvaihdosta (*code switching*) (vrt. [21]). Opiskelija saattaa vaihtaa kieltä esimerkiksi kesken matemaattisen ongelmanratkaisun (esim. suomen kielestä piirtämiseen tai taktiiliseen toiminnan kielen tai suomen kielen omaan äidinkieleensä tai matematiikan symbolikieleen), jolloin kielen valintaan vaikuttaa se, millä kielellä opiskelija pystyy parhaiten kuvaamaan ajatteluaan: opiskelija käyttää sitä kieltä, millä hän on ymmärtänyt ratkaisun tai käsitteenmuodostusprosessin parhaiten. (vrt. [17]) Seuraavien alalukujen otsikoihin linkitetyt diasarjat sekä luvuissa vinkatut materiaalit avaavat kielentämistä ja sen käyttöä syvällisemmin.

6.1 Matematiikan osaamisen, kielentämisen ja matemaattisen ajattelun määrittelyä

Otsikkoon liitettyssä diasarja avataan matematiikan kielentämistä matematiikan ymmärtämisen rakentamisen kehyksessä. Opetushallituksen rahoittamassa LUMATIKKA-hankkeessa (2018–2022) (CC BY-SA 4.0-lisenssi, joka mahdollistaa aineistojen kopioimisen, levittämisen ja muokkaamisen omiin tarkoituksiin sopiviksi) on tuotettu matematiikan kielentämiseen liittyviä videoita. Seuraavilla videoilla yliopistonlehtori Jorma Joutsenlahti Tampereen yliopistosta avaa luvun 6.1 otsikkoon linkitettyjen dioiden sisältöä syvällisemmin.

Joutsenlahti, J. (2022). Matemaattisen ajattelun kielentäminen. *LUMATIKKA –hanke (2018–2022)*. <https://www.youtube.com/watch?v=T428kK6QulQ>

Perusteita matematiikan kielentämisen käyttämiseen oppimisen välineenä, antaa Joutsenlahden (2022) avaus kielentämisen painotuksiin ohjausasiakirjoissa.

Joutsenlahti, J. (2022). Matemaattinen kielentäminen ohjausasiakirjoissa. *LUMATIKKA –hanke (2018–2022)*. <https://www.youtube.com/watch?v=91jyQfCY9IE>

Seuraavassa artikkelissa yliopistonlehtorit Joutsenlahti ja Perkkilä (2022) avaavat, miten kielentäminen tukee matematiikan oppimista ja erityisesti matematiikan ymmärtämistä.

Perkkilä, P., & Joutsenlahti, J. (2022). Matemaattisen ajattelun kielentäminen ymmärtävän oppimisen perustana. *Dimensio-lehti*, 20.1.2022. <https://dimensiolehti.fi/matemaattisen-ajattelun-kielentaminen-ymmartavan-oppimisen-perustana/>

Artikkelissa tarkastella kielentämistä matematiikan opetuksessa eri kouluasteilla, esiopetuksesta peruskoulun loppuun.

6.2 Kielentämisen näkökulma matematiikan oppimateriaaleissa - tehtäväesimerkkejä

Otsikkoon liitettyssä diasarjassa avataan oppimateriaaleissa esiintyvää kielentämistä sekä kielentämisen käyttöä tehtävissä. On todettava, että oppimateriaaleissa esiintyvä kielentäminen on annettu valmiina mallina, jolloin opiskelijan oma ajattelu asiasta ei tule esille. On tärkeää, että opiskelijoiden ajattelua haastetaan kielentämistä vaativilla tehtävillä, jolloin opiskelijan ajattelu tulee näkyväksi toisille.

6.2.1 Kirjallisen kielentämisen malleja

Otsikkoon linkitettyssä diasarjassa on esitelty kirjallisen kielentämisen malleja matematiikan tehtävien ratkaisuisissa. Lukuunottamatta standardimallia tiekarttamalli, kertomusmalli, kommenttimalli ja päiväkirjamalli toimivat hyvin tehtävän ratkaisijan ajattelun esille tuomisessa ja mallintamisessa lukijalle. Seuraavalla videolla Joutsenlahti avaa kirjallista kielentämistä luokkien 6–9 opetuksessa.

Joutsenlahti, J. (2022). Esimerkkejä kirjallisesta kielentämisestä luokille 6–9. *LUMATIikka –hanke (2018–2022)*. <https://www.youtube.com/watch?v=HTXqX484Okw>

Matematiikan kirjallisesta kielentämisestä ja siihen liittyvistä malleista on saatavilla lisätietoa Joutsenlahden (2009) sekä Joutsenlahden ja Tossavaisen (2018) artikkeleissa [20, 17].

6.2.2 Esimerkkejä kielentämisen tehtävistä

Seuraavassa matematiikan kielentämisen tehtävämonisteessa on Joutsenlahden [22] esittämiä kielentämisen tehtäviä.

Joutsenlahti, J. (2015). *Omin sanoin matematiikan maailmassa*. Tampereen yliopisto.

Edellä esitetyssä harjoitusmonisteessa on muutamia tehtävätyyppejä, jotka sopivat erittäin hyvin myös OPVA-opetukseen. Silloin kun halutaan varmentaa koulumatematiikan sanastojen ja käsitteiden hallintaa, niin esimerkiksi seuraavat kuvissa 19–20 esitetyt harjoitusmonisteen [22] tehtävätyypit ovat mielekkäitä.

- A. Tehtävät 1 ja 2, jotka liittyvät käsitteiden kertaamiseen. Kuvassa 19 kerrataan geometrian käsitteitä. Käsitteitä voi kerrata ja selittää myös Alias –pelin avulla.

- B. Sarjakuvatyyppiset (ks. kuva 20) harjoitustehtävät 3c, d, e ja f [22] tukevat hyvin matemaattisen ajattelun kielentämistä. Nämä tehtävät ovat *ennen-jälkeen-tehtäviä*, joissa on esitetty tehtävän alku- ja lopputilanne. Harjoitustehtävistä [22] ensimmäinen (3c) liittyy peruslaskutoimituksiin ja jälkimmäiset (3d, e, ja f) liittyvät murtolukuihin. Opiskelijan tehtävänä on mallintaa kuvista tarina ja laskulause.

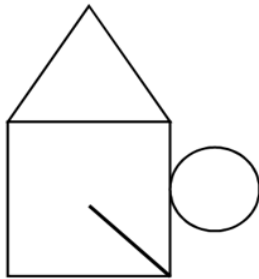
Kuva 19

Geometrian käsitteiden kertausta [22]

HARJOITUS 1

Suullinen kielentäminen: parityöskentelyssä toinen pari saa kuvan, jota ei näytä parilleen. Kuvan saanut oppilas ohjaa toista oppilasta piirtämään vain puheen avulla aivan samanlaisen kuvan paperille (joko vapaalla kädellä tai viivaimen ja harpin avulla). Mittauksia ei tehdä, vaan arvioidaan silmämääräisesti mitat ja kerrotaan ne parille.

Geometrian käsitteitä: (tasasivuinen) kolmio, neliö, jana, ympyrä



HARJOITUS 2

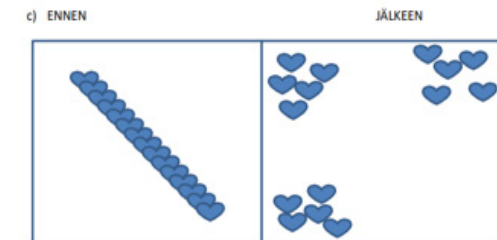
Suullinen kielentäminen: Suunnittele geometrian oppisisältöjen keskeisistä kuviosta tai kappaleista (esim. monikulmiot, ympyrä – sen osat tai kappaleet) kuva, jonka selittämisessä käsitteiden käyttöä tulee harjoitella.

Geometrian käsitteitä:

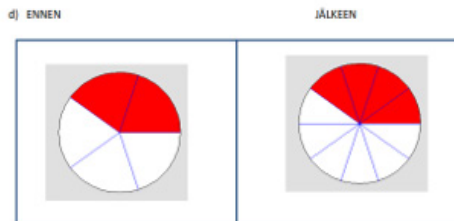
Kuvassa 20 kielentäminen perustuu tehtävien kuvaamiseen ennen-jälkeen sarjakuvilla.

Kuva 20

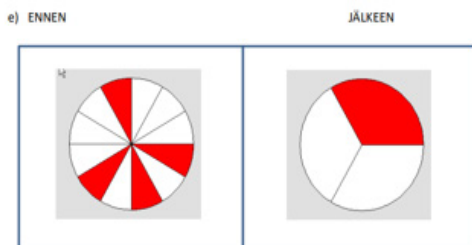
Matematiikan kielentämisenharjoituksia peruslaskutoimituksista sekä murtoluvuista [22]



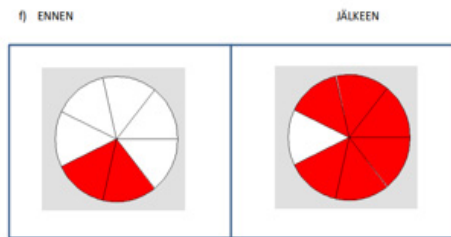
Tarina matematiikan kielellä: _____
 Voisiko olla muita tarinoita: _____



Tarina matematiikan kielellä: _____
 Voisiko olla muita tarinoita: _____



Tarina matematiikan kielellä: _____
 Voisiko olla muita tarinoita: _____



Tarina matematiikan kielellä. Löydätkö kaikki neljä laskutoimitusta: _____
 Voisiko olla muita tarinoita: _____

Edellä mainitut tehtävätyypit soveltunevat niin maahanmuuttajataustaisille opiskelijoille kuin peruskoulusta tuleville opiskelijoille. Harjoitusmonisteen [22] tehtävät 6 (lausekekielennys) ja 7 (tehtävän ratkaisun selittäminen) ovat myös luonteeltaan sellaisia, jotka soveltuvat mainiosti OPVA-harjoituksiin. Opiskelijaa voi ohjata matematiikan kielentämiseen ja tehtävän ratkaisun tuottamiseen myös Ikäheimon [6] tarinapaperin avulla. Kuvassa 21 on esitetty tarinapaperi, joka ohjaa sanallisen tehtävän ratkaisuun. Kuvan 21 tarinapaperissa on seuraava tehtävä:

Tehtävä

Vuoden alusta lohisäilykkeen sisällön määrää lisättiin 20 %, niin että se painoi 180 grammaa. Kuinka paljon lohisäilyke painoi viime vuonna? [23]

Tällaisen tehtävän ratkaisu kannattaa aloittaa pyytämällä opiskelijoita keskustelemaan ryhmässä tehtävästä ja mahdollisista ratkaisustrategioista sekä siitä, kuinka tehtävää voisi mallintaa. Tämän jälkeen opiskelijat ohjataan ratkaisemaan tehtävä ensin värisauvoilla, sitten piirtämällä ja lopuksi luonnollista kieltä käyttäen. Vasta näiden vaiheiden jälkeen laaditaan ratkaisu matematiikan kielellä. Lisäksi opis-

kelijoita voi pyytää selittämään, miten he selittävät laskun käyttäen taulukkoa, kaaviota tai kuvaa. Seuraavassa kuvassa on tarinapaperi, johon on sijoitettu edellä esitetty sanallinen tehtävä. Opiskelijan tehtävänä on kielentää tehtävän ratkaisua edellä kuvatun ratkaisuprosessin ohjeistuksen mukaisesti.

Kuva 21

Sanallisen tehtävän ratkaisun ohjaaminen tarinapaperin [6] avulla. Esimerkki: aloitetaan tarinasta (sanallisesta tehtävästä) sijoittamalla tehtävän tarina ja kysymys tarinapaperille. Muut kohdat ratkaistaan ohjeistuksen mukaan.

1. Kysymys matematiikan kielellä
2. Ratkaisu välineillä ja/tai piirtämällä
3. Tarina (sanallinen tehtävä) <i>Vuoden alusta lohisäilykkeen sisällön määrää lisättiin 20 %, niin että se painoi 180 grammaa.</i>
4. Kysymys sanallisesti (tarinaan / tehtävään liittyvä kysymys) <i>Kuinka paljon lohisäilyke painoi viime vuonna?</i>
5. Vastaus sanallisesti kokonaisella lauseella
6. Lasku ja sen tulos matematiikan kielellä

Ikäheimon [6] mukaan tarinapaperissa voi olla valmiina esimerkiksi laskulauseke, joka opiskelijan tulee ratkaista tarinapaperin osioiden ohjaamana kielentämällä. Tarinapaperi ohjaa mainiosti matematiikan kielentämiseen sekä sanallisten tehtävien ratkaisuun ja ymmärtämiseen. Edellä annetut tehtävät tukevat hyvin luonnollisen kielen käyttöä matematiikan oppimisessa ja opetuksessa.

Hyvä esimerkki kielentämistä tukevista projekteista on *Jyväskylän yliopistossa toteutettu Darling (Dialogic argumentation for learning) – projekti*, jossa harjoiteltiin argumentoinnin taitoja. Projektin tehtävät ja tuntuuennitelmat tukevat kielentämistä. Darling-projektissa seurattiin opettajien ja opiskelijaryhmien argumentaatiotaitojen kehittymistä. Kohderyhmänä olivat samat oppilasryhmät 7. luokan alusta 8. luokan loppuun. Projektin sivustolta löytyy Darling-projektissa kehiteltyjä materiaaleja mm. matematiikan opetukseen. Esimerkiksi yhtälönratkaisua voi opiskella vaakamallin avulla konkreetti-

sesti. Darling-projektin sivustolta pääsee tarkastelemaan vaakamallin käyttöä yhtälön ratkaisussa valitsemalla ensin matematiikan tehtävät ja niiden alta algebra -osion, josta löytyy yhtälön ratkaisemiseen liittyvää materiaalia opetukseen. Kannattaa kurkata myös muita materiaaleja.

Darling-argumentaatiomateriaali (2019). Matematiikan tehtävät. *Koppa, Jyväskylän yliopisto*.
<https://koppa.jyu.fi/avoimet/okl/darling-argumentaatiomateriaali/tunnin-rakenteet>
[Esimerkki Darling-projektin tehtävistä - yhtälön ratkaisu vaakamallilla](#)

Seuraavassa luvussa tarkastelemme kieltä matematiikan oppimisessa ja tässä erityisesti selkokielistä matematiikan opetuksessa.

6.3 Kieli matematiikan oppimisessa

Otsikon diasarjassa tarkastellaan kieltä matematiikan oppimisessa kielitietoisuuden näkökulmasta. Matematiikan kielellä on moninaisia esitysmuotoja. OPVA-matematiikan tunnilla opettaja saattaa ottaa oppitunnin alussa puheenvuoron selittääkseen opittavaa asiaa tai hän saattaa pysähtyä ohjaamaan opiskelijaa avatakseen käsillä olevaa asiaa tai tehtävää. Jos suomen kielen taito on heikko tai opiskelija ei hallitse matematiikan akateemista kieltä, saattaa opettajan selityksen seuraaminen olla opiskelijalle vaativaa. On tärkeää, että opettaja

1. *puhuu selkeämmin ja hitaammin*
2. *sanallistaa ja toistaa* (pyrkii löytämään arjen yhteyksiä ja avaa arkikielen ja matematiikan kielen välisiä yhteyksiä)
3. *käyttää samoissa yhteyksissä samoja ilmauksia*
4. *käyttää mallintamista hyväkseen* (piirtää, näyttää välineillä, ilmeillä ja eleillä)
5. *käyttää selkokieltä tehtävien rakenteen avaamisessa*

Kaiken kaikkiaan kielentämisen keinot antavat opettajalle hyviä keinoja oppimistilanteissa matematiikan kielen avaamiseen. On tärkeää, että myös opiskelijoita kannustetaan käyttämään kielentämisen keinoja oman ymmärryksen avaamisessa. Hakamiehen ja Takalan (2023) artikkelissa on monipuolisesti avattu konkreettisten esimerkkien avulla kielen ja matematiikan oppimisen välisiä yhteyksiä. Artikkelin antaa keinoja siihen, miten opettaja voi avata matematiikan akateemista kieltä.

Hakamies, M. & Takala, T. (2023). Kohti kielitietoisuutta – kielen ja matematiikan oppimisen kytkökset. *Dimensio-lehti*, 6.4.2023. <https://dimensiolehti.fi/kohti-kielitietoisuutta-kielen-ja-matematiikan-oppimisen-kytkokset/>

Kielitietoisen opettajan tarkistuslista antaa vinkkejä opettajalle matematiikan opetukseen. Lista on laadittavissa pdf-muotoisena MAOL r.y.:n sivuilta seuraavasta linkistä:

Takala, T. (kokoaja). 2022. *Kielitietoisen opettajan tarkistuslista*. [bit.ly/selkotarkistaMAOL; https://maol.fi/app/uploads/2022/09/Kielitietoisen-opettajan-tarkistuslista.pdf](https://maol.fi/app/uploads/2022/09/Kielitietoisen-opettajan-tarkistuslista.pdf)
Lisätietoja: selkokeskus.fi/selkokieli/MAOLin-kielitietoisuuskoulutus.

MAOL r.y. on julkaissut OPH:n rahoittamassa koulutushankkeessa (2022) luotuja kielitietoisen opetuksen tueksi.

Kielitietoisuus matematiikan opetuksessa (2023). MAOL. <https://maol.fi/materiaalit/kielitietoisuus-matematiikan-opetuksessa/>

Opetushallituksen sivuilta on saatavilla 'Kielitaidon tasojen kuvausasteikko', jonka avulla saadaan tietoa suomen kielen taitotasosta. Tämä asteikko antaa OPVA-opettajalle tietoa siitä, mitä asioita hän opiskelijan edellyttää osaavan niin suomen kielen kuin myös matematiikan kielen ymmärtämisen osalta.

Kielitaidon tasojen kuvausasteikko. OPH. https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/kielitaidon_tasojen_kuvausasteikko.pdf

Yliopistonlehtori Päivi Portaankorva-Koivisto on perehtynyt kielitietoiseen matematiikan opetukseen. Seuraavalla videolla hän avaa mielenkiintoisella tavalla esimerkkien avulla matematiikan osaamista ja kielitietoisuuden opetuksen perusteita. Lisäksi hän tuo hyvin esille sen, miten kielentäminen tukee mainiosti kielitietoista opetusta sekä matematiikan oppimista. Video on tuotettu osana Opetushallituksen rahoittamaa LUMATIKKA-hanketta (2018–2022). (CC BY-SA 4.0-lisenssi, joka mahdollistaa aineistojen kopioimisen, levittämisen ja muokkaamisen omiin tarkoituksiin sopiviksi.)

Portaankorva-Koivisto, P. (11.11.2020). LUMATIKKA-webinaari: Kielitietoisuus matematiikan opetuksessa. LUMATIKKA –hanke (2018–2022). <https://www.youtube.com/watch?app=desktop&v=lZZaTgH288>

Matematiikan kirjallinen kieli voi olla kuvallista, sanallista, symbolikielistä (numeerista tai algebrallista). Usein matematiikan sanallinen kieli haastaa opiskelijoita ja esimerkiksi sanalliset tehtävät voivat olla eri kielialueilta tuleville opiskelijoille haasteellisia ymmärtää. Ymmärtämistä vaikeuttaa heikko suomen kielen taito ja tehtävien sisältöön liittyvät suomalaiselle kulttuurille ominaiset sisällöt. Opiskelijoiden on vaikeaa ymmärtää sanallisen tekstin kielellistä sisältöä ja sen yhteyttä matemaattiseen ilmaisuun. Tästä syystä opettajan on hyvä avata sanallisia tehtäviä selkokielellä. Portaankorva-Koivisto (2020) tuo esille edellä mainitulla videolla, miten selkokielinen sanallisen tehtävän avaus tukee myös kansainvälisiä oppilaita eli kaikki hyötyvät selkokielisestä tehtävän avauksesta. Matematiikan opettamisessa on hyvä huomioida, että opiskelijan oma äidinkieli on hänen matemaattisen ajattelunsa ja ongelmanratkaisun kieli. Opiskelijalle on annettava aikaa kielelliselle prosessoinnille omalla äidinkielellä. Opetuksessa yhdistyvät opettajan ohjauspuhe ja matemaattisen työskentelyn puhe, joiden vuorovaikutuksesta rakentuvat matemaattiset merkitykset. On annettava aikaa vuorovaikutukselle ja keskustelulle, jossa yhdistyvät opiskelijan äidinkieli, matematiikan kieli sekä matemaattinen ajattelu. Opetettavan matemaattisen kielen ja matemaattisten käsitteiden sekä termien ymmärtämistä tukee hyvin keuhollisen, taktiilisen toiminnan kielen, luonnollisen kielen, kuviokielen sekä matematiikan symbolikielen käyttö. Selkokieli on suomen kielen muoto, jota on mukautettu sisällön, sanaston ja rakenteen osalta yleiskieltä luettavammaksi ja ymmärrettävämmäksi. Kognitiivisesta näkökulmasta painottuvat tiedon ja tiedonkäsittelyn saavutettavuus sekä ymmärtämistä, hahmottamista, muistamista ja uuden tiedon oppimista helpottavat ratkaisut. Seuraavissa esimerkeissä (1–3) on annettu esimerkkejä matematiikan tehtävien avaamisesta selkokielellä.

Esimerkki 1.

Alkuperäinen tehtävä: Torimyyjän luumut (Edita, 2012):



Kuva jillWellington, Pixabay

Torimyyjä osti 120 kg luumuja hintaan 1,00 €/kg. Neljäsosa luumuista oli niin huonoja, että ne myytiin tappiolla 0,50 €/kg. Mikä oli hyvälaatuisten luumujen myyntihinta, kun luumujen mynnistä jäi myyjälle 100 € tuottoa?

Tehtävässä on paljon tietoja, joita voi olla vaikea ymmärtää. Siksi tehtävä on hyvä jaotella pienempiin osiin laskutehtävän etenemisen mukaan esimerkiksi seuraavalla tavalla:

Tehtävä selkokielellä:

Torimyyjä osti 120 kilogramma (kg) luumuja. Yksi kilogramma luumuja maksoi yhden euron (1,00 €/kg).

a) Kuinka paljon torimyyjä maksoi luumuista?

Torimyyjän luumuista oli pilaantuneita yksi neljäsosa kilogrammaa.

b) Kuinka monta kilogrammaa 120 kilogrammasta luumuja oli pilaantuneita?

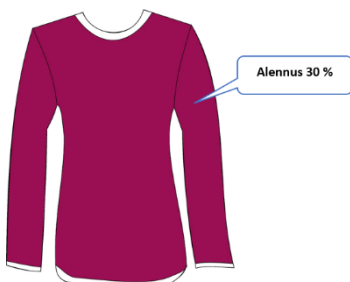
c) Kuinka paljon pilaantuneet luumut maksoivat, kun niiden myyntihinta oli 0,50 €/kg

d) Kuinka monta kilogrammaa luumuista oli hyvälaatuisia?

e) Laske mikä oli hyvälaatuisten luumujen myyntihinta? Torimyyjä sai kaikkien luumujen mynnistä voittoa 100 €.

Esimerkki 2.

Alkuperäinen tehtävä: Puseron alennettu hinta:



Kuva OpenClipart-Vectors, Pixabay

Puseron alkuperäinen hinta oli 40 €. Alennusmyynnissä pusero myytiin 30 % alennuksella. Kuinka paljon pusero maksoi alennusmyynnissä?

Tehtävä selkokielellä:

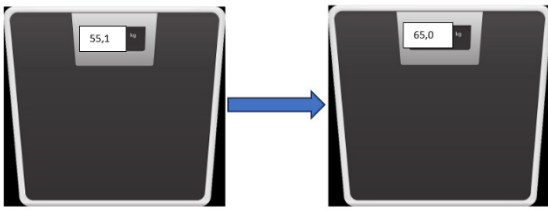
Pusero maksoi 40 €. Alennusmyynnissä puserosta sai 30 % alennuksen.

a) Kuinka paljon puserosta sai alennusta?

b) Mikä oli puseron alennettu hinta?

Esimerkki 3.

Alkuperäinen tehtävä: Painon nousu:



Miran paino oli noussut 55,1 kg:sta 65 kilogrammaan. Kuinka paljon hänen painonsa nousi prosentteina?

Tehtävä selkokielellä

Miran paino oli noussut 55,1 kg:sta 65 kilogrammaan.

- Kuinka monta kilogramma Miran paino oli noussut?
- Kuinka monta prosenttia Miran paino oli noussut?

Selkokielen avaamiseen ja opetteluun matematiikan opetuksessa on saatavissa hyviä materiaaleja, joita on tuotu esille alla olevassa luettelossa:

Göös, R.-I. & Laitinen, I. (2009). *Arkimatikkaa*. Kehitysvammaliitto. Opike. (sisältää selkomateriaaleja erityisopiskelijoille ruuanlaittoon, rahankäyttöön, puhtaanapitoon).

Huhtala, S. (27.1.2021). *Oppijan ikä kaikki. Matematiikan oppimiseen ja opettamiseen liittyviä vinkkejä*. <https://blogs.tuni.fi/oppija/numerotaidot/matematiikan-oppimiseen-liittyvia-vinkkejä/>

Kilkki, S. (2020). *Arkimatikkaa: raha, tablettisovellus*. Kehitysvammaliitto. Opike. (App Storesta ladattavat harjoitukset rahankäytöstä; kuuluu Arkimatikkaa-kirjasarjaan.)

Leskelä, L. 2019. *Selkokieli. Saavutettavan kielen opas*. Helsinki: Opike.

Euroopan sosiaalirahaston ja valtion rahoittamassa kaksivuotisella hankkeella on syntynyt materiaali matematiikan perustaitojen vahvistamiseen. Tämän hankkeen tavoitteena oli Taito-ohjelman mukaisesti *aikuisten maahanmuuttajien* perustaitojen parantaminen. Materiaali tukee *perusopetuksen suomen kielen ja matematiikan opiskelua* sekä erityisesti opiskelijan *luku- ja kirjoitustaidon ja numerotaitojen opiskelua*. Materiaalikokonaisuus soveltuu niille opiskelijoille, joiden kielitaito on eurooppalaiseen viitekehitykseen suhteutettuna alle A1.3 ja matemaattiset taidot ovat heikot. Materiaali soveltuu käytettäväksi esimerkiksi *aikuisten maahanmuuttajien lukutaito- ja alkuvaiheen opetuksessa*:

Mäkirinta, J., Toppola, T. Sojakka, K., Partanen, P., Aarnio, M., & Mäkelä, V. (2020). *Numerotaidot. Osaan opiskella matematiikkaa. Perustaitojen oppimista vahvistava opiskelumateriaali*. Vanajaveden Opisto, Ammattiopisto Tavastia ja Otavan Opisto. <https://osaansuomessa.fi/wp-content/uploads/2021/01/Osaan-opiskella-matematiikka-final.pdf>

Edellä mainitun käsikirjan pohjalta on tehty Otavan Opiston Muikkuverkkoon Matematiikan startti 1 ja Matematiikan startti 2 – kurssit (kurssit on tarkoitettu käytettäväksi Numerotaidot -materiaalin yhteydessä, koska tehtävät voi kuunnella Muikkuverkon sivustolla), joita pääset tutkimaan seuraavasta muikkuverkon linkistä.

Muikkuverkko (2022). *Materiaalit*. Otavan Opisto.

<https://otavanopisto.muikkuverkko.fi/workspace/matematiikan-startti/materials#p-206626>

Matematiikan perusteiden kouluoppimisen sanaluettelo (Räsänen, 2011) on saatavilla Niilo Mäki Instituutin sivustolta. Se on matematiikan perusteiden sanaluettelo, joka aukeaa alla olevan linkin takaa.

Räsänen, P. (2011). *Matematiikan perusteiden kouluoppimisen sanasto*. Niilo Mäki Instituutti.

<http://www.lukimat.fi/matematiikka/monimat/matematiikan-sanasto/matematiikan-sanasto/matematiikan-perusopetuksen-sanaluettelo>

Opetushallituksen rahoittamassa Polkuja-hankkeessa on Koulutuskeskus Salpauksessa tuotettu matematiikan sanaston kertauspaketti, joka soveltuu peruskoulun matematiikan sanaston kertaukseen. Sanasto on saatavilla avointen oppimateriaalien kirjastosta. Tähän sanastoon on valmistunut myös matematiikan kertaamiseen tarkoitettu peruspaketti sekä lähtötasokartoituspaketti, joista peruspaketin linkin löydät matematiikan solmukohdista (Luku 3) ja lähtötasokartoituspaketti löytyy lähtötasokartoituksia käsittelevästä luvusta 4.

Kankainen, J. & Kankainen, M. (2022). *Matikkakertauksen sanasto*. Koulutuskeskus Salpaus-kuntayhtymä. <https://www.finna.fi/L1Record/aoe.2129?sid=3454023187&lng=en-gb>

Turun kristillisessä opistossa on laadittu maahanmuuttajille matematiikan tehtävien harjoituspaketti.

Rinne, E. (2010). *Matematiikkaa maahanmuuttajille*. Turun kristillinen opisto. https://linnas.fi/wp-content/uploads/2019/09/matematiikkaa_maahanmuuttajille.pdf

Edellä mainitun "*Matematiikkaa maahanmuuttajille*" -materiaalin lisäksi Linnasmäen opistossa on laadittu Opetushallituksen tuella muutakin selkokielistä materiaalia. Pääset seuraavasta linkistä tutustumaan näihin materiaaleihin <https://linnas.fi/opiston-tuottamaa-oppimateriaalia/>

Matematiikka-alias soveltuu opiskelijoille, joilla suomen kielen ymmärrys on hyvällä tasolla ja joilla on jo jonkin ymmärrystä matematiikan peruskäsitteistä. Seuraavasti linkistä pääset katsomaan matematiikka-alias pelin ohjeita ja kortteja. Voit myös tulostaa itsellesi ohjeet ja pelikortit.

Karjalainen, E. (18.12.2014) Matematiikka-alias. *Summamutikan materiaalipankki*.

<https://blogs.helsinki.fi/summamutikka/matematiikka-alias/>

Matematiikka-aliasta pelataan tutun Alias-pelin säännöillä pienissä ryhmissä. Usein pelitilanteessa opiskelijat pelaavat peliä, pyrkivät onnistumaan pelissä ja näin he keskittyvät hyvin matematiikan sanaston selittämiseen. Lisäksi pelaaminen on hauskaa ja peli antaa opettajalle tietoa siitä, miten opiskelijat ymmärtävät matematiikan sanastoa ja käsitteitä. Voit myös suunnitella omia matematiikka-alias pelejä niin matematiikkaan kuin myös muihin oppiaineisiin.

Edistyneille opiskelijoille ja eri kielialueilta tuleville, joilla on hyvä suomen kielen taito, sopii Solmu-lehden ylläpitämä matematiikan verkkosanakirja.

Matematiikan verkkosanakirja (2024). *Solmu-lehti*. <https://matematiikkalehtisolmu.fi/sanakirja/a.html>

Verkkosanakirja sisältää laajan matematiikan sanaston sekä englanninkieliset käännökset matematiikan akateemiselle sanastolle.

6.4 Kielentäminen opettajan työkaluna

Otsikkoon liitettyssä diasarjassa on avattu kielentämisen soveltamista kielitietoiseen matematiikan opetukseen. Kielentämisen käyttöä opetuksessa on avattu tehtäväesimerkkien avulla. On tärkeää, että opettaja toimii mallina opiskelijoille ja pyrkii selventämään opetustaan kielentämisen keinoin monipuolisesti. Yhtä tärkeää on myös se, että opettaja vaatii opiskelijoilta kielentämisen käyttöä tehtävien ratkaisuihin, jotta opiskelijoiden matemaattinen ajattelu kehittyisi ja tulisi näkyväksi toisille opiskelijoille. Samalla opiskelijat voivat oppia ilmaisemaan matemaattista ajatteluaan suomen kielellä rikkaammin.

Tiivistelmä luku 6

Mitä on kielentäminen?

- neljän kielen malli; opetuksessa käytetään erilaisia matemaattisen ilmaisun muotoja
 - symbolikieli
 - taktiillinen toimintakieli
 - luonnollinen kieli
 - kuviokieli
- perusajatuksena saada opiskelijan matemaattinen ajattelu näkyväksi
- tavoitteena saada opiskelija ymmärtämään käsitteitä ja sisältöjä oman matemaattisen ajattelun avaamisen kautta
- opiskelija tuo ilmi omaa ajatusprosessiaan
- opettaja ottaa huomioon opiskelijoiden tarpeet ja käyttää tilanteeseen soveltuvia kielentämisen välineitä

Mitä hyötyjä on kielentämisellä?

- opettaja voi kielentämisen pohjalta suunnitella ja arvioida mahdollista tuen tarvetta
- oppilaalle välittyy ajatus, että tehtäville ei ole vain yhtä oikeaa ratkaisutapaa
- kielten yhdistäminen auttaa oppilaita, joilla on heikot suomen kielen taidot
- jokaisella on tilaa rakentaa matemaattista ajatteluaan omista lähtökohdista
- ulkoa opettelu ei rakenna ymmärrystä - kielentämisellä on tärkeä osa ymmärryksen rakentamisessa ja matemaattisten ajatusprosessien muodostumisessa

Pohdittavaa

- Miten peruslaskutoimitukset voisi esittää eri matemaattisilla kielillä?
- Miten opettaisit matematiikkaa oppilaalle, joka ei ymmärrä suomea?
- Millaisia matemaattisia kieliä käyttäisit silloin, kun opiskelijalla on näkö- tai kuulovamma tai opiskelijalla ja ohjaajalla ei ole yhteistä kieltä?

Lähteet

1. Hannula-Sormunen, M., Mattinen, A., Räsänen, P., & Ruusuvirta, T. (2018). Varhaisten matemaattisten taitojen perusta: synnynnäiset valmiudet, tietoinen toiminta ja vuorovaikutus. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.) *Matematiikan opetus ja oppiminen* (158–183). Niilo Mäki Instituutti.
2. Joutsenlahti, J. (2023). *Matematiikan didaktiikan luennot luokanopettajaopiskelijoille*. Kevät 2023. Tampereen yliopisto.
3. Kielitoimiston ohjepankki (2015). Luvut ja numerot: numeroiden ryhmittely. Kotimaisten kielten keskus. <http://ryhmittely.www.kielitoimistonohjepankki.fi/ohje/49>
4. Kajamies, A., Vauras, M., Kinnunen, R. & Iiskala, T. (2003). Matte. Matematiikan sanallisten tehtävien ratkaisutaidon ja laskutaidon arviointi. OTUK. Turun yliopisto.
5. Leppäaho, H. (2007). Matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opettaminen peruskoulussa. Ongelmanratkaisukurssin kehittäminen ja arviointi. [Väitöskirja, Jyväskylän yliopisto]. <https://jyx.jyu.fi/handle/123456789/13384>
6. Ikäheimo, H. (2021). Matematiikan osaaminen vahvaksi. Iloa oppimiseen ja opetukseen. ELLI.
7. Ikäheimo, H. (2022). Materiaalikirja. Matematiikan osaaminen vahvaksi. ELLI.
8. Aunio, P., Hautamäki, J. & Mononen, R. (2018). Matematiikan oppimisen ja oppimisvaikeuksien pedagoginen arviointi. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.) *Matematiikan opetus ja oppiminen* (s. 240-257). Niilo Mäki Instituutti.
9. Ikäheimo, H. & Kokko, L. (2023). ALVA (*Arvioidaan, Lasketaan ja VAhvistetaan taitoja*) -matematiikan perustaitojen kartoitus. OPIKKO.
10. Ikäheimo, H., Putkonen, H., & Voutilainen, E. (2018). *MaKeKo –digikokeet*. SanomaPro.
11. Vettenranta, J., Välijärvi, J., Ahonen, A., Hautamäki, J., Hiltunen, J., Leino, K., ... & Rautopuro, J. (2016). *PISA 15. Ensituloksia. Huipulla pudotuksesta huolimatta* (Opetus- ja kulttuuriministeriön julkaisuja 41).
<http://julkaisut.valtioneuvosto.fi/bitstream/handle/10024/79052/okm41.pdf>
12. Opetus- ja kulttuuriministeriö (5.12.2023). PISA-tutkimus ja tulokset 2022. <https://okm.fi/pisa-2022>.
13. Hannula, M. S. & Holm, M. E. (2018). Oppilaan matematiikkakuva oppimistuloksena ja oppimisen taustatekijänä. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.) *Matematiikan opetus ja oppiminen* (132 –154). Niilo Mäki Instituutti.
14. Huhtala, S. & Laine, A. (2004). ”Matikka ei ole mun juttu”: Matematiikkavaikeuksien syntyminen ja niihin vaikuttaminen. Teoksessa Räsänen, P. Kupari, P., Ahonen, T. & Malinen, P.

- (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Niilo Mäki Instituutti, 320–346.
15. Huhtala, S., & Janhonen, S. (2022). Motivoidaan opiskelijoita ja karkotetaan matikka-ahdistusta: ammatillisen matematiikan arkea. *LUMAT-B: International Journal on Math, Science and Technology Education*, 7(2), 123–133. Noudettu osoitteesta <https://journals.helsinki.fi/lumatb/article/view/1810>
 16. Furner, J.M. (2017). Teacher and Counselors: Building Math Confidence in Schools. *European Journal of STEM Education*, 2(2), 1–10.
 17. Joutsenlahti, J. & Tossavainen, T. (2018). Matemaattisen ajattelun kielentäminen ja siihen ohjaaminen koulussa. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.) *Matematiikan opetus ja oppiminen* (s. 410 – 430). Niilo Mäki Instituutti.
 18. Schoenfeld, A. (1987). What's all the fuss about metacognition? Teoksessa A. Schoenfeld (toim.) *Cognitive science and mathematics education* (s.189 – 215). Erlbaum Associates.
 19. Joutsenlahti, J. (2005). *Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä: 1990-luvun pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattisen osaamisen ja uskomusten ilmentämänä*. [Väitöskirja, Tampereen yliopisto] <https://trepo.tuni.fi/handle/10024/67453>
 20. Joutsenlahti, J. (2009). Matematiikan kielentäminen kirjallisessa työskentelyssä. Teoksessa R. Kaasila (toim.) *Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Rovaniemellä 7.-8.11.2008* (Kasvatustieteellisiä raportteja 9, s. 71 – 86). Lapin yliopisto.
 21. Moschkovich, J. (2010). Language(s) and learning mathematics. Teoksessa J. Moschkovich (toim.) *Language and mathematics education* (s. 1 – 28). Information Age Publishing, Inc.
 22. Joutsenlahti, J. (2015). *Omin sanoin matematiikan maailmassa. Harjoitukset*. Tampereen yliopisto.
 23. Joutsenlahti, J., Perkkilä, P., & Kumakura, H. ym., (2019). *Prosenttikäsitetutkimuksen aineistonkeruu materiaali*. Julkaisematon lähde. Tampereen yliopisto.