ALGEBRA I

Antti Majaniemi

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

2015

ISBN 978-952-93-5799-4

Antti Majaniemen perikunta on päättänyt antaa tämän teoksen käytettäväksi yllä olevalla lisenssillä. Painatus ei ollut enää kannattavaa alhaisen kysynnän vuoksi, mutta tällä tavalla oppimateriaali on edelleen opiskelijoiden ja oppilaitosten käytettävissä.

Turussa 30.8.2015

Jari Majaniemi

majaniemi ät iki.fi

Sisällys

ISBN 978-952-93-5799-4

Tämä kaksiosainen "algebraa" sisältävä moniste, jonka I osa on käsillä, on tarkoitettu käytettäväksi ensisijaisesti ammattikorkeakouluissa insinööriopintojen ensimmäisenä lukuvuonna rinnakkain geometrian monisteen kanssa.

Aikaisempaan versioon verrattuna olen vaihtanut asioiden käsittely-järjestystä mm. seuraavasti:

Ensimmäisen osan alussa on nyt "koko juuri- ja potenssioppi". Logaritmien käsittely on logaritmista asteikkoa ja logaritmiyhtälöitä lukuun ottamatta kokonaan 1. osassa. Samoin matriisien ja determinanttien käsittely on siirretty (lähinnä tietotekniikkaosastoa ajatellen) tähän osaan. Virheiden arviointiin liittyvät "virhekaavat" sekä "Boolen algebran" (joukkojen ja logiikan symbolien algebran) taas olen siirtänyt jälkimmäiseen osaan.

Kolme viimeistä lukua ovat aikaisemmista lähes riippumattomia. Niiden käsittely voidaan haluttaessa siirtää aikaisemmaksi.

Mm. pääsykokeet ovat osoittaneet, että myös ylioppilaiden on syytä käydä huolellisesti läpi ja harjoitella kunnolla ainakin lukujen 1, 2 ja 9 asiat (jotka heille ovat periaatteessa tuttuja, mutta suurimmalle osalle käytännössä eivät) sekä tietenkin lisäksi viimeisten lukujen uudet asiat.

Monisteen tähän painokseen olen tehnyt muutamia pienehköjä muutoksia ja lisännyt "tähtiä" * sellaisiin kohtiin, joiden mukaan ottamista opintojaksoon voidaan harkita opintosuuntakohtaisesti. Nykyiset oppituntimäärät ja opiskelijoiden pohjatietojen vähäisyys pakottavat väkisinkin karsimaan opetettavaa aineistoa.

Turussa 29. 4. 1999

Antti Majaniemi

Kolmas, päivitetty painos. Olen päivittänyt Antti Majaniemen alkuperäiseen monisteeseen esimerkkejä ja harjoitustehtäviä tämän päivän tilanteeseen paremmin sopiviksi.

Turussa 23. 2. 2007 Jari Majaniemi

1 Potenssi ja juuri

1.1 Kokonaispotenssi

Esimerkiksi luvun 7 neljäs potenssi on $7^4 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 2401$. Tässä luku 7 on ***kantaluku*** ja 4 on ***eksponentti***. Potenssi luetaan "*7 potenssiin 4*" tai myös "*7 neljänteen*".

Jatkossa yleensä "*luku*" tarkoittaa ***reaalilukua*** ellei erikseen toisin mainita. Reaalilukuja ovat *kokonaisluvut,* esim. 3 ja –2, *murtoluvut,* esim. 2/7 ja $3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$ sekä ns. ***irrationaaliluvut*** kuten $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ ja $\pi \approx 3{,}14159$. Kokonais- ja murtolukujen yhteisnimitys on ***rationaaliluvut***.

Määritelmä: *Jos n on positiivinen kokonaisluku, niin*

$$\boxed{\begin{array}{ll} \boldsymbol{a^n = a \cdot a \cdots a} & \textbf{(}\boldsymbol{n}\textbf{ kpl)} \\ \boldsymbol{a^0 = 1} & \boldsymbol{(a \neq 0)} \\ \boldsymbol{a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}} & \boldsymbol{(a \neq 0)} \end{array}}$$

Potenssia 0^0 ei määritellä.

Esim. 1 $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$. Luvun 2 ***käänteisluku*** on $2^{-1} = \frac{1}{2}$.

$$(\frac{2}{5})^{-1} = \frac{5}{2}, \quad (\frac{2}{5})^{-3} = \frac{125}{8} = 15\frac{5}{8}, \quad 5^{2^3} = 5^8.$$

$$2x^2 + 3x^1 - 4x^0 + 5x^{-1} = 2x^2 + 3x - 4 + \frac{5}{x}.$$

$$10^{-3} = 0{,}001 \qquad 0{,}0023\,m = 2{,}3 \cdot 10^{-3}\,m.$$

Seuraavat tulokset pitävät paikkansa niillä eksponentin ja kantaluvun arvoilla, joilla potenssit ovat määritellyt.

Lause 1

$$\boxed{\begin{array}{ll} \boldsymbol{(ab)^n = a^n b^n} & \boldsymbol{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}} \\ \boldsymbol{a^m a^n = a^{m+n}} & \boldsymbol{\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}} \\ \boldsymbol{(a^m)^n = a^{m \cdot n}} & \end{array}}.$$

Lauseen 1 vasemmanpuoleiset lait ovat sanallisesti esitettyinä seuraavat:

***Tulo** korotetaan potenssiin siten, että jokainen tekijä korotetaan tähän potenssiin.* Tekijöitä voi olla enemmänkin kuin kaksi.
***Samankantaiset** potenssit kerrotaan siten, että eksponentit lasketaan yhteen.*
Potenssi korotetaan potenssiin niin, että eksponentit kerrotaan keskenään.

Miten esität vastaavasti oikeanpuoliset lait sanallisessa muodossa? Perustellaan näitä tuloksia muutamalla esimerkillä:

$$(abc)^3 = abc \cdot abc \cdot abc = aaa \cdot bbb \cdot ccc = a^3b^3c^3,$$

$$a^3a^2a^4 = \underbrace{aaa \cdot aa \cdot aaaa}_{3+2+4 \text{ kpl } a\text{:ta}} = a^{3+2+4} = a^9, \qquad (a^3)^2 = a^3 \cdot a^3 = a^{2\cdot 3} = a^{3\cdot 2}.$$

Lauseessa 1 eksponentit voivat olla negatiivisiakin. Esimerkiksi tulos $a^3a^{-4} = \frac{a^3}{a^4} = \frac{1}{a}$ saadaan myös Lauseella 1: $a^3a^{-4} = a^{3+(-4)} = a^{-1} = \frac{1}{a}$.

Esim. 2 Käytetään Lausetta 1 ja supistamista:

1) $(2x^{-2}y)^3 = 2^3(x^{-2})^3y^3 = 8x^{(-2)\cdot 3}y^3 = 8x^{-6}y^3 = \dfrac{8y^3}{x^6}$.

2) $\dfrac{(a^2bc^{-1})^3}{(ab^2)^2} = \dfrac{a^6b^3c^{-3}}{a^2b^4} = \dfrac{a^4}{bc^3}$ (supistettiin a^2:lla ja b^3:lla).

3) $\dfrac{(a^2)^{-3}b^{-2}c^2}{(abc^{-1})^{-2}} = \dfrac{a^{-6}b^{-2}c^2}{a^{-2}b^{-2}c^2} = \dfrac{a^2}{a^6} = \dfrac{1}{a^4}$.

4) $(-a)^5 = (-1)^5a^5 = -1 \cdot a^5 = -a^5$, $(-a)^6 = a^6$, $(5^2)^3 = 5^6, 5^{2^3} = 5^8$.

Huomaa, että tulo $(ab)^2 = a^2b^2$, mutta summa $(a+b)^2$ **<u>ei ole</u>** $= a^2 + b^2$, vaan summaa koskeva laskulaki on mutkikkaampi:

(1) $$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2},$$

sillä

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Luvun a toista potenssia a^2 sanotaan myös a:n ***neliöksi*** ja kolmatta potenssia a:n ***kuutioksi***. Siten laki (1) voidaan esittää muodossa *"summan a + b neliö = yhteenlaskettavien lukujen a ja b neliöiden summa plus niiden kaksinkertainen tulo"*.

Laskulaissa (1) a:n ja b:n paikalla voi olla mitä lausekkeita tahansa, esim.

$$(2x+5y)^2 = (2x)^2 + 2\cdot 2x\cdot 5y + (5y)^2 = 4x^2 + 20xy + 25y^2,$$
$$(a-b)^2 = (a+(-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Siis

(2) $$\boxed{\boldsymbol{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}}$$

Tulokset (1) ja (2) sekä myös seuraava tulos on syytä opetella hyvin:

(3) $$\boxed{\boldsymbol{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}}.$$

Näitä tuloksia käytetään usein lausekkeen jakamiseen tekijöihin, esim.

$$x^2 - 4 = (x+2)(x-2), \qquad a^2 - 6a + 9 = (a-3)^2.$$

1.2 Neliöjuuri

Kun etsitään luvun 81 neliöjuurta, haetaan lukua, jonka toinen potenssi olisi 81. Tällaisia lukuja on kaksi: 9 ja –9. Jotta päästäisiin yksikäsitteiseen tulokseen, on tehty yleinen sopimus, että neliöjuuren arvoksi otetaan näistä luvuista positiivinen, siis $\sqrt{81} = 9$ (lue: "neliöjuuri 81 on 9"). Luvun 0 kohdalla on vain yksi valintamahdollisuus: $\sqrt{0} = 0$.

Negatiivisesta luvusta ei voida ottaa neliöjuurta, sillä minkään reaaliluvun toinen potenssi ei ole negatiivinen, esim. $\sqrt{-16}$ on mahdoton. Voidaan myös sanoa, että luvussa $\sqrt{a}$ ***juurrettava*** a ei saa olla negatiivinen.

Jatkossa merkki $\geq$ on "suurempi tai yhtä suuri kuin" -merkki ja $\pm$ on "plus tai miinus" -merkki.

Määritelmä: *Jos $a \geq 0$, niin $\sqrt{a}$ on sellainen luku $b \geq 0$, että $b^2 = a$.*

Juuren määritelmän mukaan $\boldsymbol{(\sqrt{a})^2 = a}$, jos $a \geq 0$.

Esim. 3 $\sqrt{a^4b^8} = a^2b^4$, sillä $a^2b^4 \geq 0$ ja $(a^2b^4)^2 = a^4b^8$.

$\sqrt{-4}$ ei ole määritelty (reaalilukualueella), koska ei ole reaalilukua, jonka toinen potenssi olisi negatiivinen.

Yhtälöllä $x^2 = 3$ on kaksi reaalijuurta $x = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1{,}73$.

Seuraavat säännöt pitävät paikkansa niillä a:n ja b:n arvoilla, joilla yhtälöiden kummatkin puolet ovat määritellyt (esim. toisessa säännössä täytyy olla $a \geq 0$ ja $b > 0$):

Lause 2 $$\boxed{\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}.$$

Nämä tulokset seuraavat juuren määritelmästä ja potenssin laskusäännöistä (Lause 1). Todistetaan näytteenä 1. sääntö:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \text{ sillä } \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0 \text{ ja } (\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 = ab.$$

Ensimmäisessä säännössä juuren alla voi olla useampikin kuin kaksi tekijää. Ensimmäistä sääntöä käytetään usein *"tekijöiden ottamiseen ulos juuren alta"*, jolloin eksponentti pienenee puoleen, esim. $\sqrt{5a^4} = a^2\sqrt{5}$.

Esim. 4 $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.

$\sqrt{a^3} = a\sqrt{a}$.

$\sqrt{49a^4b^8c^3} = 7a^2b^4c\sqrt{c}$.

$\sqrt{1{,}21 \cdot 10^{-6}m^2} = 1{,}1 \cdot 10^{-3}m$, missä m tarkoittaa metrejä.

$$\sqrt{\frac{a^3}{4 \cdot 10^{-6}}} = \frac{a\sqrt{a}}{2 \cdot 10^{-3}} = \frac{10^3 a\sqrt{a}}{2} = 500a\sqrt{a}.$$

*Sieventämistehtävä $\sqrt{49a^4b^8c^3}$ sisälsi *implisiittisesti* (epäsuorasti, välillisesti, erityisesti sitä mainitsematta) tiedon, että $c \geq 0$, sillä muuten tästä neliöjuuresta ei voida puhua (koska juurrettava olisi negatiivinen). Luvut a ja b sen sijaan voivat tässä olla negatiivisiakin, koska ne esiintyvät parillisissa potensseissa. Juuren arvossa $7a^2b^4c\sqrt{c}$ a:n ja b:n eksponentit ovat parillisia, ja koska $c \geq 0$, niin juuren arvo on *ei-negatiivinen* eli ≥ 0 niin kuin pitääkin.

*Vaatimus, että juuren arvon täytyy olla ei-negatiivinen eli ≥ 0, aiheuttaa joskus lisämutkia: Esimerkiksi juuresta $\sqrt{a^2}$ voidaan puhua myös kun $a < 0$, mutta koska juuren arvon täytyy olla ≥ 0, tulos on esitettävä esim.

seuraavasti:

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a, \text{ jos } a \geq 0 \\ -a, \text{ jos } a < 0 \end{cases}.$$

*Itseisarvojen avulla tämä tulos voidaan esittää lyhyesti: $\sqrt{a^2} = |a|$.

Esim. 5 $\sqrt{a^2} = |a|$, mutta $(\sqrt{a})^2 = a$, sillä tässä a:n täytyy olla ≥ 0, jotta $\sqrt{a}$:sta voitaisiin puhua.

$\sqrt{5x^2} = |x|\sqrt{5}$

$\sqrt{a^2b^4} = |a|b^2$

$\sqrt{a^3b^6} = a\,|b|^3\sqrt{a}$

Esim. 6 ***Neliöjuuren poistaminen nimittäjästä:***

$\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{1\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (tulos saatiin siis laventamalla $\sqrt{3}$:lla).

$\dfrac{a}{\sqrt{b}} = \dfrac{a\sqrt{b}}{b}$ (lavennettiin $\sqrt{b}$:llä).

$\dfrac{a^2}{\sqrt{a}} = \dfrac{a^2\sqrt{a}}{a} = a\sqrt{a}$ (ensin lavennettiin $\sqrt{a}$:lla, sitten supist. a:lla).

$\dfrac{2}{2+\sqrt{3}} = \dfrac{2(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$ | lavennettiin nimittäjän ns. ***liittoluvulla***, jonka jälkeen nimittäjä on muotoa $(a+b)(a-b)$

$= \dfrac{2(2-\sqrt{3})}{2^2-(\sqrt{3})^2} = \dfrac{2(2-\sqrt{3})}{1} = 2(2-\sqrt{3}) = 4-2\sqrt{3}.$

1.3 Kuutiojuuri

Kun etsitään luvun 64 kuutiojuurta, haetaan lukua, jonka kolmas potenssi olisi 64. Tällaisia lukuja on vain yksi, nimittäin luku 4. Siis $\sqrt[3]{64} = 4$. Tässä 3 on nimeltään juuren *indeksi.* Luvun –4 kolmas potenssi on –64, joten $\sqrt[3]{-64} = -4$. Kuutiojuuri voidaan siis ottaa myös negatiivisesta luvusta, jolloin sen arvokin on negatiivinen.

Määritelmä: *$\sqrt[3]{a}$ on sellainen luku b, että $b^3 = a$.*

Lausetta 2 vastaavat tulokset käyvät kuutiojuurellekin:

$$\boxed{\sqrt[3]{\boldsymbol{ab}} = \sqrt[3]{\boldsymbol{a}} \cdot \sqrt[3]{\boldsymbol{b}}, \quad \sqrt[3]{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}} = \frac{\sqrt[3]{\boldsymbol{a}}}{\sqrt[3]{\boldsymbol{b}}}}\,.$$

Esim. 7 $\sqrt[3]{a^3 b} = \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{b} = a\sqrt[3]{b}.$

$\sqrt[3]{8000\ m^3} = \sqrt[3]{8 \cdot 10^3}m = 2 \cdot 10m = 20m.$

$\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}} = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}.$

$\sqrt[3]{8^4} = 8 \cdot \sqrt[3]{8} = 8 \cdot 2 = 16.$

1.4 Yleinen juuri

Edelliset neliö- ja kuutiojuuren määritelmät ja perusominaisuudet yleistyvät koskemaan yleistä eli n:ttä juurta a:sta. Tässä n on positiivinen kokonaisluku. Siten

$\sqrt[n]{a}$ on sellainen luku b, että $b^n = a$. Jos n on parillinen luku (2, 4, 6 jne.), juuren arvon b täytyy olla ei-negatiivinen ja juuri voidaan ottaa vain ei-negatiivisesta luvusta a. Edelleen

$$\boxed{\sqrt[n]{\boldsymbol{ab}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{a}} \cdot \sqrt[n]{\boldsymbol{b}}, \quad \sqrt[n]{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}} = \frac{\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}}{\sqrt[n]{\boldsymbol{b}}}}\,.$$

Esim. ***8*** $\sqrt[4]{1{,}6 \cdot 10^{-3} m^4} = \sqrt[4]{16 \cdot 10^{-4}}\ m = 2 \cdot 10^{-1} m = 0{,}2\ m$ (metriä).

$\sqrt[4]{-16}$ on mahdoton, $\sqrt[5]{-32} = -2$, $\sqrt[5]{-7} = -\sqrt[5]{7} \approx -1{,}476.$

$\sqrt[5]{\dfrac{32a^6}{b^5}} = \dfrac{2a\sqrt[5]{a}}{b}.$

$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a \cdot a \cdots a} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdots \sqrt[n]{a} = (\sqrt[n]{a})^m.$

$\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}} = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$ (kuutiojuuri pois nimittäjästä).

Huomaa, että ***juuren ja potenssin laskusäännöt koskevat tulo- ja osamäärälausekkeita, eivätkä summia ja erotuksia***. Niinpä esim. $\sqrt{a^2 b^2} = a \cdot b$ (jos $a, b \geq 0$), kun taas $\sqrt{a^2 - b^2}$ **ei ole** **=** $a - b$, sillä $(a-b)^2$ **ei ole** = $a^2 - b^2$ vaan = $a^2 - 2ab + b^2$.

*Mainitaan vielä kaksi laskusääntöä, jotka ovat edellisiä harvinaisempia:

$\boldsymbol{\sqrt[k\cdot n]{a^{k\cdot m}} = \sqrt[n]{a^m}}$	$\boldsymbol{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}}$
(juuren supistaminen tai laventaminen)	(peräkkäinen juurtaminen)

Esim. 9 $\sqrt[6]{a^4} = \sqrt[3]{a^2}$, $\quad \sqrt[3]{\sqrt{a}} = \sqrt[6]{a}$,

$$\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{a} = \sqrt[6]{a^4}\cdot\sqrt[6]{a^3} = \sqrt[6]{a^4\cdot a^3} = \sqrt[6]{a^7} = a\cdot\sqrt[6]{a},$$

$$\sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{|a|}.$$

1.5 Murtopotenssi ja irrationaalipotenssi

Kun määritellään

$$\boxed{\boldsymbol{\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}},\quad \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}},\ \ldots.,\quad \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}} \text{ ja yleisesti } \boldsymbol{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}}},$$

niin juurilla laskemista voidaan suorittaa potenssiopin mukaisesti, sillä esim. sääntö $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ muuttuu muotoon $(ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}}$. Huomaa, että esim. murtopotenssissa $a^{\frac{3}{4}}$ kyseessä on 3. potenssi ja 4. juuri.

Esim. 10 $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{a} = a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{6}} = a^{1+\frac{1}{6}} = a\cdot a^{\frac{1}{6}} = a\cdot\sqrt[6]{a}$,

$$\sqrt[6]{a^4} = a^{\frac{4}{6}} = a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{1}{(x^2-4)^{1/2}} = (x^2-4)^{-\frac{1}{2}},$$

$$(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^2 = (x^{\frac{1}{2}})^2 + 2\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}} + (x^{-\frac{1}{2}})^2$$

$$= x + 2x^0 + x^{-1} = x + 2 + \frac{1}{x},$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\cdot l^{\frac{1}{2}}\cdot g^{-\frac{1}{2}}.$$

Potenssin määrittely voidaan laajentaa koskemaan tapausta, jossa eksponentti on irrationaaliluku ja kantaluku ≥ 0. Laskinten potenssinäppäimen $\boldsymbol{y^x}$ avulla tällaisille irrationaalipotensseille saadaan likiarvoja.

Esim. 11 $2^{\sqrt{2}}$ $(= 2^{1{,}41421\ldots} \approx 2^{1{,}4142}) \approx 2{,}665.$

$$a\cdot(a^{\pi})^2 = a\cdot a^{2\pi} = a^{1+2\pi} = a^{2\pi+1}.$$

Harjoituksia

A

(A-harjoitusten avulla voit itse testata, oletko ymmärtänyt tässä luvussa esitettyjen laskumenetelmien perusasiat.)

1.1 Laske (tarkat arvot; tulokset voit tarkistaa laskimella):

a) $2^{-2}, 2^{-1}, 2^{0}, 2^{1}, 2^{2}, \ldots, 2^{10}$, b) $\dfrac{3}{2^{-5}+1}$, c) $(2^4)^3$, d) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-4}$,

e) $\dfrac{2^3}{3^2}\cdot 6$, f) $\dfrac{2^3}{3^2}:6$, g) $\dfrac{2^3}{3^2}:\dfrac{6}{5}$, h) $\dfrac{\frac{8}{5}}{\frac{3}{10}}+1$, i) $\dfrac{7a}{\frac{8}{3}}$, j) $\dfrac{7}{\frac{8a}{3}}$.

1.2 Sievennä: a) $r^5\cdot r^3$, b) $(u^4)^5$, c) $\dfrac{(st)^4}{s^3}$, d) $\left(-2\dfrac{m}{k}\right)^3$, e) $\dfrac{r^5}{r^7}$.

1.3 Laske: a) $(-5)^{-2}+(-5)^{-3}$, b) $\dfrac{p^{-3}}{p^{-5}}$, c) $(5m)^2-m(1-2^3m)+m$.

1.4 Hajota polynomiksi a) $(m-r)^2$, b) $(x+2)^2$, c) $(x-2y)^2$, d) $(2x-1)(2x+1)$, e) $(x-1)(2x+1)$, f) $(a+2)^3$.

1.5 Jaa tekijöihin: a) m^2-n^2, b) r^2-4s^2, c) x^2+4x+4.

1.6 Laske (ja tarkista laskimella): a) $\sqrt{27}$, b) $\sqrt{1000}$, c) $\sqrt{0{,}49\cdot 10^{-2}}$, d) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$ (käytä Lausetta 2 "takaperin"), e) $\sqrt{32}\cdot\sqrt{2}$ f) $\sqrt{\dfrac{2^7}{3^4}}$, g) $\dfrac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ (poista juuri nimittäjästä Esim. 6 tapaan).

1.7 a) $\sqrt{0{,}64as^2}$, (s = sekunti), b) $\sqrt[3]{16}$, c) $\sqrt[3]{0{,}000001m^3}$, d) $\sqrt[3]{5^6}$, e) $\sqrt[3]{s^6}$, f) $\sqrt[3]{27a^3b^6}$, g) $\sqrt[4]{s^9}$, h) $\sqrt[5]{\dfrac{32}{x^5}}$, i) $\sqrt[3]{2^{-3}\cdot 3^7}$, j) $\sqrt[3]{2^{-3}+2^3}$, k) $\sqrt[3]{-27r^3s^6t^4}$, l) $\sqrt[4]{-16a^4}$.

1.8 Pallon tilavuus $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Laske säde r, kun $V \approx 3{,}50 \cdot 10^{-4}\, m^3$.

1.9 Esitä murtopotensseina a) $\sqrt[5]{s^3}$, b) $\sqrt[9]{k^{12}}$, c) $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x}$.

1.10 Laske a) $2^{1/2} \cdot 2^{3/4} \cdot 2^{-2/3}$, b) $(p^{2/3}p^{-1/2}) : (p^{1/4}p^{-5/6})$.

1.11 Laske laskimella $\dfrac{\sqrt{2{,}31 + 3{,}56^4}}{4{,}00 - \sqrt[3]{3{,}21^2}}$.

B

(Keskivaikeita tehtäviä)

1.12 Sievennä:

a) $\dfrac{(a^2b^3)^7}{(ab^2)^{10}}$, b) $\left(\dfrac{3x^2}{y}\right)^3 : \dfrac{9x^3}{y^3}$, c) $\dfrac{\frac{9x^2}{y}}{\frac{3x}{4y}}$, d) $\dfrac{9x^2}{\frac{y}{3x}}$, e) $\dfrac{\frac{9x^2}{y}}{3x}$.

1.13 Sievennä: a) $\left[\left(-\dfrac{1}{2a}\right)^{-3}\right]^2$, b) $\dfrac{(a-b)^2}{(b-a)^2}$, c) $\dfrac{(a-b)^3}{(b-a)^3}$

d) $\dfrac{(a-b)^4}{(b-a)^3}$.

1.14 Laske ilman laskinta ja tarkista tulokset laskimella:

a) $\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1} - \dfrac{3}{4}\right]^{-1}$, b) $1{,}2^{-1} \cdot (1\tfrac{2}{3})^{-2}$, c) $0{,}8 \cdot 0{,}2^{-3} - 125 \cdot 5^{-2}$.

1.15 Laske ilman laskinta:

a) $(-1)^{95}$, b) $(-1)^{3^2}$, c) $\left((-1)^3\right)^2$, d) -1^2, e) $-74^2 + (-74)^2$.

1.16 Sievennä: a) $\dfrac{(a^{-2})^3 b^{-2} c^2}{(abc^2)^{-2}}$, b) $(2a+b)^2 - (a-2b)^2$.

1.17 Sievennä: a) $\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{n}\right):\sqrt{\frac{4}{n}}$, b) $\sqrt{\frac{1}{v}}:\left(\sqrt{v}-\sqrt{\frac{1}{v}}\right)$.

1.18 Muokkaa lauseketta $(\sqrt{x})^{a-\frac{1}{b}}\cdot(\sqrt{x})^{b-\frac{1}{a}}$ ja laske sitten sen tarkka arvo, kun $x=\frac{1}{3}$, $a+b=\frac{24}{5}$ ja $ab=6$.

1.19 Sievennä: a) $ab\sqrt{a^{-2}-b^{-2}}\quad(a>0, b>0)$, b) $\sqrt{36a^2b^9c^4}$,

c) $\left(\sqrt{s^3-s^2u}+\sqrt{su^2-u^3}\right):\sqrt{s-u}\quad(s,u>0)$.

1.20 Poista neliöjuuri nimittäjästä:

a) $\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$, b) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}-2\sqrt{3}}$, c) $\frac{3-\sqrt{6}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$, d) $\sqrt{\frac{2}{27a}}$.

1.21 a) $\frac{\sqrt[3]{120}}{\sqrt[3]{5}}$, b) $\sqrt[3]{x^2y}\cdot\sqrt[3]{xy^2}$, c) $ab\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b}}$, d) $\frac{\sqrt[3]{16t^5u^4}}{\sqrt[3]{2tu}}$,
e) $\sqrt[n]{a^{2n}b^{n+1}}:\sqrt[n]{b^{2n}}$.

1.22 Laske a) murtopotensseilla, *b) laventamalla juuret samaindeksisiksi:

$$\sqrt[5]{a^{-2}}\cdot\sqrt[3]{a^2}\ \text{ ja }\ \sqrt[6]{a^2\sqrt{a}}:\sqrt[4]{a^3\cdot\sqrt[3]{a^2}}.$$

1.23 a) $\frac{\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}{a^2\sqrt{a^5}}$, b) $\sqrt[4]{u^3}:\sqrt[3]{\frac{1}{u}}$.

1.24 a) $4b\cdot\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}+\frac{2}{a}\cdot\sqrt[3]{a^5b}-3a\cdot\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, b) $\left[\left(\frac{1}{t^3}\right)^{-1/2}\cdot(t^2)^{-3/4}\right]^{4/3}$.

1.25 $\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{\frac{b}{a^2}}+\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}}}$.

2 Lauseke, yhtälö ja epäyhtälö

2.1 Lausekkeen sieventäminen

Lauseke muodostuu jatkossa luvuista ja lukuja esittävistä kirjaimista sekä niiden välisistä laskutoimituksista (laskuoperaatioista), esim.

$$\frac{2a+b}{3a}-a^2+1.$$

Myöhemmin lasketaan mm. vektori- ja matriisilausekkeilla. Lauseke, jossa viimeksi suoritettava laskutoimitus on yhteen- tai vähennyslasku, on ***summamuotoinen***, esim.

$$4a+3b,\ \ (a+b)^2-(ab)^2,\ \ x^3+2x^2+\frac{1}{x}.$$

Jos taas viimeinen laskutoimitus on kertolasku, lauseke on *tulomuotoinen* eli ***tekijämuotoinen*** (kokonaispotenssikin on tulo), esim.

$$(a-b)(2a+b),\ \ 4(2a-b)^2,\ \ \frac{5(b+c^2)}{x}\ \left(=\frac{1}{x}\cdot 5(b+c^2)=x^{-1}\cdot 5(b+c^2)\right).$$

Kun lauseketta yksinkertaistetaan eli *pelkistetään* eli ***sievennetään,*** (engl. *simplify*), niin lausekkeen uusien muotojen täytyy olla ***yhtä suuria*** keskenään. Lausekkeen eri muotojen välillä ***ei*** siis saa käyttää esim. nuolia $\Rightarrow$ tai $\Leftrightarrow$. Luvussa 1 sievennettiin potenssi- ja juurilausekkeita.

Esim. 1

$$\begin{aligned} ab-a(a+b)+b^2 &= ab-a^2-ab+b^2 \\ &= -a^2+b^2 \\ &= b^2-a^2. \end{aligned}$$

Tätä lauseketta sievennettiin siten, että sulkeet poistettiin, jolloin neljästä ***termistä*** (*jäsenestä*) kaksi (*ab* ja *–ab*) ***kumoutui***.

Esim. 2

$$\frac{ab+b^2}{a^3b^2+a^2b^3}=\frac{(a+b)b}{a^2b^2(a+b)}=\frac{1}{a^2b}.$$

Tässä lausekkeen osoittaja ja nimittäjä muutettiin *tekijämuotoon*, jonka jälkeen ***tekijät*** b ja $a+b$ voitiin ***supistaa.*** Näin osoittajaan jäi vain tekijä 1. ***Vain tekijöitä saa supistaa, ei termejä tai termin osia!*** Esimerkiksi edellisen ***murtolausekkeen*** nimittäjässä b^3 ***ei ole*** tekijä, vaan termin a^2b^3 osa.

Esim. 3

$$\frac{y^2}{xy-x^2}-\frac{x}{y-x}=\frac{y^2}{x(y-x)}-\frac{x}{y-x}^{(x}=\frac{y^2}{x(y-x)}-\frac{x^2}{x(y-x)}$$

$$=\frac{y^2-x^2}{x(y-x)}=\frac{(y+x)(y-x)}{x(y-x)}=\frac{y+x}{x}.$$

Tässä ensimmäisen murtolausekkeen nimittäjä jaettiin tekijöihin. Sitten lausekkeen 2. termi ***lavennettiin*** x:llä, jolloin nämä kaksi termiä muuttuivat ***samannimisiksi***, ts. niille saatiin yhteinen nimittäjä. Näin termit voitiin yhdistää. Kun sitten vielä osoittaja jaettiin tekijöihin luvussa 1 mainitulla säännöllä $\boldsymbol{a^2-b^2=(a+b)(a-b)}$, tekijä $y-x$ voitiin supistaa pois.

Muokkauksen välivaiheet voidaan sijoittaa siten, että yhtäläisyysmerkit ovat allekkain kuten esimerkissä 1. Lausekkeita voidaan sijoittaa myös peräkkäin kuten 2. esimerkissä. Huomaa myös 3. esimerkin muotoilu.

Summamuotoinen lauseke on nimeltään ***polynomi***. Esimerkiksi lauseke $a-2b+4bc-a/b$ on polynomi, jossa on 4 termiä. Erityisesti kaksiterminen polynomi on ***binomi*** ja kolmiterminen ***trinomi***. Luvussa 1 mainittiin ja myös todistettiin binomin neliötä koskevat laskukaavat $\boldsymbol{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$ ja $\boldsymbol{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$. Kun näitä kaavoja käytetään, a:n ja b:n paikalla voivat olla millaiset lausekkeet tahansa, esim.

$$(2m-3n)^2=(2m)^2-2\cdot 2m\cdot 3n+(3n)^2=4m^2-12mn+9n^2.$$

Vaikeampaa on nähdä edellisen päättelyn käänteinen käyttö: Trinomissa $4m^2-12mn+9n^2$ on $2m$:n neliö, $3n$:n neliö ja niiden kaksinkertainen tulo $-2\cdot 2m\cdot 3n$, joten trinomi voidaan kirjoittaa potenssimuotoon $(2m-3n)^2$.

Esim. 4

$$\frac{4x^2+4x+1}{4x^2-1}=\frac{(2x)^2+2\cdot 2x\cdot 1+1^2}{(2x)^2-1^2}=\frac{(2x+1)^2}{(2x+1)(2x-1)}=\frac{2x+1}{2x-1}.$$

Binomin korkeampien potenssien kehitelmät ovat seuraavanlaisia:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$-----$$

Näissä kehitelmissä esiintyvät kertoimet ovat ns. ***binomikertoimia*** ja ne saadaan seuraavasta ***Pascal'in kolmiosta***, jossa reunoilla ovat 1:t ja muualla olevat luvut ovat aina kahden viistosti yläpuolella olevien lukujen summia (esim. 4 + 6 = 10):

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \leftarrow \textit{kolmannet binomikertoimet} \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$
$$----------------------$$

2.2 Yhtälön ratkaiseminen

Kun kaksi lauseketta merkitään yhtä suuriksi, saadaan ***yhtälö***. Yhtälö voi olla ***identtinen***, ts. voimassa kaikilla siinä esiintyvillä kirjainarvoilla, esim. $(a-b)^2 = (b-a)^2$. Useat matemaattiset laskulait (laskusäännöt, "kaavat") ovat muodoltaan identtisiä yhtälöitä, esim.

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 .$$

Yhtälö voi olla myös ***ehdollinen***, jolloin se toteutuu vain joillakin tietyillä kirjainarvoilla. Esim. yhtälö $4x = 2$ toteutuu vain, kun $x = 2/4 = 1/2$. Tällöin sanotaan, että $x = 1/2$ on tämän yhtälön ***ratkaisu*** eli ***juuri*** (vaikka tässä yhtälössä ei ole kysymys juuren otosta). Seuraava esimerkki esittää tyypillisiä yhtälön ratkaisemisvaiheita.

Esim. 5 $3(6-x) = 4-(2-5x) \quad |$ sievennä kumpaakin puolta

$$18-3x = 2+5x \quad | \text{ lisää kummallekin puolelle } 3x \text{ ja vähennä } 2$$
$$16 = 8x \quad \left| \begin{array}{l} \text{vaihda puolet keskenään sekä} \\ \text{jaa kumpikin puoli 8:lla} \end{array} \right.$$
$$x = 2.$$

Kun yhtälön $18-3x = 2+5x$ kummallekin puolelle lisättiin sama termi $3x$, yhtälö pysyi samanarvoisena alkuperäisen yhtälön kanssa. Lisäyksessä termi $-3x$ hävisi vasemmalta puolelta ja siirtyi oikealle puolelle $3x$:nä, ts. vastakkaismerkkisenä. Sama yleisesti:

Yhtälössä voidaan siirtää termejä puolelta toiselle, jos samalla muutetaan niiden etumerkit.

Kun yhtälön $8x = 16$ kumpikin puoli jaettiin 8:lla, niin tekijä 8 siirtyi oikean puolen nimittäjään: $x = \frac{16}{8} = 2$. Esimerkiksi yhtälön $\frac{x}{5} = 16$ kummankin puolen kertominen 5:llä taas siirtäisi tekijän 5 vasemman puolen nimittäjästä oikean puolen osoittajaan: $x = 5 \cdot 16 = 80$. Siis

Yhtälössä voidaan siirtää vakiotekijöitä nimittäjästä toisen puolen osoittajaan tai osoittajasta toisen puolen nimittäjään.

Tätä tapaa käytetään tekniikassa usein, kun jostakin ns. ***tekijäyhtälöstä*** (ts. tekijämuotoisesta laskukaavasta) ratkaistaan jokin suure.

Esim. 6 Ratkaistaan yhtälöstä $s = \frac{1}{2} a\, t^2$ kiihtyvyys a:

$$\frac{1}{2} a\, t^2 = s$$

$$at^2 = 2s$$

Siis $\underline{\underline{a = \frac{2s}{t^2}}}$.

Tässä esimerkissä allekkain kirjoitetut kolme yhtälöä ovat keskenään ***samanarvoisia*** eli ***ekvivalentteja***. Jos niiden välillä käytetään ***ekvivalenssinuolia*** $\Leftrightarrow$, niin yhtälöt voidaan kirjoittaa peräkkäinkin. Seuraavassa on lisäksi käytetty *Siis*-sanan tilalla ***johtopäätösmerkkiä*** $\therefore$ (eli kolmoispistettä), jolloin ratkaiseminen näyttää esim. seuraavalta:

Esim. 7 $s = \frac{1}{2} at^2 \Leftrightarrow 2s = at^2 \Leftrightarrow at^2 = 2s \;\therefore \underline{\underline{a = \frac{2s}{t^2}}}$.

Ekvivalenssinuolta ei saa käyttää yhtäläisyysmerkin tilalla kun sievennät lauseketta. Samoin yhtäläisyysmerkin käyttäminen yhtälön eri muotojen edessä ekvivalenssinuolen tilalla on virheellistä.

Esim. 8 Seuraava yhtälö on ratkaistu x:n suhteen:

$$\frac{5x+3a}{10}=\frac{15-a}{5} \quad \Big| \cdot 10$$

$$5x+3a=\frac{10\cdot(15-a)}{5} \quad \Big| \text{ supist. op. 5:llä (op. = oikea puoli)}$$

$$5x+3a=2\cdot(15-a)$$

$$5x=30-2a-3a$$

$$x=\frac{30-5a}{5}=\frac{5\cdot(6-a)}{5}=\underline{\underline{6-a.}}$$

Ensimmäisessä vaiheessa yhtälön kumpikin puoli kerrottiin 10:llä, jolloin luku 10 siirtyi vasemman puolen nimittäjästä oikean puolen osoittajaan. Kaikki yhtälön eri muodot järjestettiin allekkain niin, että yhtäläisyysmerkit olivat suoraan toistensa alla. Kokeile ratkaista sama yhtälö a:n suhteen.

*Seuraavassa esimerkissä *juuret on tarkistettava, koska yhtälö kerrotaan <u>x:ää sisältävällä</u> tekijällä.* Yhtälön ensimmäinen ja toinen muoto eivät nimittäin ole ilman muuta ekvivalentteja, sillä ensimmäinen muoto sisältää ehdon $x+1\neq 0$, mutta toinen muoto ei.

Esim. 9 $$\frac{3x^2+8x+13}{3(x+1)}=x-1 \quad \Big| \cdot 3(x+1),\ x+1\neq 0$$

juuret tarkistettava!

$$3x^2+8x+13=3x^2-3$$

$$8x=-16$$

$x=-2.$ *Tämä toteuttaa alkuperäisen yhtälön.*

*Ratkaise vastaava yhtälö, kun siinä 13:n tilalla on luku 5. Saat x:n arvoksi $x=-1$. Se ei kuitenkaan käy ratkaisuksi, koska se tekee nimittäjän 0:ksi ja 0:lla ei voi jakaa.

> **Jos siis yhtälöä ratkaistessasi joudut kertomaan yhtälön jollakin sellaisella lausekkeella, jossa on mukana ratkaistava muuttuja x (tai esim. a, jos ratkaiset yhtälöä a:n suhteen), niin lopuksi on tarkistettava, ettei mikään saaduista x:n arvoista tee tätä lauseketta 0:ksi.*

Seuraavien yhtälöiden ratkaisemisessa käytetään ns. ***tulon nollasääntöä:*** *tulo on = 0 vain, kun jokin sen tekijöistä on =0.* Ratkaisuissa esiintyy myös ***tai-merkki*** $\vee$. Jälkimmäisen yhtälön ratkaisut on esitetty alaindekseillä varustettuina ja pilkulla erotettuina. Pilkkua käytetään usein ***ja-merkin*** $\wedge$ sijasta.

Esim. 10

a) $x^2 = 3x$

$x^2 - 3x = 0$

$x(x-3) = 0 \quad |$ ***tulon 0 - sääntö***

$x = 0 \lor x - 3 = 0$

$x = 0 \lor x = 3.$

b) $x(x+1) = 3(x+1)$

$x(x+1) - 3(x+1) = 0$

$(x-3)(x+1) = 0 \quad |$ ***tulon 0 - sääntö***

$x - 3 = 0 \lor x + 1 = 0$

$x_1 = 3, \; x_2 = -1.$

Nämä kaksi yhtälöä ovat sellaisia, että *yhtälön kummallakin puolella on sama, x:ää sisältävä tekijä*, edellisessä tekijä x, jälkimmäisessä $x+1$. Jos olisit jakanut yhtälön kummankin puolen tällä tekijällä, olisit menettänyt vastaavan juuren, edellisessä yhtälössä juuren $x = 0$ ja jälkimmäisessä $x = -1$. ***Jos jaat yhtälön kummankin puolen x:ää sisältävällä tekijällä, tämä tekijä on erikseen merkittävä 0:ksi ja ratkaistava siitäkin x.*** Seuraava esimerkki näyttää menettelytavan.

Esim. 11 $\quad 3x(x+1) = 2(x+1)^2 \quad | : (x+1)$ $\quad$ 1) $x + 1 = 0$

$x_1 = -1$

2) $3x = 2(x+1)$

$3x = 2x + 2$

$x_2 = 2.$

Tämä yhtälö olisi ratkennut myös Esimerkin 10 tapaan, ottamalla $x + 1$ tekijäksi. Kolmas tapa olisi seuraava: Ensin "*kerrot yhtälön auki*" eli suoritat yhtälössä olevat kertolaskut ja potenssiin korotukset ja sitten järjestät kaikki termit samalle puolelle. Näin saat seuraavan yhtälön: $x^2 - x - 2 = 0$ (suorita laskut). Tämän voit ratkaista *2. asteen yhtälön ratkaisukaavalla*, joka johdetaan myöhemmin ja on seuraava:

$$\boxed{\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}}.$$

Kun tätä kaavaa sovelletaan yhtälöön $x^2 - x - 2 = 0$, saadaan

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = 2 \lor -1.$$

Huom. *Kaksi peräkkäistä operaattorimerkkiä on erotettava toisistaan sulkeilla*, esim. $2 \cdot (-3)$, $2 + (-3)$ ja $2 : (-3)$. Merkintätapaa $2 \cdot {}^{-}3$ ei sovi enää tällä asteella käyttää.

Auki kertomista on yhtälön ratkaisemisessa yleensä syytä välttää, sillä esim. yhtälö $x^2(x+1)=4(x+1)$ muuttuisi muotoon

$$x^3+x^2-4x-4=0\,.$$

Pidä huoli siitä, että ymmärrät seuraavan eron: Yhtälön kummankin puolen voit kertoa tai jakaa samalla luvulla. Jos sen sijaan kerrot lausekkeen sievennetyn muodon esim. luvulla 3, lausekkeen arvo tulee tietenkin 3-kertaiseksi.

Esim. 13 Sievennä lauseketta $L = x+2-\dfrac{4x-1}{3}$.

$$L=\frac{3(x+2)-(4x-1)}{3}=\frac{3x+6-4x+1}{3}=\frac{7-x}{3}.$$

Saatua tulosta $\dfrac{7-x}{3}$ ***ei saa mennä kertomaan 3:lla***, sillä tulos $7-x$ ei ole enää lausekkeen L arvo, vaan $3L$:n arvo. Tämän yhtälön tulos on nimittäin $L=\dfrac{7-x}{3}$ ja 3:lla kertominen voidaan tehdä, jos tämän *yhtälön* kumpikin puoli kerrotaan 3:lla. Silloin saadaankin $3L$:n arvo $3L=7-x$.

2.3 Juuriyhtälö

Neliöjuuren määritelmän mukaan $\sqrt{a}=b$, mikäli seuraavat kolme ehtoa ovat täytetyt:

1) $a \geq 0$ (jotta a:sta voidaan ottaa neliöjuuri, ns. *reaalisuusehto*),
2) $b \geq 0$ (ts. neliöjuuren arvon täytyy olla *ei-negatiivinen*),
3) $b^2 = a$ (juuren arvon neliön täytyy olla = juurrettava).

Tämän mukaan juuriyhtälön $\sqrt{x^2-8}=x+2$ ratkaisun x täytyy olla sellainen, että juuren arvon $x+2$ neliö ja juurrettava x^2-8 ovat yhtä suuret ja lisäksi juuren arvon ja juurrettavan pitää kummankin olla ei-negatiivinen:

$$(x+2)^2=x^2-8,\ x+2\geq 0,\ x^2-8\geq 0\,.$$

Käytännössä nämä ehdot tulevat täytetyksi, jos juuriyhtälön *kumpikin puoli korotetaan neliöön ja saadut ratkaisut tarkistetaan* (yleensä sijoittamalla ne alkuperäiseen yhtälöön). Tällä tavoin tämän yhtälön ratkaiseminen näyttää seuraavalta:

Esim. 14 $\sqrt{x^2-8}=x+2 \quad \Big|\ ()^2$, *juuret tarkistettava*

$$x^2-8=(x+2)^2$$
$$x^2-8=x^2+4x+4$$
$$-8=4x+4$$
$$4x=-12$$

$x=-3$ Ehto $x+2\geq 0$ ei toteudu $\therefore$ Ei ratkaisua.

Jos yhtälö olisi ollut muodossa $\sqrt{x^2-8}-x=2$, termi $-x$ olisi pitänyt siirtää toiselle puolelle ennen neliöön korotusta, muuten neliöön korottaminen ei hävitä juurilauseketta, vaan se jää jäljelle kaksinkertaiseen tuloon.

Kuutiojuurella ei ole ei-negatiivisuusehtoja, joten ratkaisuja ei tarvitse välttämättä tarkistaa:

Esim. 15 $\sqrt[3]{2x+5}=3 \quad \Big|\ ()^3$

$$2x+5=27$$
$$x=11.$$

*Jos neliöjuuriyhtälössä juurilausekkeita on useampia kuin yksi, tarvitaan enemmän kuin yksi neliöön korotus:

Esim. 16* $\sqrt{x}+\sqrt{x-5}=5 \quad \Big|$ *jätä mutkikkain juurilauseke yksin toiselle puolelle*

$$\sqrt{x-5}=5-\sqrt{x} \quad \Big|\ ()^2, \textit{ juuret tarkistettava}$$
$$x-5=5^2-2\cdot 5\cdot\sqrt{x}+(\sqrt{x})^2$$
$$x-5=25-10\sqrt{x}+x$$
$$10\sqrt{x}=30$$
$$\sqrt{x}=3 \quad \Big|\ ()^2$$

$x=9.$ Toteuttaa alkuperäisen yhtälön.

2.4 Epäyhtälö

Epäyhtälön $x < 2$ ("x pienempi kuin 2") ratkaisuja ovat kaikki 2:ta pienemmät reaaliluvut. Ne voidaan esittää lukusuoralla (x-akselilla) viereisen kuvan mukaisesti.

Epäyhtälöt $x < 2$ ja $2 > x$ ovat samanarvoisia eli ekvivalentteja, sillä jos x on 2:ta pienempi, niin 2 on x:ää suurempi.

Kaksoisepäyhtälön $1 < x \leq 2$ ("1 pienempi kuin x pienempi tai yhtä suuri kuin 2") ratkaisuja ovat kaikki 1:n ja 2:n välillä olevat reaaliluvut, luku 2 mukaan luettuna.

Tutkitaan nyt, miten ratkaistaan epäyhtälö $2x - 1 < 3$. Jos epäyhtälön kumpaankin puoleen lisätään 1, puolien suuruusjärjestys säilyy:

$$2x - 1 < 3 \quad \big| \ +1$$
$$2x < 4.$$

Jos kumpikin puoli jaetaan ***positiiviluvulla*** 2, niin suuruusjärjestys säilyy:

$$2x < 4 \ \big| :2 > 0$$
$$x < 2.$$

- *Epäyhtälön kumpaankin puoleen voit lisätä tai niistä vähentää saman luvun.*
- *Epäyhtälön kummankin puolen voit kertoa tai jakaa samalla* ***positiiviluvulla****.*
- *Jos kumpikin puoli kerrotaan tai jaetaan samalla* ***negatiiviluvulla****, merkki < on vaihdettava merkiksi > tai päinvastoin.*

Viimeisestä kohdasta voit vakuuttua esim. jakamalla epäyhtälöt $2 < 4$, $-4 < 2$ ja $-4 < -2$ vaikkapa luvulla -2. Jos samalla vaihdat epäyhtälömerkin suunnan, uudet tulokset $-1 > -2$, $2 > -1$, $2 > 1$ pitävät paikkansa.

Esim. 17 Kaksi esimerkkiä:

1) $x-3 \geq 4x+9 \quad \big| -4x, \ +3$

$x-4x \geq 9+3$

$-3x \geq 12 \quad \big| :(-3)<0$

$x \leq -4.$

*2) $1<3x-5<4 \quad \big| +5$ *Kaksoisepäyhtälö*

$6<3x<9 \quad \big| :3>0$

$2<x<3.$

Yleispätevämpi tapa ratkaista kaksoisepäyhtälö olisi se, että kumpikin epäyhtälö ratkaistaan erikseen ja saaduista ratkaisuista otetaan yhteiset.

2.5 Itseisarvoyhtälö ja -epäyhtälö

Reaaliluvun ***itseisarvo*** saadaan jättämällä luvusta etumerkki pois, esim. $|2|=2,\ |-5|=5$. Voidaan myös sanoa, että ei-negatiivisen luvun itseisarvo on luku itse, mutta negatiivisen luvun itseisarvo on luvun vastaluku, siis

$$\boxed{|x|=\begin{cases} x, & \text{jos } x \geq 0 \\ -x, & \text{jos } x<0. \end{cases}}$$

Jälkimmäinen tapa on yleispätevämpi. Esimerkkejä:

Esim. 17 $|-3|=-(-3)=3.$

$|\underbrace{3-\sqrt{2}}_{>0}|=3-\sqrt{2},\qquad |\underbrace{2-\sqrt{5}}_{<0}|=-(2-\sqrt{5})=\sqrt{5}-2.$

$$|x-1|=\begin{cases} x-1, & \text{jos } x-1 \geq 0 \text{ eli jos } x \geq 1 \\ -(x-1)=-x+1, & \text{jos } x<1. \end{cases}$$

Seuraavassa esimerkissä on ratkaistu muutama ***itseisarvoyhtälö*** seuraavalla periaatteella:

$$|a|=b \Leftrightarrow a=b \vee a=-b$$

(sillä *luvun a itseisarvo on b, jos luku a on b tai –b*).

Esim. 18 $|x| = 2 \Leftrightarrow x = 2 \vee -2$ (luvun itseisarvo on 2, jos luku on 2 tai -2).

$|x-3| = 2 \Leftrightarrow x-3 = 2 \vee x-3 = -2 \Leftrightarrow x = 5 \vee x = 1.$

$*|x+1| = 2x \Leftrightarrow x+1 = 2x \vee x+1 = -2x$ ja lisäksi $x \geq 0$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -\frac{1}{3}$, jälkimmäinen ei käy.

*Tällaisia yksinkertaisia itseisarvoyhtälöitä voitaisiin ratkaista myös siten, että yhtälön kumpikin puoli korotetaan neliöön ja saadut ratkaisut tarkistetaan. Menetelmän huono puoli olisi, että se nostaa yhtälön astelukua.

Itseisarvoepäyhtälöitä on periaatteessa kahta tyyppiä:

1) $\boldsymbol{|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b}$
(luvun a itseisarvo on < b, jos luku on $-\boldsymbol{b}$*:n ja* $\boldsymbol{b}$*:n välillä).*
2) $\boldsymbol{|a| > b \Leftrightarrow a > b \vee a < -b}$
(luvun a itseisarvo on > b, jos luku on $\boldsymbol{b}$*:tä suurempi tai* $-\boldsymbol{b}$*:tä pienempi).*

Esim. 19 1) $|x| < 5 \Leftrightarrow -5 < x < 5$

2) $|x-1| < 2 \Leftrightarrow -2 < x-1 < 2 \quad |+1$

$\Leftrightarrow -1 < x < 3.$

3) $|x-3| \geq 2 \Leftrightarrow x-3 \geq 2$ *tai* $x-3 \leq -2$

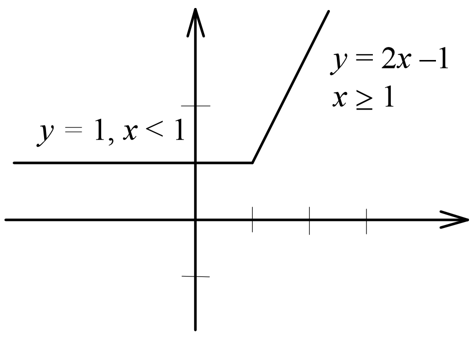
$\Leftrightarrow x \geq 5$ *tai* $x \leq 1.$

****Esim. 20*** Piirrä yhtälön $y = x + |x-1|$ kuvaaja.

Yhtälö hajoaa kahdeksi yhtälöksi sen mukaan onko $x-1 \geq 0$ eli $x \geq 1$ vai onko $x < 1$:

$$y = \begin{cases} x + (x-1) = 2x-1, \text{ kun } x \geq 1 \\ x - (x-1) = 1, \text{ kun } x < 1. \end{cases}$$

Edellisen osan "$y = 2x-1$, kun $x \geq 1$" kuvaaja on osa vinoa suoraa ja jälkimmäisen osan "$y = 1$, kun $x < 1$" kuvaaja on osa vaakasuoraa suoraa. Suorien yhtälöistä tarkemmin Luvussa 5.



Harjoituksia

A

2.1 Laske seuraavien lausekkeiden arvot

a) $\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{a}$, b) $\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x+3}$, c) $\dfrac{\frac{2}{u}+\frac{1}{4u}}{3}$, d) $\dfrac{6a-4ab}{2a+4ab}$,
e) $\dfrac{r}{\frac{3}{4}-\frac{r+3}{r+4}}$, f) $\dfrac{2ab+3ac-4ca+6bc-8ab-6cb}{abc}$.

2.2 Jaa luku 85381 luvulla 42, jolloin saat (vajaaksi) osamääräksi 2032 ja jakojäännökseksi 37. Tällöin (täydellinen) osamäärä voidaan esittää muodossa

$$\frac{85381}{42}=2032+\frac{37}{42}=2032\tfrac{37}{32}.$$

Suorita vastaavasti polynomin $2x^2-3x-5$ jakaminen polynomilla $2x+1$. Minkä esityksen saat (täydelliselle) osamääräpolynomille?

2.3 Lukujen kaksi peruslaskusääntöä ovat *vaihdantalaki* $ab=ba$ ja *liitäntälaki* $a(b+c)=ab+ac$. Nämä lait pitävät kaikille luvuille paikkansa. Jakolasku voidaan käsittää käänteisluvulla kertomiseksi, esim. $\dfrac{25}{3}=\dfrac{1}{3}\cdot 25$ ja $\dfrac{a-b}{c}=\dfrac{1}{c}\cdot(a-b)$. Tämän ajatuksen ja liitäntälain nojalla

$$\underline{\underline{\frac{a+b}{c}}}=\frac{1}{c}\cdot(a+b)=\frac{1}{c}\cdot a+\frac{1}{c}\cdot b=\underline{\underline{\frac{a}{c}+\frac{b}{c}}}.$$

Siis *summa voidaan jakaa luvulla niin, että jokainen yhteenlaskettava jaetaan tällä luvulla.* Sen sijaan luvun jakamiselle summalla ei ole vastaavaa lakia, ts. sääntö $\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{c}$ ***ei pidä paikkaansa.*** Osoita tämä antamalla a:lle, b:lle ja c:lle jotkin positiiviarvot. Näet, että kumpikin op:n termi on vp:ta suurempi.

2.4 Muuta seuraavien lausekkeiden osoittajat ja nimittäjät tekijämuotoon, jotta voit sitten supistaa lausekkeita:

a) $\dfrac{x^2-1}{x^2+2x+1}$, b) $\dfrac{r^2-2r}{r^2-4}$, c) $\dfrac{as-3s}{9-6a+a^2}$.

2.5 Ratkaise seuraavat yhtälöt: a) $14-3x=x-36$, b) $\dfrac{6x-3}{2}=x$, c) $\dfrac{4t-1}{24}=\dfrac{2t+1}{36}$ (ohje: $24=2^3\cdot 3, 36=2^2\cdot 3^2$, joten kannattaa ehkä ensin laventaa vp 3:lla ja op 2:lla, jolloin yhteinen nimittäjä on $2^3\cdot 3^2=8\cdot 9$).

2.6 Määritä seuraavien yhtälöiden ratkaisut (käytä *tulon nollasääntöä*, jos mahdollista):

a) $2x^2-4x=0$, b) $(x+2)(x+3)=0$, c) $(x+2)(x+3)=6$.

2.7 Ratkaise yhtälö a) $\sqrt{2}\cdot x=x+1$ (poista neliöjuuri nimittäjästä), b) $\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2x}-\dfrac{2}{x}$, c) $x^2-4x=5$, d) $\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{x}-1$.

2.8 Ratkaise: a) $\sqrt{x+4}=x+2$, *b) $\sqrt{x+9}-\sqrt{x}=2$, c) $3x+4\geq 0$, d) $3-2x<7$, *e) $1<\dfrac{u}{2}+2\leq 3$.

2.9 Sievennä (tarkka arvo):

a) $|2-\sqrt{2}|$, b) $|2\sqrt{2}-3|$, *c) $|1-\sqrt{2}|-|3-2\sqrt{2}|$.

2.10 Ratkaise: a) $|x-3|=4$, *b) $|2x-1|=x+1$, 'c) $|2x+1|=x-1$.

2.11 Piirrä funktion a) $y=|x|$, b) $y=|x|+1$ kuvaaja.

2.12 Ratkaise seuraavat itseisarvoepäyhtälöt ja esitä ratkaisut lukusuoralla: a) $|2x+1|<1$, b) $|x+1|\geq 3$.

B

2.13 Sievennä: a) $a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$, b) $\dfrac{8a^2b^3-12b^2a^3}{4a^2b^2}$.

2.14 Muuta seuraavien murtolausekkeiden osoittajat ja nimittäjät tekijämuotoon ja supista yhteiset tekijät pois:

a) $\dfrac{3u^2-6um+3m^2}{6u^2-6m^2}$, b) $\dfrac{16-8y+y^2}{xy-4x}$, c) $\dfrac{2a^3b+2ab^3}{a^4-b^4}$.

2.15 Sievennä seuraava lauseke ja laske laskimella sen arvo sieventämättömästä ja sievennetystä muodosta, kun $x=2{,}763$:

$$\frac{(2x+2)(3x-1)-6x^2}{\dfrac{2+4x}{4x-2}-1}.$$

2.16 Ratkaise: a) $\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{2x+5}{2x+1}$, b) $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2}{x+2}=\dfrac{4}{x^2-4}$,
c) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-x}=\dfrac{2}{3x-\sqrt{2}}$, d) $\dfrac{\sqrt{s-2}+2}{2\sqrt{s-2}+8}=\dfrac{2}{7}$.

2.17 Todista, että $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ ja laske sovelluksena lausekkeen $(x-2y+3z)^2$ arvo.

2.18 Ratkaise yhtälöt a) $(2x-7):2+x-(3x+1):5=5-(x+6):2$,
b) $6:(4-x)-25:(1-3x)+16:(x-4)=0$, c) $\dfrac{x-\alpha}{\beta}=\dfrac{x-\beta}{\alpha}$.

2.19 Ratkaise: a) $\sqrt{2x+1}=x-1$, *b) $\sqrt{x-2}-\sqrt{x+1}=3$.

2.20 Ratkaise: *a) $|x^2-2|=2x-2$, b) $\left|\dfrac{x-1}{x}\right|=1$.

2.21 *Piirrä funktion $y=2|x-2|+x+4$ kuvaaja.

2.22 *Ratkaise: a) $|3x-2|>x$, b) $|2x-1|<x$ (Ohje: Kun poistat itseisarvot, saat kaksoisepäyhtälön. Ratkaisun muodostavat ne x:n arvot, jotka toteuttavat kaksoisepäyhtälön vasemman ***ja*** oikean puolen muodostaman epäyhtälön.)

2.23 Merkitään $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n=n!$ (**"n-kertoma"**) ja $0!=1$ (sekä $1!=1$). Määritellään $\dbinom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ (***"n yli k:n"***). Laske luvut
$\dbinom{5}{0}$, $\dbinom{5}{1}$, $\dbinom{5}{2}$, $\dbinom{5}{3}$, $\dbinom{5}{4}$, $\dbinom{5}{5}$.

3 Verrannollisuus

3.1 Suhde ja verranto

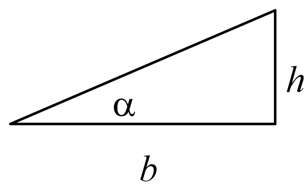
Kahden luvun ja varsinkin kahden suureen osamäärän sijasta puhutaan usein niiden suhteesta. Tällöin $\frac{a}{b}$ tai $a:b$ luetaan "***a:n suhde b:hen***".

Esim. 1 Lukujen 2 ja 5 suhde on 2:5 = 0,4.

Pituuksien 5,00 m ja 20,0 cm suhde on $\dfrac{500\,cm}{20{,}0\,cm} = 25{,}0$.

Nopeus on matkan suhde aikaan.

Kuvan mittakaava on kuvajanan pituuden suhde janan todelliseen pituuteen.



Kaltevuus = $h:b\,(=\tan\alpha)$ (vier. kuva).

Joskus suhteita "ketjutetaan":

Esim. 2 Jana, jonka pituus on 15, jaetaan kolmeen osaan suhteessa 2 : 3 : 5. Tällöin jako-osia on 2 + 3 + 5 = 10 kpl ja esim. keskimmäisen osan pituus on

$$\frac{3}{10}\cdot 15 = 4{,}5\,.$$

Kaksi yhtä suurta suhdetta muodostavat ***verrannon***:

(1) $$\boxed{\boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}}\,.$$

Jos verrannon kaikki neljä jäsentä a, b, c ja d ovat $\neq 0$, niin tämä yhtälö on yhtäpitävä seuraavien yhtälöiden kanssa, ts. verranto (1) voidaan muuntaa seuraavaan neljään muotoon:

(2) $$\boldsymbol{ad = bc}$$ (***"ristiin kertominen"***)

(3) $$\boldsymbol{\frac{b}{a} = \frac{d}{c}}$$ (***"kääntäminen"***)

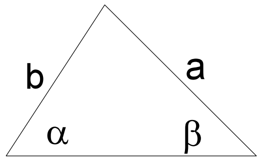
(4) $$\boldsymbol{\frac{a}{c} = \frac{b}{d}}, \qquad \boldsymbol{\frac{d}{b} = \frac{c}{a}}$$ (***"vuorottaminen"***)

Tod.: Yhtälöistä (1), (3) ja (4) päästään yhtälöön (2), kun ne kerrotaan nimittäjien tulolla ($\neq 0$). Siis kaikki nämä kolme yhtälöä ovat yhtäpitäviä (2):n kanssa ja siten keskenäänkin.

Verranto (1) ***vuorotetaan*** siis siten, että joko äärimmäiset jäsenet a ja d tai keskimmäiset jäsenet b ja d vaihtavat paikkaa.

Verrantoja esiintyy mm. geometriassa yhdenmuotoisuuden ja sinilauseen yhteydessä.

Esim. 3 Jos $\dfrac{\sin\alpha}{a} = \dfrac{\sin\beta}{b}$, niin myös



$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b} \quad \text{ja myös} \quad \frac{b}{a} = \frac{\sin\beta}{\sin a}.$$

Viimeinen muoto on paras, jos kysytään b:n arvoa.

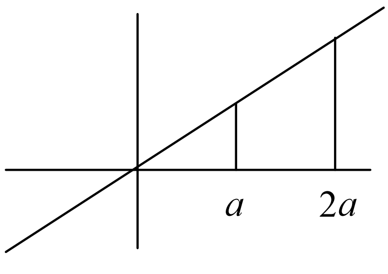
"Yhdistetty verranto" $\boxed{\boldsymbol{a:b:c = d:e:f}}$ käsittää kolme verrantoa

$$\boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{d}{e}, \qquad \frac{a}{c} = \frac{d}{f}, \qquad \frac{b}{c} = \frac{e}{f}.}$$

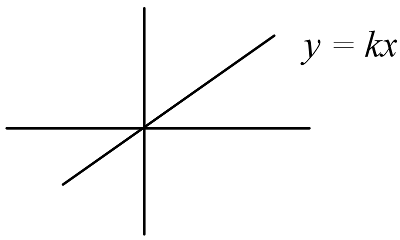
Kun nämä vuorotetaan, saadaan kolme keskenään yhtä suurta suhdetta:

$$\boldsymbol{\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}.}$$

3.2 Suoraan ja kääntäen verrannollisuus



Esim. yhtälön $\boldsymbol{y = 0{,}65x}$ kuvaaja on origon kautta kulkeva suora. Kun x:lle annetaan arvoja, sanotaan, että y:n arvot muuttuvat *verrannollisina* näihin arvoihin: sitä mukaa kuin x:n arvot kasvavat, kasvavat myös y:n arvot. Jos x esim. kaksinkertaistetaan (arvosta a arvoon $2a$), samoin käy y:n. Kerroin 0,65 määrää, kuinka nopeasti y:n arvot kasvavat x:n kasvaessa.



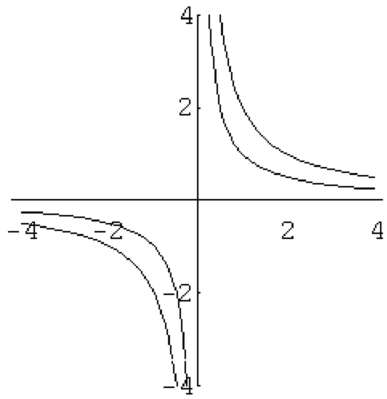
Yleisesti, jos $\boxed{\boldsymbol{y = k\,x}}$, *missä k on positiivinen tai negatiivinen vakio*, sanotaan, että y on (suoraan) ***verrannollinen*** x:ään. Vakio k on ***verrannollisuuskerroin***.

Esim. 4 Tasaisessa liikkeessä matka kasvaa verrannollisena aikaan: $s = v\,t,\ v = vakio$.

Ohmin lain U = RI mukaan jännite U on suoraan verrannollinen virran voimakkuuteen (kun R = vakio).

Jos esim. $y = k\,x^2$ tai $y = k\sqrt{x}$, missä k on vakio, sanotaan, että ***y* on *(suoraan) verrannollinen x:n neliöön tai x:n neliöjuureen***.

Kääntäen verrannollisuus: Jos $\boxed{\boldsymbol{y = \frac{k}{x}}}$, *missä k on vakio*, sanotaan, että y on ***kääntäen verrannollinen*** x:ään. Tämä ehto merkitsee, että y pienenee sitä mukaa, kun x kasvaa (jos $k > 0$). Käyrän $y = \frac{k}{x}$ kuvaaja on ***hyperbeli*** (*asymptootteina x- ja y-*akselit). Viereiseen kuvaan on piirretty k:n arvoja 1 ja 2 vastaavat hyperbelit. (Piirrä ne itsekin, antamalla x:lle esim. arvot 1/4, 1/2, 1, 2, 4 ja vastaavat negatiiviset arvot.)



Vastaavasti, jos esim. $y = \frac{k}{x^4}$ tai $y = \frac{k}{\sqrt{x}}$, niin *y on kääntäen verrannollinen x:n neljänteen potenssiin* tai *x:n neliöjuureen.*

Esim. 5 Kahden massapisteen m_1 ja m_2 välinen vetovoima F on suoraan verrannollinen kummankin massaan ja kääntäen verrannollinen pisteiden välisen etäisyyden r neliöön:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (G = \text{vakio}).$$

Harjoituksia

A

3.1 Minkä muodon verranto $\frac{3}{5} = \frac{x}{2y}$ saa, kun se a) kerrotaan ristiin, b) käännetään, c) vuorotetaan (kaksi mahdollisuutta)?

3.2 Kolmio, jonka sivut ovat 134 *mm*, 352 *mm* ja 327 *mm* piirretään mittakaavassa a) 1 : 3, b) 4 : 1, c) 3 : 4. Kuinka pitkinä sivut näkyvät kuvassa ?

3.3 Jana, jonka pituus on 321 *mm*, jaetaan neljään osaan suhteessa $1:3:2:5$. Laske osien pituudet.

3.4 Miten heilurin heilahdusaika T on verrannollinen heilurin pituuteen l kaavassa $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$? Entä kiihtyvyyteen g ?

3.5 Kolmiossa sivu $a = 8$ (yksikköä) ja $b = 5$. Toisessa, edellisen kanssa yhdenmuotoisessa kolmiossa a:ta vastaava sivu $a' = 12$. Laske b:tä vastaava sivu b' verrannosta, *joka alkaa* b':lla. (Miksi verranto kannattaa alkaa tuntemattomalla luvulla? Parempia verrantoesimerkkejä on geometrian kurssissa.)

B

3.6 Muotoa $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$ olevan verrannon ratkaisua $x > 0$ sanotaan a:n ja b:n ***keskiverroksi*** (ja verrannon $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ ratkaisua a:n, b:n ja c:n *neljänneksi verroksi*). Määritä lukujen 0,02 ja 20000 a) keskiverto eli ns. ***geometrinen keskiarvo***, b) "tavallinen" eli ***aritmeettinen keskiarvo***. Huomaat, että aritmeettiseen keskiarvoon pienempi luku ei vaikuta juuri mitään. Sen sijaan tässä tapauksessa, jossa luvut ovat hyvin erikokoisia, keskiverto kuvaa paremmin lukujen keskimääräistä suuruutta (esim. 10:n potensseissa ajateltuna: mikä on lukujen $2 \cdot 10^{-2}$ ja $2 \cdot 10^{4}$ keskimääräinen arvo).

3.7 Todista, että verranto $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ on yhtäpitävä verrannon $\frac{ta + uc}{tb + ud} = \frac{c}{d}$ kanssa (jos t, u ja nimittäjät ovat $\neq 0$).

3.8 Osoita, että verrannon kummankin puolen osoittajaan voidaan lisätä saman puolen nimittäjä samalla luvulla $t \neq 0$ kerrottuna.

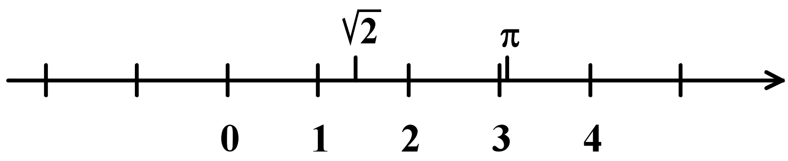
3.9 Todista, että verrannon kummankin puolen nimittäjästä voidaan vähentää saman puolen osoittaja (olettaen, että nimittäjät eivät tule 0:ksi).

3.10 Luvut a, b, c ovat 1) suoraan, 2) kääntäen verrannolliset lukuihin d, e, f, jos 1) $a{:}b{:}c = d{:}e{:}f$, 2) $a{:}b{:}c = \frac{1}{d}{:}\frac{1}{e}{:}\frac{1}{f}$. Määritä jotkin kokonaisluvut, jotka ovat kääntäen verrannolliset lukuihin 2, 4 ja 5.

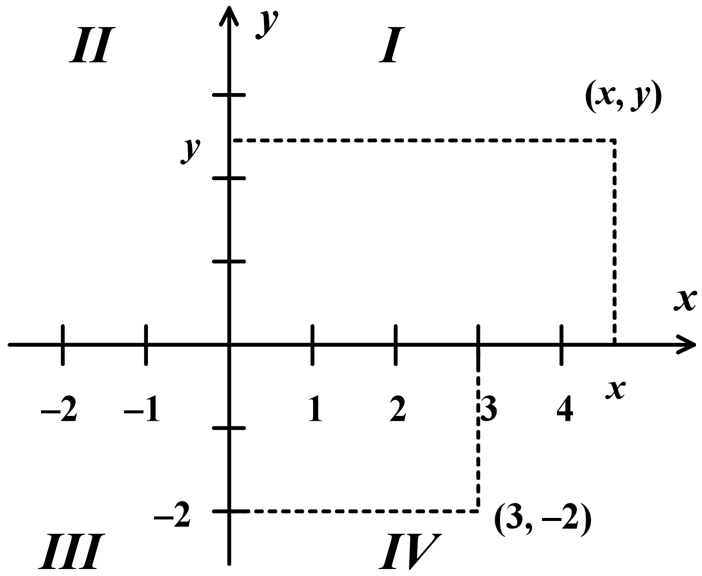
4 Funktio

4.1 Koordinaatisto

1) Reaaliluvut voidaan esittää ***lukusuoran*** avulla:



2) Reaalilukuparit voidaan esittää ***xy-koordinaatiston*** avulla:



Luvut ***x*** ja ***y*** ovat pisteen **(*x, y*)** ***koordinaatit***, tarkemmin sanottuna

x = ***abskissa***,

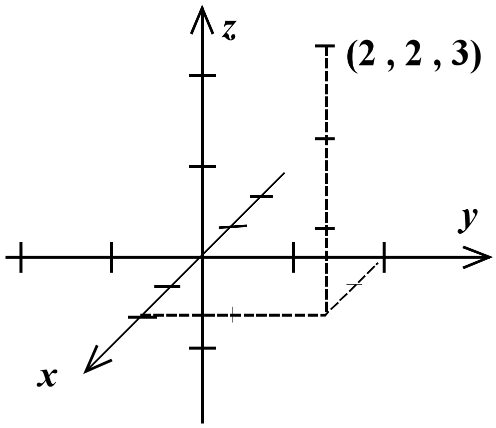
y = ***ordinaatta***.

Koordinaattiakselit jakavat *xy*-tason neljään ***neljännekseen I, II, III, IV***.

Koordinaatiston avulla geometriset viivat kuten suora ja ympyrä voidaan esittää yhtälöinä. Esim. ***suoran*** yhtälö on muotoa $\boxed{y = kx + b}$. Kääntäen tämän yhtälön ***kuvaaja*** *xy*-koordinaatistossa on suora, jonka kulmakerroin on k ja joka leikkaa y-akselin kohdassa b. ***Ympyrän*** yhtälö taas on muotoa $\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}$, missä r on ympyrän säde ja (a, b) on ympyrän keskipiste. Tarkemmin myöhemmin.

3) Avaruuspisteiden esittämiseen käytetään suorakulmaista ***xyz-koordinaatistoa***. Koordinaatisto piirretään tavallisesti seuraavan kuvan

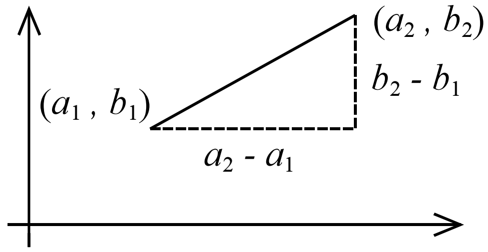
mukaiseen asentoon, missä y- ja z-akselien yksikköjanat näkyvät yhtä pitkinä ja x-akselin yksikköjana puolta lyhempänä.



Kahden pisteen (a_1, b_1) ja (a_2, b_2) välinen ***etäisyys*** (*distanssi*) xy-tasossa on

$$\boxed{d = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1^{\,2} - b_2)^2}}$$

Tämä seuraa Pythagoraan lauseesta, vrt. viereinen kuva.



Avaruudessa tulee kolmas koordinaatti lisää (kuten geometrian monisteessa perustellaan):

$$\boxed{d = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2}}.$$

4.2 Funktio ja sen kuvaaja

Esim. 1 Ilmanvastus riippuu kappaleen nopeudesta eli ilmanvastus on nopeuden ***funktio***. Tämä riippuvuus voidaan ehkä esittää ilmanvastuksen F ja nopeuden v välisenä yhtälönä, esim.

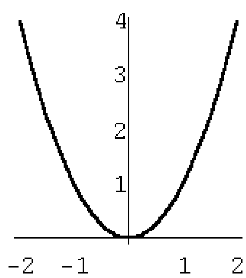
$$F = 0{,}7v^2 \qquad \text{(missä } [v] = m/s \text{ ja } [F] = N\text{)}.$$

(Mikä tulee vakion 0,7 yksiköksi?) Kun v:lle annetaan jokin lukuarvo (≥ 0), se määrää *yksikäsitteisesti* F:n arvon, esim.

$$v = 10 \;\Rightarrow F = 70 \;\; \text{(ts. } \textbf{\textit{jos}}\; v = 10,\; \textbf{\textit{niin}}\; F = 70\text{)},$$
$$v = 20 \;\Rightarrow F = 280.$$

Nuolta $\Rightarrow$ käytetään merkityksessä ***jos ... niin***.

Esim. 2 Yhtälö $y = x^2$ määrittelee erään funktion, sillä kun x:lle annetaan jokin arvo, se määrää *yksikäsitteisesti* y:n arvon. Tällaisessa yhteydessä sanotaan, että x on ***argumentti*** tai ***muuttuja*** ja y on x:n ***funktio***. Tämän funktion *kuvaaja* on ns. ***perusparaabeli***.



Yleisesti sanotaan, että ***y* on *x*:n funktio**, jos jokaista kyseeseen tulevaa *x*:n arvoa vastaa vain yksi *y*:n arvo (***yksikäsitteisyysvaatimus***).

Funktiota merkitään matematiikassa tavallisimmin kirjaimella f ja muuttujan arvoa x vastaavaa funktion arvoa $f(x)$:llä (lue: *"f x:llä"*). Siten esim. perusparaabelin yhtälö on muotoa

$$\boldsymbol{y = f(x)}, \qquad \text{(lue: "}y \text{ on } f\ x\text{")}$$

missä $f(x) = x^2$. Kun *x*:lle annetaan eri arvoja, saadaan vastaavia *y*:n arvoja. Esim. tällä funktiolla $f(5) = 5^2 = 25$ (lue: *"f **arvolla** 5 on 5^2 "*).

Esim. 3 Jos $f(x) = x^2 + 2x$ (lue: *"f x on $x^2 + 2x$ "*), niin

$$\boxed{\begin{array}{l} f(3) = 3^2 + 2 \cdot 3 = 15 \quad \text{(lue: "}f\ \textbf{arvolla}\ 3\ on\ 15\text{")}, \\ f(a) = a^2 + 2a, \qquad \text{("}f\ arvolla\ a\ on\ ....\text{")}, \\ f(2a) = (2a)^2 + 2 \cdot 2a = 4a^2 + 4a \qquad \text{("}f\ arvolla\ 2a\ on\ ....\text{")}, \\ f(t-1) = (t-1)^2 + 2(t-1) = t^2 - 2t + 1 + 2t - 2 = t^2 - 1. \end{array}}$$

Millainen on funktion $y = f(x)$ kuvaaja, jos $f(x) = x^2 + 1$? Entä funktion $y = g(x)$ kuvaaja, jos $g(x) = 2x + 1$?

4.3 Funktion esittämistapoja

1) Ilmoitetaan ***funktiota esittävä yhtälö***, esim.

$$y = f(x) \text{ tai } y = y(x) \quad \text{(ns. ratkaistu- eli \textbf{\textit{eksplisiittimuoto}})}$$

tai

$$F(x, y) = 0 \quad \text{(ns. ratkaisematon- eli \textbf{\textit{implisiittimuoto}})}.$$

Tekniikassa lukujen *x* ja *y* tilalla on usein suureita, esim. nopeus *v*, aika *t* jne. Esimerkiksi yhtälö $s = s(t)$ ilmoittaa, että matka on ajan funktio.

Esim. 4 a) Funktion $y = x^3$ kuvaaja on ns. ***kuutioparaabeli***.

b) Yhtälö $2x - y + 1 = 0$ esittää erästä funktiota *implisiittimuodossa*. Vastaava ratkaistu muoto on $y = 2x + 1$. Tämän funktion kuvaaja on suora, jonka kulmakerroin on 2 ja joka leikkaa *y*-akselin kohdassa 1 (ts. $x = 0 \Rightarrow y = 1$).

c) Yhtälön $x^2 + y^2 = 1$ kuvaaja on origokeskinen yksikköympyrä. Tämä yhtälö määrittelee kaksi funktiota:

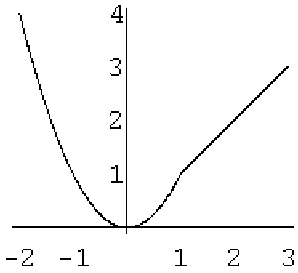
$$y = \pm\sqrt{1 - x^2} \quad \text{(yksikköympyrän puolikkaat).}$$

2) Ilmoitetaan ***x:n lauseke f(x)***, esim. puhutaan lyhyesti funktiosta $\sin 2x$ funktion $y = \sin 2x$ sijaan.

Esim. 5 Funktion $x^2 + 1$ (laajin mahdollinen reaalinen) ***määrittelyjoukko*** (lyh. ***Mj***) muodostuu kaikista reaaliluvuista, ts. x:lle voidaan antaa mikä reaalilukuarvo tahansa. Vastaavan ***arvojoukon*** (***Aj***) muodostavat kaikki luvut $y \geq 1$. Funktion kuvaaja on viiva, joka saadaan, kun perusparaabelia nostetaan yksi yksikkö ylöspäin.

3) Funktiota esittävä ***lauseke voi olla erilainen eri x:n arvoilla:***

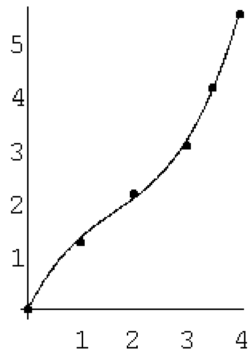
Esim. 6 Funktion $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ kun } x \leq 1 \\ x, \text{ kun } x > 1 \end{cases}$ kuvaaja muodostuu osasta paraabelia $y = x^2$ ja osasta suoraa $y = x$.



4) ***Funktio taulukkomuodossa:***

Esim. 7 Taulukko

t	0	1,0	2,0	3,0	3,5	4,0
s	0	1,3	2,2	3,1	4,2	5,6



esittää erästä funktiota $s = s(t)$. Kuvaaja muodostuu kuudesta pisteestä, jotka voidaan yhdistää toisiinsa esim. murtoviivalla (joka muodostuu janoista) tai käyrällä viivalla. Jos pisteet ovat mittausarvoja, niissä voi olla jonkin verran virhettä. Kuvassa on tähän dataan ***sovitettu*** (engl. *fit*) kolmannen asteen polynomifunktio, jonka lausekkeeksi on saatu matematiikkaohjelmien avulla $\approx -0{,}0145 + 2{,}01t - 0{,}804t^2 + 0{,}163t^3$.

Tällainen *sovitefunktio* liittyy mahdollisimman hyvin kyseisiin pisteisiin, mutta ei yleensä kulje tarkasti pisteiden kautta. Laske edellisestä sovitefunktiosta matka hetkellä 1,5. Ensimmäisen asteen sovitefunktiota $y = ax + b$ sanotaan ***regressiosuoraksi.***

5) ***Parametriesitys:***

Esim. 8 Yhtälöt $\begin{cases} x = t - 2 \\ y = t^2 - 4t \end{cases}$ esittävät erästä funktiota ***parametrimuodossa***. ***Parametri*** t on tässä eräänlainen apumuuttuja: kun sille annetaan arvoja, saadaan (x, y)-pisteitä. Tässä esimerkissä parametri t pystytään ***eliminoimaan*** (poistamaan): Ratkaise ensimmäisestä yhtälöstä t, sijoita se toiseen ja sievennä. Tulos on $y = x^2 - 4$. Kyseessä on siis erään paraabelin parametriesitys (perusparaabeli pudotettuna 4 yksikköä alaspäin).

6) Edellä funktiot ovat olleet yhden muuttujan funktioita. Matematiikassa ja sen sovelluksissa esiintyy myös ***useamman muuttujan funktioita***.

Esim. 9 a) Yhtälö $z = x^2 + y^2$ määrittelee erään kahden muuttujan x ja y funktion $z = f(x, y)$. Sen kuvaaja on ns. ***perusparaboloidi***. Se on saman näköinen kuin se pinta, joka syntyy, kun perusparaabeli pyörähtää akselinsa ympäri.

b) Kahden massapisteen välinen vetovoima riippuu kummankin massasta ja niiden välisestä etäisyydestä:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Tässä F on kolmen muuttujan funktio: $F = F(m_1, m_2, r)$.

7) ***Funktio kuvauksena:***

Funktio voidaan esittää myös ***kuvauksena***, joka kuvaa x:n arvot arvoiksi $f(x)$. Merkintätapa voi olla esim. seuraava:

$f\colon x \mapsto f(x)$

$$\boldsymbol{x} \longrightarrow \boxed{\boldsymbol{f}} \longrightarrow \boldsymbol{f(x)}$$

(lue: *"funktio f, joka kuvaa x:n f(x):ksi"*). Tällöin x:ää sanotaan joskus *syötteeksi (**Input**)* ja $f(x)$:ää *tulosteeksi (**Output**)*. Sähkötekniikassa x taas voi olla nimeltään ***signaali*** ja $f(x)$ ***vaste***.

Esim. 10 Funktion $f\colon x \mapsto 2x$ kuvaaja on suora $y = 2x$ ja funktion $g\colon x \mapsto x^2$ kuvaaja on perusparaabeli.

*Jos suoritetaan kumpikin peräkkäin, siis luku *x* kerrotaan ensin 2:lla ja näin saatu luku korotetaan neliöön, saadaan funktio $h\colon x \mapsto (2x)^2 = 4x^2$.

4.4 Käänteisfunktio

Funktion *f* ***käänteisfunktiota*** merkitään yleisesti f^{-1}:llä. Jos *f* suorittaa jotkin laskuoperaatiot tietyssä järjestyksessä, niin f^{-1} suorittaa *"käänteiset operaatiot käänteisessä järjestyksessä"*. Tällaisia toisilleen käänteisiä operaatioita ovat mm. seuraavat:

operaatio	***käänteisoperaatio***
lisääminen	vähentäminen
kertominen	jakaminen
juurenotto	potenssiin korotus
eksponenttiin korotus	logaritmin otto
trigonometrinen operaatio	*arkus*-operaatio

****Esim. 11*** Jos

$$f\colon x \mapsto 2x + 3 \qquad (f \text{ kertoo luvun 2:lla ja lisää sitten 3}),$$

niin käänteisfunktio on

$$f^{-1}\colon x \mapsto \frac{x-3}{2} \qquad (f^{-1} \text{ vähentää 3 ja jakaa sitten 2:lla}).$$

Jos sama funktio *f* esitetään tavallisemmin muodossa

$$y = 2x + 3$$

ja tästä yhtälöstä ratkaistaan *x*, saadaan käänteisfunktiolle esitys

$$x = \frac{y-3}{2},$$

missä nyt *y* on muuttujana ja *x* funktiona.

Esim. 12 "Käänteisoperaatioita":

a) Potenssiyhtälön $x^3 = 2$ ratkaisu on kuutiojuuri $x = \sqrt[3]{2}$.

b) Eksponenttiyhtälön $10^x = 2$ ratkaisu on 10-kantainen eli *Briggsin* ***logaritmi***

$$x = \lg 2 \approx 0{,}30103.$$

c) Trigonometrisen yhtälön $\sin x = 0{,}5$ eräs ratkaisu on ***arkussini*:** $x = \arcsin 0{,}5 = 30°$.

Harjoituksia

A

4.1 Olkoon lukusuoran pisteen A x-koordinaatti a ja pisteen B x-koordinaatti b. Merkitään C:llä janan AB keskipistettä. Miten saat laskettua C:n x-koordinaatin siinä tapauksessa, että a ja b ovat a) positiivisia, b) negatiivisia, c) erimerkkisiä?

4.2 a) Piirrä xyz-koordinaatistoon pisteet A(4,–3,5) ja B(–3,4,–3). b) Konstruoi piirrokseen kohta C, jossa AB-suora leikkaa xy-tason ja mittaa kuvasta C:n koordinaatit.

4.3 Piirrä seuraavien funktioiden kuvaajat (piirrä esim. a)-kohdan käyrät samaan koordinaatistoon eri väreillä tai erilaisilla viivalajeilla): a) $y = x^2 - 2,\quad y = 2x^2,\quad y = -x^2 + 1,$

b) $y = x,\quad y = x + 3,\quad y = -2x,\quad y = -2x - 3$

c) $y = \dfrac{1}{x},\quad y = \dfrac{2}{x},\quad y = \dfrac{4}{x},$ d) $y = x^3,\quad y = \dfrac{1}{x^2}.$

4.4 Piirrä yhtälön $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$ kuvaaja.

4.5 Olkoon $f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$. Laske a) $f(5)$, b) $f(3h)$, c) $f(3)$.

4.6 Piirrä seuraavien funktioiden kuvaajat a) antamalla t:lle arvoja, b) eliminoimalla ensin t: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$ $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t^2 + 2t \end{cases}$.

4.7 Määritä funktioiden a) $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{2}$, b) $y = \dfrac{(x-1)^2}{4}$ käänteisfunktiot.

B

4.8 Laske a) $f(2h)+f(h-3)$, kun $f\colon x \mapsto \dfrac{x+3}{x-2}$, b) $\dfrac{f(2)-3f(4)}{f(1)^2}$,

kun $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+1}, \text{kun } x \le 1 \\ |1-4x|, \text{kun } x > 1\end{cases}$.

4.9 Piirrä seuraavien funktioiden kuvaajat (antamalla x:lle arvoja) ja määritä näiden funktioiden (laajin mahdollinen reaalinen) *Mj* ja vastaava *Aj*: a) $y=(x-1)^2$, b) $y=\dfrac{1}{x-2}$.

4.10 Määritä seuraavien funktioiden kuvaajat eliminoimalla t:

a) $\begin{cases}x = 3\sin t \\ y = 3\cos t\end{cases}$, b) $\begin{cases}x = 2+3\sin t \\ y = 1+3\cos t\end{cases}$ (ohje: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$).

4.11 Määritä funktion $y=(x+3)^2-(2x+9)$ ***nollakohdat***, ts. ne x:n arvot, jotka tekevät funktion arvon y 0:ksi. Kyseessä on eräs ylöspäin aukeava paraabeli. Määritä nollakohtia hyväksi käyttäen paraabelin huippu.

4.12 Mikä on funktion $y=\sqrt{9-x^2}$ kuvaaja?

4.13 Pystysuoran heittoliikkeen yhtälö on $h=h_0+v_0t-\dfrac{gt^2}{2}$. Osoita, että kappale on hetkellä $t_1=\dfrac{2v_0}{g}$ alkukorkeudella h_0. Laske lakikorkeus (joka saavutetaan hetkellä $t_1/2$).

4.14 Kaasun paineen p, tilavuuden V ja lämpötilan T välillä on yhteys $pV=nRT$, missä n = moolimäärä ja R = kaasuvakio. Esitä a) paine tilavuuden ja lämpötilan funktiona: $p=p(V,T)$, b) $V=V(p,T)$, c) $T=T(p,V)$.

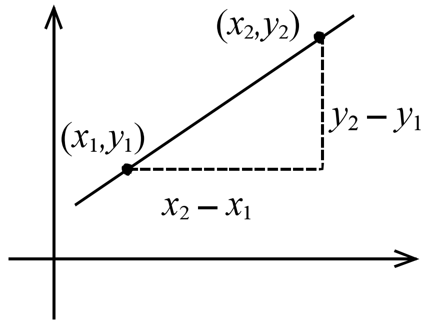
4.15 Funktio f on ***parillinen funktio***, jos $f(-a)=f(a)$ kaikilla (kyseeseen tulevilla) a:n arvoilla. Vastaavasti ***parittomuusehto*** on $f(-a)=-f(a)$. Mitkä seuraavista funktioista ovat parillisia, mitkä parittomia ja mitkä eivät kumpaakaan:

$$x^2,\quad x^3,\quad x+1,\quad 1/x,\quad (x+1)^2\,?$$

5 Suora

5.1 Kulmakerroin ja suuntakulma

Jos (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) ovat suoran kaksi pistettä, niin suoran kulmakerroin on



$$\boxed{\boldsymbol{k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}} \qquad \left(= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \right).$$

Kulmakerroin ilmaisee, kuinka jyrkästi suora nousee ($k > 0$) tai laskee ($k < 0$).

Esim. 1 Suoran $A(2,-1)$ $B(-4,13)$ kulmakerroin on

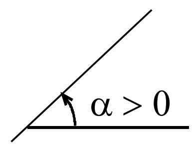
$$k = \frac{13-(-1)}{-4-2} = \frac{14}{-6} = -\frac{7}{3}.$$

Suora on siis aika jyrkästi laskeva: jos suoran pisteen x-koordinaatti kasvaa 3:lla, niin y pienenee 7:llä. Piirrä kuva!

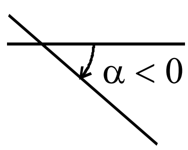
Vaakasuoran suoran kulmakerroin on 0. Pystysuoran suoran kulmakerrointa ei ole määritelty (k:n lausekkeessa nimittäjä on = 0). Joskus sanotaan, että pystysuoran suoran kulmakerroin on "*ääretön*": $k = \infty$.

Kulmaa α, joka täyttää ehdot

$$\mathbf{\tan\alpha = k, \quad -90° < \alpha \le 90°}$$



sanotaan suoran ***suuntakulmaksi***. Esimerkin 1 mukaisella suoralla



$$\tan\alpha = -\frac{7}{3} \quad \therefore \alpha \approx -66{,}8°.$$

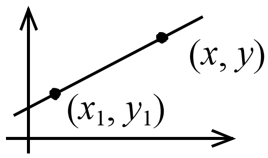
5.2 Suoran yhtälö

1) ***Pisteen*** $(\boldsymbol{x_1, y_1})$ ***kautta kulkeva suora, jonka kulmakerroin k*** $(\neq \infty)$ ***tunnetaan.***

Väite: Tällaisen suoran yhtälö on

(1) $$\boxed{\boldsymbol{y - y_1 = k(x - x_1)}}.$$

Todistus: xy-tason yleinen piste (x, y) on tällaisella suoralla, mikäli se antaa (x_1, y_1)-pisteen kanssa kulmakertoimeksi k:n, ts. toteuttaa ehdon



$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = k.$$

Tämä yhtälö on yhtäpitävä (1):n kanssa.

Esim. 2 Sellaisen suoran, jonka kulmakerroin on ½ ja joka kulkee pisteen $(-1, 2)$ kautta, yhtälö on

$$y - 2 = \tfrac{1}{2}(x - (-1)) \quad \big| \cdot 2$$
$$2y - 4 = x + 1$$
$$\therefore\ \underline{\underline{x - 2y + 5 = 0}}.$$

2) ***Kahden tunnetun pisteen kautta kulkeva suora.*** Jos suoralta tunnetaan kaksi pistettä (x_1, y_1) ja (x_2, y_2), niin $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ja yhtälö on siten (1):n mukaan

$$\boldsymbol{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}.$$

Esim. 3 Määritä pisteiden $(2,-3)$ ja $(1, 6)$ kautta kulkevan suoran yhtälö.

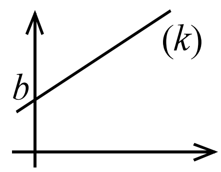
Kulmakerroin $k = \dfrac{6 - (-3)}{1 - 2} = -9$, joten yhtälö on

$y - (-3) = -9(x - 2)$ tai yhtä hyvin $y - 6 = -9(x - 1)$.

Kumpikin yhtälö sievenee muotoon $\underline{\underline{9x + y - 15 = 0}}$.

3) ***Suora, jonka kulmakerroin on k ja joka leikkaa y-akselin kohdassa b***. *Väite:* Tällaisen suoran yhtälö on

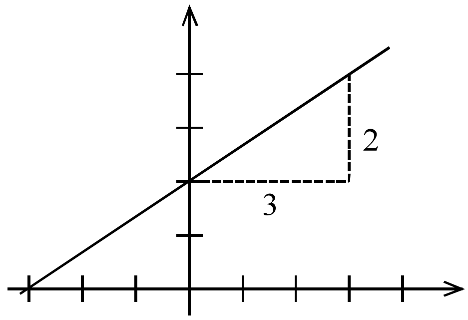
(2) $$\boxed{\boldsymbol{y = kx + b}}$$



Todistus: Koska suora kulkee pisteen $(0, b)$ kautta, niin yhtälö on kohdan 1) mukaan $y - b = k(x - 0)$. Tämä sievenee muotoon (2).

Esim. 4 Kun yhtälöstä $2x-3y+6=0$ ratkaistaan y, saadaan

$$y=\frac{2}{3}x+2\,.$$

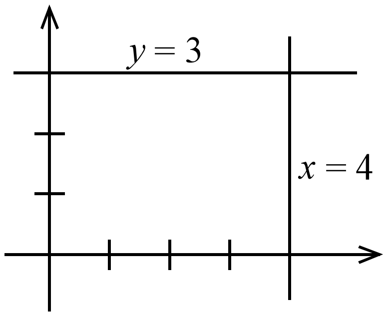


Kyseessä on siis suora, jolla $k=\frac{2}{3}$ ja joka leikkaa y-akselin kohdassa $y=2$. Sama suora voidaan piirtää myös valitsemalla suoralta $2x-3y+6=0$ kaksi pistettä:

$$x=0 \Rightarrow -3y+6=0 \Rightarrow y=2$$

$$y=0 \Rightarrow 2x+6=0 \Rightarrow x=-3 \qquad (\text{tarkistus: } x=3 \Rightarrow y=4).$$

Esim. 5 Yhtälö $x=4$ esittää *kaikkia niitä pisteitä, joilla x-koordinaatti on 4 ja y-koordinaatti mikä tahansa.* Tällaiset pisteet muodostavat ***pystysuoran*** suoran. Vastaavasti yhtälön $y=3$ kuvaaja on viereisen kuvan mukainen ***vaakasuora*** suora.



Yleisesti: *Jokaisen suoran yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon*

(3) $$\boxed{\boldsymbol{ax+by+c=0}},$$

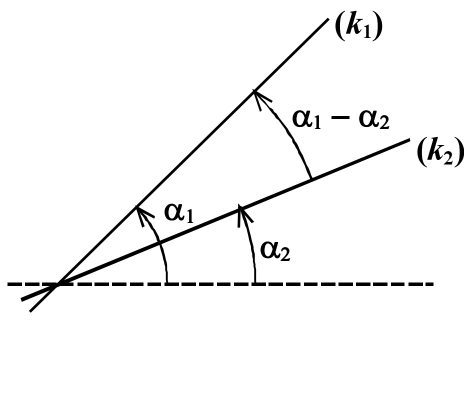
missä x:n ja y:n kertoimet a ja b eivät molemmat ole = 0. Jos *a ja b ovat nollasta eriäviä, yhtälö (3) esittää vinoa suoraa. Jos* $a\neq 0$, *mutta b = 0, kyseessä on pystysuora suora* $x=-c/a$. *Jos taas a = 0 ja* $b\neq 0$, *kyseessä on vaakasuora suora* $y=-c/b$.

5.3 Suorien välinen kulma

Tarkastellaan kahta suoraa, joiden kulmakertoimet ovat

$k_1=\tan\alpha_1$ ja $k_2=\tan\alpha_2$,

missä $\alpha_1>\alpha_2$. Tällöin suorien välinen (terävä tai tylppä) kulma on $\alpha=\alpha_1-\alpha_2$.



Trigonometriassa perustellaan kaava

$$\tan(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\tan\alpha_1 - \tan\alpha_2}{1 + \tan\alpha_1 \tan\alpha_2}.$$

Täten suorien välinen (terävä tai tylppä) kulma saadaan kaavasta

(4) $$\mathbf{\tan\alpha = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}}.$$

Esim. 6 Laske suorien $y = 2x + 1$ ja $y = x - 2$ välinen kulma.

$$\tan\alpha = \frac{2-1}{1+2\cdot 1} = \frac{1}{3} \therefore \alpha \approx 18{,}4°.$$

**Huom*. Jos suorat (joiden välinen kulma pitäisi laskea) eivät ole kohtisuorassa toisiaan vastaan, niin niiden välisistä kulmista kaksi ristikkäistä on teräviä ja kaksi tylppiä. (Piirrä kuva!) Suorien välisen *terävän* kulman α saat kaavasta (4), jos lisäät sen oikealle puolelle itseisarvot:

$$\tan\alpha = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

Kohtisuoruusehto: Jos yhtälössä (4) nimittäjä on 0, $\tan\alpha$ ei ole määritelty. Näin käy, jos $\alpha = 90°$ eli jos suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan eli toistensa ***normaaleja***. Kun yhtälöstä $1 + k_1 k_2 = 0$ ratkaistaan k_2, saadaan ***kohtisuoruusehdoksi***

$$\boxed{\mathbf{k_2 = -\frac{1}{k_1}}}.$$

Siis ***kaksi suoraa ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, jos niiden kulmakertoimet ovat toistensa käänteisluvun vastalukuja.***

Esim. 7 Määritä suora, joka on kohtisuorassa suoraa $2x + y - 1 = 0$ vastaan ja kulkee pisteen $(2,-1)$ kautta.

$2x + y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -2x + 1$

$\therefore k = -2 \therefore k_\perp = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$ ($\perp$ on kohtisuoruusmerkki).

Kysytty suora on täten

$$y-(-1)=\frac{1}{2}(x-2) \quad \Big| \cdot 2$$
$$2y+2=x-2$$
$$\therefore \underline{\underline{x-2y=4}}$$

5.4 Pisteen etäisyys suorasta

Pisteen (x_1, y_1) etäisyydelle d suorasta $ax+by+c=0$ voidaan johtaa esim. vektorilaskennan avulla seuraava lauseke:

$$\boldsymbol{d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}.$$

(Vastaava johtaminen suoritetaan myöhemmin avaruudessa, pisteen etäisyydelle tasosta.)

Esim. 8 Laske pisteen (–2, 3) etäisyys suorasta $y=4x-2$ (piirrä itse kuva).

Kaavan vaatima suoran yhtälö on nyt $4x-y-2=0$. Täten

$$d=\frac{|4\cdot(-2)-3-2|}{\sqrt{4^2+1}}=\frac{13}{\sqrt{17}} \quad (=\frac{13}{17}\cdot\sqrt{17}).$$

Harjoituksia

A

5.1 Määritä suoran kulmakerroin, kun a) suora kulkee pisteiden (1,–3) ja (2,–5) kautta, c) suuntakulma on $25{,}8°$, c) suora leikkaa x- ja y-akselin kohdissa –3 ja –2.

5.2 Määritä sen suoran yhtälö, joka

a) kulkee pisteen (2,–5) kautta ja jonka kulmakerroin on 2/5 ,

b) leikkaa y-akselin kohdassa –4 ja jonka kulmakerroin on 2/3,

c) leikkaa x-akselin kohdassa 2 ja kulkee pisteen (5,1) kautta.

5.3 Määritä, missä kohdissa suora A(4,–1) B(1,3) leikkaa koordinaattiakselit.

5.4 Määritä suorien $y=4x+1$ ja $y=5x+1$ välinen kulma.

5.5 Määritä suora, joka on kohtisuorassa suoraa $A(2,1)$ $B(3,–2)$ vastaan ja kulkee pisteen B kautta.

5.6 Laske pisteen (1,2) etäisyys pisteiden (2,–1) ja (–2, 1) kautta kulkevasta suorasta.

5.7 Piirrä suorat $4x-2y=3$, $3x+4y+6=0$ ja $2y-3=0$ sekä määritä (kuvaa apuna käyttäen) niiden rajaaman kolmion ala.

B

5.8 Millä a:n arvolla pisteet (4, 0), (–2, 4) ja $(a, 2a)$ ovat samalla suoralla ?

5.9 Määritä suorien a) $y=x-1$ ja $2x+y=1$, b) $2x+y-1=0$ ja $x-2y-4=0$ välinen terävä kulma.

5.10 Millaisen ***suoraparven*** muodostavat a) suorat $y=-2x+t$, b) $tx-y-4=0$, kun t:tä vaihdellaan? Määritä kyseisestä parvesta suora, joka kulkee pisteen (2,–3) kautta.

5.11 Mikä on sen suoran yhtälö, joka on suoran $2x+3y-5=0$ suuntainen ja kulkee pisteen (2,–1) kautta?

5.12 Millä a:n arvolla suorat $2x+3y-4=0$ ja $ax+2(a-1)y+3=0$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan?

5.13 Määritä seuraavan kahden yhdensuuntaisen suoran välinen etäisyys: $3x-4y+8=0$ ja $3x-4y+5=0$.

5.14 Osoita, että suoran $3x+4y-12=0$ eräs *normaalivektori* on vektori $\overline{n}=[3,4]$ (ohje: määritä ensin suoran jokin *suuntavektori*, ts. vektori, joka kulkee suoran kahden pisteen kautta).

5.15 Mikä ehto yhtälöiden $ax+by+c=0$ ja $a_1x+b_1y+c_1=0$ on täytettävä, jotta ne esittäisivät a) yhdensuuntaisia suoria, b) samaa suoraa?

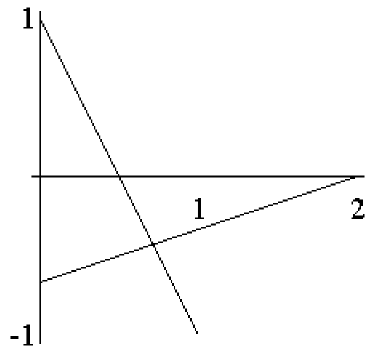
5.16 Mikä niistä suorista, jotka leikkaavat y-akselin kohdassa 3, on etäisyydellä 2 pisteestä (4,3)?

5.17 Kolmion kaksi kärkeä ovat $A(2,0)$ ja $B(6,2)$. Kolmas kärki C on suoralla $x=-2$. Tässä kärjessä yhtyvät sivut erottavat y-akselista janan, jonka pituus on 1. Määritä C:n koordinaatit. (Ohje: $C=(-2,b)$. Laske suorien AC ja BC leikkauspisteet y-akselin kanssa. Näiden pisteiden y-koordinaattien erotuksen y_1-y_2 tai y_2-y_1 täytyy olla = 1.)

6 Yhtälöryhmä

Esim. 1 Ratkaistaan yhtälöpari $\begin{cases} x-3y=2 \\ 2x+y=1 \end{cases}$ usealla eri tavalla. Kumpikin yhtälö on tuntemattomiin x ja y nähden 1. astetta eli ***lineaarinen***.

1. tapa ***Graafinen ratkaisu***, joka yleensä antaa vain likiarvon. Yhtälöiden kuvaajat xy-tasossa ovat suoria. Niiden leikkauspiste (ja vain se) toteuttaa kummankin yhtälön. Kuvan mukaan leikkauspiste on



$$\begin{cases} x \approx 0{,}7 \\ y \approx -0{,}4. \end{cases}$$

2. tapa ***Sijoituskeino***. Ratkaistaan 1. yhtälö x:n suhteen, jolloin saadaan $x=3y+2$. Sijoitetaan tämä x:n lauseke 2. yhtälöön. Näin saadaan yhtälö, jossa on vain y:tä. Tästä ratkaistaan y. Vastaava x:n arvo saadaan sitten yhtälöstä $x=3y+2$. Siis

$$\begin{cases} x-3y=2 \quad \therefore x=3y+2 \mid \text{sij. 2. yhtälöön} \\ 2x+y=1 \qquad\qquad 2(3y+2)+y=1 \end{cases}$$

$$7y=-3$$

$$y=-\frac{3}{7}\approx -0{,}43$$

$$x=3\cdot(-\frac{3}{7})+2=\frac{5}{7}\approx 0{,}71.$$

3. tapa ***Yhteenlaskukeino***: Kerrotaan yhtälöt sellaisilla vakioilla, että kun yhtälöt sitten lasketaan yhteen, toinen tuntemattomista häviää (*eliminoituu*).

$$+\begin{cases} x-3y=2 \mid \cdot 1 \mid \cdot(-2) \\ 2x+y=1 \mid \cdot 3 \mid \cdot 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x \quad\;\; =5 \\ \quad\;\; 7y=-3 \end{cases} \therefore \begin{cases} x=5/7 \\ y=-3/7 \end{cases}.$$

"Sekamenettely". *Yhteenlasku- ja sijoituskeinoa voidaan käyttää myös yhdessä*: lasketaan toinen tuntemattomista yhteenlaskukeinolla ja sijoitetaan saatu arvo jompaankumpaan alkuperäisistä yhtälöistä.

Esim. 3 Ratkaise 3 numeron tarkkuudella:

$$+\begin{cases} 5{,}76s + 3{,}56t = 1{,}27 & |\cdot 2{,}17 \\ 3{,}90s + 2{,}17t = 4{,}33 & |\cdot(-3{,}56) \end{cases}$$

$$-1{,}384...s \qquad = -12{,}65... \qquad \therefore s = 9{,}141... \text{ sij. 1. yhtälöön}$$

$$5{,}76 \cdot 9{,}141... + 3{,}56t = 1{,}27$$

$$t = -14{,}43...$$

$$\therefore \begin{cases} s = 9{,}14 \\ t = -14{,}4 \end{cases}$$

Tarkistus: Sijoita *s*:n ja *t*:n arvot 2. yhtälöön. Huomaa: välimuodot on kirjoitettu näkyviin 4 numerolla ja sijoitettu laskimen muisteihin. Välimuotojen pyöristäminen 3-numeroisiksi voisi aiheuttaa lopputulosten 3. numeroon virhettä.

Esim. 4 Käytetään edellistä "sekamenettelyä" seuraavan ***kolmen yhtälön yhtälöryhmän*** ratkaisemiseen. Tuntemattomalla *y* on sopivimmat kertoimet eliminointiin, joten *eliminoidaan aluksi y 1. ja 2. yhtälön sekä 2. ja 3. yhtälön avulla* (myös 1. ja 3. yhtälö kävisi). *Näin saadaan yhtälöpari x:lle ja z:lle.*

$$+\begin{cases} 4x + y - z = 2 & |\cdot 1 & \\ 3x - y - z = 1 & |\cdot 1 & |\cdot 2 \\ 2x + 2y - 2z = 1 & & |\cdot 1 \end{cases} \qquad \text{(eliminoidaan } y\text{)}$$

$$+\begin{cases} 7x \quad - 2z = 3 & |\cdot 2 \\ 8x \quad - 4z = 3 & |\cdot(-1) \end{cases}$$

$$6x \qquad = 3 \quad \therefore \; x = \frac{1}{2} \qquad \text{sij. 4. yhtälöön}$$

$$7 \cdot \frac{1}{2} - 2z = 3 \quad \therefore z = \frac{1}{4} \quad \text{sij. 1. yhtälöön}$$

$$4 \cdot \frac{1}{2} + y - \frac{1}{4} = 2 \;\therefore y = \frac{1}{4}.$$

(Kokeile eliminoida ensin *z* eikä *y*.)

Esim. 5 Seuraava yhtälöpari ei ole enää lineaarinen, vaan 1. yhtälössä on kaksi 2. asteen termiä:

$$\begin{cases} x^2 + xy = 1 \\ \quad x + y = 2 \;\therefore\; y = 2 - x \;\; \mid \text{sij. 1. yhtälöön} \end{cases}$$

$$x^2 + x(2-x) = 1$$

$$2x = 1$$

$$\underline{\underline{x = \frac{1}{2}}},\; \underline{\underline{y}} = 2 - \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}.$$

Monisteen lopussa <u>lineaarisia</u> yhtälöryhmiä käsitellään *determinanttien* ja *matriisien* avulla.

Harjoituksia

A

6.1 Ratkaise a) graafisesti, b) sijoituskeinolla, c) yhteenlaskukeinolla, d) sekakeinolla $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 3x - 2y = 14 \end{cases}$. Mikä on tässä "paras" keino?

6.2 Määritä laskemalla (ts. "algebrallisesti") suorien $3x - 2y + 8 = 0$ ja $2x - 5y = 2$ leikkauspiste.

6.3 Ratkaise a) $\begin{cases} 4x + 2y - z = 1 \\ -x + y = 2 \\ 2x + 3y + z = -2 \end{cases}$, b) $\begin{cases} 4x + y - z = 15 \\ 3x - y + z = 6 \\ x + 2y - 3z = 10 \end{cases}$.

B

6.4 Määritä (yhtälöparin avulla) sellaiset luvut *a* ja *b*, että suora $ax + by + 2 = 0$ kulkee pisteiden (1,–3) ja (–3, 4) kautta.

6.5 Ratkaise yhtälöryhmä a) $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 10 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 11 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 4x - y + 2z = -3 \\ 2x + 3y + 4z = 3 \end{cases}$.

6.6 Isän ja pojan yhteisikä on 62 vuotta. Neljä vuotta sitten isä oli 8 kertaa niin vanha kuin poika. Minkä ikäisiä he ovat?

6.7 Ratkaise yhtälöpari a) $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=2 \\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{y}=4 \end{cases}$, b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=1 \\ \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}=7 \end{cases}$

(Ohje a)-kohtaan: yhteenlaskukeino tai merk. $\dfrac{1}{x}=u, \dfrac{1}{y}=v$).

6.8 *Lineaarisella yhtälöryhmällä voi olla yksi, ei yhtään tai äärettömän monta ratkaisua.* Ratkaise (yhteenlaskukeinolla)

a) $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x+2y=2 \end{cases}$, b) $\begin{cases} 2x+6y=1 \\ x+3y=2 \end{cases}$, c) $\begin{cases} 3x+y=1 \\ 6x+2y=2 \end{cases}$.

Miten laskettaessa ilmenee se, että ratkaisuja 1) ei ole yhtään, 2) on äärettömän monta? Mitä a)-, b)- ja c)-kohdan tapaukset merkitsevät geometrisesti? Millaisia c)-kohdan yhtälöt ovat toisiinsa nähden?

6.9 Ratkaise seuraava yhtälöryhmä (joka on peräisin eräästä sähkötekniikan tehtävästä):

$$\begin{cases} 0{,}40\cdot(x+y+z)=0{,}20\cdot 5{,}0 \\ 5{,}80\cdot(x+y)=0{,}20\cdot(5{,}0+z) \\ 29{,}80\cdot x=0{,}20\cdot(5{,}0+y+z) \end{cases}$$

6.10 *Jos lineaarisia yhtälöitä on vähemmän kuin tuntemattomia (kuten seuraavassa a)-kohdassa), voidaan "ylimääräiset" tuntemattomat valita vapaasti. Siten yhtälöryhmällä on yleensä äärettömän monta ratkaisua. Jos taas yhtälöitä on "liikaa" (kuten b)- ja c)-kohdissa), ratkaisuja ei yleensä ole yhtään.* (Jätä aluksi liiat yhtälöt pois ja ratkaise ryhmä. Tutki sitten, sattuisiko saamasi ratkaisu toteuttamaan "liiatkin" yhtälöt.) Ratkaise

a) $\begin{cases} x+2y-2z=0 \\ x-4y+3z=0 \end{cases}$, b) $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ -x+2y=2 \\ 5x-6y=7 \end{cases}$, c) $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ -x+2y=2 \\ 5x-6y=10 \end{cases}$.

6.11 Ratkaise yhtälöpari $x-y=3x+2y=x+2y-1$.

6.12 Tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä $v=v_0+at$. Määritä alkunopeus v_0 ja kiihtyvyys a, kun tiedetään, että hetkellä $t=2{,}0\ s$ nopeus on $v=10{,}0\ m/s$ ja hetkellä $t=5{,}0\ s$ nopeus on 24 *m/s*.

7 Toisen asteen yhtälö

7.1 Vajaa yhtälö

Jos 2. asteen yhtälössä $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$ joko b tai c on = 0, ratkaiseminen käy ilman ratkaisukaavaa seuraavan esimerkin kohtien 1) - 3) mukaisesti. Jos taas yhtälö on valmiiksi "*neliöity*", ratkaiseminen käy kohdan 4) tapaan.

Esim. 1

1) $2x^2+6x=0$

$2x(x+3)=0$ | *tulon nollasääntö*

$x=0 \vee x=-3.$

2) $2x^2-6=0$

$x^2=3$

$x=\pm\sqrt{3}$

3) $2x^2+6=0$

$x^2=-3$ Mahdoton, sillä minkään reaaliluvun neliö ei ole negatiivinen.

4) $(x+2)^2=3$

$x+2=\pm\sqrt{3}$

$x=-2\pm\sqrt{3}$

7.2 Neliöinti

Neliöintiä eli ***neliöksi täydentämistä*** käytetään ympyrän, ellipsin tai hyperbelin keskipisteen määrittämisessä, integrointitekniikassa, 2. asteen yhtälön ratkaisukaavan johtamisessa jne. Menetelmä perustuu siihen, että muotoa $a^2+2ab+b^2$ oleva lauseke voidaan kirjoittaa neliöksi $(a+b)^2$.

Esim. 2

$x^2+6x+4=0$ | ratkaistaan tämä ***neliöimällä***

$x^2+6x=-4$ | *Vasen puoli on muotoa x:n neliö + x:n ja jonkin luvun kaksinkertainen tulo*

$x^2+2\cdot x\cdot 3=-4$ | Lisää kummallekin puolelle 3:n neliö

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + \mathbf{3^2} = \mathbf{3^2} - 4$$

$(x+3)^2 = 5$ | Nyt yhtälö on *neliöidyssä* muodossa

$$x + 3 = \pm\sqrt{5}$$

$$x = -3 \pm \sqrt{5}.$$

Esim. 3 Yhtälö $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ esittää ympyrää, jonka keskipiste on (a, b) ja säde on r. Määritä seuraavan ympyrän keskipiste ja säde:

$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4$ | *neliöinti*

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + \mathbf{1^2} + y^2 + 2 \cdot y \cdot 2 + \mathbf{2^2} = 4 + \mathbf{1^2} + \mathbf{2^2}$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9 \quad \therefore kp = (1, -2), r = 3.$$

7.3 Ratkaisukaavat

Tehtävä: Johda 2. asteen yhtälölle $\boxed{\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}}$ ratkaisukaava.

$ax^2 + bx + c = 0$ | $\cdot 4a$

$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$ | ***neliöinti***

$$(2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b + \mathbf{b^2} = -4ac + \mathbf{b^2}$$

$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$ | Oletetaan, että $b^2 - 4ac \geq 0$

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

(1) $\therefore \boxed{\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}}$ (Opettele tämä hyvin.)

Esim. 4 $x^2 - 8x - 5 = 0$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{64 + 20}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{84}}{2} = \frac{8 \pm 2\sqrt{21}}{2} = \underline{\underline{4 \pm \sqrt{21}}}.$$

Samalla periaatteella (neliöimällä) voidaan johtaa toinenkin ratkaisukaava:

(2) $$\boxed{\boldsymbol{x^2 + px + q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}}}$$

Tämä on (1):tä parempi silloin, *kun* x^2*:n kerroin on 1 ja x:n kerroin on joko parillinen tai desimaaliluku.* Opettele tämänkin kaavan käyttö!

Esim. 5 1) $x^2 - 8x - 5 = 0$ (sama esimerkki kuin edellä)

$$x = -(-4) \pm \sqrt{4^2 - (-5)} = \underline{\underline{4 \pm \sqrt{21}}}.$$

2) $t^2 + 4{,}25t + 1{,}13 = 0$

$$\begin{aligned} t &= -2{,}125 \pm \sqrt{2{,}125^2 - 1{,}13} \\ &= -2{,}125 \pm 1{,}840... \\ &= -0{,}284... \vee -3{,}965... \\ &\approx \underline{\underline{-0{,}28 \vee -3{,}97}}. \end{aligned}$$

Ratkaisukaavassa (1) (tai kaavassa (2)) neliöjuuren alla oleva lauseke

(3) $$\boxed{\boldsymbol{D = b^2 - 4ac}}$$

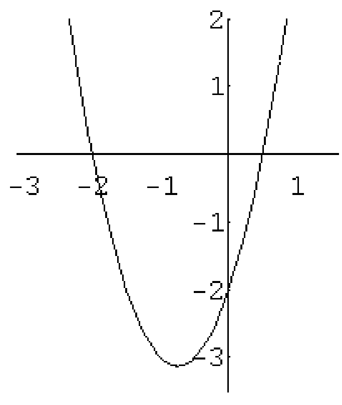
on kyseisen 2. asteen yhtälön ***diskriminantti***. Sen mukaan, onko $\boldsymbol{D > 0}$, $\boldsymbol{D = 0}$ vai $\boldsymbol{D < 0}$ yhtälölle saadaan kaksi erisuurta, yhtä suurta tai ei yhtään (reaalista) juurta. Keskimmäisessä tapauksessa käytetään myös sanontaa, että yhtälöllä on *kaksoisjuuri* (joka on $x = -b/2a$).

Esim. 6 Leikkaako paraabeli $y = 2x^2 + 3x - 2$ x-akselin ? (Myöhemmin todistetaan, että 2. asteen polynomifunktion kuvaaja on aina paraabeli ja se on ylös- tai alaspäin aukeava sen mukaan, onko x^2:n kerroin positiivinen vai negatiivinen).

Leikkauspisteet x-akselin kanssa saadaan, kun $y = 0$:

$$2x^2 + 3x - 2 = 0$$
$$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) > 0.$$

Täten edellisellä 2. asteen yhtälöllä on kaksi reaalijuurta, joten paraabeli <u>leikkaa</u> x-akselin kahdessa pisteessä.



7.4 Toisen asteen polynomin jakaminen tekijöihin

*Kun lasket toisen asteen yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ juurien

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

summan ja tulon, lopputulos on (suorita laskut)

(4) $$\boldsymbol{x_1 + x_2 = -b/a, \quad x_1 x_2 = c/a}.$$

Tätä tulosta käytetään seuraavan lauseen todistamiseen.

Lause *Jos* x_1 *ja* x_2 *ovat toisen asteen yhtälön* $ax^2 + bx + c = 0$ *juuret eli* ***polynomin*** $ax^2 + bx + c$ ***nollakohdat****, niin tämä polynomi jakautuu tekijöihin seuraavasti:*

(5) $$\boxed{\boldsymbol{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}}.$$

**Todistus:* Näytetään, että yhtälön (5) oikeasta puolesta (lyh. op) saadaan vasen puoli (lyh. vp), kun laskut suoritetaan:

$$op = a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$$
$$\overset{(4)}{=} ax^2 - a\cdot(-\frac{b}{a})x + a\cdot\frac{c}{a} = ax^2 + bx + c = vp.$$

***Esim.** 7* Jaetaan kolme polynomia tekijöihin:

1) $6x^2 + x - 2$ | Vastaavan yhtälön juuret: $\frac{1}{2}$ ja $-\frac{2}{3}$

$$= 6\cdot(x - \tfrac{1}{2})(x - (-\tfrac{2}{3}))$$
$$= 2\cdot 3\cdot(x - \tfrac{1}{2})(x + \tfrac{2}{3}) = \underline{\underline{(2x-1)(3x+2)}}.$$

2) $4x^2 - 12x + 9$ | Vastaavan yhtälön juuret: $x_{1,2} = \frac{3}{2}$

$$= 4(x - \tfrac{3}{2})(x - \tfrac{3}{2}) = (2x-3)(2x-3) = \underline{\underline{(2x-3)^2}}.$$

3) $x^2 + 4x + 6$ | Vastaavan yhtälön juuret:
$x = -2 \pm \sqrt{4-6}$ $\therefore$ ei reaalijuuria

$\therefore$ polynomi on $\underline{\underline{\text{jaoton}}}$.

Harjoituksia

A

7.1 Ratkaise seuraavat 2. asteen yhtälöt:

a) $x^2 - 125 = 0$, b) $5x = 2x^2$, c) $(2x-1)^2 - a = 0$ $(a > 0)$,
d) $(2s-3)(s-1) = 0$, e) $(u-1)(u+3) = 1$.

7.2 Ratkaise, suorittamalla neliöinti: $x^2 - 4x + 3 = 0$. Tarkista, että saamasi x:n arvot ovat oikeat, sijoittamalla ne yhtälöön.

7.3 Määritä (neliöimällä) ympyrän $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$ keskipiste ja säde.

7.4 Ratkaise a) kaavalla (1), b) kaavalla (2) yhtälö $x^2 - 10x = 73$.

7.5 Määritä paraabelin $x^2 - y = 1$ ja suoran $x - y = -5$ leikkauspisteet (ts. ratkaise tämä yhtälöpari). Piirrä kuva.

7.6 Jaa tekijöihin: a) $x^2 - 7x + 10$, b) $2x^2 + 3x - 2$ (etsimällä ensin vastaavan yhtälön juuret).

7.7 Supista $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10}$ (jaa ensin osoittaja ja nimittäjä tekijöihin).

7.8 Tutki diskriminantin avulla, leikkaako seuraava ympyrä a) x-akselin, b) y-akselin: $x^2 + y^2 - 5x + 8y + 7 = 0$.

7.9 Suorakulmion ala on 12 (pinta-alayksikköä) ja piiri 16. Muodosta sivujen pituuksilla a ja b yhtälöpari ja ratkaise se.

B

7.10 Määritä ympyrän $x^2 + y^2 - 8x + 5y + 7 = 0$ keskipiste ja säde.

7.11 Ratkaise yhtälöstä $a^2 + 18ab + 49b^2 = 0$ a) a kaavalla (2), b) b kaavalla (1).

7.12 Ratkaise yhtälö $2r^2 + rs - 6s^2 = 0$ r:n suhteen ja käytä tulosta vasemmalla puolella olevan polynomin jakamiseen tekijöihin.

7.13 Määritä a) ympyrän $x^2+y^2=25$ ja suoran $3x-y=15$ leikkauspisteet, b) ympyrän $x^2+y^2=5a^2$ ja suoran $x+y=3a$ leikkauspisteet (a = vakio).

7.14 Supista $\dfrac{6a^2-7ab+2b^2}{8a^2-10ab+3b^2}$ (jaa ensin osoittaja ja nimittäjä tekijöihin).

7.15 Neliötä, jonka sivu on 20, pienennetään leikkaamalla kahdesta vierekkäisestä reunasta pois liuskat, joiden yhteispinta-ala on 19 % alkuperäisen neliön alasta. Johda liuskan leveydelle x toisen asteen yhtälö ja ratkaise se.

7.16 Millä a:n arvoilla lauseke $\dfrac{x^2+ax+6}{x^2-7x+10}$ supistuu 1. asteen polynomien osamääräksi ? (Ohje: jotta supistuisi, niin nimittäjän 0-kohdan täytyy olla myös osoittajan nollakohta.)

7.17 Jaa polynomi $3x^2+xy-10y^2+9y-x-2$ tekijöihin, vrt. tehtävä **7.12**.

7.18 Ratkaise epäyhtälö $x^2-4x+5<0$ siten, että jaat vp. polynomin tekijöihin, tutkit kummankin tekijän merkkiä erikseen ja katsot, millä x:n arvoilla nämä tekijät ovat erimerkkisiä. Käytä apuna merkkitaulukkoa, jonka ajatus on seuraava. Jos tekijöihin jako olisi esim. $(x+2)(2x-3)$, niin taulukko olisi

	–2	3/2	
x +2	–	+	+
2x - 3	–	–	+
tulo	+	–	+

7.19 Ratkaise a) $x^4-14x^2+45=0$ (ohje: yhtälö on x^2:lle 2. asteen yhtälö), b) $(x^2-1)^2+2(x^2-1)=8$, c) $x^6=9+8x^3$.

7.20 *Määritä ns. *diskriminanttikeinolla* sellaiset k:n arvot, että suora $y=kx+1$ sivuaa paraabelia $y=2x^2-6x+3$. Keino on seuraava. Lähde laskemaan suoran ja paraabelin leikkauspisteitä. Eliminoi suoran ja paraabelin muodostamasta yhtälöparista y. Saat x:lle 2. asteen yhtälön. Jos tämän diskr. on = 0, niin leikkauspisteiden x-arvoja on vain yksi eli kyseessä on sivuaminen.

8 Prosentti

8.1 Prosentti ja prosenttikerroin

Prosentti = *sadasosa,* ***promille*** = *tuhannesosa.*

Esim. $25\,\% = \dfrac{25}{100} = 0{,}25 = 1/4.$

Perustehtäviä:

1) ***p % a:sta*** $= p$ sadasosaa a:sta = $\dfrac{p}{100} \cdot a$.

Esim. 8 % 56:sta = $\dfrac{8}{100} \cdot 56 = 0{,}08 \cdot 56 = 4{,}48.$

Tässä lukua 0,08 voitaisiin sanoa ***prosenttikertoimeksi***. Opettele käyttämään tällaista kerrointa esim. seuraavissa yhteyksissä:

Esim. 1 1) 15 % alennus hinnasta 480 euroa on $0{,}15 \cdot 480\ € = 72\ €$.

Alennettu hinta $= 0{,}85 \cdot 480\ € = 408\ €.$

2) 2,0 kg 5-prosenttista ja 5,0 kg 3-prosenttista suolaliuosta sekoitetaan. Mikä on uuden liuoksen suolapitoisuus?

$$\boxed{\begin{array}{l} \begin{cases} \text{suolamäärä} = 0{,}05 \cdot 2{,}0\ kg + 0{,}03 \cdot 5{,}0\ kg = 0{,}25\ kg \\ \text{liuosmäärä} = 2{,}0\ kg + 5{,}0\ kg = 7{,}0\ kg \end{cases} \\ \therefore\ \text{suolapitoisuus} = \dfrac{0{,}25\ kg}{7{,}0\ kg} \approx 0{,}036 = 3{,}6\,\%. \end{array}}$$

2) ***Kuinka monta % b on a:sta:***

$$\frac{x}{100} \cdot a = b \quad (\text{"}x\ \%\ a\text{:sta on } b\text{"}) \ \therefore x = \frac{b}{a} \cdot 100\ (\%).$$

Laske siis, kuinka suuri osa b on a:sta ja muuta se prosenteiksi kertomalla 100:lla.

Esim. 2 Kuinka monta % 63 on 420:stä: $\boxed{\dfrac{63}{420} = 0{,}15 = 15\,\%}$.

3) ***Mistä luvustа p % on = b:***

$$\frac{p}{100}\cdot x = b \quad (\text{"} p \text{ \% } x\text{:stä on } b\text{"}) \qquad \therefore x = \frac{100\cdot b}{p}.$$

Esim. 3 Mistä luvusta 7 % on 21: $0{,}07x = 21 \quad \therefore x = 21/0{,}07 = 300.$

8.2 Prosentuaalinen muutos

Jos luku 420 kasvaa 15 %, saadaan luku

$$420 + 0{,}15\cdot 420 = 1{,}15\cdot 420 = 480.$$

15 % kasvu merkitsee siis, että luku muuttuu 1,15-kertaiseksi. Tässä lukua 1,15 voitaisiin sanoa ***kasvukertoimeksi*** tai ***muutoskertoimeksi***. Vastaavasti luvun 420 *pieneneminen* 15 %:lla merkitsee luvun muuttumista 0,85-kertaiseksi: $420 - 0{,}15\cdot 420 = 0{,}85\cdot 420 = 357.$

Prosentuaaliseen muutokseen liittyy seuraavat kolme perustehtävää:

1) ***Mikä luku on p % suurempi/pienempi kuin a:***

$$a \pm \frac{p}{100}\cdot a = (1 \pm \frac{p}{100})\cdot a. \quad \text{Luku } q = 1 \pm \frac{p}{100} \text{ on } \textbf{\textit{muutoskerroin}}.$$

2) ***Kuinka monta % A on suurempi kuin b*** (eli kuinka monta % b:hen pitää lisätä, jotta saadaan A):

$$b + \frac{x}{100}\cdot b = A \qquad \therefore \boxed{\boldsymbol{x = \frac{A-b}{b}\cdot 100\,(\%)}}$$

*suurempi **kuin** b.*

3) ***Kuinka monta % b on pienempi kuin A*** (eli kuinka monta % A:sta pitää poistaa, jotta saadaan b):

$$A - \frac{x}{100}A = b \qquad \therefore \boxed{\boldsymbol{x = \frac{A-b}{A}\cdot 100\,(\%)}}$$

*pienempi **kuin** A.*

Esim. 4 1) Mikä luku on 35 % suurempi kuin 320: $1{,}35\cdot 320 = 432.$

2) Kuinka monta % luku 432 on suurempi *kuin* ***320***:

$$\frac{432-320}{\boldsymbol{320}}\cdot 100\,\% = 35\,\%. \text{ Sama toisin: } \boxed{\begin{array}{l} 432 - 320 = 112 \\ \dfrac{112}{\boldsymbol{320}} = 0{,}35 = 35\%. \end{array}}$$

3) Kuinka monta % luku 320 on pienempi <u>*kuin*</u> ***432***:

$$\frac{432-320}{\boldsymbol{432}}\cdot 100\ \% \approx 26\ \%. \text{ Toisin: } \longrightarrow \boxed{\frac{112}{\boldsymbol{432}} = 0{,}259... \approx 26\%.}$$

Esim. 5 Huomaa, että

- hinnan muuttuminen 1,5-kertaiseksi merkitsee 50 % kasvua,
- hinnan muuttuminen 2-kertaiseksi merkitsee 100 % kasvua,
- hinnan putoaminen puoleen merkitsee 50 % alennusta,
- *hinnan muuttuminen 4-kertaiseksi merkitsee 300 % kasvua,*
- *hinnan putoaminen 4:nteen osaan merkitsee 75 % alennusta.*

Nykyään näkee käytettävän <u>*virheellisesti*</u> sanontaa *"2-kertaa suurempi"* merkityksessä "2-kertaa niin suuri" eli "kaksinkertainen". ***Oikein esitettynä "2 kertaa suurempi" merkitsee kolminkertaista*** ($a + 2\cdot a = 3a$). <u>Jo "kerran suurempi" on kaksinkertainen</u>. Myös on oikein sanoa, että esim. "viisi kertaa suurempi" on = 500 % suurempi eli 6-kertainen. Erästä tennismailaa mainostettiin, että uuden mallin käteen aiheuttama tärähtely on "8 kertaa pienempi" kuin vanhan. Jo "kerran pienempi" veisi tärähtelyn nollaan ja "8 kertaa pienempi" 700 % miinuksen puolelle. Tarkoitus oli ehkä sanoa, että tärähtely meni 8:nteen osaan tai että se pieneni 80% eli meni 5:nteen osaan.

Esim. 6 Hinnat nousivat kahtena peräkkäisenä vuonna 5 % ja 9 %. Laske a) yhteisnousu, b) keskimääräinen nousu näiden kahden vuoden aikana.

a) Hinnasta a (euroa) tulee $1{,}09\cdot(1{,}05a) = 1{,}1445a$. Yhteisnousu on siis 14,45 % (eikä 5 + 9 = 14 prosenttia).

b) Merkitään keskimääräistä kasvukerrointa q:lla. Silloin

$$q\cdot(qa) = 1{,}09\cdot(1{,}05a)$$

$$q^2 = 1{,}09\cdot 1{,}05 \qquad \therefore\ q = (\pm)\sqrt{1{,}09\cdot 1{,}05} \approx 1{,}0698.$$

Keskimääräinen nousu on siis 6,98 % (eikä 5:n ja 9:n aritmeettinen keskiarvo 7 prosenttia).

8.3 Prosenttiyksikkö

Esim. 7 a) Kunnallisveroprosentti nousi 18:sta 19,5:een. Tällöin sanotaan, että vero nousi 1,5 ***prosenttiyksikköä***. Esimerkiksi 2400 euron palkasta joutuu maksamaan veroa $\frac{1{,}5}{100}\cdot 2400\ € = 36\ €$ enemmän. Jos palkkatulojen määrässä ei tapahdu muutosta, niin tämä 1,5 prosenttiyksikön lisäys merkitsee kunnalle prosenteissa noin 8,3 %:n suuruista palkkatuloverojen kasvua, koska 19,5 on noin 8,3 % suurempi kuin 18 (1,5/18 = 0,0833… ≈ 8,3 %).

b) Oletetaan, että veroprosentin nousun 18:sta 19,5:een lisäksi palkkatulot (a euroa) kasvavat 5 %. Kuinka monta prosenttia (palkoista saatavat) kunnan verotulot kasvavat?

Kunnan vanhat verotulot ovat $\frac{18}{100}a = 0{,}18a$ ja uudet verotulot ovat $\frac{19{,}5}{100}\cdot(1{,}05a) = 0{,}20475a$. Näiden erotus on $0{,}02475a$. Täten verotulojen kasvu on

$$\frac{0{,}02475a}{0{,}18a} = 0{,}1375 = 13{,}75\%.$$

Esim. 8 Väestömäärästä oli eräänä vuonna eläkeläisiä 10 %. Kymmenen vuotta myöhemmin eläkeläisiä oli 13 % ja väestömäärä oli kasvanut 8 %. Paljonko määrä oli kasvanut a) prosenttiyksiköissä, b) prosenteissa ilmaistuna?

a) Kasvu oli $13 - 10 = 3$ prosenttiyksikköä.

b) Merkitään ensimmäistä väestömäärää $100a$:lla. Tästä oli 10 % eli määrä $10a$ eläkeläisiä. Uusi väestömäärä oli $108a$ ja eläkeläismäärä tästä 13 %, siis $0{,}13\cdot 108a = 14{,}04a$. Eläkeläismäärän kasvu on siten

$$\frac{4{,}04a}{10a} = 0{,}404 = 40{,}4\,\%.$$

Huom. Prosenttilaskuissa kannattaa usein merkitä lähtöarvoa $100a$:lla a:n sijasta.

Harjoituksia

A

8.1 a) Esitä luvut 3/8 ja 0,2 prosentteina.

b) Esitä luvut 456 % ja 3,5 % desimaalilukuina.

c) Paljonko on 2000 % 15:stä?

8.2 Vesimäärään 0,57 *kg* liuotetaan 28 *g* suolaa. Määritä liuoksen suolapitoisuus massaprosentteina.

8.3 Kaupoissa A ja B sama tuote maksaa 8.90 € ja 9.90 €.

a) Kuinka monta % kalliimpi tuote on B:ssä kuin A:ssa,

b) Kuinka monta % halvempi tuote on A:ssa kuin B:ssä.

8.4 Yrityksen liikevaihto laski 4,6 milj. eurosta 3,4 milj. euroon. Mikä on lasku prosenteissa? (Esitä kysymys muodossa "kuinka monta % .... on pienempi ***kuin*** ...".)

8.5 Tammikuun tuloista 2460 euroa jäi säästöön 9 % ja helmikuun tuloista 2250 euroa 6,5 %.

a) Kuinka monta prosenttiyksikköä tammikuun säästöt olivat suuremmat kuin helmikuun?

b) Kuinka monta prosenttia tammikuun säästöt olivat suuremmat kuin helmikuun?

B

8.6 Välityssuhdetta (hintaa tms.) kasvatetaan ensin 20 % ja pienennetään sitten 20 %. Laske kokonaismuutos prosenteissa.

8.7 Hammastahnaputkilon koko kasvaa 25 % ja samalla hinta nousee 40 %. Kuinka monta % uusi hammastahna on kalliimpaa kuin vanha?

8.8 Auton matkamittari näyttää 4 % liikaa. Mikä on mittarin lukemaa 780 km vastaava todellinen matka?

8.9 Kierroslukua kasvatetaan arvosta 2500 r/min viidessä vaiheessa, aina 13 % kerrallaan. Laske nämä kierrosluvut.

8.10 Aina kun huoneen lämpötilaa pystytään laskemaan yhdellä asteella, lämmityskustannukset alenevat 6 %. Kuinka paljon 4 asteen lasku pienentää näitä kustannuksia?

8.11 Putkille, joiden sisähalkaisijat ovat 50,0 mm ja 100,0 mm, tehdään *kolme välikokoa siten, että prosentuaalinen kasvu on aina sama*, ts. 1. välikoko on yhtä monta % peruskokoa 50,0 mm suurempi kuin 2. välikoko on ensimmäistä välikokoa suurempi jne. Laske nämä välikoot. (Ohje: käytä kasvukerrointa q.)

8.12 Asiakas sai tuotteen 15 % alennuksella. Hinta oli tällöin 153,00 €. Laske alkuperäinen hinta.

8.13 Laitteen suunnittelukustannukset tulivat 10 % arvioitua suuremmiksi ja muut kustannukset 20 % arvioitua suuremmiksi. Kaikkiaan laite tuli 17 % alkuperäistä arviota kalliimmaksi.

a) Kuinka monta % arvioidut suunnittelukustannukset (x) olivat arvioiduista kokonaiskustannuksista ($100a$)?

b) Kuinka monta % lopulliset suunnittelukustannukset olivat todellisista kokonaiskustannuksista?

8.14 Kitkapyörä pyörittää toista pyörää, jonka halkaisija on d, tietyllä kierrosnopeudella. Halkaisijaa d suurennetaan 23 %. Kuinka monta % tämän toisen kitkapyörän kierrosnopeus pienenee?

8.15 Yleinen arvonlisäveroprosentti on 22 % myyntihinnasta (ts. kauppias joutuu "palauttamaan" valtiolle 22 % siitä hinnasta, minkä hän saa myydessään tuotteen). Kuinka monta % arvonlisävero nostaa tuotteiden hintaa (jos kauppias haluaa saada saman voiton kuin ilman veroa)?

8.16 Myyjän kiinteä kuukausipalkka on 1 920 euroa. Lisäksi hän saa 2 % suuruisen palkkion kokonaismyynnistään. Eräänä kuukautena hänen ansionsa olivat 3 050 euroa. Mikä oli hänen kokonaismyyntinsä tänä kuukautena?

8.17 Yhtiön tuoton kasvu oli kahtena peräkkäisen vuotena 6,4 % ja 7,6 %. Kuinka suuri kasvu tarvittaisiin kolmantena vuotena, jotta keskimääräinen kasvu näiden kolmen vuoden aikana olisi 9,0 %?

8.18 Perheen nettotulot olivat eräänä vuonna 24 000 euroa ja seuraavana 35 000 euroa. Autokulut olivat vastaavasti 1 535 eur ja 1 760 euroa.

a) Kuinka monta % autokulut nousivat?

b) Kuinka monta prosenttiyksikköä autokulujen osuus nettokuluista muuttui ja mihin suuntaan (kasvoi vai väheni)?

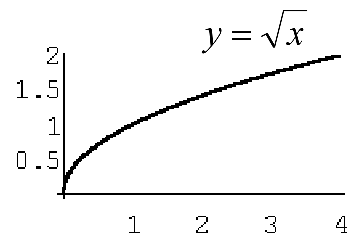
9 Eksponenttifunktio ja logaritmi

9.1 Potenssifunktio ja eksponenttifunktio

Muotoa $\boxed{\boldsymbol{y = x^k}}$ olevaa funktiota, missä *kantaluku on muuttuja* ja eksponentti k on vakio, sanotaan ***potenssifunktioksi***. Tavallisimmat potenssifunktiot ovat

$$y = x^2,\ y = x^3,\ y = x^{-1} \text{ eli } y = \frac{1}{x} \text{ ja } y = x^{1/2} \text{ eli } y = \sqrt{x}\,.$$

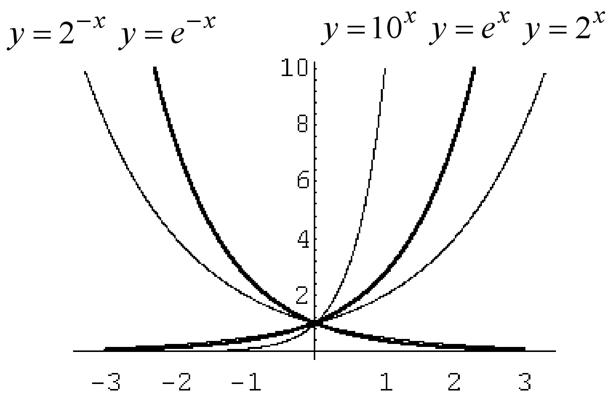
Näistä kahden ensimmäisen määrittelyjoukko muodostuu kaikista reaaliluvuista, ts. x:lle voidaan antaa mitä reaaliarvoja tahansa. Viimeisessä funktiossa taas x voi saada vain ei-negatiivisia arvoja ja funktiossa $1/x$ muut arvot paitsi ei 0:aa.



Muotoa $\boxed{\boldsymbol{y = k^x}\ (k > 0)}$ olevaa funktiota, missä nyt kantaluku k on vakio ja *eksponentti on muuttuja*, sanotaan ***eksponenttifunktioksi***. Tavallisimmat eksponenttifunktiot ovat

$$\boldsymbol{y = 10^x,\ y = 2^x} \text{ ja } \boldsymbol{y = e^x},$$

missä $\boldsymbol{e} \approx 2{,}71828$ on ns. *Neperin luku*. Kaikkien näiden kuvaajat leikkaavat y-akselin kohdassa $y = 1$. Kuvaaja nousee sitä jyrkemmin, mitä suurempi kantaluku on. Jos kantaluku on 1:tä pienempi, esim. ½, saadaan eksponenttifunktio



$$y = (\tfrac{1}{2})^x = \frac{1}{2^x} = 2^{-x},$$

jonka kuvaaja on laskeva käyrä (vrt. kuva). Jos jokin suure noudattaa jonkin kasvavan/vähenevän eksponenttifunktion mukaista lakia (esim. lakia $y = 2{,}23e^{0{,}74x} + 2$), sanotaan, että tämä suure *kasvaa/vähenee* ***eksponentiaalisesti***. Funktiota e^x merkitään usein $Exp(x)$:llä. Esimerkiksi $e^2 = Exp(2) \approx 7{,}389$.

9.2 Logaritmin määrittely

Potenssiyhtälön $x^k = a$ ratkaiseminen antaa tulokseksi juuren tai murtopotenssin, esim.

$$x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}, \quad x^3 = 5 \Rightarrow x = \sqrt[3]{5},$$
$$x^4 = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{5}, \quad x^\pi = 5 \Rightarrow x = 5^{1/\pi}.$$

Eksponenttiyhtälön $k^x = a$ ratkaisu taas on ns. *logaritmi*:

$2^x = 7 \Rightarrow x = \log_2 7$	(lue: "*2 - kantainen logaritmi*"),
$e^x = 7 \Rightarrow x = \ln 7$	("*luonnollinen logaritmi*"),
$10^x = 7 \Rightarrow x = \lg 7 = \log 7$	("*10 - kantainen eli Briggsin logaritmi*").

Ensimmäisen logaritmin arvo on vähän alle 3, sillä $2^3 = 8$. Toisen arvo on vähän alle 2, sillä $e^2 \approx 7{,}389$, ja kolmannen alle 1. Laskin antaa suoraan tulokset $\ln 7 = 1{,}9459....$ ja $\lg 7 = 0{,}8450...$ 10-kantaisen logaritmi merkitään joissakin laskimissa log eikä lg. *Esimerkiksi 2-kantaisen logaritmin $\log_2 7$ laskeminen vaatii yleensä muunnoskaavan $\log_2 a = \ln a / \ln 2$ käyttämistä (tarkemmin myöhemmin).

Määritelmä: *Eksponenttiyhtälön $k^x = a$ $(k > 0)$ ratkaisua sanotaan luvun a* ***k-kantaiseksi logaritmiksi*** *ja merkitään* $\boldsymbol{\log_k a}$*:lla. Siis*

(1) $$\boxed{\boldsymbol{k^x = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_k a}}.$$

9.3 Logaritmin perusominaisuuksia

Jos (1):ssä eksponentin x paikalle sijoitetaan sen arvo $x = \log_k a$, saadaan tulos

(2) $$\boldsymbol{k^{\log_k a} = a}.$$

Tämä mukaan, *jos kantaluku k korotetaan samakantaisen logaritmin mukaiseen potenssiin* $\log_k a$*, saadaan a.* Toisin sanoen logaritmin otto ja samakantaiseen potenssiin korottaminen peräkkäin suoritettuina kumoavat toisensa (samaan tapaan kuin neliöjuuren otto ja toiseen potenssiin korotus: $(\sqrt{a})^2 = a$). Erityisesti

$$\boxed{e^{\ln a} = a, \quad 10^{\lg a} = a, \quad 2^{\log_2 a} = a}.$$

Tulos (2) voidaan esittää myös seuraavassa käyttökelpoisessa muodossa:

Logaritmin $\mathbf{\log}_k a$ ***arvo on luku, joka ilmoittaa, mihin potenssiin kantaluku k on korotettava, jotta saataisiin a.***

Esim. 1

$\log_2 8 = 3$, sillä kantaluku 2 pitää korottaa potenssiin 3, jotta saataisiin 8: $2^3 = 8$,

$\log_3 9 = 2$, sillä $3^2 = 9$,

$\log_5 5 = 1$, sillä $5^1 = 5$,

$\log_4 2 = \frac{1}{2}$, sillä $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$,

$\log_2 \frac{1}{2} = -1$, sillä $2^{-1} = \frac{1}{2}$,

$\log_2(-8)$ on mahdoton, sillä 2:n mikään potenssi ei ole negatiivinen,

$\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$, sillä $(\frac{1}{2})^{-3} = 2^3 = 8$.

Yleensä kantaluku $k > 1$ (harvemmin $0 < k < 1$).

Yleisesti, ***jos kantaluku*** $k > 1$**, *niin***

1) ***logaritmia ei voi ottaa negatiivisesta luvusta,*** sillä kantaluvun $k > 0$ mikään potenssi ei ole negatiivinen,
2) ***luvun 1 logaritmi on aina 0***, ts. $\mathbf{\log_k 1 = 0}$,
3) 1:*tä suuremman luvun logaritmi on positiivinen.*
4) 1:*tä pienemmän positiiviluvun logaritmi on negatiivinen.*
5) ***kantaluvun logaritmi on aina*** $\mathbf{= 1}$, ts. $\mathbf{\log_k k = 1}$, esim. $\mathbf{\ln e = 1,\ \lg 10 = 1}$.

*Käytännön sovelluksissa yleensä logaritmien kantaluvut ovat > 1. Jos $0 < k < 1$, tulokset 3) ja 4) vaihtavat paikkaa, ts. esim. 1:tä suuremman luvun logaritmi on negatiivinen kuten edellisen esimerkin viimeisessä kohdassa.

Esim. 2 Esitä luvut 0,003 ja $b = 0{,}000\,003$ 10:n potensseina.

$$10^x = 0{,}003 \Rightarrow x = \lg 0{,}003 = -2{,}522... \therefore 0{,}003 \approx 10^{-2{,}52},$$
$$10^x = b \Rightarrow x = \lg b = -5{,}522... \quad \therefore 0{,}000\,003 \approx 10^{-5{,}52}.$$

****Esim. 3*** Edellisen esimerkin tapaista menettelyä käytetään mm. *kemiassa*. Liuosten vetyionipitoisuudet $[H^+]$ ovat pieniä, esim. suuruusluokkaa $0{,}000\,003 \approx 10^{-5{,}5}$. Tämän pienen luvun sijaan esitetään vain eksponentin vastaluku 5,5, jota sanotaan liuoksen ***pH-arvoksi***. Siis

Jos liuoksen vetyionipitoisuus $[H^+] = 0{,}000\,003 \approx 10^{-5{,}5}$, niin nesteen $pH \approx 5{,}5$.

Yleisesti pH toteuttaa seuraavan yhtälön:

$$10^{-pH} = [H^+] \quad \therefore pH = -\lg[H^+].$$

****Esim. 4*** Fysiikassa äänen intensiteetti I kasvaa eksponentiaalisesti desibeleissä ilmaistun äänenvoimakkuuden L funktiona:

$$I = I_0 \cdot 10^{L/10}.$$

Ratkaistaan tästä yhtälöstä L:

$$10^{L/10} = \frac{I}{I_0} \Leftrightarrow L/10 = \lg\frac{I}{I_0} \quad \therefore \underline{\underline{L = 10 \cdot \lg\frac{I}{I_0}}}.$$

Laske tästä I:n arvoja $I_0,\ 2I_0,\ 3I_0,\ 4I_0$ vastaavat desibelimäärät L.

9.4 Laskulakeja

Edellä olevan mukaan $\log_2 8 = 3$, sillä $2^3 = 8$. Lisäksi esim. $k^{\log_k a} = a$. Samaa ajattelutapaa ja potenssin laskusääntöä $k^{r+s} = k^r \cdot k^s$ käyttäen saadaan seuraava päättely:

$$\log_k ab = \log_k a + \log_k b, \text{ sillä } k^{\log_k a + \log_k b} = k^{\log_k a} \cdot k^{\log_k b} = ab.$$

Näin on todistettu ensimmäinen seuraavista laskulaeista (kaksi muuta todistettaisiin vastaavasti):

Lause 1 *Jos a ja b ovat positiivisia ja c mikä tahansa reaaliluku, niin*

1)	$\mathbf{\log_k ab = \log_k a + \log_k b,}$
2)	$\mathbf{\log_k \frac{a}{b} = \log_k a - \log_k b,}$
3)	$\mathbf{\log_k a^c = c \log_k a.}$

Huomaa, että ***samoin kuin juurien myös logaritmien laskusäännöt koskevat tuloja ja osamääriä, eivät summaa ja erotusta***. *Esimerkiksi juuren* $\sqrt{x-y}$ *ja samoin logaritmin* $\ln(x-y)$ *jakamiseen osiin ei ole olemassa laskulakia.*

Esim. 3

1) $\log_k(x^2 y) = \log_k x^2 + \log_k y = 2\log_k x + \log_k y.$

2) $\log_k(a+b)$. Tämän jakamiseksi osiin ei ole olemassa laskusääntöä.

3) $\ln(a^2 - b^2) = \ln[(a+b)(a-b)] \quad | \quad \text{ol. } a+b, a-b > 0$
$= \ln(a+b) + \ln(a-b).$

4) $\lg\frac{a^2 b}{10c} = \lg a^2 b - \lg 10c = \lg a^2 + \lg b - (\overbrace{\lg 10}^{=1} + \lg c)$
$= 2\lg a + \lg b - \lg c - 1 \qquad (a, b, c > 0).$

5) $\lg 1000 = \lg 10^3 = 3\lg 10 = 3,$
$\lg 0{,}0001 = \lg 10^{-4} = -4\lg 10 = -4.$

6) $\underline{\underline{\log_k \frac{1}{a}}} = \log_k 1 - \log_k a = 0 - \log_k a = \underline{\underline{-\log_k a}}.$

7) $\underline{\underline{\log_k \sqrt[n]{a}}} = \log_k a^{1/n} = \underline{\underline{\tfrac{1}{n}\log_k a}}.$

Esim. 4 Laskulakeja voidaan käyttää myös "takaperin", oikealta vasemmalle, logaritmien yhdistämiseen:

1) $\log_k 5 + \log_k 8 - \log_k 4 - \log_k 2 = \log_k \frac{5\cdot 8}{4\cdot 2} = \log_k 5.$

2) $\ln x + 2\ln y = \ln x + \ln y^2 = \ln xy^2.$

3) $e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$ (2):n nojalla.

***Lause 2** *Jos tunnetaan h-kantaiset logaritmit, niin k-kantaiset logaritmit saadaan kaavasta*

(3) $$\log_k a = \frac{\log_h a}{\log_h k}.$$

**Tod.* Logaritmin perusominaisuuden (2) mukaan

$$k^{\log_k a} = a \quad \left| \begin{array}{l} \text{otetaan kummastakin puolesta } h\text{-kantainen} \\ \text{logarimi ja käytetään Lauseen 1 tulosta 3)} \end{array} \right.$$

$$\log_k a \cdot \log_h k = \log_h a.$$

Tämä on yhtäpitävä yhtälön (3) kanssa.

Tulosta (3) käytetään lähinnä siten, että h:n tilalla on e tai joskus 10:

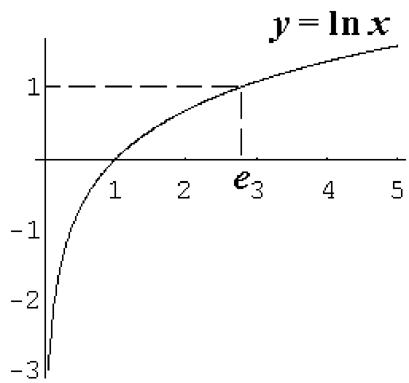
$$\mathbf{log}_k\, \boldsymbol{a} = \frac{\mathbf{ln}\, \boldsymbol{a}}{\mathbf{ln}\, \boldsymbol{k}}, \qquad \mathbf{log}_k\, \boldsymbol{a} = \frac{\mathbf{lg}\, \boldsymbol{a}}{\mathbf{lg}\, \boldsymbol{k}}.$$

Esim. 5 $\log_3 2 = \dfrac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0{,}631.$

$$* \; \underline{\underline{\log_{1/k} a}} = \frac{\ln a}{\ln(1/k)} = \frac{\ln a}{-\ln k} = -\frac{\ln a}{\ln k} = \underline{\underline{-\log_k a}}.$$

9.5 Logaritmifunktion kuvaaja

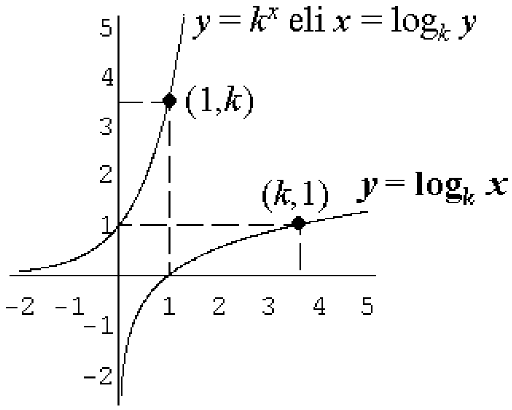
Jatkon kannalta tärkein logaritmifunktio on $\boldsymbol{y = \ln x}$. Antamalla x:lle positiivisia arvoja (tai käyttämällä graafisia laskimia tai matematiikkaohjelmia) saadaan tämän funktion kuvaaja piirrettyä.



*Syvällisempi käsittely käy esim. seuraavasti. Eksponenttiyhtälön ratkaiseminen antoi logaritmin:

(4) $$k^x = y \Leftrightarrow x = \log_k y.$$

*Tämän nojalla yhtälöt $y = k^x$ ja $x = \log_k y$ ovat samanarvoiset (ekvivalentit), joten niiden kuvaajat *xy*-tasossa muodostuvat samoista pisteistä. Jos jälkimmäisessä yhtälössä x ja y vaihdetaan keskenään, tuloksena on yhtälö $y = \log_k x$. Sen kuvaaja saadaan, kun edellisessä kuvaajassa jokainen (a,b)-piste vaihdetaan pisteeksi (b,a), esim. piste (0,1) pisteeksi (1,0) ja piste (1,*k*) pisteeksi (*k*,1).



*Yhteys (4) merkitsee, että eksponenttifunktio ja logaritmifunktio ovat toistensa *käänteisfunktioita.* Tästä seuraa mm., että jos "eksponenttiin korotus" ja "logaritmin otto" suoritetaan peräkkäin kummassa järjestyksessä tahansa, ne kumoavat toisensa, esim. *e*-kantaisilla funktioilla

$$\boxed{e^{\ln x} = x \text{ ja } \ln e^x = x}.$$

Harjoituksia

A

9.1 Laske laskimella funktioiden $y = x^3 + 2$ ja $y = 3^x + 1$ arvot, kun x saa arvot $-3,-2,\ldots,3$. Piirrä näiden tietojen avulla samaan koordinaatistoon kyseiset kaksi käyrää.

9.2 Laske laskimella funktion $y = 0{,}5 \cdot e^{1{,}2x}$ arvot, kun x:llä on arvot $-3,-2,\ldots,3$. Piirrä saatujen pisteiden avulla kyseinen käyrä.

9.3 Ratkaise seuraavat yhtälöt (tarkat arvot kohdan 9.2 mukaisesti): a) $x^3 = 5$, b) $3^x = 5$, c) $10^x = 5$, d) $e^x = 5$, e) $3^{x+1} = 5$, f) $2e^{x-3} = 5$.

9.4 Laske ilman laskinta, *Esim. 1* tapaan:

$$\log_4 64, \quad \log_3 81, \quad \log_2 512, \quad \log_\pi 1, \quad \ln \sqrt[5]{e},$$
$$\ln e^{2x}, \quad \lg 0{,}0001, \quad \log_5 \frac{1}{125}, \quad \log_{1/5} 5, \quad \log_{2r} 2r.$$

9.5 Esitä luku $2{,}51 \cdot 10^{-7}$ 10:n potenssina.

9.6 Hajota logaritmien laskulakien avulla (*Esim. 3*:n tapaan)

a) $\lg\frac{xy^3}{z}$, b) $\ln\frac{a}{b^3}$, c) $\log_k(a+2b)^2$, d) $\ln\frac{(r^2-s)^4}{\sqrt{s}}$.

9.7 Tiedetään, että $\log_k a = 5,\ \log_k b = 2,\ \log_k c = 3$. Laske seuraavien lausekkeiden logaritmit:

a) $\log_k abc$, b) $\log_k a^3b^5$, c) $\log_k \frac{ab^2}{c}$, d) $\log_k \frac{1}{b}$, e) $\log_k \sqrt[3]{c}$.

9.8 Yhdistä yhdeksi logaritmiksi

a) $3\ln u - 2\ln v$, b) $\lg 25 + \lg 160 - 2\lg 2$, c) $2\ln 5 - \frac{1}{2}\ln 3$.

9.9 Ratkaise seuraavat yhtälöt, ottamalla yhtälön kummastakin puolesta luonnollinen logaritmi ja käyttämällä sitten logaritmin laskulakeja:

a) $3^x = 5$, b) $10^x = 5$, c) $e^x = 5$, d) $3^{x+1} = 5$, e) $2e^{x-3} = 5$.

9.10 Piirrä funktioiden $y = 2^x$ ja $y = \log_2 x$ (eli $y = \frac{\ln x}{\ln 2}$) kuvaajat samaan koordinaatistoon, antamalla edellisessä *x*:lle arvot –2, –1, 0,1, 2, 3 ja jälkimmäisessä 1/8, 1/4, 1/2, 1, 2, 4, 8 (näitä vastaavat *y*:n arvot pystyt laskemaan *Esim. 1* tapaan, ilman laskinta.)

B

9.11 Ratkaise seuraavat *eksponenttiyhtälöt* (*Esim. 1* tapaan)
a) $10^{3x} = 0{,}2345$, b) $5{,}82 \cdot e^{2x-1} = 2{,}23$.

9.12 Laske ilman laskinta a) $\log_5 125$, b) $\log_2 \sqrt[3]{4}$, c) $\log_9 \sqrt[5]{\frac{1}{27}}$.

9.13 Määritä puuttuva kirjainarvo seuraavissa logaritmiyhtälöissä (käytä *Esim. 1*:n edellä ollutta sääntöä):

a) $\log_k 16 = 3$, b) $\log_2 x = 3$, c) $\log_x 3 = ½$, d) $\log_a 12 = 2$,

e) $\log_k \dfrac{27}{8} = -3$, f) $\log_4 u = -3/2$.

9.14 Tuloksesta (1) kohdan 9.2 lopussa seuraa (kun sitä luetaan oikealta vasemmalle ja merkinnät muutetaan), että

$$\boxed{\log_k x = a \Rightarrow x = k^a}$$

Sama tulos seuraa myös siitä, että logaritmin arvo a on sellainen luku, että $k^a = x$. Ratkaise kehystetyllä säännöllä seuraavat *logaritmiyhtälöt*: a) $\log_2 x = 5$, b) $\ln 2x = 3$, c) $\lg(t-1) = 2$,

d) $2{,}34 \ln 0{,}345x = 6{,}78$, e) $\lg(x+3) - \lg x = 2$ (yhdistä ensin vp. logaritmit).

9.15 Laske logaritmien laskulakien avulla, ilman laskinta (ja tarkista tulos laskimella):

a) $3\lg 2 + 2\lg 5 - \dfrac{1}{2}\lg 4$, b) $\lg\sqrt{10 \cdot \sqrt[6]{10}}$, c) $\dfrac{(\lg 50)^2 - (\lg 2)^2}{\lg 5}$

(varo: $(\lg a)^2 \neq 2\lg a$. Käytä sääntöä $a^2 - b^2 = \ldots$),

d) $\lg 1 + \lg 10 + \lg 100 + \lg 1000 + \lg\dfrac{1}{10} + \lg\dfrac{1}{100}$.

9.16 Ratkaise a) $2^{x-3} \cdot 3^x = 5$ (ohje: ota luonnollinen logaritmi kummastakin puolesta), *b) $9^x + 8 \cdot 3^x = 20$ (ohje: a)-kohdan keino ei käy, sillä $\ln(a+b)$ ei hajoa. Sen sijaan yhtälö on 3^x:lle 2. asteen yhtälö).

9.17 Piirrä käyrät $y = \ln x$, $y = \ln\dfrac{1}{x}$, $y = \ln x - 1$, $y = \ln(x-1)$.

9.18 *Ratkaise a) $\begin{cases} 2^{x+y} = 32 \\ 3^{3y-x} = 27 \end{cases}$ (ohje: ota sopivakantainen logaritmi yhtälön kummastakin puolesta), b) $\begin{cases} x^{\lg x + \lg y} = 100 \\ x \cdot y^{\lg x} = 1 \end{cases}$.

9.19 Laske a) $5^{\log_5 x}$, b) $10^{2 \cdot \lg 3x}$, *c) $e^{2x + 3\cdot\ln x}$.

10 Lukujoukot ja -järjestelmät

10.1 Lukujoukot

Esim. luvut 1, 2, 3, 4, 5 muodostavat erään ***joukon*** $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Yleisesti joukko muodostuu ***alkioista***, jotka merkitään tavallisesti aaltosulkeisiin. Joukkoja merkitään yleensä isoilla ja alkioita pienillä kirjaimilla. Jos a on joukon A jokin alkio, merkitään $a \in A$ (lue: *"a kuuluu A:han"*). Esim. edellisessä lukujoukossa $4 \in A$, mutta $7 \notin A$ (*"7 ei kuulu A:han"*).

Joukko, jossa ei ole yhtään alkiota, on *tyhjä joukko*. Sitä merkitään symbolilla ∅ tai $\{\}$. Se on joukko-opissa samantapaisessa asemassa kuin luku 0 on lukujen yhteydessä.

Joukoista puhuttaessa taustalla on yleensä jokin yleinen joukko, ns. ***perusjoukko E***, jonka alkioista tarkasteltavat joukot muodostuvat. Esim. laskettaessa vain kokonaisluvuilla, perusjoukkona on ***kokonaislukujen*** $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ muodostama joukko

Esim. 1 Yhtälön $2x = 3$ ratkaisujoukko on $\varnothing$, jos perusjoukkona on kokonaislukujen joukko **Z** (ts. yhtälöllä ei ole yhtään kokonaislukuratkaisua). Jos taas perusjoukkona on kokonais- ja murtolukujen muodostama ***rationaalilukujen*** joukko **Q**, niin ratkaisujoukko $Rj = \{3/2\}$. Merkintä **Q** viittaa sanaan *Quotients* = osamäärät.

Tärkeimmät lukujoukot ovat seuraavat:

1) ***Luonnollisten lukujen*** joukko

   N = {1, 2, 3, ...} (*"Natural Numbers"*).

2) ***Kokonaislukujen*** joukko

   Z = $\{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ (engl. *Integers,* saks. *ganzen* ***Z****ahlen*).

3) ***Rationaalilukujen*** eli kokonais- ja murtolukujen joukko **Q** (*Rational Numbers, Quotients*)

4) ***Reaalilukujen*** joukko **R** (*Real Numbers*). Reaalilukuja ovat rationaaliluvut ja ns. *irrationaaliluvut* kuten

$$\pi = 3{,}14159\ldots, \sqrt{2} = 1.414213\ldots, e = 2{,}71828\ldots$$

5) ***Kompleksilukujen*** joukko ***C*** (*Complex Numbers*). Näistä puhutaan vähän myöhemmin.

Käytössä ovat myös mm. seuraavat merkinnät:

$\mathbf{R}^2 = \mathbf{R}\times\mathbf{R}$ = reaalilukuparien (x, y) joukko (xy-tason pisteet),

$\mathbf{R}^3 = \mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ = reaalilukukolmikkojen (x, y, z) joukko (avaruuden pisteet), $\mathbf{R}^+ = \mathbf{R}_+$ = positiivisten reaalilukujen joukko, $\mathbf{Z}_0^-$ = negatiivisten kokonaislukujen ja 0:n muodostama joukko.

Tulojoukko $\boldsymbol{A\times B}$ muodostuu kaikista sellaisista pareista (a, b), missä $a \in A$ ja $b \in B$, lyhyesti kirjoitettuna

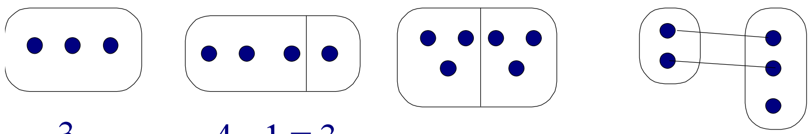
$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Vastaavasti esim. $Q = \{\frac{p}{q} \mid p,q \in \mathbf{Z}, q \neq 0\}$ (*Niiden lukujen p/q joukko, jossa p ja q ovat kokonaislukuja ja q ≠ 0"*).

10.2 Kompleksiluvuista

Koulun ala-asteelta lähtien lukualuetta laajennetaan asteittain seuraavaan tapaan:

1) Aluksi lasketaan vain *luonnollisilla* luvuilla ja laskutoimituksia havainnollistetaan joukkokuvioilla:



3 4 - 1 = 3 6 : 2 = 3 2 < 3

2) Luonnollisten lukujen erotus ei aina ole luonnollinen luku, ts. esim. erotusta 2 – 5 ei voi laskea, jos käytettävissä on vain positiiviset kokonaisluvut. Siksi lukualue laajennetaan **Z**:ksi, ottamalla käyttöön uusia lukuja, nimittäin *negatiiviset* luvut ja 0. Niitä havainnollistetaan lukusuoran avulla.

3) Kokonaislukujen osamäärä a/b ei aina ole kokonaisluku. Siksi tarvitaan jälleen uusia lukuja, *murtolukuja*.

4) Kokonais- ja murtolukujen muodostama rationaalilukujoukko **Q** ei vielä ole riittävän laaja, koska esim. yhtälöllä $x^2 = 2$ ei ole rationaalilukuratkaisua. Samoin yksikköneliön lävistäjällä ei olisi pituutta ellei käyttöön otettaisi uusia lukuja, *irrationaalilukuja* (mm. lukua $\sqrt{2}$).

5) Rationaali- ja irrationaalilukujen muodostama joukko **R** on jo eräissä suhteissa täydellinen, mm. jokaiselle janalle saadaan pituus, kun yksikköjana on valittu (esim. yksikköneliön lävistäjän pituus on geometrisessa tasossa *tarkalleen* $\sqrt{2}$).

6) Kuitenkin niinkin yksinkertainen yhtälö kuin $x^2 = -1$ on reaalilukualueella ratkeamaton. Niinpä seuraava vaihe on se, että otetaan käyttöön vieläkin uusia, ns. ***imaginaarisia*** (= kuviteltuja) lukuja ja määritellään niille laskutoimitukset sillä tavoin, että laskeminen käy samaan tapaan kuin reaaliluvuilla. Reaali- ja imaginaarilukujen yhteisnimitys on ***"kompleksiluvut"***.

Kompleksiluvut voidaan esittää muodossa

$$\boxed{z = \boldsymbol{a + bi}},$$

missä $a, b \in \mathbf{R}$ ja $\boldsymbol{i}$ on ns. ***imaginaariyksikkö***, joka täyttää ehdon

$$\boxed{\boldsymbol{i^2 = -1}}.$$

Jos a = 0, saadaan *puhtaasti imaginaarinen* kompleksiluku $z = bi$. Jos taas b = 0, saatu kompleksiluku on reaalinen $z = a$.

Kompleksilukulausekkeita muokataan kuten reaalisia kirjainlausekkeita, mutta tarvittaessa otetaan huomioon, että $\boldsymbol{i^2 = -1}$. (Kompleksilukujen täsmällinen määrittely esim. reaalilukuparien avulla sivuutetaan.)

Esim. 2 Jos $z_1 = 1 + i$ ja $z_2 = 2 + 3i$, niin $z_1 + z_2 = 3 + 4i$ ja

$$z_1 z_2 = (1+i)(2+3i) = 2 + 3i + 2i + 3i^2 = 2 + 5i - 3 = -1 + 5i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{2+3i}$$

poistetaan i nimittäjästä, laventamalla lauseke nimittäjän ***liittoluvulla*** (liittokompleksiluvulla) $\bar{z}_2 = 2 - 3i$

$$= \frac{(1+i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}$$

Käytä nimittäjään sääntöä $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$$= \frac{2 - 3i + 2i - 3i^2}{2^2 - (3i)^2} = \frac{5-i}{4+9} = \frac{5-i}{13} = \frac{5}{13} - \frac{1}{13}i.$$

Lopputulos saatiin muotoon $a + bi$, missä ***reaaliosa*** $a = 5/13$ ja ***imaginaariosan kerroin*** $b = -1/13$.

Toisen asteen yhtälöllä on kompleksilukualueella aina kaksi ratkaisua, joko eri- tai yhtä suuret reaaliluvut tai kaksi imaginaarista ratkaisua, jotka ovat toistensa liittokompleksiluvut.

Esim. 3 a) $x^2 = -9 \Leftrightarrow x = \pm 3i$, sillä $(\pm 3i)^2 = 9i^2 = -9$.

Nämä ratkaisut saadaan ajattelemalla, että $\pm\sqrt{-1} = \pm i$ ja käyttämällä "reaalisia" neliöjuuren laskusääntöjä seuraavasti:

$$x^2 = -9 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-9} = \pm 3\sqrt{-1} = \pm 3i.$$

b) $(x+2)^2 = -8$

$$x + 2 = \pm\sqrt{-8} = \pm 2\sqrt{-2} = \pm 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{-1} = \pm 2\sqrt{2}\cdot i$$

$$\therefore x = -2 \pm 2\sqrt{2}\cdot i.$$

c) $x^2 - 8x + 25 = 0$

$$x = 4 \pm \sqrt{4^2 - 25} = 4 \pm \sqrt{-9} = 4 \pm 3i.$$

Kompleksiluvut ovat osoittautuneet hyvin käyttökelpoisiksi mm. sähkö- ja tietoliikennetekniikassa, jossa imaginaariyksikköä merkitään yleensä *j*:llä, koska *i* on virranvoimakkuuden symboli.

10.3 Lukujärjestelmistä

Kymmenjärjestelmässä *kantalukuna on 10 ja numeromerkkejä tarvitaan kymmenen: 0, 1, ..., 9. Luvut esitetään kantaluvun 10 potensseina*, esim.

Esim. 4 $23016 = 2\cdot 10^4 + 3\cdot 10^3 + 1\cdot 10 + 6$

$$31{,}24 = 3\cdot 10 + 1\cdot 10^0 + 2\cdot 10^{-1} + 4\cdot 10^{-2}.$$

Binäärijärjestelmässä *(2-järjestelmässä) kantalukuna on 2 ja numeromerkkejä on vain kaksi: 0 ja 1.* 2-järjestelmän luku voidaan muuttaa 10-järjestelmän luvuksi siten, että se esitetään 2:n potensseina ja lasketaan sitten sen arvo (10-järjestelmän laskuna).

Esim. 5 $(10111)_2 = 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2 + 1 = 23$.

Kääntäen 10-järjestelmän luku voidaan muuntaa 2-järjestelmään, kun tämä luku esitetään 2:n potenssien $1\,(=2^0)$, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024 $(=2^{10})$, ... avulla.

Esim. 6 $230 = 128 + 102 = 128 + 64 + 38 = 128 + 64 + 32 + 4 + 2$

$$= 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 = (11100110)_2 .$$

*Toinen tapa: jaa luku 2:lla, sitten vajaa osamäärä 2:lla, jne. Jakojäännökset ovat 0 1 1 0 0 1 1 1, ts. binääriesityksen numerot lopusta alkuun.

**Esim. 7* Desimaaliluvun 0,74 saat muutettua 2-järjestelmään seuraavasti: Kerro luku 2:lla, poista kokonaisosa (= 1), kerro jäännös 2:lla, poista kokonaisosa (= 0), kerro jäännös kahdella jne. Kokonaisosista saat 2-järjestelmän luvussa pilkun jälkeiset numerot: $0{,}74 = (0{,}1011110\ldots)_2$.

2-järjestelmässä voidaan suorittaa yhteen ja kertolaskuja samaan tapaan kuin 10-järjestelmässä, kunhan tarvittaessa otetaan huomioon, että 2-järjestelmässä "$1 + 1 = 10$ ", sillä $(1)_2 + (1)_2 = 1 + 1 = 2 = 1 \cdot 2 + 0 = (10)_2$.

Esim. 8

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 111} \\ (11010)_2 \\ +\ (10110)_2 \\ \hline (110000)_2 \end{array}$$

Mm. tietoliikennetekniikassa käytetään myös ***8- ja 16- järjestelmiä***, joiden lukuja sanotaan ***oktaali-*** **ja** ***heksadesimaaliluvuiksi***. ***8-järjestelmässä*** *selvitään 8 numeromerkillä 0, 1, ..., 7 ja luvut muutetaan 10-järjestelmään, esittämällä ne 8:n potensseina*, esim.

$$(217)_8 = 2 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8 + 7 = 143 .$$

16-järjestelmässä *tavalliset numerot 0, 1, ..., 9 eivät riitä, vaan tarvitaan 16 merkkiä, jotka ovat* $\mathbf{0, 1, 2, \ldots, 9}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{F}$. *Tässä merkit A, B, ..., F ovat 10-järjestelmään muutettuina luvut 10, 11, ... , 15.*

Esim. 9 $(DBF5)_{16} = 13 \cdot 16^3 + 11 \cdot 16^2 + 15 \cdot 16 + 5$

$$= 56309 = (1101101111110101)_2$$

Luvun esitys 16-järjestelmässä on siis paljon lyhempi kuin 2-järjestelmässä. Mm. matematiikkaohjelmilla ja osalla laskimia voidaan muuttaa lukuja suoraan järjestelmästä toiseen (näiden neljän järjestelmän välillä).

Harjoituksia

A

10.1 Mitkä seuraavista väitteistä ovat tosia: a) $-2 \in N$, b) $-7 \in Z$, c) $3/4 \in Q$, d) $7 \in Q$, e) $3/4 \in R$, f) $\sqrt{3}/2 \in Q$, g) $\sqrt{3}/2 \in R$.

10.2 Jos $z_1 = 2+i$ ja $z_2 = 1-i$ (missä i on imaginaariyksikkö), laske

a) $z_1 - z_2$, b) $2z_1 + 3z_2$, c) $z_1 z_2$, d) z_1^2, e) $\dfrac{z_1}{z_2}$.

10.3 Ratkaise seuraavat 2. asteen yhtälöt kompleksialueella:

a) $x^2 = -16$, b) $x^2 = -27$, c) $(2x+1)^2 + 25 = 0$,
d) $x^2 + 6x + 17 = 0$, e) $2x^2 + 6x + 17 = 0$.

10.4 Muuta a) luku $(10110101)_2$ 10-järjestelmään, b) 10-järjestelmän luku 1568 2-järjestelmään, c) luku $(27701)_8$ 10-järjestelmään, d) luku $(AB79F)_{16}$ 10-järjestelmään.

B

10.5 Laske: a) $1 - i + 2i^2 + 4i^3 + 7i^4$, b) $(2-i)(3+5i) + (4+i)(1-i)$, c) $\dfrac{3+i}{3-i}$ d) $\dfrac{2i-1}{2+\sqrt{3}\,i}$.

10.6 *Kokonaisluku on jaollinen 2:lla/4:llä, jos sen viimeinen numero/kahden viimeisen numeron muodostama luku on tällä jaollinen. 3:lla jaollinen on luku, jonka numerojen* <u>*summa*</u> *on 3:lla jaollinen*. Jaa (alku)tekijöihin luku 11016.

10.7 Sievennä lauseke $(1/a + 1/b)(a-b) + (a+bi)(i/a - 1/b)$, missä i = imaginaariyksikkö.

10.8 Laske kahdella tavalla (1. tapa: muuta luvut ensin 10-järjestelmään, 2. tapa: laske suoraan ko. järjestelmässä)

a) $(100110111)_2 + (1110110)_2$, b) $(1101)_2 \cdot (10110)_2$,

*c) $(2D9)_{16} + (ABF4)_{16}$, *d) $3 \cdot (3675)_8$.

10.9 *Muuta oktaaliluku $(23456)_8$ heksadesimaaliluvuksi.

11 Determinantit

11.1 Determinantti

Kaksirivinen determinantti $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, esim. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$.

Kolmirivinen determinantti voidaan laskea ns. ***Sarrus´n säännöllä*** ([sarý:]), jossa determinantin perään lisätään kaksi ensimmäistä pystyriviä (saraketta) ja lasketaan yhteen kaikki ***päälävistäjän*** suuntaiset kolmoistulot sekä vähennetään ***sivulävistäjän*** suuntaiset kolmoistulot:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{matrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 \,.$$

Esim. 1 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & 3 \\ -2 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 217$ (laske!).

Determinantteja käytetään mm. ristitulon laskemiseen, ts. kahta suuntaa vastaan kohtisuoran suunnan määrittämiseen esim. dynamiikassa tai avaruusgeometriassa, lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisemiseen (jolloin perusidea on se, että usean yhtälön ryhmät ratkeavat samalla, systemaattisella tekniikalla kuin parin, kolmen yhtälön yhtälöryhmät), ns. ominaisarvojen määrittämiseen (sähköisten ja mekaanisten värähtelyjen yhteydessä) jne.

Sarrus´n sääntö käy vain 3-rivisille determinanteille. Yleispätevä, myös useampirivisille determinanteille sopiva laskutapa vaatii kaksi apukäsitettä (*alideterminantti* ja *komplementti*). Niiden avulla laskeminen palautetaan vähempirivisten determinanttien laskemiseen:

n-rivinen determinantti:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & .... & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1. alaindeksi ilmaisee *vaakarivin* (vr) ja 2. alaindeksi *pystyrivin* (pr). Esim. a_{35} on kolmannella vr:llä ja viidennellä pr:llä (näiden rivien risteyksessä).

Määritelmä: *Jos determinantista poistetaan i:s vaakarivi ja j:s pystyrivi, saadaan poistettujen rivien risteyskohdassa olevaa alkiota* a_{ij} *vastaava* ***alideterminantti****. Kun tämä alideterminantti varustetaan etumerkillä* $(-1)^{i+j}$ *(ts. etumerkillä –, jos* $i+j$ *on pariton), saadaan alkion* a_{ij} ***komplementti*** $\boldsymbol{A_{ij}}$.

Komplementtien "etumerkit" $(-1)^{i+j}$ vuorottelevat, esim.

$$\text{3-rivinen: } \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}, \text{ 4-rivinen: } \begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix} \text{ jne.}$$

(päälävistäjällä on aina +, sillä $(-1)^{i+i} = (-1)^{2i} = +1$).

Esim. 2 Sama determinantti kuin esimerkissä 1:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & 3 \\ -2 & -3 & -5 \end{vmatrix}$$

Tämän determinantin alkio $a_{31} = -2$. Sitä vastaava *alideterminantti* on $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -10$. Alkion a_{31} ***komplementti*** on

$$A_{31} = +\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -10.$$

Kolmannen rivin kahden muun alkion a_{32} ja a_{33} *komplementit* ovat

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -29, \quad A_{33} = +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -22.$$

Huom. 2-rivisen determinantin alideterminantit ovat 1-rivisiä. Sellaisen arvoksi sovitaan alkion arvo, esim. determinantti $|-5| = -5$.

Kehitetään nyt esimerkin 2 determinantti D kolmannen vaakarivin mukaan, millä tarkoitetaan sitä, että *kolmannen vr:n alkioilla kerrotaan omat komplementtinsa ja saadut tulot lasketaan yhteen*:

$$\begin{aligned} D &= a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \\ &= -2\cdot(-10) - 3\cdot(-29) - 5\cdot(-22) = 217. \end{aligned}$$

Lasketaan vielä saman determinantin kehitelmä jonkin muun rivin, vaikkapa toisen pr:n mukaan:

$$\begin{aligned}D &= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} \\ &= 2\cdot\left(-\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -5\end{vmatrix}\right) - 4\cdot\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & -5\end{vmatrix} - 3\cdot\left(-\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 3\end{vmatrix}\right) \\ &= 2\cdot 19 - 4\cdot(-23) - 3\cdot(-29) = 217.\end{aligned}$$

Kummassakin tapauksessa kehitelmän arvoksi saatiin sama kuin *Sarrus´*n säännön antama arvo. Yleisesti voidaan todistaa seuraava tulos:

Lause 1 *Jos n-rivinen determinantti kehitetään jonkin vaaka- tai pystyrivinsä mukaan (ts. tämän rivin alkioilla kerrotaan omat komplementtinsa ja saadut tulot lasketaan yhteen), saadaan aina sama arvo.*

Määritelmä: *Lauseen 1 mukaista arvoa sanotaan kyseisen determinantin arvoksi.*

Esim. 3 Laske seuraavan 4-rivisen determinantin arvo:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \longleftarrow \\ \\ \end{matrix}$$

Kehitetään D 3. vr:n mukaan (koska sillä rivillä on kaksi 0:aa). Komplementtien etumerkit ovat tällä rivillä +, –, +, –.

$$D = 3\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix} + 0 + 0 + (-5)\cdot\left(-\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}\right)$$

$$\begin{matrix} \longrightarrow \\ \\ \\ \end{matrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix} + 5\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \longleftarrow \end{matrix}$$

Kehitetään nämä determinantit nuolella merkittyjen rivien (1. vr, 3. vr) mukaan

$$= 3\cdot\left\{-1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2\end{vmatrix} + 1\cdot\left(-\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2\end{vmatrix}\right) + 0\right\} + 5\cdot\left\{0 + 1\cdot\left(-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1\end{vmatrix}\right) + 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2\end{vmatrix}\right\}$$

$$= 3\cdot\{6-2\} + 5\cdot\{3+10\} = 77.$$

11.2 Determinantin muokkaus

Kuten edellinen esimerkki osoittaa, determinantin laskeminen on helpompaa, jos jollakin rivillä on useita nollia. *Nollia saadaan lisätyksi seuraavalla muokkaussäännöllä (joka esitetään todistuksetta):

Lause 2 *Determinantin arvo ei muutu, jos determinantin jonkin rivin alkioihin lisätään (tai niistä vähennetään) jonkin muun samansuuntaisen rivin alkiot samalla vakiolla kerrottuina.*

Esim. 4 Sama determinantti kuin esimerkeissä 1 ja 2:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & 3 \\ -2 & -3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -4 \\ 5 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -9 \end{vmatrix} \cdot 5$$

Ylintä riviä muokataan keskimmäisen avulla. *Keskimmäinen rivi ei muutu !!*

$$= \begin{vmatrix} -22 & 0 & -19 \\ 5 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -9 \end{vmatrix} = 0 + 1 \cdot \begin{vmatrix} -22 & -19 \\ 1 & -9 \end{vmatrix} + 0 = 9 \cdot 22 + 19 = 217.$$

*Nollien järjestäminen pääsee paremmin oikeuksiinsa useampirivisillä determinanteilla. (Laske vaikkapa esimerkin 3 determinantti siten, että järjestät sen 2. pr:lle muut alkiot 0:iksi paitsi 1. alkio.)

Determinantin arvon laskemisessa voidaan käyttää myös seuraavia muokkaustapoja (joiden paikkansapitävyyden voit todeta 2- tai 3-rivisillä determinanteilla):

- *Jos determinantin jonkin rivin alkioilla on yhteinen tekijä, se voidaan ottaa tekijäksi determinantin eteen.*
- *Jos determinantissa kaksi samansuuntaista riviä on samanlaista, determinantin arvo on = 0.*
- *Jos determinantin kaksi samansuuntaista riviä vaihdetaan keskenään, determinantti muuttuu vastaluvukseen.*

Jatkossa tarvitaan vielä seuraavaa, lauseelle 1 rinnakkaista tulosta (*"sekakehitelmän arvo on 0"*):

Lause 3 *Jos determinantin jonkin rivin alkioilla kerrotaan <u>jonkin muun</u> samansuuntaisen rivin alkioiden komplementit ja tulot lasketaan yhteen, niin tulos on = 0.*

Esim. 5 Jos $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, niin lauseiden 1 ja 3 mukaan

$a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 = D$ (1. pr:n alkioilla on kerrottu omat komplementtinsa, Lause 1)

$b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3 = 0$ (2. pr:n alkioilla on kerrottu "väärän" pr:n alkioiden komplementit)

11.3 Lineaariset yhtälöryhmät

Determinantteja käytettäessä lineaaristen yhtälöryhmien käsittely yhtenäistyy.

1°. Lineaarinen yhtälöpari:

$$+\ \begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot d \\ \cdot(-b) \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot(-c) \\ \cdot a \end{matrix}$$

$$\begin{cases} (ad - bc)x = ed - fb \\ (ad - bc)y = af - ec \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} D \cdot x = D_x \\ D \cdot y = D_y \end{cases}$$

Merk. $D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ (= tuntemattomien kertoimista muodostuva determinantti),

$$D_x = \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix} = ed - fb,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} = af - ec.$$

Käsittely jakautuu nyt kolmeen tapaukseen, joista ensimmäinen on päätapaus ja kaksi muuta "harvinaisempia":

1) Jos $D \neq 0$, saadaan ***yksi ratkaisu*** $\begin{cases} x = D_x / D \\ y = D_y / D \end{cases}$.

2) Jos $D = 0$, mutta D_x tai D_y on $\neq 0$, yhtälöparilla ***ei ole ratkaisua*** (sillä jos esim. $D_x \neq 0$, niin yhtälön $D \cdot x = D_x$ vp. = 0, mutta op $\neq$ 0).

3) Jos $D = D_x = 0$, niin $ad = bc$ ja $ed = fb$, mistä seuraa, että

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{e}{f}$$

(jolloin myös $D_y = 0$). Tässä tapauksessa siis alkuperäisten yhtälöiden vastinkertoimet ovat verrannolliset ja yhtälöt ovat siten itse asiassa samat (toinen saadaan toisesta vakiolla kertomalla). Voidaan myös sanoa, että yhtälöryhmä surkastuu yhdeksi yhtälöksi $ax + by = e$. Tällä on

äärettömän monta ratkaisua: x:lle voidaan valita mikä arvo tahansa ja vastaava y:n arvo lasketaan kaavasta $y=(e-ax)/b$ (jos $b=0$).

Geometrisesti: yhtälöpari esittää kahta suoraa, jotka tapauksessa 1) leikkaavat, tapauksessa 2) ovat yhdensuuntaiset ja tapauksessa 3) yhtyvät.

2^o. Kolme lineaarista yhtälöä ja kolme tuntematonta:

$$
+\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 & \cdot A_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 & \cdot A_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 & \cdot A_3 \end{cases}
$$

$$
D\cdot x+0+0=d_1A_1+d_2A_2+d_3A_3
$$

Merkitään $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ja esim. $A_2=$ alkion a_2 komplementti D:ssä.

Yhteenlaskun jälkeen x:n kerroin on $a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3=D$ (Lause 1), kun taas esim. y:n kerroin on $b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3=0$ (Lause 3). Summa $d_1A_1+d_2A_2+d_3A_3$ taas on sama kuin seuraavan determinantin kehitelmä 1. pr:n mukaan:

$$
D_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}
$$

(D_x on saatu D:stä korvaamalla x-kertoimet a_i vakiotermeillä d_i ($i=1,2,3$). Vastaavasti määritellään D_y ja D_z.)

Näin on saatu yhtälö $D\cdot x=D_x$. Vastaavasti saadaan yhtälö $D\cdot y=D_y$ (kertomalla yhtälöt A_i-komplementtien sijaan komplementeilla B_i) ja yhtälö $D\cdot z=D_z$. Alkuperäinen yhtälöryhmä saadaan siis muotoon

$$
\begin{cases} D\cdot x=D_x \\ D\cdot y=D_y \\ D\cdot z=D_z \end{cases},
$$

missä esim. D_y on saatu D:stä korvaamalla siinä y-kertoimet b_i vakiotermeillä d_i. Käsittely jakautuu nyt päätapaukseen ja erikoistapauksiin:

1) *Jos $D\neq 0$, yhtälöryhmällä on yksi ratkaisu* $\begin{cases} x=D_x/D \\ y=D_y/D \\ z=D_z/D \end{cases}$.

2) *Jos* $D = 0$ *mutta ainakin yksi determinanteista* D_x, D_y *ja* D_z *on* $\neq 0$, *ryhmällä ei ole ratkaisua* (sillä vastaavan yhtälön vp = 0 ja op ≠ 0).

3) *Jos kaikki neljä determinanttia ovat = 0, voidaan todistaa, että yhtälöryhmällä on äärettömän monta tai ei yhtään ratkaisua.*

Huom. *Edellinen menettely käy yleisesti, jos yhtälöryhmässä on n lineaarista yhtälöä ja n tuntematonta.* Jos yhtälöitä on vain kolme tai neljä ja niiden kertoimet ovat "pieniä mukavia kokonaislukuja", voi yhteenlasku- ja sijoituskeino olla determinanttien laskemisia nopeampi (niin myös seuraavassa esimerkissä).

Esim. 6 $\begin{cases} 4x - y + z = 1 \\ 3x + z = 3 \\ x + y = 3 \end{cases}$ Tässä $D = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$ (laske!) ja

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,\ D_y = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -5,\ D_z = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3.$$

Täten $x = 1/2,\ y = 5/2,\ z = 3/2$.

11.4 Homogeeniset lineaariset yhtälöryhmät

Käsitellään nyt lineaarisia yhtälöryhmiä, joissa *vakiotermit* ovat = 0.

3^o. Kolmen tuntemattoman homogeeninen yhtälöpari

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases}$$

Homogeeninen = *tasa-asteinen*: kaikki termit ovat tuntemattomiin nähden 1. astetta (vakiotermin $\neq 0$ aste olisi 0, mutta 0 on asteeton).

Tällä yhtälöparilla on äärettömän monta ratkaisua, sillä yksi tuntemattomista voidaan valita vapaasti ja kaksi muuta esittää näiden avulla.

Esim. 7 $\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 2x - y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = -z \\ 2x - y = 3z \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7,\ D_x = \begin{vmatrix} -z & 3 \\ 3z & -1 \end{vmatrix} = -8z,\ D_y = \begin{vmatrix} 1 & -z \\ 2 & 3z \end{vmatrix} = 5z$$

$$\therefore \begin{cases} x = -8z/(-7) = 8/7\ z \\ y = 5z/(-7) = -5/7\ z \end{cases}$$ (missä z on mielivaltainen).

Ratkaisu voidaan esittää myös muodossa $\frac{x}{z}=\frac{8}{7}, \frac{y}{z}=\frac{-5}{7}$ ja nämä kaksi verrantoa voidaan yhdistää kaksoisverrannoksi $x:y:z=8:(-5):7$.

Huom. Yleisesti voidaan (edellisen esimerkin tapaan) osoittaa, että

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow x:y:z=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

4°. Kolme homogeenista lineaarista yhtälöä ja kolme tuntematonta:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$$

Tällä ryhmällä on aina ns. ***triviaali*** eli itsestään selvä (alkeellinen) ratkaisu $x=y=z=0$.

Tätä tai yleisemmin *n*-yhtälöistä yhtälöryhmää koskee seuraava tulos, jolla on käyttöä mm. mekaanisten ja sähköisten värähtelyjen yhteydessä:

Lause 4 *Homogeenisella lineaarisella yhtälöryhmällä, jossa on yhtä monta yhtälöä kuin tuntematonta, on muitakin kuin triviaali ratkaisu* $x=y=z=0$ *vain, mikäli yhtälöryhmän kerroindeterminantti D = 0. Tällöin ratkaisuja on äärettömän monta. Ne saadaan jättämällä yksi yhtälö pois ja ratkaisemalla jäljelle jäänyt yhtälöryhmä* (kohdan *3°* tapaan).

**Todistus:* Sovelletaan kohdan 2° tuloksia:

1) $D\neq 0 \Rightarrow 1$ ratkaisu, siis vain triviaali ratkaisu.

2), 3) $D=0 \Rightarrow 0$ tai ∞ monta ratkaisua. Edellinen mahdollisuus "ei yhtään ratkaisua" ei tule kyseeseen, koska on ainakin triviaali ratkaisu.

***Esim. 8** *Värähtelysysteemiä* tutkittaessa voidaan joutua muotoa

$$\begin{cases} 8x+y=\lambda x \\ 5x+4y=\lambda y \end{cases}$$

olevaan yhtälöpariin, jolla tiedetään (tehtävän luonteen perustella) olevan jokin ei-triviaali ratkaisu, jos λ:lle valitaan sopiva arvo. Määritä mahdolliset λ:n arvot ja vastaavat *x*:n ja *y*:n arvot. Tällaiset λ:n arvot ovat nimeltään systeemin

ominaisarvot (*Eigenvalues*) ja vastaavat ratkaisut $[x, y]$ ***ominaisvektorit***.

Yhtälöpari voidaan kirjoittaa muotoon $\begin{cases} (8-\lambda)x + y = 0 \\ 5x + (4-\lambda)y = 0 \end{cases}$,

joten kyseessä on homogeeninen lineaarinen pari. Lauseen 4 mukaan tällä on ei-triviaali ratkaisu vain mikäli kerroindeterminantti on = 0:

$$\begin{vmatrix} 8-\lambda & 1 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (8-\lambda)(4-\lambda) - 5 = 0 .$$

Tästä saadaan kaksi ***ominaisarvoa*** $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 9$. Esimerkiksi ensimmäisellä arvolla $\lambda_1 = 3$ yhtälöpari surkastuu yhtälöksi $5x + y = 0$ (toinen yhtälö on sama). Tämän yhtälön ratkaisut voidaan esittää muodossa

$\begin{cases} x = t \\ y = -5t \end{cases}$ (ts. x mikä tahansa ja y (–5)-kertainen)

tai myös ***ominaisvektoreina*** $[x, y] = t[1,-5]$.

Harjoituksia

A, B

11.1 Laske determinantti $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ a) *Sarrus´*n säännöllä, b) kehittämällä se 1. vr:n mukaan, c) 2. pr:n mukaan.

11.2 Laske determinantti

$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

a) kehittämällä se 3. vr:n mukaan,

*b) muokkaamalla ensin 3. vaakariviä,

*c) muokkaamalla ensin 1. vr ja kehittämällä determinantti sen rivin mukaan.

11.3 Laske $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

11.4 Laske seuraavat determinantit (kehittämällä ne yhä uudelleen 1. vr:n mukaan). Ensimmäinen on ns. ***lävistäjä-*** ja toinen ***kolmiodeterminantti***.

a) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 7 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

11.5 Ratkaise determinanttien avulla

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ 4x + 5y = -11 \end{cases}$, b) $\begin{cases} 2{,}53x + 7{,}88y = 32{,}0 \\ 2{,}74x - 5{,}26y = -44{,}2 \end{cases}$ (3 num. tarkk.).

c) Ratkaise b)-kohdan ryhmä myös "alkeellisesti", yhteenlaskukeinolla.

11.6 Ratkaise seuraava yhtälöryhmä a) determinantteja käyttäen, b) yhteenlasku- ja sijoituskeinoja sopivasti käyttäen:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ x - 2y + 3z = -1 \end{cases}.$$

11.7 Ratkaise yhtälöpari $\begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$ ja määritä sen kolme yksittäistä ratkaisua *x*, *y*, *z*.

11.8 Ratkaise $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 3x - 2y - z = 0 \end{cases}$.

11.9 *Yhtälöryhmällä $\begin{cases} x+2y-z=\lambda x \\ 3x-y+z=\lambda y \\ x-3y+2z=0 \end{cases}$ tiedetään olevan muukin ratkaisu kuin triviaali ratkaisu, kun λ valitaan sopivasti. Määritä tällaiset λ:n arvot.

11.10 *Millä λ:n arvoilla yhtälöryhmällä $\begin{cases} 2x+2y+z=\lambda x \\ x+3y+z=\lambda y \\ x+2y+2z=\lambda z \end{cases}$ on muitakin ratkaisuja kuin triviaali ratkaisu?

C

(*Erikoistehtäviä*)

11.11 Todista edellä mainittu tulos

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow x:y:z=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

11.12 Tutki yhtälöparin $\begin{cases} kx+y=3 \\ 4x+ky=6 \end{cases}$ ratkaisujen lukumäärää k:n eri arvoilla.

11.13 Tiedetään, että $a^3=1$, ts. että a on jokin yhtälön $x^3=1$ kolmesta juuresta (joista yksi on 1 ja kaksi imaginaarista). Laske tätä tietoa hyväksi käyttäen determinantti

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a & -1 \\ a & 1 & -1 & a^2 \\ 0 & a^2 & a & 1 \\ a^2 & a & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

11.14 Sellaisen kolmion, jonka kärjet ovat $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$ positiivisen kiertosuunnan mukaisessa järjestyksessä, pinta-ala on $A=\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}$. Totea tuloksen paikkansapitävyys jonkin esimerkin avulla ja perustele, miten ensimmäinen determinantti saadaan toisen determinantin muotoon.

12 Matriisit

12.1 Peruskäsitteitä

Determinantti on *luku* (jos sen alkiot ovat lukuja), ja edellä on opittu laskemaan determinantin arvo. ***Matriisi*** (engl. *Matrix*) sen sijaan on suorakulmion muotoon kirjoitettu *kaavio*, taulukko (*Array*) jonka alkiot ovat lukuja, kirjaimia tms. Esimerkiksi yhtälöparin

(1)
$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

kertoimista ja vakiotermeistä muodostuva matriisi on

$$A = \begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \end{bmatrix}.$$

Toisin kuin determinantissa, matriisissa voi siis vaakarivien määrä olla eri suuri kuin pystyrivien määrä. Rivimäärän perusteella sanotaan, että tämä matriisi A on ***tyyppiä*** 2×3 (*"2 kertaa 3"*, 2 vaaka- ja 3 pystyriviä).

Hakasulkeiden sijaan matriisissa voidaan käyttää myös kaarisulkeita. Esim. yhtälöparissa (1) x:n ja y:n kertoimien muodostama matriisi on

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Koska B:ssä on 2 vaaka- ja pystyriviä, sitä sanotaan ***2-riviseksi neliömatriisiksi***. Neliömatriisista voidaan laskea myös ***determinantti***:

$$\det B = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc .$$

Yleisesti sellaista neliömatriisia A, jonka determinantti on 0:sta eriävä, sanotaan ***säännölliseksi*** *(non-singular)*. Jos taas $\det A = 0$, matriisi A on ***singulaarinen***.

Yhtälöparin (1) vakiotermeistä saadaan 2×1-matriisi $\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$ (kaksi mahdollisimman lyhyttä vaakariviä ja 1 pystyrivi). Tällaista matriisia sanotaan myös ***2-komponenttiseksi pystyvektoriksi***. Yhtälöparin (1) ensimmäisen yhtälön kertoimet taas muodostavat erään 3-komponenttisen ***vaakavektorin*** $\begin{bmatrix} a & b & e \end{bmatrix}$.

Matriisilaskentaa voidaankin pitää tietynlaisena vektorilaskennan yleistyksenä. Matriiseja käytetään mm. yhtälöryhmien ratkaisemiseen determinanttien sijaan, taloudelliseen laskentaan, lineaaristen muunnosten suorittamiseen tai yhdistämiseen, esim. 2- tai 3-ulotteisen koordinaatiston kiertoon, jolla on käyttöä mm. lujuusopissa, robotiikassa jne. Matematiikkaohjelmat kuten *Mathcad* ja mm. tietoliikennetekniikan käyttämä *MatLab* (Matrix Laboratories) perustuvat paljolti matriisilaskentaan.

Neliömatriisia, jossa vain päälävistäjällä on nollasta eroavia alkioita, sanotaan ***lävistäjämatriisiksi*** (*Diagonal Matrix*), esim.

$$D=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\ ;\qquad \det D=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{vmatrix}=2\cdot 3\cdot(-1)=-6\,.$$

Lävistäjämatriisi, jonka päälävistäjäalkiot ovat kaikki ykkösiä, on ns. ***ykkösmatriisi*** (*yksikkömatriisi*, engl. *Identity Matrix*). Sen merkkinä on yleensä iso i-kirjain, esim. 3-rivinen ykkösmatriisi on

$$I_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

12.2 Matriisien laskutoimitukset

Matriiseista muodostetaan <u>*algebrallinen systeemi*</u> määrittelemällä niille laskutoimituksia. Muut näistä määritelmistä ovat "luonnollisia", alkioittain tapahtuvia, mutta tulo määritellään tavalla, joka tuntuu aluksi oudolta. Tämä määrittely sopii kuitenkin hyvin matriisien sovelluksiin. Ensin täytyy kuitenkin määritellä matriisien ***yhtäsuuruus***:

1) $A=B\Leftrightarrow A$ ja B ovat samaa tyyppiä ja vastinalkioittain samat.

Esim. 1 Seuraava matriisiyhtälö (jossa molemmat matriisit ovat samaa tyyppiä, 2×2-matriiseja) muodostaa vastinalkioittain kirjoitettuna neljän yhtälön yhtälöryhmän.

$$\begin{bmatrix}x-1&2y\\z+2&u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4\\2&3\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=1\\2y=4\\z+2=2\\u=3\end{cases}.$$

2) ***Summa***: Samaa tyyppiä olevat matriisit lasketaan yhteen (tai vähennetään toisistaan) vastinalkioittain, esim.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

3) ***Luvulla*** (skalaarilla) ***kertominen***: Jokainen alkio kerrotaan tällä luvulla, esim.

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 8 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Huomaa sääntö takaperin: jos matriisin <u>*jokaisella*</u> alkiolla on yhteinen tekijä, se voidaan ottaa tekijäksi matriisin eteen (determinantilla riitti, että <u>jollakin rivillä</u> on yhteinen tekijä).

4) ***Tulo***: *Tulomatriisin $AB = C$ i:nnen vaakarivin ja j:nnen pystyrivin risteyksessä oleva alkio c_{ij} saadaan, kun A:n i:nnen vaakarivin alkioilla kerrotaan B:n j:nnen pystyrivin vastaavat alkiot ja saadut tulot lasketaan yhteen,* esim.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}}_{2\times 3} \underbrace{\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 1\cdot 7 + 2\cdot 5 + 3\cdot 1 & 1\cdot 4 + 2\cdot 2 + 3\cdot 0 \\ 0\cdot 7 + 1\cdot 5 - 6\cdot 1 & 0\cdot 4 + 1\cdot 2 - 6\cdot 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 20 & 8 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_{2\times 2}.$$

Voidaan myös sanoa, että tulossa *AB* esim. ensimmäisen vaakarivin alkiot saadaan kertomalla *A*:n ensimmäisen vaakarivin muodostamalla vaakavektorilla *B*:n pystyrivien muodostamat pystyrivivektorit yksi kerrallaan "pistetulomaisesti".

Huom. *Tulo AB voidaan muodostaa vain, mikäli A:n vaakarivin "pituus" (alkiomäärä) on sama kuin B:n pystyrivin pituus.* Jos *A* on tyyppiä $m \times n$ ja *B* tyyppiä $n \times r$, niin tulo *AB* voidaan muodostaa ja se on tyyppiä $m \times r$.

Esim. 2 Tuloa $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ ei voida muodostaa, mutta tulo

$BA = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ voidaan. (Laske *BA*.)

Esimerkin 2 mukaan ***matriiseilla ei ole voimassa vaihdantalaki AB = BA*** eli *A* ja *B* eivät yleensä ***kommutoi*** keskenään. Jos *A* ja *B* ovat samankokoisia <u>*neliö*</u>matriiseja (esim. kumpikin 3-rivisiä), niin niistä voidaan muodostaa sekä tulo AB että tulo BA, mutta nämä eivät yleensä ole yhtä suuret. Esim. seuraavissa tuloissa jo ensimmäiset alkiot eroavat toisistaan:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & \\ & \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39 & \\ & \end{bmatrix}.$$

Jos *ykkösmatriisilla* I kerrotaan samankokoinen neliömatriisi A kummalta puolen tahansa (vasemmalta tai oikealta), niin saadaan A, esim.

$$I_2 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = A, \quad AI_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = A.$$

Niinpä ykkösmatriisi I on matriisilaskennassa samassa asemassa kuin luku 1 on luvuilla laskettaessa ($1 \cdot a = a \cdot 1 = a$). Tulos $IA = AI$ osoittaa, että *I kommutoi* jokaisen samankokoisen neliömatriisin A kanssa.

Esim. 3 Matriisin ja pysty- tai vaakavektorin tuloja:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 3 + 1\cdot 2 \\ 5\cdot 3 + 3\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 21 \end{bmatrix}, \text{ tuloa } \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \text{ ei voida laskea,}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 2 + 2\cdot 5 & 3\cdot 1 + 2\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 9 \end{bmatrix}.$$

Esim. 4 **<u>Yhtälöparin muuntaminen matriisimuotoon</u>**: *Yhtälöpari*

$$\boxed{\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x - 2y = 5 \end{cases} \quad \textit{voidaan esittää muodossa} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix},}$$

sillä tämä matriisiyhtälö on sama kuin matriisiyhtälö

$$\begin{bmatrix} 2x + 3y \\ 4x - 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ja tämä taas merkitsee, että vastinalkioiden täytyy olla samat:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x - 2y = 5 \end{cases}.$$

****Esim. 5*** Yritys valmistaa elektroniikan, koneenrakennuksen tms. tuotteita *A, B* ja *C*. Tuotteet muodostuvat kolmenlaisista komponenteista *a, b* ja *c*, joita tarvitaan seuraavat lukumäärät:

	a	***b***	***c***
A	5	4	3
B	2	2	1
C	3	4	7

(*komponenttien* määrät ***K***).

Komponenttien *a, b* ja *c* valmistamiseen tarvitaan neljää raaka-ainetta *I, II, III* ja *IV* seuraavat painomäärät (*kg, mg* tms.):

	I	***II***	***III***	***IV***
a	3	0	2	4
b	5	1	3	3
c	4	2	0	1

(*raaka-ainemäärät* ***R***).

Aineiden *I, II, III* ja *IV* *yksikköhinnat* ***H*** (euro, snt tms.) ovat

I: 123
II: 75
III: 96
IV: 47 .

Näistä voidaan muodostaa kolme matriisia

$$K=\begin{bmatrix}5&4&3\\2&2&1\\3&4&7\end{bmatrix},\quad R=\begin{bmatrix}3&0&2&4\\5&1&3&3\\4&2&0&1\end{bmatrix},\quad H=\begin{bmatrix}123\\75\\96\\47\end{bmatrix}.$$

- Matriisitulo ***RH*** antaa komponenttien *a, b* ja *c* materiaalikustannukset (pystyvektorina), esim. yhden *a*-komponentin valmistamiseen menevä, ainekustannuksista muodostuva rahamäärä on $3\cdot 123+0\cdot 75+2\cdot 96+4\cdot 47$.

- Tulo ***K(RH)*** antaa tuotteiden *A, B* ja *C* materiaalikustannukset (pystyvektorina).

- Tulo ***KR*** antaa tuotteiden *A, B* ja *C* raaka-ainemäärät 3×4-matriisina. Kun tällä kerrotaan hintamatriisi ***H***, ts. muodostetaan tulo ***(KR)H***, saadaan tuotteiden *A, B* ja *C* materiaalikustannukset (pystyvektorina). Siis ***K(RH)*** = ***(KR)H***.

Matriisilaskenta ei noudata kertolaskun vaihdantalakia $AB = BA$ kuten edellä on todettu. Sen sijaan seuraavat laskulait ovat voimassa (ja niistä muut paitsi kaksi viimeistä ovat aika itsestään selviä):

1. $A + B = B + A$ (yhteenlaskun *vaihdantalaki*).
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (yhteenlaskun *liitäntälaki*).
3. Luvulla (skalaarilla) kertomisen lait:

   $t(A + B) = tA + tB, \quad t(uA) = (tu)A = u(tA),$

   $t(AB) = (tA)B = A(tB).$
4. $A(BC) = (AB)C$ (kertolaskun *liitäntälaki*).
5. $A(B + C) = AB + AC$ (kertolaskun *osittelulaki*).

Esim. 6 Jos A ja B ovat samaa tyyppiä olevia neliömatriiseja, niin

$$(2A + 3B)(2A - 3B) = 4A^2 - 6AB + 6BA - 9B^2 .$$

Voit siis laskea muuten samaan tapaan kuin tavallisilla kirjainlausekkeilla, kunhan vain huomaat, että kaksi keskimmäistä termiä –6AB ja 6BA eivät kumoudu.

12.3 Käänteismatriisi ja lineaarinen yhtälöryhmä

Jokaisella luvulla $a \neq 0$ on käänteisluku $a^{-1} (= 1/a)$, jonka perusominaisuus on se, että $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$. Vastaavasti, jos A on neliömatriisi ja $\det A \neq 0$, niin on olemassa sellainen matriisi A^{-1}, että $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ (missä I on ykkösmatriisi). Matriisia A^{-1} sanotaan A:n ***käänteismatriisiksi***.

Käänteismatriisin laskeminen "käsinlaskennalla" on työlästä, varsinkin jos A on 4- tai useampirivinen. Niinpä tällaisissa tapauksissa yleensä turvaudutaan matematiikkaohjelmiin tai matriisilaskentaa osaaviin laskimiin. Esim. *Mathcad*-ohjelmalla laskeminen on seuraavannäköistä:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ -3 & -8 & -4 \end{pmatrix} \quad |A| = -1 \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Mathcadissä $\det A$:n merkkinä on $|A|$). Näytetään nyt, miten käänteismatriisia käytetään hyväksi ***lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisemiseen***.

***Esim.** 7* Ratkaise yhtälöryhmä $\begin{cases} x+3y+2z=0 \\ 2x+5y+3z=1 \\ -3x-8y-4z=2 \end{cases}$ matriisien avulla.

Yhtälöryhmä on matriisimuodossa seuraava (vrt. *Esim. 4*):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ -3 & -8 & -4 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{B} \quad \text{eli lyhyesti} \quad \boxed{\boldsymbol{AX = B.}}$$

Tällainen yhtälö ratkaistaan kertomalla se <u>*vasemmalta*</u> matriisin A käänteismatriisilla A^{-1}:

$$A^{-1}\cdot \Big|\ AX = B$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$IX = A^{-1}B.$$

$$\therefore\ \boxed{\boldsymbol{X = A^{-1}B.}}$$

Tämän nojalla saadaan yhtälöryhmä ratkaistua seuraavasti, kun käytetään hyväksi edellä esitettyä (*Mathcad*-ohjelmalla laskettua) käänteismatriisia:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{B} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \therefore\ \underline{\underline{x=6,\ y=-4,\ z=3.}}$$

*Esitetään vielä yhdellä esimerkillä, ***miten matriisi käännetään "käsinlaskennalla".*** Esim. tietoliikennetekniikassa voidaan tarvita 2-rivisen, kompleksilukualkioisen matriisin käänteismatriisia.

Esim. 8 Matriisin $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ determinantti $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, joten A on *säännöllinen* ($\det A \neq 0$) ja sillä on siis käänteismatriisi. *Muodostetaan ensin matriisi, jonka alkioina ovat* $\det A$:n *alkioiden komplementit* (esim. alkion 2 komplementti saadaan poistamalla ne rivit, joiden risteyskohdassa 2 on ja varustamalla jäljelle jäävä 1-rivinen determinantti $|3| = 3$ miinus-merkillä):

$$\begin{bmatrix} +|4| & -|3| \\ -|2| & +|1| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kun tämä *komplementtien muodostama matriisi* **<u>*transponoidaan*</u>**, millä tarkoitetaan sitä, että vaakarivit muutetaan pystyriveiksi järjestys säilyttäen (1. vr:stä tulee 1. pr jne.), saadaan A:n ns. ***liittomatriisi*** eli ***adjungoitu matriisi***

$$adj(A) = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Voidaan todistaa, että yleisesti $\boxed{\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot adj(A)}}$. Tässä esimerkissä siis

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Tarkista tulos esim. *Mathcad*-ohjelmalla:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

tai kertomalla A ja edellä saatu A^{-1} keskenään.

Yleisesti matriisin A ***transponoitu matriisi*** $\boldsymbol{A^T}$ saadaan siten, että A:n vaakarivit muutetaan pystyriveiksi järjestys säilyttäen, esim.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & -5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Harjoituksia

A

12.1 Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ja $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$. Laske a) $\det A$, b) $A + 3B$, c) AB, d) $(2A)(4B)$, e) $\det(AB)$, f) $\det(2A)$, g) A^2, h) $(A+B)^2$, i) $A^2 + 2AB + B^2$, j) $A^2 + AB + BA + B^2$.

12.2 Laske a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

12.3 Laske a) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$.

12.4 Esitä yhtälöpari $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 3x+4y+5z=3 \end{cases}$ matriisimuodossa (ja perustele esitys).

12.5 *Laske $\det A$, $adjA$, A^{-1} ja $(A^{-1})^2$, kun $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$.

12.6 *Laske "käsin" A^{-1}, kun $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

12.7 *Ratkaise matriiseja käyttäen yhtälöryhmä $\begin{cases} x-y-z=5 \\ -x+y-z=1 \\ -x-y+z=-15 \end{cases}$.

B

12.8 Olkoon $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ja $C=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.
Laske $(A+B)C$ ja $AC+BC$ (kummastakin pitäisi tulla sama tulos).

12.9 Laske $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

12.10 Laske $A-\lambda I_3$, kun $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$. Ratkaise sitten yhtälöstä $\det(A-\lambda I_3)=0$ λ:n arvot. Nämä ovat matriisin A ***ominaisarvot***.

12.11 Laske $\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & a & a^2\\ a & a^2 & 1\\ a^2 & 1 & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 1\end{bmatrix}$.

12.12 *Olkoon $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 3 & 1 & 0\end{bmatrix}$. Laske "käsin" A:n käänteismatriisin 1. vaakarivin alkiot. (Vihje: mikä rivi pitää laskea $adjA$:sta?)

12.13 *Laske matriisin $A=\begin{bmatrix}4 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 0\end{bmatrix}$ käänteismatriisin B alkio b_{21} käsinlaskennalla (mikä alkio pitää laskea $adjA$:sta?).

12.14 Laske A^{-1} jollakin matematiikkaohjelmalla ja ratkaise sitten (käsinlaskennalla) matriisi X yhtälöstä $AX=B$, kun

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix} \text{ ja } B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 4 & 3\\ 1 & -2\end{bmatrix}.$$

12.15 Ratkaise X matriisiyhtälöstä

a) $2(X+3A)-(B-2X)=X-C$, b) $AXB=C$,

kun $A=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 3 & -4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 2 & -4\end{bmatrix}$.

12.16 Määritä matriisin $A=\begin{bmatrix}1+i & i\\ 2i & 1-i\end{bmatrix}$ (missä i = imaginaariyksikkö) käänteismatriisi a) jollakin matematiikkaohjelmalla, *b) käsinlaskennalla.

C

12.17 Osoita esimerkillä, että matriisitulo voi olla = 0-matriisi (ts. sen kaikki alkiot ovat = 0) vaikka kumpikaan tekijöistä ei ole 0-matriisi.

12.18 Pisteeseen (x, y) suoritetaan peräkkäin kaksi muunnosta :

$(x, y) \mapsto (x_1, y_1)$ ja $(x_1, y_1) \mapsto (x_2, y_2)$ yhtälöillä

$$\begin{cases} x_1 = 3x + 5y \\ y_1 = 2x - 4y \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = 4x_1 - 6y_1 \\ y_2 = x_1 + 3y_1 \end{cases}.$$

a) Laske näitä muunnosyhtälöitä käyttäen, miksi pisteeksi (x_2, y_2) muuttuu piste $(x, y) = (2,-1)$.

b) Laske yhdistetyn muunnoksen $(x, y) \mapsto (x_2, y_2)$ yhtälö. Jos olet laskenut oikein, *yhdistetyn muunnoksen kerroinmatriisi on alkuperäisten muunnosten kerrosmatriisien tulo*. Eräs syy, miksi matriisien kertolasku määritellään sillä tavoin kuin edellä on tehty, on juuri tällaisten peräkkäisten lineaaristen muunnosten (eli ***lineaarikuvausten***) yhdistämisessä. Matriisimuodossa yhdistäminen tapahtuu siis seuraavasti:

$$X_1 = AX,\ X_2 = BX_1 \Rightarrow X_2 = B(AX) = (BA)X .$$

c) Laske tässä tapauksessa BA-matriisi. d) Laske muunnoskaavaa $X_2 = (BA)X$ käyttäen pisteen $(x, y) = (2,-1)$ kuvapiste (x_2, y_2).

12.19 Neliömatriisi A on ***ortogonaalinen*** (eli ***ortogonaalimatriisi***), jos sen jokaisen vaakarivivektorin pistetulo itsensä kanssa on 1 ja toisen vaakarivin kanssa on 0. (Samoin on laita pystyrivivektorienkin.) Voidaan todistaa, että ortogonaalimatriisilla (jollainen on esim. koordinaatistonkiertomatriisi) käänteismatriisin muodostaminen on helppoa: $A^{-1} = A^T$ (= A:n transponoitu matriisi). a) Osoita, että seuraava matriisi on ortogonaalinen, b) Laske tämän matriisin käänteismatriisi ja totea, että se on sama kuin transponoitu matriisi:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}; \text{ Toinen ortog. matriisi: } A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vastauksia

(Vastauksissa voi esiintyä virheitä)

Luku 1:

1.1 a) 1/4, 1/2, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, b) 32/11, c) 4096, d) 81/16, e) 16/3, f) 4/27, g) 20/27, h) 19/3, i) 21*a*/8, j) 21/(8a) **1.2** a) r^8, b) u^{20}, c) st^4, d) $-8m^3/k^3$, e) $1/r^2$ **1.3** a) 4/125, b) p^2, c) $33m^2$ **1.4** a) $m^2-2mr+r^2$, b) x^2+4x+4, c) $x^2-4xy+4y^2$, d) $4x^2-1$, e) $2x^2-x-1$, f) $a^3+6a^2+12a+8$ **1.5** a) $(m+n)(m-n)$, b) $(r+2s)(r-2s)$, c) $(x+2)^2$ **1.6** a) $3\sqrt{3}$, b) $10\sqrt{10}$, c) 0,07, d) $\sqrt{3}$, e) 8, f) $8\sqrt{2}/9$, g) $-\sqrt{2}-2$ **1.7** a) $0{,}8\sqrt{a}\cdot s$, b) $2\sqrt[3]{2}$, c) $0{,}01m$, d) 25, e) s^2, f) $3ab^2$, g) $s^2\cdot\sqrt[4]{s}$, h) $2/x$, i) $9\sqrt[3]{3}/2$, j) $\sqrt[3]{65}/2$ (juurta ei saa ottaa summan termeistä erikseen!!), k) $-3rs^2t\sqrt[3]{t}$, l) mahdoton **1.8** 4,37 *cm* **1.9** a) $s^{3/5}$, b) $k^{4/3}$, c) $x^{7/6}$ **1.10** a) $2^{7/12}$ eli $\sqrt[12]{256}$, b) $p^{3/4}$ **1.11** 6,998 (tai 7,00) **1.12** a) a^4b, b) $3x^3$, c) $12x$, d) $27x^3/y$, e) $3x/y$ **1.13** a) $64a^6$, b) 1, c) –1, d) $b-a$ **1.14** a) 4/3, b) 3/10, c) 95 **1.15** a) –1, b) –1, c) 1, d) –1, e) 0 **1.16** a) c^6/a^4, b) $3a^2+8ab-3b^2$ **1.17** a) $(1+n)/2$, b) $1/(v-1)$ **1.18** eksp.$=a+b-(a+b)/(ab)$, sen arvo = 4, lausekkeen arvo = 1/9 **1.19** a) $\sqrt{b^2-a^2}$, b) $6|a|b^4c^2\sqrt{b}$, c) $s+u$ **1.20** a) $\sqrt{3}$, b) $\sqrt{5}+2$, c) $\sqrt{2}/2$, d) $\sqrt{6a}/(9a)$ **1.21** a) $2\sqrt[3]{3}$, b) *xy*, c) $\sqrt[3]{ab^2}$, d) $2tu\sqrt[3]{t}$, e) $\frac{a^2}{b}\cdot\sqrt[n]{b}$ **1.22** $\sqrt[15]{a^4}$ ja $\sqrt{a}/a$ **1.23** a) $1/a^4$, b) $u\sqrt[12]{u}$ **1.24** a) $3\cdot\sqrt[3]{a^2b}$, b) 1 **1.25** $\sqrt[3]{a^2b^2}$.

Luku 2:

2.1 a) $\frac{5}{6a}$, b) $\frac{6}{x^2-9}$, c) $\frac{3}{4u}$, d) $\frac{3-2b}{1+2b}$, e) $-4r-16$, f) $\frac{-6b-c}{bc}$ **2.2** $\frac{2x^2-3x-5}{2x+1}=x-2-\frac{3}{2x+1}$ **2.3** valitse esim. $a=1, b=2, c=3$ **2.4** a) $\frac{x-1}{x+1}$, b) $\frac{r}{r+2}$, c) $\frac{s}{a-3}$ **2.5** a) 12½ , b) 3/4, c) 5/8,

2.6 a) 0 ja 2, b) –2 ja –3, c) 0 ja –5 **2.7** a) $x=\sqrt{2}+1$, b) –4½, c) 5 ja –1, d) $-1\pm\sqrt{3}$ **2.8** a) 0 (toinen juuri –3 ei käy), b) 25/16, c) $x \geq -4/3$, d) $x > -2$, e) $-2 < u \leq 2$ **2.9** a) $2-\sqrt{2}$, b) $3-2\sqrt{2}$, c) $3\sqrt{2}-4$ **2.10** a) $x=7 \vee x=-1$, b) $x=2\vee 0$ (molemmat käyvät), c) ei ratkaisuja (kumpikaan juurista –2 ja 0 ei käy) **2.11** a) $\vee$-muotoinen, origohuippuinen, b) yhden yksikön verran edellistä ylempänä. **2.12** a) $-1 < x < 0$, 

b) $x \geq 2$ tai $x \leq -4$ 

2.13 a) ax^2+bx+c, b) $2b-3a$ **2.14** a) $\dfrac{u-m}{2u+2m}$, b) $\dfrac{y-4}{x}$, c) $\dfrac{2ab}{a^2-b^2}$ **2.15** $(2x-1)^2$, arvo $\approx 20{,}48$ **2.16** a) $x=-1/6$ (käy), b) ei ratk. ($x=2$ ei käy), c) $3\sqrt{2}/5$, d) 22/9 **2.17** $x^2+4y^2+9z^2-4xy+6xz-12yz$ **2.18** a) 3, b) 2, c) $\alpha+\beta$ **2.19** a) $x=4$ ($x=0$ ei käy), b) ei ratk. ($x=3$ ei käy) **2.20** a) $x_1=2, x_2=-1+\sqrt{5}$ (0 ja $-1-\sqrt{5}$ eivät toteuta yhtälöä), b) $x=½$ **2.21** $\vee$-muotoinen, kärki pisteessä (2,6) **2.22** a) $x>1$ tai $x<½$, b) $1/3<x<1$ **2.23** Luvut ovat 5:nnet binomikertoimet.

Luku 3:

3.1 a) $6y=5x$, b) $5/3=2y/x$, c) $3/x=5/(2y) \vee 2y/5=x/3$ **3.2** a) n. 45 mm, 117 mm, 109 mm, b) 536 mm, 1408 mm, 1308 mm, c) n. 101 mm, 264 mm, 245 mm **3.3** n. 29 mm, 88 mm, 58 mm, 146 mm **3.4** T on suoraan verrannollinen l:n neliöjuureen (eli l:n potenssiin ½) ja kääntäen verrannollinen g:n neliöjuureen **3.5** $\dfrac{b'}{12}=\dfrac{5}{8}$ tai yhtä hyvin $\dfrac{b'}{5}=\dfrac{12}{8}$ $\therefore$ b' =7½ . Kun alkaa verrannon b':lla, tarvitaan vain yhden tekijän siirtäminen vp:n nimittäjästä op:n osoittajaan **3.6** a) 20, b) 10000,01 **3.7** Kummastakin saadaan sama yhtälö ristiin kertomalla **3.8** Lisää/vähennä kumpaankin puoleen t (tai kuten edellinen harj.) **3.9** Käännä edellinen tulos (tai kerro ristiin) **3.10** 10, 5, 4 (tai näiden monikerrat).

Luku 4:

4.1 Kaikissa tapauksissa $c=\dfrac{a+b}{2}$ **4.2** a) $C\approx(-0{,}4;1{,}4;0)$, b) vedä jana AB ja xy-tasossa $A'B'$ **4.3** a) paraabeli, joka on muuten kuin perusparaabeli, mutta 2 yksikköä "alempana"; perusparaabelia jyrkemmin nouseva (pienempi, "kapeampi") paraabeli; perusparaabelin kokoinen, mutta alaspäin aukeava ja 1 yksikön ylöspäin nostettu, b) suoria; esim. viimeinen on suora, jonka kulmakerroin on –2 ja joka leikkaa y-akselin kohdassa –3 (sillä kun $x=0$, niin $y=-3$) c) hyperbelejä, vrt. kääntäen verrannollisuus edellisessä luvussa d) ns. kuutioparaabeli ja eräs y-akseliin nähden symmetrinen käyrä **4.4** Ympyrä, jonka kp = (3,–2) ja säde = 4 **4.5** a) 5, b) $\frac{2h}{h-1}$, c) funktio ei ole määritelty tällä x:n arvolla (nimittäjä menee 0:ksi) **4.6** suora $y=2x-1$ ja paraabeli $y=x^2-1$ **4.7** a) $x=4y^2+1$, b) $x=1\pm 2\sqrt{y}$ (kaksi käänteisfunktiota) **4.8** a) $\frac{4h^2-9h-15}{2h^2-12h+10}$, b) –19 **4.9** a) kuten perusparaabeli, mutta huippu on pisteessä (1, 0). *Mj* on koko reaalilukujoukko **R** ja *Aj* on positiivisten reaalilukujen ja 0:n muodostama joukko $\mathbf{R}_0^+$, b) hyperbeli, jonka kp = (2, 0); *Mj* muodostuu kaikista muista reaaliluvuista paitsi luvusta 2, *Aj* muodostuu kaikista muista reaaliluvuista paitsi luvusta 0 **4.10** a) origokeskinen, 3-säteinen ympyrä, b) (2, 1)-keskinen, 3-säteinen ympyrä **4.11** Huippu = (–2, –4) **4.12** Origokeskisen 3-säteisen ympyrän ylempi puolikas **4.13** $h(t_1)=...=h_0$, $h(t_1/2)=h(v_0/g)=...=h_0+\frac{v_0^2}{2g}$ **4.14** c) $T=\frac{pV}{nR}$ **4.15** parillinen: x^2, parittomia: x^3, $1/x$.

Luku 5:

5.1 a) –2, b) 0,483, c) –2/3 **5.2** a) $2x-5y-29=0$, b) $2x-3y-12=0$, c) $x-3y-2=0$ **5.3** 13/4 ja 13/3 **5.4** 2,73° **5.5** $x-3y=9$ **5.6** $\sqrt{5}$ **5.7** $8\frac{1}{4}$ **5.8** $a=1$ **5.9** a) 71,6°, b) 90° **5.10** a) suorat, joilla $k=-2$; $y=-2x+1$, b) suorat, jotka leikkaavat y-akselin kohdassa –4; $x-2y-8=0$ **5.11** $2x+3y-1=0$ **5.12** 3/4 **5.13** 3/5 **5.14** Laske pistetulo **5.15** a) $\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}$ ts. $a:a_1=b:b_1$ b) $a:b:c=a_1:b_1:c_1$ **5.16** $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x+3$ **5.17** (–2,2), (–2,–6).

Luku 6:

6.1 $x=4$, $y=-1$, sekakeino **6.2** (–4,–2) **6.3** a) -1, 1, -3, b) 3, 2, -1 **6.4** 14/5, 8/5 **6.5** a) 24, 6, b) 1, 3, –2 **6.6** 52 ja 10 vuotta

6.7 a) 11/14, –11/2, b) 1/4, 1/3 **6.8** a) yksi ratkaisu 4, –1 (kaksi toisensa leikkaavaa suoraa), b) ei ratkaisua, mikä ilmenee laskuissa siten, että joudutaan muotoa "*0 = jokin 0:sta eroava luku*" olevaan yhtälöön; geom: kaksi yhdensuuntaista suoraa, c) äärettömän monta ratkaisua, mikä näkyy laskettaessa identtisenä yhtälönä "$0=0$". Geom: kyseessä on kaksi samaa suoraa, sillä yhtälöt eroavat toisistaan vain vakiolla kerrottuina. Yhtälöpari muodostuu siis vain yhdestä ehdosta (toinen on sama ehto) $3x+y=1$. Tästä seuraa, että *x*:lle voidaan antaa mikä arvo tahansa ja vastaava *y*:n arvo on $y=1-3x$. Vastaus esitetään yleensä muodossa $\begin{cases} x = \text{mielivaltainen} \\ y = 1-3x \end{cases}$ **6.9** 0,050; 0,20; 2,3 **6.10** a) $\begin{cases} x = z/3 \\ y = 5z/6 \\ z = mielivaltainen \end{cases}$ b) ei ratkaisua, c) $\begin{cases} x = 8 \\ y = 5 \end{cases}$ **6.11** $-1/2,\ 1/3$ **6.12** 0,67 *m/s* ja 4,7 *m/s*^{2}.

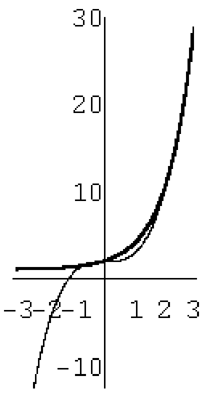
Luku 7:

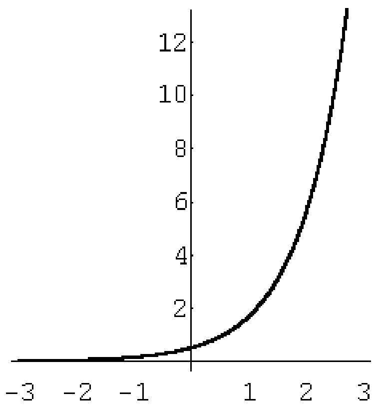
7.1 a) $\pm 5\sqrt{5}$, b) 2½, 0, c) $\dfrac{1\pm\sqrt{a}}{2}$, d) 1, 1½, e) $-1\pm\sqrt{5}$ (vain viimeisessä tarvitaan ratkaisukaavaa) **7.3** (3,–1), $\sqrt{10}$ **7.4** $5\pm 7\sqrt{2}$ **7.5** (3, 8) ja (–2,3) **7.6** a) $(x-2)(x-5)$, b) $(x+2)(2x-1)$ **7.7** $\dfrac{x-3}{x-5}$ **7.8** a) ei leikkaa, b) leikkaa **7.9** $a_1=6, b_1=2$; $a_2=2, b_2=2$. Sivut ovat siis 6 ja 2 **7.10** (4,–2½), $\sqrt{61}/2$ **7.11** a) $a=-9b\pm 4b\sqrt{2}$, b) $b=\dfrac{-9a\pm 4a\sqrt{2}}{49}$ **7.12** $(2r-3s)(r+2s)$ **7.13** a) (4,–3) ja (5, 0), b) $(2a, a)$ ja $(a, 2a)$ **7.14** $\dfrac{3a-2b}{4a-3b}$ **7.15** 2 **7.16** $a_1=-6\frac{1}{5}$, $a_2=-5$ **7.17** $(x+2y-1)(3x-5y+2)$ **7.18** $-1<x<5$ **7.19** a) ±3, $\pm\sqrt{5}$, b) $\pm\sqrt{3}$, c) $\sqrt[3]{9}$, -1 **7.20** $k=2 \vee 10$.

Luku 8:

8.1 a) 37,5 % ja 20 %, b) 4,56 ja 0,035 c) 300 **8.2** n. 4,7 % **8.3** a) n. 11,2 %, b) n 10,1 % **8.4** n. 26 % **8.5** a) 2,5 %-yksikköä b) n.51 % **8.6** 4 % pienennys **8.7** 12 % **8.8** 750 *km* **8.9** 2825, 3192, 3607, 4076, 4606 **8.10** n. 22 % **8.11** 59,5 *mm*, 70,7 *mm*, 84,1 *mm* **8.12** 180,00 € **8.13** a) 30 % , b) 28,2 % **8.14** n. 18,7 % **8.15** n. 28 % (28,2 %) **8.16** 56 500 euroa **8.17** 13 % (13,1 %) **8.18** a) nousu oli 14,7 %, b) osuus väheni 1,37 prosenttiyksikköä.

Luku 9:

9.1 

9.2 

9.3 a) $x = \sqrt[3]{5}$, b) $x = \log_3 5$, c) $x = \lg 5$, d) $x = \ln 5$, e) $x = \log_3 5 - 1$, f) $x = \ln 2{,}5 + 3$ **9.4** 3, 4, 9, 0, 1/5, 2*x*, –4, –3, –1, 1 **9.5** $10^{-6{,}60}$
9.6 a) $\lg x + 3\lg y - \lg z$, b) $\ln a - 3\ln b$, c) $2\log_k(a+2b)$, d) $4\ln(r^2 - s) - \frac{1}{2}\ln s$ **9.7** a) 10, b) 25, c) 6, d) –2, e) 1 **9.8** a) $\ln\frac{u^3}{v^2}$, b) 3, c) $\ln\frac{25\sqrt{3}}{3}$ **9.9** a) $x = \frac{\ln 5}{\ln 3}$ $(\approx 1{,}46)$ (Varo: tämä ***ei ole*** sama kuin $\ln\frac{5}{3}$.), b) $x = \frac{\ln 5}{\ln 10}$, c) $x = \ln 5$, d) $x = \frac{\ln 5}{\ln 3} - 1 = \frac{\ln 5 - \ln 3}{\ln 3} = \frac{\ln(5/3)}{\ln 3}$ (ehkä ensimmäinen muoto on paras), e) $x = \ln 5 - \ln 2 + 3 = \ln 2{,}5 + 3$
9.11 a) –0,2100 (neljän numeron tarkkuudella), b) 0,0204 (3 num. tarkk.)
9.12 a) 3, b) 2/3, c) –3/10 **9.13** a) $2\cdot\sqrt[3]{2}$, b) 8, c) 9, d) $+2\sqrt{3}$, e) 2/3, f) 1/8 **9.14** a) 32, b) $e^3/2$, c) 101, d) 52,5, e) 1/33 **9.15** a) 2, b) 7/12, c) 4, d) 3 **9.16** a) $\frac{\ln 40}{\ln 6}$, b) $\frac{\ln 2}{\ln 3}(=\log_3 2)$
9.17 Kaikki ovat 1. käyrän muunnelmia (peilattu *x*-akselissa tai siirretty alemmas tai oikealle).

9.18 a) $x = 3, y = 2$, b) $x_1 = 100, y_1 = 1/10;\ x_2 = y_2 = 1/10$.

9.19 a) x, b) $9x^2$, c) $x^3 e^{2x}$.

Luku 10:

10.1 b), c), d), e) ja g) **10.2** a) $1+2i$, b) $7-i$, c) $3-i$, d) $3+4i$, e) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$ (eli $\frac{1+3i}{2}$) **10.3** a) $x=\pm 4i$, b) $x=\pm 3\sqrt{3}\,i$, c) $x=\frac{-1\pm 5i}{2}$, d) $x=-3\pm 2\sqrt{2}\,i$, e) $x=\frac{-3\pm 5i}{2}$ **10.4** a) 181, b) $(11000100000)_2$, c) 12225, d) 702367 **10.5** a) $6-5i$, b) 16 + $4i$, c) $4/5+3/5\,i$, d) $(2\sqrt{3}-2)/7+(4+\sqrt{3})i/7$ **10.6** $2^3\cdot 3^4\cdot 17$ **10.7** $-2b/a$
10.8 a) $(110101101)_2$, b) $(100011110)_2$, c) $(AECD)_{16}$, d) $(13467)_8$
10.9 $(272E)_{16}$.

Luku 11:

11.1 37 **11.2** –4 **11.3** –42 **11.4** a) ja b) 120 (päälävistäjäalkioiden tulo), c) –24 **11.5** a) $5\frac{2}{7}$, $-6\frac{3}{7}$, b) -5,16; 5,72
11.6 Neljän määritettävän determinantin arvot: –7, –14, 0 ja 7
11.7 $x:y:z=4:1:(-3)$. Ratkaisuja esim. 4, 1, –3; 8, 2, –6 ja $4\pi, \pi, -3\pi$ **11.8** $x:y:z=1:1:1$ **11.9** $1\pm\sqrt{6}/2$
11.10 $\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=5$ **11.11** vihje: yhden rivin kerroin z saadaan determinantista ulos

11.12 $k=2\Rightarrow\infty$ monta ratk.; $k=-2\Rightarrow$ ei ratk.; muulloin 1 ratk.

11.13 $-a$ **11.14** järjestä 1. determinantin 3. pr:lle nollia ja kehitä se.

Luku 12:

12.1 a) 10, b) $\begin{bmatrix}13 & 7\\ 9 & -11\end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix}0 & 13\\ 20 & -11\end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix}0 & 104\\ 160 & -88\end{bmatrix}$, e) –260, f) 40 (= $4\cdot\det A$, miksi?), g) $\begin{bmatrix}-5 & -10\\ 15 & 10\end{bmatrix}$, h) $\begin{bmatrix}30 & 4\\ 20 & 6\end{bmatrix}$, i) ei ole sama kuin h)-kohta, vaan $\begin{bmatrix}17 & 13\\ 53 & 19\end{bmatrix}$, j) sama kuin h)-kohta.

12.2 a) $\begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 17 & 3 \\ 12 & 17 \end{bmatrix}$, b) mahdoton **12.3** a) $\begin{bmatrix} 30 & 3 & 31 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 24 \\ 27 \\ 4 \end{bmatrix}$,

c) mahdoton

12.4 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

12.5 2, $\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -5/2 & -3/2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, $\frac{1}{4}\cdot\begin{bmatrix} 13 & 9 \\ -12 & -8 \end{bmatrix}$

12.6 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \\ -1 & 1 & 0{,}5 \end{bmatrix}$ **12.7** $x = 7,\ y = 5,\ z = -3$; välituloksia: $\det A = -4$,

$A^{-1} = -\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **12.8** $\begin{bmatrix} 11 & 12 & 7 \\ 1 & 9 & 2 \\ -10 & -10 & 1 \end{bmatrix}$ **12.9** $\begin{pmatrix} -8 & 22 & 31 & -2 \\ 14 & 14 & 17 & 26 \end{pmatrix}$

12.10 $\lambda = 1$ (kaksi muuta ovat imaginaarisia $\approx 0{,}5 \pm 1{,}94i$)

12.11 1-alkioinen matriisi $\begin{bmatrix} (3a^2 - a - 1) \end{bmatrix}$ **12.12** 1/4, –1/4, 1/4

12.13 –3/8 **12.14** $\begin{bmatrix} 1 & -1{,}5 \\ 2 & 6 \\ 2 & 5{,}5 \end{bmatrix}$ **12.15** a) $\begin{bmatrix} -14/3 & 5 \\ -7 & 32/3 \end{bmatrix}$,

b) $\begin{bmatrix} -28/3 & -10/3 \\ -43/6 & -13/6 \end{bmatrix}$ **12.16** $\begin{bmatrix} 0{,}25 - 0{,}25i & -0{,}25i \\ -0{,}5i & 0{,}25 + 0{,}25i \end{bmatrix}$

12.17 Kokeile 2-rivisiä matriiseja, joissa 1 alkio on 1 ja muut = 0