MAT-60206 Matemaattinen analyysi
Periodi 3/2016–2017

Janne Kauhanen

TTY
Matematiikan laitos

Alkusanat

Opintojakson tavoitteena on yhtäältä kehittää matemaattista ajattelua ja todistustekniikkaa yleisesti ja toisaalta käydä huolellisesti läpi eräitä analyysin peruskäsitteitä, kuten raja-arvo, jatkuvuus, derivaatta ja Riemann-integraali. Esitiedoiksi riittävät Matematiikka 1–4 (Insinöörimatematiikka 1–4).

Kurssikirjana on [15], joka on vapaasti ladattavissa. Kurssikirjasta käsitellään lukuja 1–4 soveltuvilta osin. **Tämän monisteen numerointi noudattaa kurssikirjan numerointia** seuraavasti: lukujen otsikointi (1.1, 1.2, ...) ja ”kolminumeroisten” määritelmien ja lauseiden numerointi (Määritelmä 1.1.1, Lause 1.1.2, ...) on kuten kirjassa. Juokseva numerointi (Määritelmä 1, Lause 2, kaava (3), ...) on tämän monisteen sisäinen.

Kurssikirja olettaa alkeisfunktioiden määrittelyt ja perusominaisuudet tunnetuiksi. Näitä kerrataan tämän monisteen liitteissä A.1–A.3.

Kommentteja painovirheistä ja monisteesta yleisemminkin voi lähettää sähköpostitse kirjoittajalle: `janne.kauhanen@tut.fi`.

Sisällys

1 Reaaliluvuista

Tässä luvussa esitellään analyysin ymmärtämisen kannalta tärkeitä reaalilukujen ominaisuuksia ja reaalilukujoukkojen topologiaa.

1.1 Reaaliluvut

Kerrataan reaalilukujen kunta- ja järjestysaksioomat ja esitellään tärkeät uudet reaalilukuihin liittyvät käsite *supremum* ja *infimum*.

Oletetaan, että on olemassa *reaalilukujen joukko* $\mathbb{R}$, joka toteuttaa aksioomat **(A)**–**(I)**. Reaalilukujen x ja y *summa* on reaaliluku, jota merkitään $x+y$ ja *tulo* on reaaliluku, jota merkitään xy. Lisäksi on määritelty *järjestysrelaatio* $<$. Reaalilukujen joukon konstruointia pohditaan tarkemmin monisteen [6] luvuissa 2–9.

(A) $x + y = y + x$ ja $xy = yx$ (vaihdantalait)

(B) $x + (y + z) = (x + y) + z$ ja $x(yz) = (xy)z$ (liitäntälait)

(C) $x(y + z) = xy + xz$ (osittelulaki)

(D) On olemassa luvut 0 ja $1 \in \mathbb{R}$, $0 \neq 1$, siten, että

$$x + 0 = x \quad \text{ja} \quad 1x = x$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

(E) Jokaiselle $x \in \mathbb{R}$ on olemassa luku $-x \in \mathbb{R}$ siten, että

$$x + (-x) = 0,$$

ja jokaiselle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on olemassa luku $1/x \in \mathbb{R}$ siten, että

$$x(1/x) = 1.$$

Aksioomia **(A)**–**(E)** kutsutaan *kunta-aksioomiksi*. Käytetään merkintöjä

$$x - y := x + (-y) \qquad \text{ja} \qquad \frac{x}{y} := x(1/y).$$

Kunta-aksioomista seuraa, että reaalilukujen summa ja tulo toimivat samoin kuin rationaaliluvuille ja tutut laskusäännöt ovat voimassa: voidaan laskea vaikkapa (pohdi, mitä aksioomia ja laskusääntöjä tarvitaan)

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd} \qquad (b, d \neq 0).$$

(F) Jos x ja $y \in \mathbb{R}$, niin täsmälleen yksi seuraavista pätee:

$$x = y, \quad x < y \quad \text{tai} \quad y < x.$$

(G) Jos $x < y$ ja $y < z$, niin $x < z$. (transitiivisuus)

(H) Jos $x < y$, niin

$$x + z < y + z$$

jokaisella $z \in \mathbb{R}$ ja

$$xz < yz$$

jokaisella $z \in \mathbb{R}$, jolle pätee $0 < z$.

Aksioomia **(F)**–**(H)** kutsutaan *järjestysaksioomiksi*. Järjestysreaatiolle käytetään tuttuja merkintöjä: $x > y$ tarkoittaa, että $y < x$ ja merkintä $x \leq y$ tarkoittaa, että $x = y$ tai $x < y$. Järjestysaksioomista seuraa:

Lause 1.1.1, Seuraus 1.1.2 (Kolmioepäyhtälö)**.**

$$||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|. \tag{1}$$

Supremum ja täydellisyysaksiooma

Määritelmä 2. Epätyhjä joukko $S \subset \mathbb{R}$ on *ylhäältä rajoitettu (bounded above)*, jos on olemassa $b \in \mathbb{R}$ siten, että $x \leq b$ kaikilla $x \in S$. Tällöin sanotaan, että b on joukon S *yläraja (upper bound)*. Vastaavasti määritellään *alhaalta rajoitettu joukko (bounded below)* ja *alaraja (lower bound)*. Joukko on *rajoitettu*, jos se on sekä alhaalta rajoitettu että ylhäältä rajoitettu.

Joukon yläraja (alaraja) ei ole yksikäsitteinen, sillä jos b on joukon S yläraja, niin kaikki luvut $c > b$ ovat myös S:n ylärajoja.

Määritelmä 3. Jos joukolla S on yläraja b, joka kuuluu joukkoon S, niin sanotaan, että b on joukon S *suurin luku* eli *maksimi (maximum)*. Vastaavasti määritellään joukon S *pienin luku* eli *minimi (minimum)*.

Voidaan osoittaa, että jos maksimi (minimi) on olemassa, niin se on yksikäsitteinen, ja sitä merkitään $\max S$ ($\min S$).

Esimerkki 4. a) Väli $S = (-\infty, 2)$ on ylhäältä rajoitettu: esimerkiksi $b = 7$ on S:n yläraja. Joukko ei ole alhaalta rajoitettu.
b) Joukko

$$S = \left\{ \frac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

on sekä alhaalta että ylhäältä rajoitettu: ylärajaksi käy 1 (joka on myös joukon S maksimi) ja alarajaksi 0.

Määritelmä 5. Olkoon epätyhjä joukko $S \subset \mathbb{R}$ ylhäältä rajoitettu. Luku $b \in \mathbb{R}$ on joukon S *pienin yläraja (least upper bound)* eli *supremum*, jos

(1) b on S:n yläraja ja

(2) $b \leq c$ jokaiselle joukon S ylärajalle c.

Tällöin merkitään $b = \sup S$.

Supremum on yksikäsitteinen, sillä jos b ja c ovat joukon S supremumeja, niin määritelmän mukaan $b \leq c$ ja $c \leq b$, josta seuraa $b = c$. Siten merkinnän $\sup S$ käyttöönotto on järkevää.

Jos epätyhjä joukko S ei ole ylhäältä rajoitettu, niin voidaan merkitä $\sup S = \infty$.

Jo pelkkä rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ toteuttaa kunta- ja järjestysaksioomat **(A)**–**(H)**, joten mihin tarvitaan reaalilukuja? Kysymys on ylhäältä rajoitetun joukon supremumin olemassaolosta. Supremumin olemassaolo ei seuraa aksioomista **(A)**–**(H)**: ylhäältä rajoitetulla epätyhjällä joukolla $S \subset \mathbb{Q}$ ei välttämättä ole supremumia (ks. esim. 7). Rationaalilukujen joukkoa $\mathbb{Q}$ laajempi reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ sen sijaan toteuttaa seuraavan *täydellisyysaksiooman (completeness axiom)*:

(I) Jokaisella epätyhjällä ylhäältä rajoitetulla reaalilukujoukolla on supremum.

Käytännössä supremumia tutkitaan usein seuraavan lauseen avulla.

Lause 1.1.3. *Olkoon b joukon $S \subset \mathbb{R}$ yläraja. Silloin $b = \sup S$ jos ja vain jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $x \in S$ siten, että $x > b - \epsilon$.*

Todistus. Piirrä ensin kuva vakuuttaaksesi itsesi lauseen järkevyydestä!
"$\Rightarrow$" Olkoon $\epsilon > 0$. Jos olisi $x \leq b - \epsilon$ kaikilla $x \in S$, niin $b - \epsilon < b$ olisi S:n yläraja. Tämä on ristiriita sen kanssa, että b on pienin yläraja. Niinpä $x > b - \epsilon$ jollakin $x \in S$.

"$\Leftarrow$" Vastaavalla tavoin. □

Arkhimedeen lause

Täydellisyysaksioomasta seuraa mm. seuraavat rationaalilukuja koskevat tulokset, joista voidaan käyttää nimitystä *Arkhimedeen lause.*

Lemma 6. *Jokaiselle reaaliluvulle $\epsilon > 0$ on olemassa rationaaliluku r siten, että $0 < r < \epsilon$.*

Todistus. Tarkastellaan joukkoa

$$S = \{n\epsilon : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Oletetaan, että S on ylhäältä rajoitettu. Silloin joukolla S on supremum $b = \sup S$, jolle $n\epsilon \leq b$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Mutta silloin myös $(n+1)\epsilon \leq b$ ja siten $n\epsilon \leq b - \epsilon$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Nyt $b - \epsilon < b$ on joukon S yläraja, mikä on ristiriita sen kanssa, että b on pienin yläraja. Niinpä S ei ole ylhäältä rajoitettu, joten eräällä $n \in \mathbb{N}$ pätee $n\epsilon > 1$, ts. $\epsilon > 1/n \in \mathbb{Q}$. Voidaan siis valita $r = 1/n > 0$. □

Lemma 6 sanoo, että jokaisella välillä $(0, \epsilon)$, $\epsilon > 0$, on rationaaliluku. Lemmasta seuraa:

Lause 1.1.6. *Kahden erisuuren reaaliluvun välissä on aina rationaaliluku, eli rationaalilukujen joukko* $\mathbb{Q}$ *on* tiheä (dense) *reaalilukujen* $\mathbb{R}$ *osajoukko.*

Joukon $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ lukuja (ts. muita reaalilukuja kuin rationaalilukuja) kutsutaan *irrationaaliluvuiksi.*

Esimerkki 7. Tarkastellaan joukkoa

$$S = \{x \in \mathbb{Q} : \ x^2 < 2\}.$$

Osoitetaan, että S:llä ei ole pienintä ylärajaa rationaalilukujen joukossa. Reaalilukujen joukossa S:llä on supremum $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ (oletetaan juurifunktion ominaisuudet tunnetuiksi). $\sqrt{2}$ on kuitenkin irrationaaliluku [9, Thm 12.1]. Olkoon nyt $b \in \mathbb{Q}$. Osoitetaan, että b ei voi olla S:n pienin yläraja:

(1) Jos $b > \sqrt{2}$, niin lauseen 1.1.6 mukaan on olemassa rationaaliluku $c \in (\sqrt{2}, b)$, joten myös $c < b$ on S:n yläraja. b ei siis ole S:n pienin yläraja.

(2) Jos $b < \sqrt{2}$, niin lauseen 1.1.6 mukaan on olemassa rationaaliluku $c \in (b, \sqrt{2})$, joten $c \in S$ eikä b siten ole S:n yläraja.

Infimum

Määritelmä. Olkoon epätyhjä joukko $S \subset \mathbb{R}$ alhaalta rajoitettu. Luku $a \in \mathbb{R}$ on joukon S *suurin alaraja (greatest lower bound)* eli *infimum*, jos

(1) a on S:n alaraja ja

(2) $a \geq c$ jokaiselle joukon S alarajalle c.

Tällöin merkitään $b = \inf S$.

Myös infimum on yksikäsitteinen (perustele samaan tapaan kuin supremumin yksikäsitteisyys). Siten merkinnän $\inf S$ käyttöönotto on järkevää.

Jos epätyhjä joukko S ei ole alhaalta rajoitettu, niin voidaan merkitä $\inf S = -\infty$.

Täydellisyysaksioomasta **(I)** seuraa:

Lause 8. *Jokaisella epätyhjällä alhaalta rajoitetulla reaalilukujoukolla S on infimum.*

Todistus. Tutki joukkoa $T = \{-s : s \in S\}$. □

Lause 1.1.8. *Olkoon a joukon $S \subset \mathbb{R}$ alaraja. Silloin $a = \inf S$ jos ja vain jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $x \in S$ siten, että $x < a + \epsilon$.*

Todistus. Samaan tapaan kuin lause 1.1.3. □

Supremum ja infimum saattavat kuulua S:ään tai eivät. Esimerkissä 4 **a)** $\sup S = 2 \notin S$ ja esimerkissä 4 **b)** $\sup S = 1 \in S$ ja $\inf S = 0 \notin S$.

Lause 9. *Jos joukolla S on suurin luku $\max S$, niin S:llä on myös supremum ja $\max S = \sup S$. Infimumille vastaavasti.*

Supremum ja infimum ovat siis eräänlainen maksimin ja minimin korvike tapauksissa, joissa maksimia tai minimiä ei ole.

1.2 Matemaattinen induktio

Eräs luonnollisten lukujen joukon $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ perusominaisuuksista on:

Lause 1.2.1 (Induktioperiaate)**.** *Olkoon $p(n)$ luonnollista lukua n koskeva väite. Oletetaan, että*

(1) $p(1)$ on tosi ja

*(2) kaikilla $k \in \mathbb{N}$ siitä, että $p(k)$ on tosi (*induktio-oletus*), seuraa että myös $p(k+1)$ on tosi.*

Tällöin $p(n)$ on tosi jokaisella $n \in \mathbb{N}$.

Kohtaa (1) kutsutaan *alkuaskeleeksi* ja kohtaa (2) *induktioaskeleeksi*.

Esimerkki 10. Osoita, että $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Ratkaisu. Todistetaan väite induktiolla.

(1) Alkuaskel. Tapauksesa $n = 1$ väite tulee muotoon

$$1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2},$$

mikä on tosi.

(2) Induktioaskel. Tehdään induktio-oletus, että väite pätee n:n arvolla k, ts.

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

On osoitettava, että tällöin väite pätee myös n:n arvolla $k+1$, ts.

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}.$$

Lasketaan:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) &= (1 + 2 + 3 + \cdots + k) + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 \qquad \text{(induktio-oletus)} \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{k^2 + 3k + 2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

Lause 11 (Bernoullin epäyhtälö)**.** *Jos* $1 + x \geq 0$, *niin*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Todistus. Todistetaan väite induktiolla n:n suhteen.

(1) Alkuaskel. Tapauksesa $n = 1$ väite pätee, sillä $(1+x)^1 \geq 1 + x$.

(2) Induktioaskel. Oletetaan, että $(1+x)^k \geq 1 + kx$. Silloin

$$\begin{aligned} (1+x)^{k+1} &= (1+x)^k(1+x) \\ &\geq (1+kx)(1+x) \\ &= 1 + x + kx + kx^2 \\ &\geq 1 + x + kx \\ &= 1 + (k+1)x. \end{aligned}$$

$\square$

1.3 Reaaliakselin topologiaa

Yleistä joukko-oppia

Annetaan joukolle (naiivi) määritelmä ja kerrataan perusmääritelmiä ja tuloksia.

Määritelmä 12. *Joukko (set)* on kokoelma olioita (joita nimitetään joukon *alkioiksi* tai *jäseniksi* (*element, member*)) siten, että

- joukon alkioista voidaan sanoa, ovatko ne samoja vai eivät, ja
- mistä tahansa oliosta voidaan sanoa, onko se joukon alkio vai ei.

Joukkoja merkitään usein isoilla kirjaimilla $A, B, C, \dots, X, Y, Z$ ja alkioita pienillä kirjaimilla $a, b, c, \dots, x, y, z$. Merkintöjä:

$x = y$	alkiot x ja y ovat samoja,
$x \neq y$	alkiot x ja y eivät ole samoja,
$x \in A$	*x kuuluu joukkoon A*, eli x on A:n alkio,
$x \notin A$	*x ei kuulu joukkoon A*, eli x ei ole A:n alkio,
$A \subset B$	A on B:n *osajoukko*: $x \in A \Rightarrow x \in B$,
$A \not\subset B$	A ei ole B:n osajoukko,
$A = B$	joukot A ja B ovat *samoja*: $x \in A \Leftrightarrow x \in B$ (ts. $A \subset B$ ja $B \subset A$),
$\emptyset$	*tyhjä joukko* eli joukko, joka ei sisällä yhtään alkiota.

Joukkoa, joka ei ole tyhjä joukko, sanotaan *epätyhjäksi*.

Huomautus 13. a) Aina $\emptyset \subset A$ ja $A \subset A$.
b) Väite $A = B$ on usein helpointa todistaa kahdessa osassa: osoitetaan, että $A \subset B$ ja $B \subset A$.
c) Osajoukolle voidaan käyttää myös merkintää $A \subseteq B$. Jos halutaan korostaa, että A on B:n *aito osajoukko*, niin voidaan merkitä $A \subsetneq B$.

Joukko voidaan määritellä esimerkiksi luettelemalla sen alkiot tai ilmaisemalla muutoin joukkoon kuulumisen välttämätön ja riittävä ehto.

Esimerkki 14. a)

$$\{2, 4, 6, 8\} = \{n : \ n = 2k, \ k \in \{1, 2, 3, 4\}\}$$
$$\{2, 4, 6, \dots\} = \{2k : \ k \in \mathbb{N}\}$$

b) $A = \{\{a, b\} : \ a \in \mathbb{R} \text{ ja } b \in \mathbb{R}\}$ on joukko, jonka alkioina ovat kaikki yhden tai kaksi reaalilukua sisältävät joukot (sillä $\{a, a\} = \{a\}$). Nyt esimerkiksi

$$\{1, \pi\} \in A \quad \text{ja} \quad \{\{1\}, \{e, 1/\pi\}\} \subset A.$$

Määritelmä 1.3.1. Joukkojen A ja B *yhdiste (union)* $A \cup B$, *leikkaus (intersection)* $A \cap B$ ja *erotus* $A \setminus B$ määritellään asettamalla

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x : \ x \in A \text{ tai } x \in B\}, \\ A \cap B &= \{x : \ x \in A \text{ ja } x \in B\}, \\ A \setminus B &= \{x \in A : \ x \notin B\}. \end{aligned}$$

Joukot A ja B ovat *erillisiä* eli *pistevieraita (disjoint)*, jos joukoilla ei ole yhteisiä alkioita, ts. $A \cap B = \emptyset$. Jos $A \subset X$, niin joukon A *komplementti (complement)* A^c (tai $\overline{A}$) perusjoukon X suhteen on

$$A^c = X \setminus A = \{x \in X : \ x \notin A\}.$$

Lause 15 (Joukko-operaatioiden laskulakeja)**.** *Olkoot A, B ja C joukkoja. Tällöin*

- $(A^c)^c = A$
- $A \cup B = B \cup A$ *ja* $A \cap B = B \cap A$ *(vaihdantalait)*
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *ja* *(liitäntälait)*
  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *ja* *(osittelulait)*
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ *ja* *(de Morganin lait)*
  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Todistus. Todistetaan 1. osittelulaki. Käytetään määritelmää 1.3.1 ja logiikan päättelysääntöjä:

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ ja } x \in (B \cup C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ ja } (x \in B \text{ tai } x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ ja } x \in B) \text{ tai } (x \in A \text{ ja } x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap B \text{ tai } x \in A \cap C \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

$\square$

Perusjoukot:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} && \text{luonnolliset luvut}\\
&\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} && \text{kokonaisluvut}\\
&\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} :\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z} \text{ ja } n \neq 0\right\} && \text{rationaaliluvut}\\
&\mathbb{R} && \text{reaaliluvut}
\end{aligned}$$

Näille joukoille pätee $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. On sopimuskysymys, kuuluuko 0 joukkoon $\mathbb{N}$ vai ei, minkä vuoksi käytäntö tulee kunkin tekstin yhteydessä tarkastaa. Lisäksi positiivisille ja negatiivisille kokonaisluvuille käytetään yleisesti merkintöjä $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ja $\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, \ldots\}$.

Jos $a \in \mathbb{R}$ ja $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, niin määritellään *rajoitetut välit*

$$\begin{aligned}
(a, b) &= \{x \in \mathbb{R} :\ a < x < b\} && \text{avoin väli}\\
[a, b] &= \{x \in \mathbb{R} :\ a \leq x \leq b\} && \text{suljettu väli}\\
(a, b] &= \{x \in \mathbb{R} :\ a < x \leq b\} && \text{puoliavoin väli}\\
[a, b) &= \{x \in \mathbb{R} :\ a \leq x < b\} && \text{puoliavoin väli}
\end{aligned}$$

ja *puolirajoitetut välit*

$$\begin{aligned}
(a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} :\ x > a\} && \text{avoin väli}\\
[a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} :\ x \geq a\} && \text{suljettu väli}\\
(-\infty, b) &= \{x \in \mathbb{R} :\ x < b\} && \text{avoin väli}\\
(-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} :\ x \leq b\} && \text{suljettu väli}
\end{aligned}$$

Edelleen voidaan kirjoittaa $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

Määritelmä 16. Joukko A on *äärellinen (finite)*, jos $A = \emptyset$ tai joukossa A on äärellisen monta alkiota. Muussa tapauksessa joukko A on *ääretön (infinite)*.

Esimerkki 17. a) Joukko $\{1, 3, 5, 7\}$ on äärellinen.
b) Joukko $\{2, 4, 6, \ldots\}$ on ääretön.
c) Joukko $(1, 2]$ on ääretön.

Määritelmä 18. Ääretön joukko A on *numeroituvasti ääretön (countably infinite)*, jos on olemassa bijektio $f\colon A \to \mathbb{N}$, ts. joukon A alkiot voidaan numeroida

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\} \qquad (a_i \neq a_j,\ \text{kun } i \neq j).$$

Muutoin A on *ylinumeroituva (uncountable)*.

Joukot voidaan asettaa ”suuruusjärjestykseen” äärellinen, numeroituvasti ääretön ja ylinumeroituva. Tarkempi *mahtavuuden* käsitteen määrittely sivuutetaan.

Edellisen esimerkin äärettömistä joukoista $\{2, 4, 6, \ldots\}$ on numeroituva, sillä esimerkiksi $f\colon \{2, 4, 6, \ldots\} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n/2$, on bijektio. Sen sijaan $(1, 2]$ on ylinumeroituva:

Lause 19. *Reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ ja jokainen sen väli on ylinumeroituva.*

Todistus. Riittää osoittaa, että väli $(0, 1)$ on ylinumeroituva. Epäsuora todistus: oletetaan vastoin väitettä, että kyseinen väli on numeroituva, eli on olemassa jono (a_n), $n \in \mathbb{N}$, jonka alkioiden muodostama joukko sisältää välin $(0, 1)$. Esitetään jokainen a_n desimaalilukuna:

$$a_n = 0{,}b_{n1}b_{n2}b_{n3}\ldots, \qquad \text{missä } b_{nm} \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}.$$

Määritellään nyt (desimaali)luku $x = 0{,}x_1x_2x_3\ldots$ asettamalla

$$x_n = \begin{cases} 1, & \text{jos } b_{nn} \neq 1, \\ 2, & \text{jos } b_{nn} = 1. \end{cases}$$

$x \neq a_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, sillä x eroaa luvusta a_1 ensimmäisen desimaalin osalta, luvusta a_2 toisen desimaalin osalta jne. ja lisäksi tyypin $a_n = 0{,}1999\ldots = 0{,}2000\ldots = x$ tapausta ei voi esiintyä (koska x:n desimaalikehitelmässä on vain ykkösiä ja kakkosia). Niinpä $x \in (0, 1)$, mutta ei ole mikään jonon (a_n) termeistä. Tämä ristiriita todistaa väitteen. □

Todistuksen ideaa kutsutaan *Cantorin diagonaaliargumentiksi*; jos desimaaleista b_{nm} muodostetaan matriisi, niin luvun x desimaalit löydetään matriisin diagonaalialkioita tutkimalla.

Joukkoperhe

Yleistetään yhdiste ja leikkaus yleisille joukkoperheille.

Määritelmä 20. Olkoon I epätyhjä joukko ja liittyköön jokaiseen $\alpha \in I$ joukko A_α. Joukkoa I kutsutaan *indeksijoukoksi* ja joukkojen A_α joukkoa $\{A_\alpha \colon \alpha \in I\}$ *joukkoperheeksi*. Joukkoperheen $\{A_\alpha \colon \alpha \in I\}$ *yhdiste* on

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha := \{x : \ x \in A_\alpha \text{ jollakin } \alpha \in I\}$$

ja *leikkaus*

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha := \{x : \ x \in A_\alpha \text{ kaikilla } \alpha \in I\}\,.$$

Indeksijoukko I voi olla äärellinen, numeroituvasti ääretön tai ylinumeroituva.

Kurssikirjassa [15] joukkoperheen $\{A_\alpha\colon \alpha \in I\}$ yhdisteelle ja erotukselle käytetään (hieman harhaanjohtavia) merkintöjä $\cup\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ ja $\cap\{A_\alpha : \alpha \in I\}$.

Esimerkki 21. Olkoon $A_\alpha = (-\alpha, \alpha)$, $\alpha \in (0,1) = I$. Tällöin

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = (-1,1) \qquad \text{ja} \qquad \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{0\}.$$

Äärellisen indeksijoukon $I = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ tapauksessa merkitään

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \qquad \text{ja} \qquad \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

Äärettömän indeksijoukon $I = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ tapauksessa merkitään

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \qquad \text{ja} \qquad \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Lauseen 15 tuloksia voidaan yleistää joukkoperheille $\{A_\alpha\colon \alpha \in I\}$ ja $\{B_\beta\colon \beta \in J\}$ seuraavasti: *osittelulait*

$$\boxed{\Big(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\Big) \cap \Big(\bigcup_{\beta \in J} B_\beta\Big) = \bigcup_{(\alpha,\beta) \in I \times J} (A_\alpha \cap B_\beta)} \tag{22}$$

ja

$$\boxed{\Big(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\Big) \cup \Big(\bigcap_{\beta \in J} B_\beta\Big) = \bigcap_{(\alpha,\beta) \in I \times J} (A_\alpha \cup B_\beta)} \tag{23}$$

sekä *de Morganin lait*

$$\boxed{\Big(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\Big)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c} \qquad \text{ja} \qquad \boxed{\Big(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\Big)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c.} \tag{24}$$

Avoimet ja suljetut joukot

Määritelmä 1.3.2. Jos $a \in \mathbb{R}$ ja $\epsilon > 0$, niin väli $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ on a:n *ϵ-ympäristö (ϵ-neighborhood)*. Jos $a \in S$ ja S sisältää jonkin a:n ϵ-ympäristön, niin a on S:n *sisäpiste (interior point)*. Joukon S sisäpisteiden joukkoa kutsutaan S:n *sisukseksi (interior)* ja merkitään yleensä $\mathrm{int}(S)$ (kurssikirjassa S^0).

Jos joukon $S \subset \mathbb{R}$ jokainen piste on S:n sisäpiste, niin S on *avoin (open)*.
Joukko $S \subset \mathbb{R}$ on *suljettu (closed)*, jos S^c on avoin.

Esimerkki 25. a) Avoin väli (a,b) on avoin joukko: Jos $c \in (a,b)$, niin valitaan $\epsilon > 0$ siten, että $\epsilon \leq \min\{c-a, b-c\}$. Tällöin $(c-\epsilon, c+\epsilon) \subset (a,b)$.
b) Vastaavaan tapaan nähdään, että myös välit $(-\infty, a)$ ja (a, ∞) ovat avoimia joukkoja.
c) Suoraan määritelmästä seuraa, että $\mathbb{R}$ on avoin, ja siten tyhjä joukko $\emptyset = \mathbb{R}^c$ on suljettu. Mutta $\emptyset$ on myös avoin, koska sen kaikille pisteille (joita ei ole ollenkaan) pätee avoimuuden ehto. Niinpä $\mathbb{R} = \emptyset^c$ on myös suljettu. Siten $\emptyset$ ja $\mathbb{R}$ ovat sekä avoimia että suljettuja.

Lause 1.3.3.

(1) *Avointen joukkojen* $A_\alpha \subset \mathbb{R}$ *yhdiste* $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ *on avoin mille tahansa (myös äärettömälle) indeksijoukolle* I.

(2) *Äärellisen monen avoimen joukon* $A_1, \ldots, A_n \subset \mathbb{R}$ *leikkaus* $\bigcap_{i=1}^n A_i$ *on avoin.*

(3) *Suljettujen joukkojen* $A_\alpha \subset \mathbb{R}$ *leikkaus* $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ *on suljettu mille tahansa (myös äärettömälle) indeksijoukolle* I.

(4) *Äärellisen monen suljetun joukon* $A_1, \ldots, A_n \subset \mathbb{R}$ *yhdiste* $\bigcup_{i=1}^n A_i$ *on suljettu.*

Todistus. (1) Olkoon $a \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. Silloin $a \in A_\beta$ jollakin $\beta \in I$. Koska A_β on avoin, niin on olemassa $\epsilon > 0$ siten, että

$$(a-\epsilon, a+\epsilon) \subset A_\beta \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha.$$

(2) Olkoon $a \in \bigcap_{i=1}^n A_i$. Silloin $a \in A_i$ jokaisella $i = 1, \ldots, n$. Koska jokainen A_i on avoin, on kullakin i olemassa $\epsilon_i > 0$ siten, että $(a-\epsilon_i, a+\epsilon_i) \subset A_i$. Valitaan $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\} > 0$. Silloin $(a-\epsilon, a+\epsilon) \subset A_i$ jokaisella i, joten $(a-\epsilon, a+\epsilon) \subset \bigcap_{i=1}^n A_i$.
(3) de Morganin lain (24) mukaan

$$\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c.$$

Koska jokainen A_α^c on määritelmän 1.3.2 mukaan avoin, niin kohdan (1) nojalla $\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c$ on myös avoin, ja siten $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ on suljettu.
(4) Seuraa samaan tapaan kohdasta (2). $\square$

Esimerkki 26. **a)** Suljettu väli $[a, b]$ on suljettu joukko, sillä sen komplementti $[a, b]^c = (-\infty, a) \cup (a, \infty)$ on kahden avoimen joukon yhdisteenä avoin.
b) Vastaavaan tapaan nähdään, että myös välit $(-\infty, a]$ ja $[a, \infty)$ ovat suljettuja joukkoja.
c) Puoliavoin väli $(a, b]$ ei ole avoin eikä suljettu: väli ei ole avoin, koska selvästikään $b \in (a, b]$ ei ole välin sisäpiste. Toisaalta komplementtikaan $(a, b]^c = (-\infty, a] \cup (b, \infty)$ ei ole avoin, koska a ei ole sen sisäpiste. Siten $(a, b]$ ei ole suljettu.

Joukko siis voi olla sekä avoin että suljettu (esimerkki 25 **c)**), tai voi olla, että se ei ole kumpaakaan (26 **c)**).

Esimerkki 27. Lauseen 1.3.3 kohdat (2) ja (4) eivät päde äärettömän monelle joukolle. Esimerkiksi

$$[0, 1] = \bigcap_{i=1}^{\infty} (-1/i, 1 + 1/i),$$

eli avointen joukkojen leikkaus ei olekaan avoin. Keksi vastaava esimerkki kohtaan (4).

Määritelmä 28.

$$\begin{aligned}(a - \epsilon, a + \epsilon) \setminus \{a\} &= \{x \in \mathbb{R} :\ 0 < |a - x| < \epsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} :\ a - \epsilon < x < a \text{ tai } a < x < a + \epsilon\}\end{aligned}$$

on a:n *punkteerattu ϵ-ympäristö (deleted ϵ-neighborhood).*

Määritelmä 1.3.4. Olkoon $S \subset \mathbb{R}$.

(1) $a \in \mathbb{R}$ on S:n *kasautumispiste (limit point)*, jos jokainen a:n punkteerattu ympäristö sisältää S:n pisteen, ts.

$$((a-\epsilon, a) \cup (a, a+\epsilon)) \cap S \neq \emptyset$$

kaikilla $\epsilon > 0$. Määritelmä vaatii siis, että mielivaltaisen lähellä pistettä a on muitakin S:n pisteitä kuin a. Pisteen a ei tarvitse olla joukossa S.

(2) a on S:n *reunapiste (boundary point)*, jos jokainen a:n ympäristö sisältää sekä S:n että S^c:n pisteen, ts. $(a-\epsilon, a+\epsilon) \cap S \neq \emptyset$ ja $(a-\epsilon, a+\epsilon) \cap S^c \neq \emptyset$ kaikilla $\epsilon > 0$. Kaikkien S:n reunapisteiden muodostamaa joukkoa merkitään ∂S ja kutsutaan S:n *reunaksi (boundary)*. S:n *sulkeuma (closure)* on joukko $\overline{S} = S \cup \partial S$.

(3) a on S:n *ulkopiste (exterior point)*, jos jokin a:n ympäristö ei sisällä S:n pisteitä, ts. $(a-\epsilon, a+\epsilon) \cap S = \emptyset$ jollakin $\epsilon > 0$. Kaikkien S:n ulkopisteiden muodostamaa joukkoa merkitään $\operatorname{ext}(S)$.

Esimerkki 29. a) Välin $(a, b]$ kasautumispisteiden joukko on $[a, b]$.
b) Joukon

$$S = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

ainoa kasautumispiste on 0.

Esimerkki 30. Olkoon $S = [1, 2) \cup (3, 4)$.
a) S:n reuna koostuu neljästä pisteestä: $\partial S = \{1, 2, 3, 4\}$.
b) S:n ulkopisteiden joukko on $\operatorname{ext}(S) = (-\infty, 1) \cup (2, 3) \cup (4, \infty)$.
c) S:n sisäpisteiden joukko on $\operatorname{int}(S) = (1, 2) \cup (3, 4)$.

Lause 31. *Olkoon $S \subset \mathbb{R}$.*

(1) *Sisus* $\operatorname{int}(S)$ *on avoin ja sulkeuma* $\overline{S}$ *on suljettu.*

(2) $\operatorname{int}(S) \subset S \subset \overline{S}$.

Lause 1.3.6. *Joukko $S \subset \mathbb{R}$ on suljettu jos ja vain jos se sisältää kaikki kasautumispisteensä.*

Todistus. ”$\Rightarrow$” Oletetaan, että S on suljettu. Olkoon a S:n kasautumispiste. Jos $a \notin S$, niin $a \in S^c$. Koska S^c on avoin, niin tällöin eräällä $\epsilon > 0$ on $(a-\epsilon, a+\epsilon) \subset S^c$, ts. $(a-\epsilon, a+\epsilon) \cap S = \emptyset$. Tämä on ristiriita sen kanssa, että a on S:n kasautumispiste. Täytyy siis olla $a \in S$.

"$\Leftarrow$" Oletetaan, että S sisältää kaikki kasautumispisteensä. Olkoon nyt $a \in S^c$. Oletuksen mukaan a ei ole S:n kasautumispiste, joten eräällä $\epsilon > 0$ on $(a-\epsilon, a+\epsilon) \cap S = \emptyset$ (koska $a \notin S$) ja siten $(a-\epsilon, a+\epsilon) \subset S^c$. Niinpä S^c on avoin ja siten S suljettu. □

Esimerkki 32. Joukon
$$S = \left\{\frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N}\right\}$$
ainoa kasautumispiste on $0 \notin S$, joten S ei ole suljettu. Sen sijaan joukko $S \cup \{0\}$ on suljettu.

Vastaavalla tavoin nähdään:

Lause 33. *Joukko $S \subset \mathbb{R}$ on suljettu jos ja vain jos $\partial S \subset S$ (ts. S sisältää kaikki reunapisteensä).*

Tästä lauseesta seuraa, että S on suljettu jos ja vain jos $S = \overline{S}$.

Avoin peite

Määritelmä 34. Avoimista joukoista $H_\alpha \subset \mathbb{R}$, $\alpha \in I$, koostuva joukkoperhe $\mathcal{H} = \{H_\alpha \colon \alpha \in I\}$ on joukon $S \subset \mathbb{R}$ *avoin peite (open covering)*, jos
$$S \subset \bigcup_{\alpha \in I} H_\alpha.$$
Toisin sanoen vaaditaan, että S "peittyy" joukkojen H_α yhdisteellä. Jos tällöin $J \subset I$ ja $\widetilde{\mathcal{H}} = \{H_\alpha \colon \alpha \in J\}$ on edelleen S:n avoin peite, niin $\widetilde{\mathcal{H}}$ on peitteen $\mathcal{H}$ *alipeite*. Toisin sanoen vaaditaan, että $\widetilde{\mathcal{H}} \subset \mathcal{H}$ ja S peittyy jo niillä joukoilla H_α, jotka ovat perheessä $\widetilde{\mathcal{H}}$.

Lause 1.3.7 (Heine–Borel)**.** *Olkoon $S \subset \mathbb{R}$ suljettu ja rajoitettu. Silloin jokaisella S:n avoimella peitteellä on äärellinen alipeite.*

Heinen ja Borelin lause on jatkuvien funktioiden teorian kulmakivi myös yleisemmin $\mathbb{R}^n$:ssä. Kurssikirjassa [15] todistetaan Heinen ja Borelin lause ja käytetään sitä Bolzanon ja Weierstrassin lauseen ja jatkuvien funktioden keskeisimmistä ominaisuuksista kertovien lauseiden 2.2.8, 2.2.9 ja 2.2.12 todistamiseen. Tässä monisteessa nämä lauseet todistetaan suoremmin täydellisyysaksioomaan nojaten.

Heinen ja Borelin lause ja Bolzanon ja Weierstrassin lause kertovat $\mathbb{R}$:ssä joukon *kompaktisuudesta* ja ovat oleellisesti saman ominaisuuden eri ilmenemismuotoja [1]. Bolzanon ja Weierstrassin lause on näistä hieman konkreettisempi: koeta sijoittaa välille $[0, 1]$ äärettömän monta pistettä niin, että ei tule kasautumispisteitä. Onnistuuko?

Lause 1.3.8 (Bolzano–Weierstrass). *Jokaisella rajoitetulla ja äärettömällä joukolla $S \subset \mathbb{R}$ on kasautumispiste.*

Todistus. Koska S on rajoitettu, niin S sisältyy johonkin suljettuun väliin $I = [a, b]$. Jaetaan väli I puoliksi kahteen suljettuun väliin. Näistä vähintään toisessa on äärettömän monta S:n pistettä. Merkitään tätä väliä I_1:llä. Jatkamalla puolittamista induktiivisesti saadaan välit $I_k = [a_k, b_k]$, $I \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots$, joille pätee:

(1) $S \cap I_k$ on ääretön jokaisella $k \in \mathbb{N}$ ja

(2) välin pituus $b_k - a_k = (b - a)2^{-k} \to 0$, kun $k \to \infty$.

Välien päätepisteiden muodostamat joukot $\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ ja $\{b_k : k \in \mathbb{N}\}$ ovat rajoitettuja, joten täydellisyysaksiooman mukaan niillä on infimum ja supremum. Konstruktiosta seuraa, että

$$\inf\{b_k : k \in \mathbb{N}\} = \sup\{a_k : k \in \mathbb{N}\} =: c$$

ja

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k = \{c\}.$$

Osoitetaan, että c on S:n kasautumispiste. Olkoon $\epsilon > 0$. Riittävän suurella k on $I_k \subset (c - \epsilon, c + \epsilon)$, joten välillä $(c - \epsilon, c + \epsilon)$ on kohdan (1) mukaan S:n piste, joka ei ole c. $\square$

2 Yhden muuttujan funktion differentiaalilaskentaa

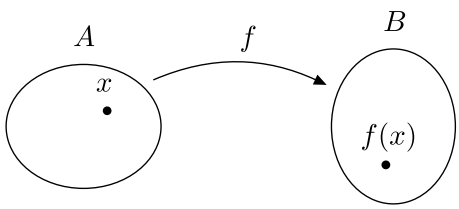
2.1 Funktio ja raja-arvo

Kerrataan aluksi funktion määritelmä ja peruskäsitteitä, kuten yhdistetty funktio, käänteisfunktio ja monotonisuus. *Alkeisfunktioiden* (potenssi- ja juurifunktiot, eksponentti- ja logaritmifunktiot sekä trigonometriset funktiot ja niiden käänteisfunktiot) määrittelyt ja perusominaisuudet oletetaan tunnetuiksi. Näitä kerrataan liitteissä A.1–A.3.

Funktio

Annetaan funktiolle kevyt (mutta analyysin kannalta täysin riittävä) määritelmä ilman relaation käsitettä ja kerrataan funktioon liittyviä peruskäsitteitä.

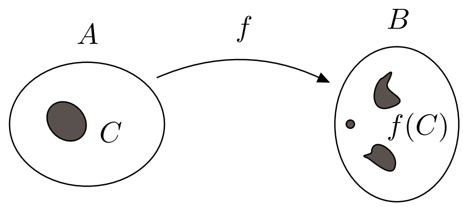
Määritelmä 35. Olkoot A ja B epätyhjiä joukkoja. *Funktio* eli *kuvaus (function, mapping)* $f: A \to B$ on olio, joka liittää jokaiseen *määrittelyjoukon (domain)* A alkioon x täsmälleen yhden *maalijoukon* B alkion y, jota merkitään $y = f(x)$. Määrittelyjoukon alkiota x kutsutaan *argumentiksi* ja vastaavaa maalijoukon alkiota $f(x)$ *kuvaksi* tai *arvoksi (value)*.

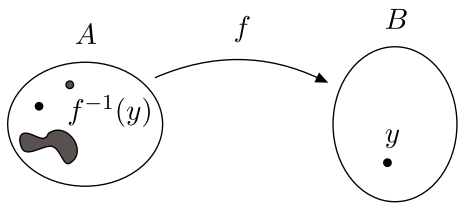


Eräitä peruskäsitteitä:

- Joukon $C \subset A$ *kuvajoukko* on $f(C) = \{f(x) : \ x \in C\}$.
- Joukko $f(A)$ on f:n *arvojoukko (range)*.
- Alkion $y \in B$ *alkukuva* on $f^{-1}(y) = \{x \in A : \ f(x) = y\}$.
- Joukon $D \subset B$ *alkukuva* on $f^{-1}(D) = \{x \in A : \ f(x) \in D\}$.

$f^{-1}(y)$ luetaan ”f miinus 1 y”.





joukon C kuvajoukko alkion y alkukuva

f:n määrittelyjoukkoa merkitään M_f tai D_f ja arvojoukkoa A_f tai R_f. Määritellään, että funktio $f\colon A \to B$ on

- *injektio (injection, one-to-one function)*, jos f kuvaa eri alkiot eri alkioiksi eli $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, tai yhtäpitävästi $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$,
- *surjektio (surjection, f maps A onto B)*, jos f:n arvojoukko on koko maalijoukko eli $f(A) = B$,
- *bijektio (bijection, "one-to-one and onto")*, jos f on sekä injektio että surjektio.

Huomataan, että $f\colon A \to B$ on

- injektio jos ja vain jos jokaista $y \in B$ vastaa korkeintaan yksi $x \in A$ siten, että $f(x) = y$,
- surjektio jos ja vain jos jokaista $y \in B$ vastaa vähintään yksi $x \in A$ siten, että $f(x) = y$,
- bijektio jos ja vain jos jokaista $y \in B$ vastaa täsmälleen yksi $x \in A$ siten, että $f(x) = y$.

Sovelluksissa määrittely- ja maalijoukkoja ei yleensä erikseen mainita, vaan ilmoitetaan vain funktion lauseke. Tällöin määrittelyjoukko ymmärretään mahdollisimman laajaksi.

Esimerkki 36. Funktion $f((x,y)) = f(x,y) = \sqrt{x+y}$ määrittelyjoukko on $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x + y \geq 0\}$, eli xy-tason suora $y = x$ ja sen yläpuolella olevat $\mathbb{R}^2$:n pisteet. Maalijoukoksi voidaan valita $B = \mathbb{R}$. Alkion 1 alkukuva on

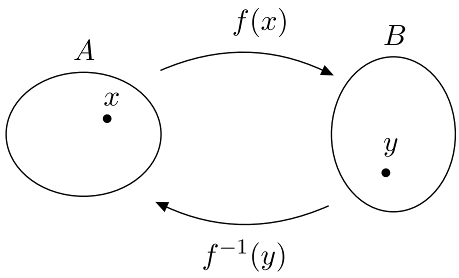
$$f^{-1}(1) = \{(x,y) \in A : \ x + y = 1\},$$

ts. suora $y = 1 - x$. f ei siten ole injektio. $f\colon A \to B$ ei ole myöskään surjektio, sillä esimerkiksi alkiolle $-2 \in B$ on $f^{-1}(-2) = \emptyset$.

f:n arvojoukko on $[0,\infty)$, sillä aina $f(x,y) \geq 0$ ja toisaalta jokaiselle $z \in [0,\infty)$ voidaan valita $x = z$ ja $y = 0$, jolloin $f(x,y) = z$. Niinpä tulkittaessa f funktiona $f\colon A \to [0,\infty)$ olisi f surjektio.

Edellä todettiin, että $f\colon A \to B$ on bijektio jos ja vain jos jokaista $y \in B$ vastaa täsmälleen yksi $x \in A$ siten, että $f(x) = y$. Tämä vastaavuus määrittelee *käänteisfunktion (inverse function)*

$$f^{-1}\colon B \to A,\ f^{-1}(y) = x.$$



Funktiolle ja sen käänteisfunktiolle siis pätee

$$\boxed{y = f(x) \ \Leftrightarrow\ x = f^{-1}(y)} \tag{37}$$

ja

$$\boxed{f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{ja} \quad f(f^{-1}(y)) = y} \tag{38}$$

kaikilla $x \in A$ ja kaikilla $y \in B$.

Esimerkki 39. Osoita, että funktio $f\colon [0, \infty) \to [1, \infty),\ f(x) = x^2 + 1$ on bijektio ja määritä käänteisfunktion lauseke.
Ratkaisu. Olkoon $y \in [1, \infty)$. Tällöin

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow x^2 + 1 = y \\ &\Leftrightarrow x^2 = y - 1\ (\geq 0) \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{y-1} \ \text{ tai } \ x = -\sqrt{y-1} \end{aligned}$$

On siis olemassa täsmälleen yksi $x \in [0, \infty)$ siten, että $f(x) = y$. Niinpä f on bijektio, ja käänteisfunktio on

$$f^{-1}\colon [1, \infty) \to [0, \infty),\ f^{-1}(y) = \sqrt{y-1}.$$

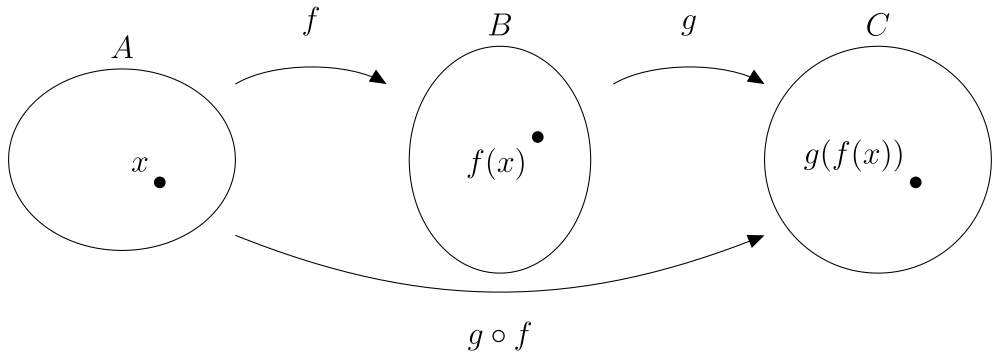
Tarkastetaan vielä yhtälöt (38):

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(y)) &= (\sqrt{y-1})^2 + 1 = (y-1) + 1 = y \\ f^{-1}(f(x)) &= \sqrt{(x^2+1) - 1} = \sqrt{x^2} = |x| = x \end{aligned}$$

Määritelmä 2.2.6. Jos $f\colon A \to B$ ja $g\colon B \to C$ ovat funktioita, niin määritellään *yhdistetty funktio (composite function, composition)* $g \circ f\colon A \to C$ asettamalla

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Funktiota f sanotaan *sisäfunktioksi* ja funktiota g *ulkofunktioksi*. Sulut voidaan jättää poiskin $g \circ f$:n ympäriltä ja merkitä $(g \circ f)(x) = g \circ f(x)$. $g \circ f$ luetaan ”g pallo f”.



Esimerkki 40. Olkoon

$$\begin{aligned} &f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x_1, x_2) = (x_1^2, x_1x_2, x_1 + 1) \text{ ja} \\ &g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3. \end{aligned}$$

Tällöin voidaan muodostaa yhdistetty funktio $g \circ f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$(g \circ f)(x_1, x_2) = g(f(x_1, x_2)) = g(x_1^2, x_1x_2, x_1 + 1) = x_1^2 \cdot x_1x_2 \cdot (x_1 + 1),$$

mutta $f \circ g$ ei ole määritelty.

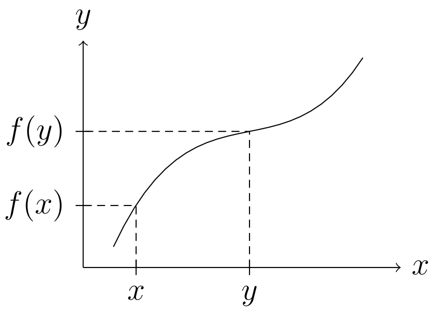
Monotoniset funktiot

Edellä tutkittiin yleisiä funktioita minkä tahansa epätyhjien joukkojen A ja B välillä. Tarkastellaan seuraavassa yhden muuttujan reaaliarvoisia funktioita $f\colon A \to \mathbb{R}$, missä $A \subset \mathbb{R}$.

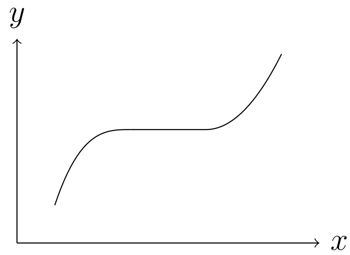
Määritelmä 41. Olkoon $f\colon A \to \mathbb{R}$ $(A \subset \mathbb{R})$. Jos kaikilla x ja $y \in A$

- $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$, niin f on *kasvava (increasing, nondecreasing)*,
- $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$, niin f on *aidosti kasvava ((strictly) increasing)*,
- $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$, niin f on *vähenevä (decreasing, nonincreasing)*,
- $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$, niin f on *aidosti vähenevä ((strictly) decreasing)*.

Funktiota, joka on kasvava tai vähenevä, sanotaan *monotoniseksi (monotone)*. Vastaavasti aidosti kasvavaa tai aidosti vähenevää funktiota sanotaan *aidosti monotoniseksi (strictly monotone)*.



aidosti kasvava funktio



kasvava funktio

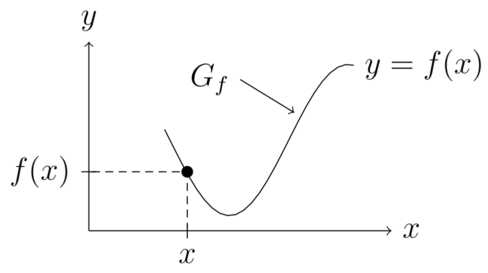
Lause 42. *Aidosti monotoninen funktio $f\colon A \to \mathbb{R}$ $(A \subset \mathbb{R})$ on injektio.*

Todistus. Jos $x \neq y$, niin $x < y$ tai $y < x$. Siten $f(x) < f(y)$ tai $f(y) < f(x)$, erityisesti $f(x) \neq f(y)$. $\square$

Funktiosta $f\colon A \to B$ saadaan aina surjektio, jos maalijoukoksi muutetaan arvojoukko, ts. tarkastellaan funktiota $f\colon A \to f(A)$. Niinpä arvojoukkoa muuttamalla mistä tahansa injektiosta saadaan myös surjektio ja siten bijektio. Esimerkiksi injektiolla $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 1$ ei ole käänteisfunktiota, sillä f ei ole surjektio, mutta funktiolla $f\colon [0,\infty) \to [1,\infty),\ f(x) = x^2 + 1$ on. Tässä mielessä lause 42 sanoo, että aidosti monotonisella reaalifunktiolla on käänteisfunktio.

Määritelmä 43. Funktion $f\colon A \to \mathbb{R}$ $(A \subset \mathbb{R})$ *kuvaaja* eli *graafi (graph)* on tasojoukko

$$G_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in A\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in A,\ y = f(x)\}.$$



Lause 44. *Jos funktiolla f on käänteisfunktio f^{-1}, niin f:n ja f^{-1}:n kuvaajat ovat peilikuvia suoran $y = x$ suhteen.*

Todistus. Käytetään kuvaajille standardimerkintöjä G_f ja $G_{f^{-1}}$. Pisteen (x, y) peilikuva suoran $y = x$ suhteen on (y, x), joten on osoitettava, että $(x, y) \in G_f$ jos ja vain jos $(y, x) \in G_{f^{-1}}$.
"$\Rightarrow$" Jos $(x, y) \in G_f$, niin $y = f(x)$ ja siten $x = f^{-1}(y)$. Niinpä $(y, x) = (y, f^{-1}(y)) \in G_{f^{-1}}$.
"$\Leftarrow$" Vastaavasti. $\square$

Lause 45. *Jos funktio f on aidosti kasvava (aidosti vähenevä) ja sillä on käänteisfunktio f^{-1}, niin f^{-1} on myös aidosti kasvava (aidosti vähenevä).*

Todistus. Oletetaan, että funktio $f\colon A \to B$ $(A, B \subset \mathbb{R})$ on aidosti kasvava bijektio. Olkoot x ja $y \in B$ siten, että $x < y$. Jos olisi $f^{-1}(x) \geq f^{-1}(y)$, niin f:n aidon kasvavuuden nojalla olisi $f(f^{-1}(x)) \geq f(f^{-1}(y))$, ts. $x \geq y$. Tämä on ristiriita oletuksen $x < y$ kanssa. On siis oltava $f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$ ja f^{-1} on siten aidosti kasvava. Aidosti vähenevän funktion tapaus todistetaan samaan tapaan. $\square$

Lause 46. *Olkoot $A, B, C \subset \mathbb{R}$ ja $f\colon A \to B$ ja $g\colon B \to C$ funktioita.*

(a) *Jos f ja g ovat kasvavia, niin $g \circ f$ on kasvava.*

(b) *Jos f on kasvava ja g on vähenevä, niin $g \circ f$ on vähenevä.*

Entä jos f ja g ovat väheneviä tai f vähenevä ja g kasvava?

Todistus. Todistetaan (b): Olkoot x ja $y \in A$, $x < y$. Koska f on kasvava, niin $f(x) \leq f(y)$. Siten g:n vähenevyyden nojalla $g(f(x)) \geq g(f(y))$, ts. $(g \circ f)(x) \geq (g \circ f)(y)$. Niinpä $g \circ f$ on vähenevä. $\square$

Funktioiden aritmeettiset operaatiot

Seuraavassa merkinnällä D_f tarkoitetaan f:n määrittelyjoukkoa.

Määritelmä 2.1.1. Olkoot f ja g yhden muuttujan reaaliarvoisia funktioita, joille $D_f \cap D_g \neq \emptyset$. Määritellään funktiot *summa* $f+g$, *erotus* $f-g$ ja *tulo* fg joukossa $D_f \cap D_g$ asettamalla

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x),\\ (f-g)(x) &= f(x)-g(x) \quad \text{ja}\\ (fg)(x) &= f(x)g(x).\end{aligned}$$

Jos $A := D_f \cap \{x \in D_g : \ g(x) \neq 0\} \neq \emptyset$, niin määritellään myös *osamäärä* f/g joukossa A asettamalla

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

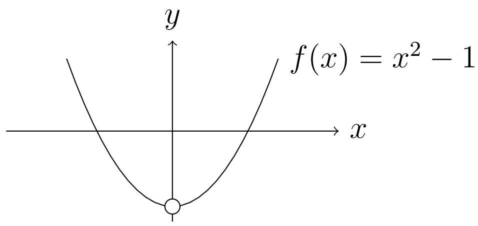
Määritelmä 2.1.1 neljälle perusoperaatiolle saattaa vaikuttaa sisällyksettömältä. Periaatteessa on kuitenkin syytä määritellä esimerkiksi nimeä $f+g$ kantavan funktion toiminta kullakin argumentin x arvolla.

Raja-arvo

Raja-arvo on matemaattisen analyysin tärkein peruskäsite. Raja-arvon avulla määritellään mm. jatkuvuus, derivaatta ja integraali.

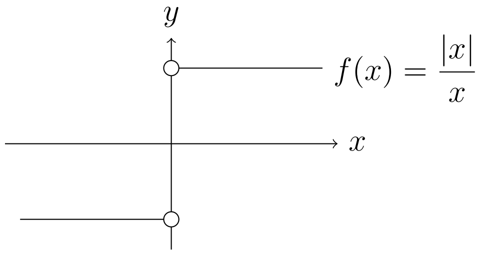
Intuitiivisesti määriteltynä funktiolla f on raja-arvo $L \in \mathbb{R}$ pisteessä a, jos x:n lähestyessä pistettä a arvot $f(x)$ lähestyvät lukua L. Tällaisella löysällä määritelmällä ei kuitenkaan saada aikaan käyttökelpoista työkalua. Ennen tarkkoja määritelmiä esimerkissä 47 käydään läpi erityyppisiä tapauksia siitä, miten funktion f arvot voivat käyttäytyä lähellä pistettä 0 ja mihin raja-arvon määritelmien (2.1.2, 2.1.5, 2.1.8 ja 2.1.7) tulisi ottaa kantaa.

Esimerkki 47. a) $f(x) = x^2 - 1$ lähestyy lukua -1, kun x lähestyy nollaa. f:llä on pisteessä 0 raja-arvo -1.

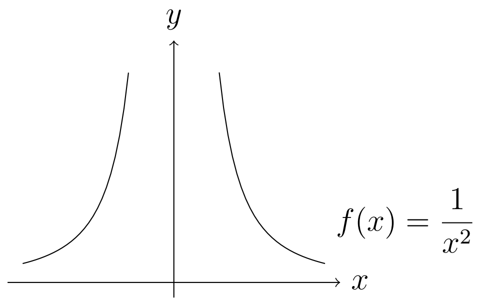


b) $f(x) = \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{kun } x > 0, \\ -1, & \text{kun } x < 0, \end{cases}$

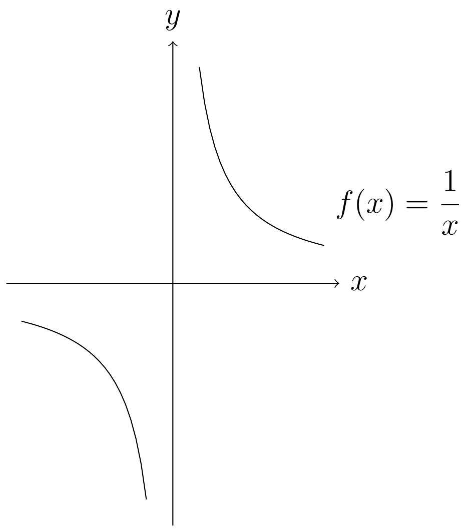
lähestyy lukua 1, kun x lähestyy nollaa oikealta ja lukua -1, kun x lähestyy nollaa vasemmalta. f:llä on pisteessä 0 vain toispuoleiset raja-arvot.



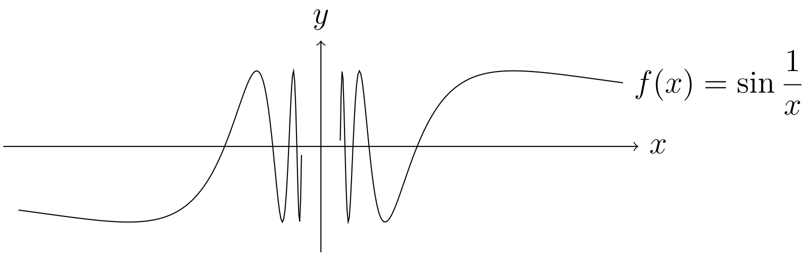
c) $f(x) = 1/x^2$ kasvaa rajatta, kun x lähestyy nollaa. f:llä on pisteessä 0 vain epäoleellinen raja-arvo ∞.



d) $f(x) = 1/x$ kasvaa rajatta, kun x lähestyy nollaa oikealta ja pienenee rajatta, kun x lähestyy nollaa vasemmalta. f:llä on pisteessä 0 vain toispuoleiset epäoleelliset raja-arvot $-\infty$ ja ∞.



e) $f(x) = \sin(1/x)$ heilahtelee -1:n ja 1:n välissä, kun x lähestyy nollaa. f:llä ei ole pisteessä 0 raja-arvoa.

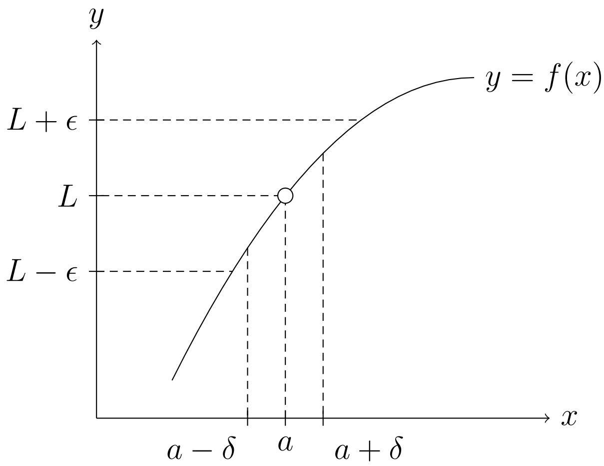


Määritelmä 2.1.2. Olkoon $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, ja olkoon a määrittelyjoukon A kasautumispiste. Funktiolla f on *raja-arvo (limit)* $L \in \mathbb{R}$ *pisteessä* a, jos jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että $|f(x) - L| < \epsilon$ aina kun $x \in A$ ja $0 < |x - a| < \delta$, ts.

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 \colon x \in A \text{ ja } 0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \epsilon.$$

Tällöin merkitään

$$L = \lim_{x \to a} f(x) \qquad \text{tai} \qquad f(x) \to L,\ \text{kun } x \to a.$$



Huomautus 48. a) Tällä määritelmällä saadaan ilmaistua täsmällisesti sanonnat "x lähellä a:ta" ($0 < |x-a| < \delta$) ja "$f(x)$ lähellä L:ää" ($|f(x)-L| < \epsilon$). f voi olla tai voi olla olematta määritelty pisteessä a, sillä ehto $0 < |x-a|$ takaa, että $x \neq a$ eikä funktion arvoa siten lasketa pisteessä a.
b) Vaaditaan, että a on A:n kasautumispiste. Tämä takaa sen, että ehdon $0 < |x - a| < \delta$ toteuttavia A:n pisteitä x on aina olemassa.

Lause 2.1.3. *Jos on olemassa raja-arvo* $\lim_{x \to a} f(x)$, *niin se on yksikäsitteinen.*

Todistus. On osoitettava, että jos

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \qquad \text{ja} \qquad \lim_{x \to a} f(x) = B,$$

niin $A = B$. Olkoon $\epsilon > 0$. Määritelmän mukaan on olemassa $\delta_1 > 0$ ja $\delta_2 > 0$ siten, että

$$|f(x) - A| < \frac{\epsilon}{2} \tag{49}$$

kun $0 < |x - a| < \delta_1$ ja

$$|f(x) - B| < \frac{\epsilon}{2} \tag{50}$$

kun $0 < |x - a| < \delta_2$. Jos valitaan $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, niin sekä (49) että (50) ovat voimassa, kun $0 < |x - a| < \delta$. Niinpä

$$|A - B| = |A - f(x) + f(x) - B| \leq |A - f(x)| + |f(x) - B| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

kun $0 < |x - a| < \delta$. Jokaiselle $\epsilon > 0$ pätee siis, että $|A - B| < \epsilon$. Siten $A = B$. $\square$

Esimerkki 51. a) Todistetaan esimerkin 47 **a)**-kohta, eli väite

$$\lim_{x \to 0} \left(x^2 - 1\right) = -1.$$

Olkoon $\epsilon > 0$. On löydettävä $\delta > 0$ siten, että

$$\left|x^2 - 1 - (-1)\right| = x^2 < \epsilon,$$

kun $0 < |x - 0| = |x| < \delta$. Selvästi voidaan valita $\delta = \sqrt{\epsilon}$.

b) Todistetaan esimerkin 47 **e)**-kohta: funktiolla $f(x) = \sin(1/x)$ ei ole raja-arvoa pisteessä 0. Olkoon $L \in \mathbb{R}$. Osoitetaan, että L ei voi olla kyseinen raja-arvo. Oletetaan, että $L \neq 0$ (tapaus $L = 0$ vastaavasti). Valitaan $\epsilon = |L|/2 > 0$ ja olkoon $\delta > 0$. Valitaan $n \in \mathbb{N}$ niin suureksi, että $2\pi n > 1/\delta$ ja asetetaan $x = 1/(2\pi n)$. Nyt $f(x) = 0$, joten

$$|f(x) - L| = |0 - L| = |L| \geq \epsilon,$$

vaikka $0 < |x - 0| < \delta$. Näin voidaan tehdä jokaiselle $\delta > 0$, joten valinnalla $\epsilon = |L|/2$ ei löydetä arvoa $\delta > 0$, jolle määritelmän ehto olisi voimassa.

c) Olkoon $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f(x) = m$, kun m/n on rationaaliluvun x supistettu muoto, ts. esimerkiksi $f(3) = 3$, $f(-5/1001) = -5$ ja $f(2/6) = f(1/3) = 1$. 0 on määrittelyjoukon kasautumispiste, joten voidaan kysyä, onko olemassa $\lim_{x \to 0} f(x)$. Samaan tapaan kuin **b)**-kohdassa nähdään, että ei ole.

Esimerkki 52. a) Vakiofunktiolle $f(x) = c$ on $\lim_{x\to a} f(x) = c$ kaikilla $a \in \mathbb{R}$:

Olkoon $\epsilon > 0$. Valitaan $\delta = 7$. Silloin

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \epsilon$$

aina kun $0 < |x - a| < \delta$.

b) Funktiolle $f(x) = cx$ on $\lim_{x\to a} f(x) = ca$ kaikilla $a \in \mathbb{R}$:

Olkoon $\epsilon > 0$. Nyt

$$|f(x) - ca| = |cx - ca| = |c||x - a| < \epsilon$$

aina kun $0 < |x-a| < \delta$, kun valitaan $\delta = \epsilon/|c|$ silloin, kun $c \neq 0$; tapauksessa $c = 0$ voidaan valita $\delta = 7$.

Seuraava lause sanoo, että raja-arvon laskusäännöt neljälle peruslaskutoimitukselle toimivat täsmälleen halutulla tavalla. Merkinnällä D_f tarkoitetaan f:n määrittelyjoukkoa.

Lause 2.1.4. *Olkoot f ja g funktioita, joille a on joukon $D_f \cap D_g$ kasautumispiste. Jos $\lim_{x\to a} f(x) = L$ ja $\lim_{x\to a} g(x) = M$, niin*

(1) $\lim_{x\to a} \big(f(x) \pm g(x)\big) = L \pm M$,

(2) $\lim_{x\to a} \big(f(x)g(x)\big) = LM$,

(3) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$, *jos $M \neq 0$.*

Todistus. Todistetaan (1) summalle $f(x)+g(x)$. a on sekä funktion f, g että $f + g$ määrittelyjoukon kasaantumispiste, joten väitteen kaikista kolmesta raja-arvoista on mielekästä puhua. Olkoon $\epsilon > 0$. Koska

$$L = \lim_{x\to a} f(x) \qquad \text{ja} \qquad M = \lim_{x\to a} g(x),$$

niin on olemassa $\delta_1 > 0$ ja $\delta_2 > 0$ siten, että

$$|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2} \tag{53}$$

kun $0 < |x - a| < \delta_1$ ja

$$|g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2} \tag{54}$$

kun $0 < |x-a| < \delta_2$. Jos valitaan $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, niin sekä (53) että (54) ovat voimassa, kun $0 < |x-a| < \delta$. Niinpä

$$\begin{aligned} |(f(x)+g(x)) - (L+M)| &= |(f(x)-L) + (g(x)-M)| \\ &\leq |f(x)-L| + |g(x)-M| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

kun $0 < |x-a| < \delta$. Siten summalla $f(x)+g(x)$ on pisteessä a raja-arvo $L+M$.
(2) Olkoon $\epsilon > 0$. Tällöin on olemassa $\delta_1 > 0$ ja $\delta_2 > 0$ siten, että

$$|f(x)-L| < \epsilon, \quad \text{kun } 0 < |x-a| < \delta_1$$

ja

$$|g(x)-M| < \epsilon, \quad \text{kun } 0 < |x-a| < \delta_2.$$

Lisätään ja vähennetään fg:n raja-arvon määritelmän erotukseen termi $f(x)M$ ja käytetään kolmioepäyhtälöä:

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - LM| &= |f(x)g(x) - f(x)M + f(x)M - LM| \\ &\leq |f(x)g(x) - f(x)M| + |f(x)M - LM| \\ &\leq |f(x)||g(x)-M| + |M||f(x)-L|. \end{aligned}$$

$|f(x)|$:n arvioimiseksi käytetään f:n raja-arvon määritelmää arvolla $\epsilon = 1$: on olemassa $\delta_3 > 0$ siten, että

$$|f(x)-L| < 1, \quad \text{kun } 0 < |x-a| < \delta_3.$$

Nyt

$$|f(x)| = |f(x) - L + L| \leq |f(x)-L| + |L| \leq 1 + |L|,$$

kun $0 < |x-a| < \delta_3$. Jos siis valitaan $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, niin

$$|f(x)g(x) - LM| \leq (1 + |L| + |M|)\epsilon,$$

kun $0 < |x-a| < \delta$. □

Huomautus 55. Raja-arvon olemassaolon todistamiseksi riittää osoittaa, että

$$|f(x)-L| < C\epsilon, \quad \text{kun } 0 < |x-a| < \delta \tag{56}$$

jollakin vakiolla $C > 0$ (joka ei riipu ϵ:sta eikä δ:sta). Jos näet $\epsilon_2 > 0$ on mielivaltainen, niin valitsemalla ehdossa (56) $\epsilon = \epsilon_2/C$ saadaan $|f(x)-L| < \epsilon_2$, kun $0 < |x-a| < \delta$. Tämä helpottaa monesti $\epsilon\delta$-todistuksen kirjoittamista, kuten lauseen 2.1.4 kohdan (2) todistuksessa.

Seuraus 57. $\lim_{x\to a}\left(f(x)^n\right) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^n$ *kaikilla* $n \in \mathbb{N}$.

Todistus. Todistetaan väite induktiolla.
(1) Alkuaskel. Tapauksessa $n = 1$ väite on selvästikin tosi.
(2) Induktioaskel. Oletetaan, että kaava pätee arvolla $n = k$:

$$\lim_{x\to a} f(x)^k = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^k.$$

Silloin

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\left(f(x)^{k+1}\right) &= \lim_{x\to a}\left(f(x)f(x)^k\right) \\
&= \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a}\left(f(x)^k\right) && \text{(L. 2.1.4 (2))} \\
&= \lim_{x\to a} f(x)\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^k && \text{(induktio-oletus)} \\
&= \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^{k+1}.
\end{aligned}$$

Niinpä kaava pätee myös n:n arvolla $n = k + 1$. □

Esimerkki 58. Seuraavassa tarvitaan esimerkin 52 tuloksia sekä lauseita 2.1.4 ja 57:

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^3 - 7}{5x + 3} = \frac{2 \cdot 3^3 - 7}{5 \cdot 3 + 3} = \frac{47}{18}.$$

Lause 59. $\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$

Todistus. Koska

$$\begin{aligned}
(\sqrt{x} - \sqrt{a})^2 &= x - 2\sqrt{x}\sqrt{a} + a \le \begin{cases} x - 2a + a = x - a, & \text{kun } x > a \\ x - 2x + a = a - x, & \text{kun } x < a \end{cases} \\
&= |x - a|,
\end{aligned}$$

niin

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| \le \sqrt{|x - a|}.$$

Niinpä annetulle $\epsilon > 0$ pätee $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \epsilon$, kun $0 < |x - a| < \epsilon^2$. Raja-arvon määritelmässä voidaan siis valita $\delta = \epsilon^2$. □

Lause 60 (Kuristusperiaate, squeeze law)**.** *Olkoon* $f(x) \le g(x) \le h(x)$ *kaikilla* $x \ne a$ *jossakin* a*:n ympäristössä ja oletetaan, että*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L = \lim_{x\to a} h(x).$$

Silloin on olemassa $\lim_{x\to a} g(x) = L$.

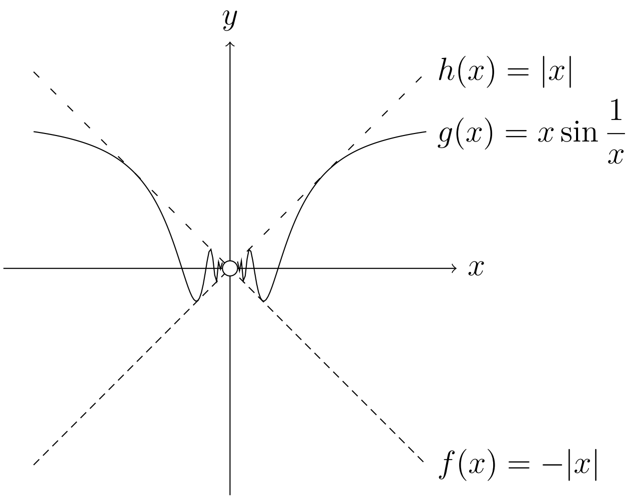
Esimerkki 61. Funktiolla

$$g(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

on raja-arvo 0 pisteessä 0, sillä

$$-|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x|$$

ja $f(x) = -|x| \to 0$ ja $h(x) = |x| \to 0$, kun $x \to 0$.



Toispuoleiset raja-arvot

Määritelmä 2.1.5. Olkoon $f\colon A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$. Olkoon a joukon $A \cap (a, \infty)$ kasautumispiste. Funktiolla f on *oikeanpuoleinen raja-arvo (right-hand limit) $L \in \mathbb{R}$ pisteessä a*, jos

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ x \in A \text{ ja } a < x < a + \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - L| < \epsilon.$$

Tällöin merkitään

$$L = \lim_{x \to a+} f(x) \qquad \text{tai} \qquad f(x) \to L, \text{ kun } x \to a+\,.$$

Vastaavasti jos a on joukon $A \cap (-\infty, a)$ kasautumispiste, niin funktiolla f on *vasemmanpuoleinen raja-arvo (left-hand limit) $L \in \mathbb{R}$ pisteessä a*, jos

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ x \in A \text{ ja } a - \delta < x < a \ \Rightarrow \ |f(x) - L| < \epsilon.$$

Tällöin merkitään

$$L = \lim_{x \to a-} f(x) \qquad \text{tai} \qquad f(x) \to L, \text{ kun } x \to a-\,.$$

Kasautumispiste-ehdot takaavat, että a:n oikealla tai vasemmalla puolella mielivaltaisen lähellä pistettä a on määrittelyjoukon pisteitä x. Tyypillisesti tutkitaan välillä (a, b) määriteltyä funktiota ja oikeanpuoleista raja-arvoa pisteessä a ja vasemmanpuoleista raja-arvoa pisteessä b.

Lause 2.1.6. *Olkoon $f\colon A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, ja olkoon a sekä joukon $A \cap (a, \infty)$ että joukon $A \cap (-\infty, a)$ kasautumispiste. Tällöin*

$$L = \lim_{x \to a} f(x)$$

jos ja vain jos

$$\lim_{x \to a-} f(x) = L = \lim_{x \to a+} f(x).$$

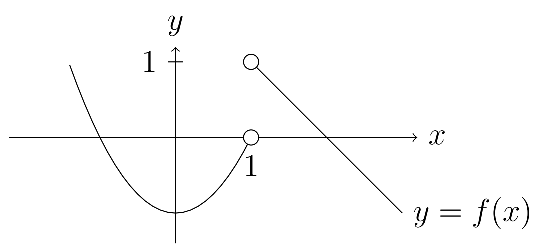
Esimerkki 62. Funktiolla

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{kun } x < 1, \\ 2 - x, & \text{kun } x > 1, \end{cases}$$

on toispuoleiset raja-arvot

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = 0 \qquad \text{ja} \qquad \lim_{x \to 1+} f(x) = 1,$$

joten ei ole olemassa raja-arvoa $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.



Raja-arvo äärettömyydessä

Intuitiivisesti määriteltynä funktiolla f on raja-arvo $L \in \mathbb{R}$ äärettömyydessä, jos x:n kasvaessa rajatta arvot $f(x)$ lähestyvät lukua L.

Määritelmä 2.1.7. Olkoon funktio f määritelty joukossa (c, ∞). Funktiolla f on *raja-arvo L äärettömyydessä*, jos

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \beta \in \mathbb{R} : \ x > \beta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Tällöin merkitään

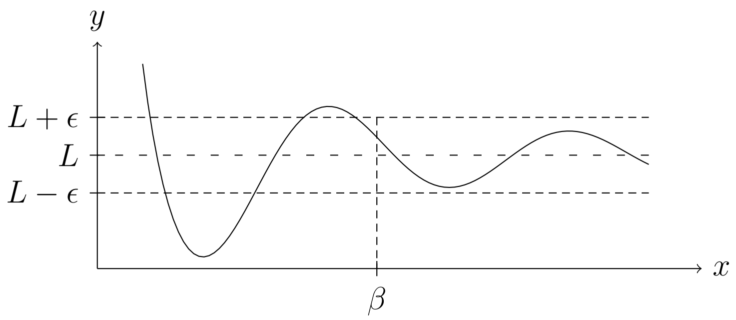
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \qquad \text{tai} \qquad f(x) \to L, \ \text{kun } x \to \infty.$$

Vastaavasti joukossa $(-\infty, c)$ määritellyllä funktiolla f on *raja-arvo L miinus-äärettömyydessä*, jos

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \beta \in \mathbb{R} : \ x < \beta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Tällöin merkitään

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \qquad \text{tai} \qquad f(x) \to L, \ \text{kun } x \to -\infty.$$



Esimerkki 63. a) $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

b) Ei ole olemassa raja-arvoa $\lim_{x \to \infty} \sin x$.

c) $\lim_{x \to \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$

Epäoleelliset raja-arvot ∞ ja $-\infty$

Intuitiivisesti määriteltynä funktiolla f on raja-arvo ∞ pisteessä a, jos x:n lähestyessä pistettä a arvot $f(x)$ kasvavat rajatta.

Määritelmä 2.1.8. Olkoon $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, ja olkoon a määrittelyjoukon A kasautumispiste. Funktiolla f on *epäoleellinen raja-arvo* ∞ *pisteessä* a, jos

$$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0 :\ x \in A \text{ ja } 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

Tällöin merkitään

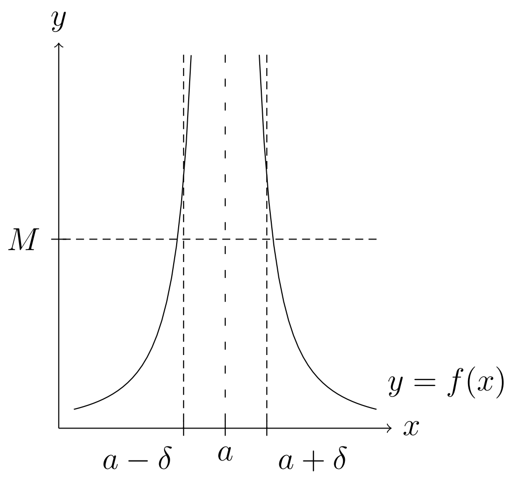
$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \qquad \text{tai} \qquad f(x) \to \infty,\ \text{kun } x \to a.$$

Vastaavasti funktiolla f on *epäoleellinen raja-arvo* $-\infty$ *pisteessä* a, jos

$$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0 :\ x \in A \text{ ja } 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < M.$$

Tällöin merkitään

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \qquad \text{tai} \qquad f(x) \to -\infty,\ \text{kun } x \to a.$$



Epäoleelliset toispuoleiset raja-arvot määritellään vastaavalla tavoin kuin äärelliset toispuoleiset raja-arvot. Lauseen 2.1.4 tuloksia voidaan käyttää myös epäoleellisille raja-arvoille seuraavia sääntöjä soveltaen ($c \in \mathbb{R}$):

(1) $c + \infty = \infty$ ja $c - \infty = -\infty$

(2) $c \cdot \infty = \infty$, jos $c > 0$ ja $c \cdot \infty = -\infty$, jos $c < 0$

(3) $\dfrac{c}{\pm\infty} = 0$

(4) $\infty + \infty = \infty$ ja $-\infty - \infty = -\infty$

(5) $\infty \cdot \infty = \infty$, $(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$, $\infty \cdot (-\infty) = -\infty$

Esimerkki 64. $\lim_{x\to 2} \frac{x^8}{(x-2)^2} = \lim_{x\to 2} \left(x^8\right) \lim_{x\to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = 2^8 \cdot \infty = \infty$

Seuraavat muodot ovat epämääräisiä eikä niistä raja-arvolaskuissa voida tehdä mitään johtopäätöksiä:

$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty.$$

Esimerkiksi

$$1 = \lim_{x\to 0+} 1 = \lim_{x\to 0+} x \cdot \frac{1}{x} = 0 \cdot \infty,$$

mutta toisaalta

$$2 = \lim_{x\to 0+} 2 = \lim_{x\to 0+} (2x) \cdot \frac{1}{x} = 0 \cdot \infty$$

tai

$$\infty = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0+} x \cdot \frac{1}{x^2} = 0 \cdot \infty.$$

Harjoitustehtäväksi jätetään määritellä myös raja-arvot ∞ ja $-\infty$ äärettömyydessä ja miinus-äärettömyydessä.

Esimerkki 65. $\lim_{x\to -\infty} x^3 = -\infty$

2.2 Jatkuvuus

Raja-arvon määritelmässä 2.1.2 ei vaadita, että funktio olisi määritelty rajapisteessä a. Jos $f(a)$ on määritelty, niin voidaan kysyä, onko funktion arvo sama kuin raja-arvo.

Seuraavassa tutkitaan jatkuvuutta vain välillä (ja joukossa, joka on välien yhdiste). Vastaavalla tavoin voitaisiin määritellä jatkuvuus yleisemmissäkin joukoissa (kuten vaikka joukossa $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$). Tärkeimmät tuloksemme jatkuville funktioille ovat joka tapauksessa voimassa vain väleillä.

Jos muuta ei mainita, niin seuraavassa joukko $I \subset \mathbb{R}$ on väli, joka voi olla avoin, suljettu, puoliavoin, rajoitettu tai rajoittamaton (ks. s. 14).

Määritelmä 2.2.1. Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ väli. Funktio $f\colon I \to \mathbb{R}$ on *jatkuva (continuous) pisteessä* $x_0 \in I$, jos

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x). \tag{66}$$

Tämä määritelmä sisältää jo tapaukset, joissa x_0 on määrittelyvälin päätepiste. Määritellään kuitenkin vielä terminologiaa näille tapauksille: sanotaan, että funktio f on

- *oikealta jatkuva (continuous from the right) pisteessä* x_0, jos f on määritelty välillä $[x_0, b)$ ja
$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0+} f(x),$$
- *vasemmalta jatkuva (continuous from the left) pisteessä* x_0, jos f on määritelty välillä $(a, x_0]$ ja
$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0-} f(x).$$

Määritelmän tilanteessa x_0 on määrittelyjoukon I kasautumispiste, joten raja-arvosta on mielekästä puhua. Jatkuvuuden määritelmässä siis vaaditaan, että

- f on määritelty pisteessä x_0,
- f:llä on raja-arvo pisteessä x_0 ja
- funktion arvo ja raja-arvo ovat samat.

Raja-arvon määritelmän 2.1.2 $\epsilon\delta$-ehto ja vaatimus (66) voidaan muotoilla suoraan yhdeksi $\epsilon\delta$-ehdoksi:

Lause 2.2.2. *Funktio $f\colon I \to \mathbb{R}$ on jatkuva pisteessä $x_0 \in I$ jos ja vain jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että*

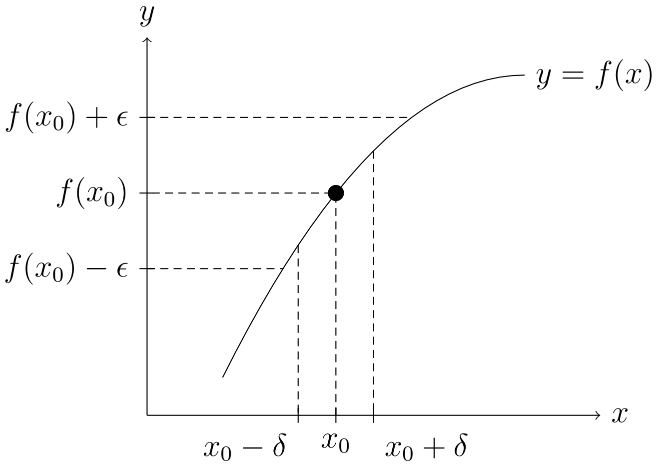
$$x \in I \text{ ja } |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \epsilon. \tag{67}$$

Todistus. Helppo harjoitustehtävä, joka seuraa suoraan määritelmistä. Ainoa ero raja-arvon $\epsilon\delta$-määritelmään on, että nyt tapausta $x = x_0$ ei rajata pois vaatimalla $0 < |x - x_0|$. □

Jätetään lauseen 2.2.2 tapaisen $\epsilon\delta$-ehdon muotoilu toispuoleiselle jatkuvuudelle harjoitustehtäväksi (ks. [15]).

Ehto (67) voidaan muotoilla myös niin, että x_0:n δ-ympäristössä $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ olevat määrittelyjoukon I pisteet kuvautuvat $f(x_0)$:n ϵ-ympäristön sisään:

$$f((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I) \subset (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon). \tag{68}$$



Lause 2.2.2 muotoileee täsmällisesti jatkuvuuden idean: kun x lähestyy x_0:aa, niin $f(x)$ lähestyy $f(x_0)$:aa.

Määritelmä 2.2.3. Funktio f on *jatkuva välillä* I, jos se on jatkuva jokaisessa määrittelyvälinsä pisteessä $x_0 \in I$.

Jos funktion $f\colon A \to \mathbb{R}$ määrittelyjoukko koostuu väleistä (joita voi olla äärellinen tai ääretön määrä), ts. $A = \cup_i I_i$, missä I_i on väli, niin f on *jatkuva joukossa* A, jos se on jatkuva jokaisella välillä $J \subset A$.

Esimerkiksi jos määrittelyjoukko koostuu väleistä $[-1, 0)$ ja $[0, 1]$, niin vaaditaan jatkuvuutta välillä $[-1, 1]$. Jos taas määrittelyjoukko koostuu väleistä $[-1, 0)$ ja $(0, 1]$, niin riittää jatkuvuus kummallakin näistä väleistä erikseen.

Huomautus 69. Kun jatkossa puhutaan jatkuvasta funktiosta joukossa $A \subset \mathbb{R}$, niin yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan, että joukko A on määritelmän 2.2.3 mukainen välien yhdiste. Yleisessä joukossa $B \subset \mathbb{R}$ jatkuvuus voitaisiin määritellä vaatimalla ehdon (67) voimassaolo B:n kasautumispisteissä $x_0 \in B$. Jos $x_0 \in B$ ei ole B:n kasautumispiste, niin pienillä $\epsilon > 0$ ehdon $0 < |x - x_0| < \epsilon$ toteuttavia B:n pisteitä ei ole. Tällaisia pisteitä kutsutaan B:n *erillisiksi pisteiksi* ja sovitaan, että funktio on sellaisissa pisteissä aina jatkuva.

Lause 70. *Olkoon $f\colon I \to \mathbb{R}$ jatkuva pisteessä $x_0 \in I$ ja olkoon $f(x_0) > 0$. Silloin on olemassa $\delta > 0$ siten, että*

$$f(x) > \frac{f(x_0)}{2} > 0 \quad \textit{kaikilla } x \in I, \textit{ joille } |x - x_0| < \delta.$$

Toisin sanoen: jos jatkuva funktio on positiivinen jossakin määrittelyvälin pisteessä x_0, niin se on positiivinen myös jossakin x_0:n ympäristössä. Vastaava tulos pätee myös tapauksessa $f(x_0) < 0$.

Todistus. Valitaan lauseessa 2.2.2 $\epsilon = f(x_0)/2$. Silloin on olemassa $\delta > 0$ siten, että kaikilla $x \in I$, joille $|x - x_0| < \delta$, pätee

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{f(x_0)}{2} < f(x) - f(x_0) < \frac{f(x_0)}{2} \\ &\Rightarrow \quad f(x) > f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2}. \end{aligned}$$ □

Lause 2.2.5. *Olkoot $f\colon I \to \mathbb{R}$ ja $g\colon I \to \mathbb{R}$ pisteessä $x_0 \in I$ jatkuvia funktioita. Tällöin $f + g$, $f - g$ ja fg ovat jatkuvia pisteessä x_0. Jos lisäksi $g(x_0) \neq 0$, niin myös f/g on jatkuva pisteessä x_0.*

Todistus. Tulokset seuraavat raja-arvon vastaavista ominaisuuksista (lause 2.1.4). Osamäärän tapauksessa tarvitaan lisäksi lausetta 70, joka takaa, että f/g on määritelty x_0:n sisältävällä välillä. □

Esimerkki 71. Seuraavissa todistetaan, että f on jatkuva jokaisessa pisteessä x_0, ja siten määritelmän 2.2.3 mukaan jatkuva. Käytetään lausetta 2.2.2, vaikka tulokset seuraisivat suoraankin esimerkistä 52.
a) Vakiofunktio $f(x) = c$ on jatkuva:
Olkoon $x_0 \in \mathbb{R}$ ja $\epsilon > 0$. Valitaan $\delta = 7$. Silloin

$$|f(x) - f(x_0)| = |c - c| = 0 < \epsilon$$

aina kun $|x - x_0| < \delta$.

b) Funktio $f(x) = cx$ on jatkuva:

Olkoon $x_0 \in \mathbb{R}$ ja $\epsilon > 0$. Nyt

$$|f(x) - f(x_0)| = |cx - cx_0| = |c||x - x_0| < \epsilon$$

aina kun $|x - x_0| < \delta$, kun valitaan $\delta = \epsilon/|c|$ silloin, kun $c \neq 0$; tapauksessa $c = 0$ voidaan valita $\delta = 7$.

Esimerkki 72. a) Potenssifunktio $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ on jatkuva. Tämä seuraa induktiolla esimerkistä 71 **b)** ja lauseesta 2.2.5 (vrt. lause 57).
b) Polynomi $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, on jatkuva jatkuvien funktioiden summana.

Esimerkki 73. Tarkastellaan rationaalifunktiota p/q, missä p ja q ovat polynomeja (ja q ei ole nollapolynomi $q = 0$). Määrittelyjoukko $\{x \in \mathbb{R}: q(x) \neq 0\}$ koostuu avoimista väleistä ja p/q on kahden jatkuvan funktion osamääränä jatkuva jokaisella näistä väleistä, joten se on jatkuva määrittelyjoukossaan.

Esimerkki 74. a) Funktio $f(x) = \dfrac{1}{x}$ on jatkuva määrittelyjoukossaan $\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
b) Funktio

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 2x - 8}$$

on jatkuva määrittelyjoukossaan $\mathbb{R} \setminus \{-2, 4\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 4) \cup (4, \infty)$. Koska

$$f(x) = \frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x-4)} = \frac{x+3}{x-4}, \tag{75}$$

niin on olemassa $\lim_{x \to -2} f(x)$ ja siten f saadaan määrittelyllä (75) jatkettua jatkuvaksi funktioksi joukkoon $\mathbb{R} \setminus \{4\}$. Tällaisessa tilanteessa sanotaan, että piste $x = -2$ on f:n *poistuva epäjatkuvuuspiste (removable discontinuity).*

Paloittain jatkuvat funktiot

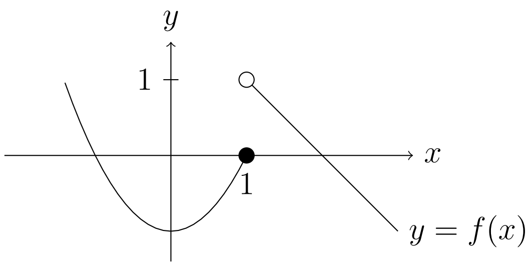
Määritelmä 2.2.4. Jos funktiolla f on pisteessä x_0 olemassa äärelliset toispuoleiset raja-arvot, mutta ne ovat erisuuret, niin funktiolla f on pisteessä x_0 *hyppäysepäjatkuvuus (jump discontinuity).*

Funktio f on välillä I *paloittain jatkuva (piecewise continuous)*, jos välillä I on korkeintaan äärellinen määrä pisteitä, joissa f:llä on hyppäysepäjatkuvuus ja kaikissa muissa välin I pisteissä f on jatkuva.

Esimerkki 76. a) Funktiolla

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{kun } x < 1, \\ 2 - x, & \text{kun } x > 1, \end{cases}$$

on hyppäysepäjatkuvuus pisteessä 1 ja se on paloittain jatkuva joukossa $\mathbb{R}$. Jos määriteltäisiin lisäksi esimerkiksi $f(1) = 0$, niin f olisi vasemmalta jatkuva pisteessä 1, mutta ei oikealta.



b) Funktio $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$, ei ole paloittain jatkuva $\mathbb{R}$:ssä, sillä 0:ssa f:llä ei ole (äärellisiä) toispuoleisia raja-arvoja.

Yhdistetyn funktion jatkuvuus

Lause 2.2.7. *Olkoot I ja $J\subset\mathbb{R}$ välejä. Olkoon $g\colon I\to\mathbb{R}$ jatkuva pisteessä $x_0\in I$ ja $f\colon J\to\mathbb{R}$ jatkuva pisteessä $g(x_0)\in J$. Oletetaan lisäksi, että $f\circ g$ on määritelty jollakin x_0:n sisältävällä välillä $K\subset I$. Silloin yhdistetty funktio $f\circ g$ on jatkuva pisteessä x_0.*

Todistus. Käytetään lausetta 2.2.2. Olkoon $\epsilon>0$. Koska f on jatkuva pisteessä $g(x_0)$, niin on olemassa $\delta_1>0$ siten, että

$$|f(y)-f(g(x_0))|<\epsilon,\quad \text{kun } y\in J \text{ ja } |y-g(x_0)|<\delta_1. \tag{77}$$

Käytetään nyt g:n jatkuvuuden määritelmässä epsilonina lukua δ_1: koska g on jatkuva pisteessä x_0, niin on olemassa $\delta>0$ siten, että

$$|g(x)-g(x_0)|<\delta_1,\quad \text{kun } x\in K \text{ ja } |x-x_0|<\delta. \tag{78}$$

Arvioista (77) ja (78) seuraa, että

$$|f\circ g(x)-f\circ g(x_0)|<\epsilon,\quad \text{kun } x\in K \text{ ja } |x-x_0|<\delta. \qquad \square$$

Esimerkki 79. Funktio $f(y)=\sqrt{y}$ on lauseen 59 mukaan jatkuva joukossa $[0,\infty)$ ja funktio $g(x)=(x+3)/(x-4)$ on jatkuva joukossa $\mathbb{R}\setminus\{4\}$ ja ei-negatiivinen joukossa $(-\infty,-3]\cup(4,\infty)$. Siten yhdistetty funktio

$$f\circ g(x)=\sqrt{\frac{x+3}{x-4}}$$

on jatkuva määrittelyjoukossaan $(-\infty,-3]\cup(4,\infty)$.

Jos f ja g ovat jatkuvia, niin lauseen 2.2.7 mukaan $\lim_{x\to a} f(g(x))=f(g(x_0))$, ja toisaalta $\lim_{x\to a} g(x)=g(x_0)$, joten

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(g(x))=f\Big(\lim_{x\to a} g(x)\Big).} \tag{80}$$

Siten jos f on jatkuva, niin rajankäynti voidaan ”viedä f:n sisään”.

Esimerkki 81. Neliöjuuren jatkuvuudesta (lause 59) ja (80):stä seuraa, että

$$\lim_{x\to 5}\sqrt{2x^2-1}=\sqrt{\lim_{x\to 5}(2x^2-1)}=\sqrt{49}=7.$$

Rajoittuneisuus ja väliarvolause

Määritelmä 82. Olkoon funktio f määritelty joukossa $A\subset\mathbb{R}$. f on *ylhäältä rajoitettu (bounded above)* joukossa A, jos on olemassa $M\in\mathbb{R}$ siten, että

$$f(x)\le M \quad \text{kaikilla } x\in A.$$

f on *alhaalta rajoitettu (bounded below)* joukossa A, jos on olemassa $m\in\mathbb{R}$ siten, että

$$f(x)\ge m \quad \text{kaikilla } x\in A.$$

Jos f on sekä ylhäältä että alhaalta rajoitettu joukossa A, ts. jos on olemassa m ja $M\in\mathbb{R}$ siten, että

$$m\le f(x)\le M \quad \text{kaikilla } x\in A,$$

niin f on *rajoitettu (bounded)* joukossa A.

Itseisarvon avulla: f on rajoitettu joukossa A jos ja vain jos on olemassa $M\in\mathbb{R}$ siten, että

$$|f(x)|\le M \quad \text{kaikilla } x\in A.$$

Jos funktio f on ylhäältä rajoitettu joukossa $A\subset\mathbb{R}$, ts. kuvajoukko

$$f(A)=\{f(x)\colon x\in A\}$$

on ylhäältä rajoitettu, niin täydellisyysaksiooman mukaan on olemassa $\sup f(A)$. Jos joukolla $f(A)$ on maksimi, niin lauseen 9 mukaan

$$f(c)=\sup f(A)=\max f(A)$$

jollakin $c\in A$. Tällöin arvoa $f(c)$ kutsutaan f:n *maksimiksi* eli *suurimmaksi arvoksi (maximum)* joukossa A. Vastaavasti määritellään f:n *minimi* eli *pienin arvo (minimum)* joukossa A.

Lause 2.2.8. *Suljetulla ja rajoitetulla välillä $[a,b]$ jatkuva funktio f on rajoitettu välillä $[a,b]$.*

Todistus. Epäsuora todistus: oletetaan, että f ei ole rajoitettu välillä $I=[a,b]$. Jaetaan väli I puoliksi kahteen suljettuun väliin. f on rajoittamaton näistä vähintään toisessa. Merkitään tätä väliä I_1:llä. Jatkamalla puolittamista induktiivisesti saadaan välit $I_k=[a_k,b_k]$, $I\supset I_1\supset I_2\supset\cdots$, joille pätee:

(1) f on rajoittamaton jokaisella välillä I_k, $k \in \mathbb{N}$ ja

(2) välin pituus $b_k - a_k = (b-a)2^{-k} \to 0$, kun $k \to \infty$.

Välien alkupisteiden muodostama joukko $\{a_k : \ k \in \mathbb{N}\}$ on ylhäältä rajoitettu, joten täydellisyysaksiooman mukaan sillä on supremum

$$c = \sup\{a_k : \ k \in \mathbb{N}\}.$$

Koska $c \in I$, niin f:n jatkuvuuden nojalla eräällä $\delta > 0$

$$|f(x) - f(c)| < 1$$

kaikilla $x \in (c-\delta, c+\delta) \cap I = J$ (valitse lauseessa 2.2.2 $\epsilon = 1$). Silloin

$$|f(x)| \leq |f(c)| + 1$$

kaikilla $x \in J$, eli f on rajoitettu välillä J. Valitaan nyt k niin suureksi, että $(b-a)2^{-k} < \delta$. Silloin $I_k \subset J$, joten f on rajoitettu myös välillä I_k. Tämä on ristiriita ominaisuuden (1) kanssa. Ei siis voi olla niin, että f ei ole rajoitettu välillä $[a,b]$. □

Sekä ehto ”väli on rajoitettu” että ”väli on suljettu” ovat välttämättömiä lauseessa 2.2.8: esimerkiksi välillä $(0,\infty)$ jatkuva funktio

$$f(x) = \frac{1}{x} + x$$

ei ole rajoitettu rajoitetulla välillä $(0,1]$ eikä suljetulla välillä $[1,\infty)$. Toki myös jatkuvuusehto on välttämätön: keksi esimerkki suljetun ja rajoitetun välin $[0,1]$ funktiosta f, joka ei ole rajoitettu.

Lause 2.2.9. *Suljetulla ja rajoitetulla välillä jatkuva funktio $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa.*

Todistus. Lauseen 2.2.8 mukaan f on rajoitettu, joten on olemassa $M = \sup\{f(x)\colon x \in [a,b]\}$ ja $m = \inf\{f(x)\colon x \in [a,b]\}$. On osoitettava, että on olemassa c ja $d \in [a,b]$ siten, että $f(c) = M$ ja $f(d) = m$. Todistetaan ensin mainittu.

Epäsuora todistus: oletetaan, että $f(x) < M$ kaikilla $x \in [a,b]$. Määritellään funktio g asettamalla $g(x) = M - f(x)$. Nyt $g(x) > 0$ kaikilla $x \in [a,b]$, joten funktio $1/g$ on jatkuva välillä $[a,b]$ (lause 2.2.5). Lauseen 2.2.8 mukaan g on rajoitettu: on olemassa $C > 0$ siten, että $1/g(x) \leq C$ kaikilla $x \in [a,b]$. Tästä seuraa, että

$$f(x) \leq M - \frac{1}{C}$$

kaikilla $x \in [a,b]$. Tämä on ristiriita sen kanssa, että M on kuvajoukon $f([a,b])$ supremum. Siten on oltava $f(x) = M$ eräällä $x \in [a,b]$. □

Lause 2.2.10 (Jatkuvien funktioiden väliarvolause (JVAL), Intermediate Value Theorem)**.** *Olkoon f jatkuva suljetulla ja rajoitetulla välillä $[a, b]$. Silloin f saavuttaa kaikki arvojen $f(a)$ ja $f(b)$ välissä olevat arvot. Toisin sanoen: jos K on arvojen $f(a)$ ja $f(b)$ välissä, niin on olemassa piste $c \in [a, b]$, jolle $f(c) = K$.*

Todistus. Jos $f(a) = f(b)$, niin voidaan valita $c = a$. Todistetaan väite tapauksessa $f(a) < f(b)$ (tapaus $f(a) > f(b)$ vastaavasti).

Olkoon siis $f(a) < K < f(b)$. Määritellään $S = \{x \in [a, b] \colon f(x) \leq K\}$. Tällöin S on epätyhjä ($a \in S$) ja ylhäältä rajoitettu (b on eräs yläraja). Täydellisyysaksiooman mukaan on olemassa $c = \sup S$. Osoitetaan, että $f(c) = K$. Käytetään epäsuoraa todistusta.

(1) Oletetaan, että $f(c) > K$. Tällöin $c > a$. Soveltamalla lausetta 70 funktioon $f - K$ nähdään, että on olemassa $\delta > 0$ siten, että $f(x) > K$, kun $c - \delta < x \leq c$. Tästä seuraa, että $c - \delta$ on S:n yläraja. Näin ei voi olla, koska c on pienin yläraja.

(2) Oletetaan, että $f(c) < K$. Tällöin $c < b$. Soveltamalla lausetta 70 nähdään, että on olemassa $\delta > 0$ siten, että $f(x) < K$, kun $c \leq x < c + \delta$. Mutta tällöin c ei olisi S:n yläraja.

(1) ja (2): Ei voi olla $f(c) > K$ eikä $f(c) < K$, joten $f(c) = K$. $\square$

Mainitaan vielä erikseen lauseen 2.2.10 erikoistapaus:

Lause 83 (Bolzanon lause)**.** *Olkoon f jatkuva suljetulla ja rajoitetulla välillä $[a, b]$ ja olkoot $f(a)$ ja $f(b)$ erimerkkiset, ts. $f(a)f(b) < 0$. Silloin on olemassa $c \in [a, b]$ siten, että $f(c) = 0$. Toisin sanoen: jatkuva funktio ei voi vaihtaa merkkiään saamatta arvoa 0.*

Tasainen jatkuvuus

Lauseen 2.2.2 mukaan funktio $f \colon I \to \mathbb{R}$ on jatkuva välillä I jos ja vain jos

$$\forall x_0 \in I \, \forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \; x \in I \text{ ja } |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Tässä δ saa riippua sekä epsilonista että pisteesä x_0, eli riittää, että kullekin x_0 ja ϵ löydetään sopiva δ. Kiristetään ehtoa siten, että vaaditaan, että kullekin ϵ löytyy δ, joka toimii kaikilla x_0:

Määritelmä 2.2.11. Funktio $f \colon I \to \mathbb{R}$ on *tasaisesti jatkuva (uniformly continuous)*, jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$x_1, x_2 \in I \text{ ja } |x_1 - x_2| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon. \tag{84}$$

Suoraan määritelmistä seuraa, että tasaisesti jatkuva funktio $f\colon I \to \mathbb{R}$ on jatkuva välillä I. Seuraavat esimerkit näyttävät, että käänteinen tulos ei päde.

Esimerkki 85. Funktio $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$, on luvun 2.2 tulosten mukaan jatkuva. Osoitetaan, että f ei ole tasaisesti jatkuva.

Valitaan $\epsilon = 1$. On osoitettava, että ehdon (84) toteuttavaa lukua δ ei löydy. Olkoon siis $\delta > 0$. Valitaan

$$x_1 = \frac{1}{n} \qquad \text{ja} \qquad x_2 = \frac{1}{n+1},$$

jolloin

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |n - (n+1)| = 1 \geq \epsilon,$$

mutta

$$|x_1 - x_2| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right| = \left|\frac{1}{n(n+1)}\right| < \delta,$$

kun valitaan n kyllin suureksi.

Esimerkki 86. Funktio $f(x) = x^2$, on jatkuva, mutta ei tasaisesti jatkuva $\mathbb{R}$:ssä, sillä jos $\epsilon > 0$ ja $\delta > 0$, niin

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|x_1^2 - x_2^2\right| = |x_1 - x_2|\,|x_1 + x_2| \geq \epsilon,$$

kun valitaan x_1 ja x_2 siten, että $|x_1 - x_2| = \delta/2 < \delta$ ja x_1 ja x_2 ovat niin kaukana nollasta, että $|x_1 + x_2| \geq 2\epsilon/\delta$.

$f(x) = x^2$ on kuitenkin tasaisesti jatkuva jokaisella rajoitetulla välillä $[a,b]$, koska on olemassa $M \in \mathbb{R}$ siten, että $|x_1 + x_2| \leq M$ kaikilla x_1 ja $x_2 \in [a,b]$ ja siten jokaisella $\epsilon > 0$

$$|f(x_1) - f(x_2)| = M|x_1 - x_2| < \epsilon,$$

kun $|x_1 - x_2| < \epsilon/M =: \delta$.

Esimerkin 85 funktiota ei voida jatkaa jatkuvaksi suljetulle välille $[0,1]$, ja esimerkin 86 jatkuva funktio on tasaisesti jatkuva jokaisella rajoitetulla välillä, mutta ei rajoittamattomilla väleillä. Yleisestikin pätee:

Lemma 87. *f on tasaisesti jatkuva rajoitetulla välillä $[a,b]$ jos ja vain jos jokaisella $\epsilon > 0$ väli $[a,b]$ voidaan jakaa äärellisen moneen osaväliin*

$$[a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup \cdots \cup [a_n, b_n] = [a,b] \qquad (b_k = a_{k+1}) \tag{88}$$

siten, että kuvajoukon $f([a_k, b_k])$ pituus

$$\sup\{|f(x) - f(y)| : \ x, y \in [a_k, b_k]\} < \epsilon$$

kaikilla $k = 1, 2, \ldots, n$.

Todistus. "⇒" Olkoon $\epsilon > 0$. Valitaan $\delta > 0$ kuten tasaisen jatkuvuuden määritelmässä 2.2.11. Nyt riittää jakaa väli $[a, b]$ äärellisen moneen osaväliin (88) siten, että $b_k - a_k < \delta$.

"⇐" Olkoon $\epsilon > 0$. Oletuksen mukaan on olemassa osavälit (88) siten, että jokaisella k

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2},$$

kun $x, y \in [a_k, b_k]$. Valitaan $\delta = \max\{b_k - a_k : \ k = 1, 2, \ldots, n\} > 0$. Valitaan nyt $x, y \in [a, b]$ siten, että $|x - y| < \delta$. Jos x ja y ovat samalla osavälillä $[a_k, b_k]$, niin $|f(x) - f(y)| < \epsilon/2 < \epsilon$. Jos x ja y eivät ole samalla osavälillä $[a_k, b_k]$, niin ne ovat vierekkäisillä väleillä. Tarkastellaan tapausta $x < y$. Silloin $a_k < x < b_k = a_{k+1} < y < b_{k+1}$, joten

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(b_k)| + |f(b_k) - f(y)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \qquad \square$$

Lause 2.2.12. *Suljetulla ja rajoitetulla välillä $[a, b]$ jatkuva funktio f on tasaisesti jatkuva välillä $[a, b]$.*

Todistus. Epäsuora todistus. Tasaisen jatkuvuuden negaatio lemman 87 mukaan: on olemassa $\epsilon > 0$ siten, että väliä $[a, b]$ ei voida jakaa äärellisen moneen osaväliin (88) siten, että kunkin osavälin kuvan pituus olisi $< \epsilon$. Jaetaan väli $I = [a, b]$ puoliksi kahteen suljettuun väliin. Näistä puolikkaista vähintään toista ei voida jakaa äärellisen moneen osaväliin siten, että kunkin osavälin kuvan pituus olisi $< \epsilon$ (jos molemmat voitaisiin jakaa, voitaisiin myös koko väli I). Merkitään tätä väliä I_1:llä. Jatkamalla puolittamista induktiivisesti saadaan välit $I_k = [a_k, b_k]$, $I \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots$, joille pätee:

(1) väliä I_k ei voida jakaa äärellisen moneen osaväliin siten, että kunkin osavälin kuvan pituus olisi $< \epsilon$ ja

(2) välin pituus $b_k - a_k = (b - a)2^{-k} \to 0$, kun $k \to \infty$.

Välien alkupisteiden muodostama joukko $\{a_k : \ k \in \mathbb{N}\}$ on ylhäältä rajoitettu, joten täydellisyysaksiooman mukaan sillä on supremum

$$c = \sup\{a_k : \ k \in \mathbb{N}\}.$$

Koska $c \leq b$, niin $c \in I$. f on jatkuva pisteessä c, joten eräällä $\delta > 0$

$$|f(x) - f(c)| < \frac{\epsilon}{2}$$

kaikilla $x \in (c - \delta, c + \delta) \cap I = J$ (lause 2.2.2). Valitaan nyt k niin suureksi, että $(b - a)2^{-k} < \delta$. Silloin $I_k \subset J$, joten kaikille $x, y \in I_k$ pätee

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(c)| + |f(c) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Tästä seuraa, että välin I_k kuvan pituus on $< \epsilon$. Tämä on ristiriita ominaisuuden (1) kanssa. $\square$

Monotoniset funktiot

Todetaan vielä jatkuvan funktion käänteisfunktion jatkuvuus. Tämä ominaisuus on tärkeä mm. alkeisfunktioiden jatkuvuuden tutkimisessa (liite A.4).

Lauseen 42 mukaan aidosti monotoninen funktio $f\colon I \to \mathbb{R}$ on injektio ja siten rajoittumalla $f\colon I \to f(I)$ on käänteisfunktio $f^{-1}\colon f(I) \to I$.

Lause 2.2.15. *Välillä I aidosti kasvavan (vähenevän) jatkuvan funktion f kuvajoukko $f(I)$ on väli ja käänteisfunktio $f^{-1}\colon f(I) \to I$ on myös aidosti kasvava (vähenevä) ja jatkuva.*

Todistus. Olkoon f aidosti kasvava (vähenevän funktion tapaus vastaavasti). Tarkastellaan tapausta, jossa väli on suljettu ja rajoitettu, ts. $I = [a, b]$. Muunlaiset välit vastaavasti.

Osoitetaan ensin, että $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$. Aidon kasvavuuden nojalla $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ kaikilla $x \in [a, b]$, ts. kaikki f:n arvot ovat välillä $[f(a), f(b)]$. Toisaalta väliarvolauseen 2.2.10 mukaan f saavuttaa kaikki arvot väliltä $[f(a), f(b)]$.

f^{-1}:n aito kasvavuus: lause 45.

f^{-1}:n jatkuvuus: Olkoon $y_0 = f(x_0) \in (f(a), f(b))$ (päätepisteet vastaavasti). Osoitetaan, että f^{-1} on jatkuva pisteessä y_0. Valitaan $\epsilon > 0$ niin pieneksi, että $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset [a, b]$. Koska f on aidosti kasvava, niin $f(x_0 - \epsilon) < y_0 < f(x_0 + \epsilon)$. Nyt voidaan valita $\delta > 0$ siten, että $(y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subset (f(x_0 - \epsilon), f(x_0 + \epsilon))$, jolloin f^{-1}:n aidon kasvavuuden nojalla $f^{-1}((y_0 - \delta, y_0 + \delta)) \subset (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$. Piirrä kuva! □

2.3 Derivaatta

Tässä luvussa tarkastellaan osittain peruskursseilta tuttujen derivoituvia funktioita koskevien tulosten (kuten ääriarvojen hakeminen ja funktion monotonisuuden tutkiminen derivaatan avulla) teoreettista perustaa. Alkeisfunktioiden derivointikaavat perustellaan liitteessä A.5 ja derivointitekniikka oletetaan tunnetuksi.

Määritelmä 2.3.1. Olkoon funktio f määritelty avoimella välillä (a, b) ja olkoon $x_0 \in (a, b)$ (ts. x_0 on määrittelyjoukon sisäpiste). Funktion f *derivaatta (derivative) pisteessä* x_0 on

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \tag{89}$$

mikäli ko. raja-arvo on olemassa. Tällöin sanotaan, että f on *derivoituva (differentiable) pisteessä* x_0.

Avoimessa joukossa $S \subset \mathbb{R}$ määritelty funktio $f \colon S \to \mathbb{R}$ on *derivoituva (differentiable)*, mikäli sillä on derivaatta jokaisella $x_0 \in S$. Tällöin myös funktiota $f'(x)$ kutsutaan f:n *derivaataksi.*

Määritelmässä esiintyvää osamäärää kutsutaan *erotusosamääräksi (difference quotient).* Asettamalla $x = x_0 + h$ voidaan derivaatta pisteessä x_0 kirjoittaa yhtäpitävästi myös raja-arvona

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.} \tag{90}$$

Määritelmän määrittelyehdot funktiolle f (avoin väli (a, b) ja avoin joukko S) takaavat, että erotusosamäärä on määritelty kaikilla pienillä h, eli esimerkiksi tutkittaessa raja-arvoa (89) on olemassa $\delta > 0$ siten, että erotusosamäärä on määritelty, kun $-\delta < h < \delta$.

Funktion $y = f(x)$ derivaattaa merkitään myös

$$\boxed{f'(x) = D_x f(x) = Df(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{dy}{dx}.}$$

Esimerkki 91. Laske funktion $f(x) = 3x^2 - 7x + 5$ derivaatta pisteessä $x = 3$.

$$\begin{aligned} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} &= \frac{(3(3+h)^2 - 7(3+h) + 5) - (3 \cdot 3^2 - 7 \cdot 3 + 5)}{h} \\ &= \frac{3h^2 + 11h}{h} = 3h + 11 \to 11, \quad \text{kun } h \to 0, \end{aligned}$$

joten $f'(3) = 11$.

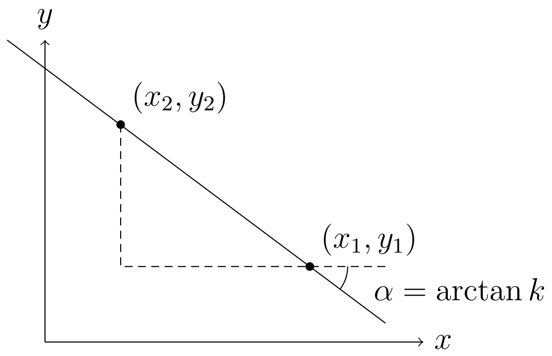
Lause 92. *Jos f on derivoituva pisteessä x_0, niin f on jatkuva pisteessä x_0.*

Todistus. On osoitettava, että $f(x) \to f(x_0)$, kun $x \to x_0$. Näin on, sillä

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \to f'(x_0) \cdot 0 = 0, \quad \text{kun } x \to x_0. \quad \square$$

Käänteinen väite ei päde, eli jatkuva funktio ei välttämättä ole derivoituva. Esimerkiksi tästä käy funktion $f(x) = |x|$ käyttäytyminen pisteessä $x = 0$.

Derivoituvuuden tulkintoja



Muistetaan, että pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) kautta kulkevan suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

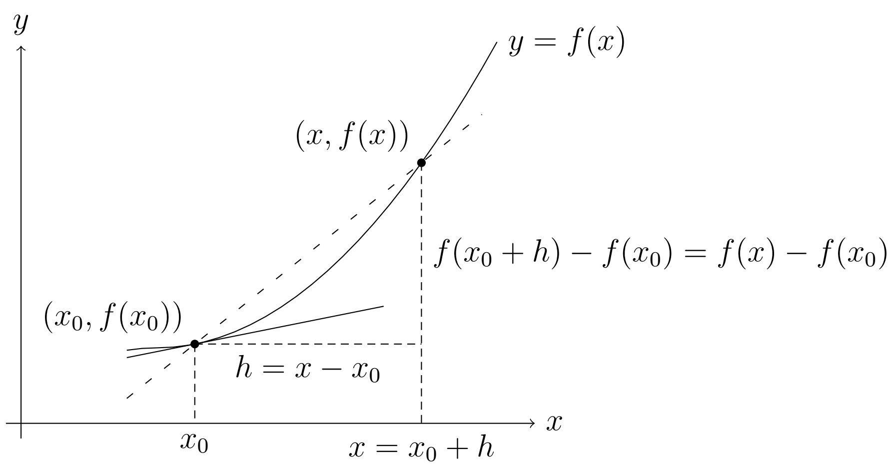
ja suoran yhtälö $y - y_1 = k(x - x_1)$, ts.

$$\boxed{y = y_1 + k(x - x_1).} \tag{93}$$

Nyt nähdään, että geometrisesti erotusosamäärä on xy-tason pisteiden $(x_0, f(x_0))$ ja $(x, f(x))$ kautta kulkevan *sekantin (secant)* kulmakerroin *(slope)*. Siten derivaatan olemassaolo pisteessä $x = x_0$ tarkoittaa sitä, että kuvaajalla $y = f(x)$ on pisteessä $(x_0, f(x_0))$ *tangenttisuora*, jonka kulmakerroin on $f'(x_0)$, jolloin tangenttisuoran yhtälö on

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).} \tag{94}$$

Oheisessa kuvassa on hahmoteltu tapaus $h > 0$ (h voi olla myös negatiivinen).



Derivoituvan funktion kuvaajalla on jokaisessa pisteessä tangenttisuora, joten kuvaajalla ei voi olla kärkiä tai kulmia.

Määritelmän 2.3.1 mukaan pisteessä x_0 derivoituvalle funktiolle f pätee

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

ts.

$$\lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right) = 0.$$

Merkitään tässä sulkulauseketta $\epsilon(h)$:lla, ts.

$$\epsilon(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0).$$

Ratkaistaan tästä $f(x_0+h)$:

$$\underbrace{f(x_0+h)}_{\text{tarkka arvo}} = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)h}_{\text{arvio}} + \underbrace{h\epsilon(h)}_{\text{virhe}}, \tag{95}$$

missä $\epsilon(h)$ on funktio, jolle $\epsilon(h) \to 0$, kun $h \to 0$. Esitystä (95) kutsutaan funktion f *differentiaalikehitelmäksi* pisteessä x_0. Koska $x = x_0 + h$, niin kaava (95) voidaan kirjoittaa etäisyyden h sijaan x:n funktiona seuraavasti:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\epsilon(x - x_0).$$

Kurssikirjassa [15] käytetään funktiota $E(x) = \epsilon(x - x_0) = \epsilon(h)$, jolloin

$$\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = \lim_{x\to x_0} \epsilon(x - x_0) = \lim_{x\to x_0} E(x) = 0$$

ja kehitelmä (95) tulee muotoon

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)E(x) \\ &= f(x_0) + [f'(x_0) + E(x)](x - x_0). \end{aligned}$$

Päättely voidaan kääntää myös toiseen suuntaan, eli differentiaalikehitelmästä seuraa derivoituvuus:

Lemma 2.3.2. *Funktio f on derivoituva määrittelyjoukon sisäpisteessä x_0 jos ja vain jos on olemassa $A \in \mathbb{R}$ ja funktio $\epsilon\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siten, että $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$ ja*

$$f(x_0+h) = f(x_0) + Ah + h\epsilon(h)$$

kaikilla (itseisarvoltaan pienillä) $h \in \mathbb{R}$. Tällöin $A = f'(x_0)$.

Jättämällä kehitelmästä (95) pois *virhetermi* $h\epsilon(h)$ saadaan arvio funktion arvolle $f(x_0+h)$:

$$f(x_0+h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h, \tag{96}$$

tai merkitsemällä $x = x_0 + h$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Tässä oikean puolen funktio

$$\boxed{T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)} \tag{97}$$

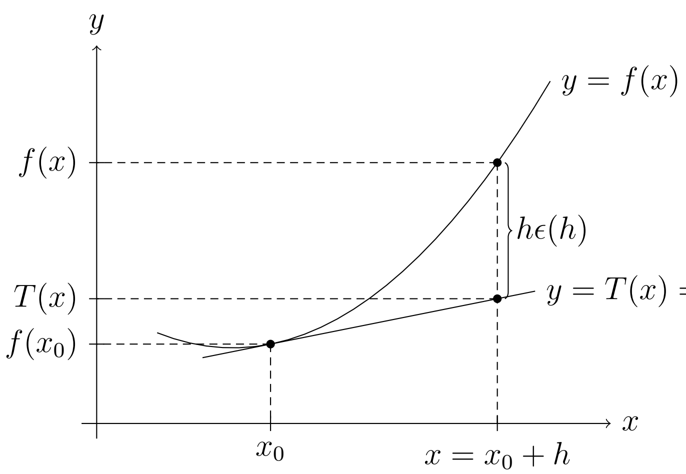
on funktio, jonka kuvaaja on f:n kuvaajan pisteeseen $(x_0, f(x_0))$ piirretty tangenttisuora. Funktiosta $T(x)$ käytetään nimityksiä f:n *lineaarinen approksimaatio (arvio)*, *tangenttiapproksimaatio* ja *linearisointi* pisteessä x_0. Lineaarisessa arviossa $f(x) \approx T(x)$ tehty virhe on

$$f(x) - T(x) = h\epsilon(h),$$

jolle pätee

$$\frac{\text{virhe}}{x\text{:n muutos}} = \frac{h\epsilon(h)}{h} = \epsilon(h) \to 0, \quad \text{kun } h \to 0.$$

Lähellä x_0:aa tehty virhe on siis mitätön suhteessa etäisyyteen x_0:sta ja f:n kuvaaja näyttää likimain tangenttisuoraltaan $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.



Nimitys ”lineaarinen arvio” johtuu siitä, että funktio $L\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $L(h) = f'(x_0)h$ on lineaarikuvaus ja arvio voidaan kirjoittaa vakion ja lineaarikuvauksen summana: $f(x_0+h) \approx f(x_0) + L(h)$.

Derivointi aritmeettisissa operaatioissa

Lause 2.3.4 (Derivoinnin perussäännöt)**.** *Olkoot f ja g derivoituvia pisteessä x_0. Tällöin funktiot $f+g$, $f-g$ ja fg ovat derivoituvia pisteessä x_0 ja*

(1) $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$

(2) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

Jos $g(x_0) \neq 0$, niin myös f/g on derivoituva pisteessä x_0 ja

(3) $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Todistus. (1) on suoraviivainen todeta erotusosamäärän avulla.
(2) Raja-arvon laskusääntöjen (lause 2.1.4) mukaan funktion fg erotusosamäärälle pisteessä x_0 pätee

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h} \\
&= \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0+h) + f(x_0)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h} \\
&= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} g(x_0+h) + f(x_0)\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \\
&\to f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0), \quad \text{kun } h \to 0.
\end{aligned}$$

Tässä $\lim\limits_{h\to 0} g(x_0+h) = g(x_0)$, sillä g on lauseen 92 mukaan jatkuva pisteessä x_0.
(3) Tutkitaan ensin funktion $1/g$ erotusosamäärää pisteessä x_0. g on jatkuva x_0:ssa ja $g(x_0) \neq 0$, joten $g(x) \neq 0$ ja siten $1/g(x)$ on määritelty jossakin x_0:n ympäristössä (lause 70). Voidaan laventaa $g(x_0+h)g(x_0)$:llä:

$$\frac{\dfrac{1}{g(x_0+h)} - \dfrac{1}{g(x_0)}}{h} = \frac{g(x_0) - g(x_0+h)}{h} \frac{1}{g(x_0+h)g(x_0)} \to -g'(x_0)\frac{1}{g(x_0)^2},$$

kun $h \to 0$. Saatiin siis toditettua derivoimissääntö

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}. \tag{98}$$

Nyt kohdasta (2) ja säännöstä (98) seuraa

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \left(f\frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) \\
&= \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - f(x_0)\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.
\end{aligned}$$ □

Lause 99. *Vakiofunktion $f(x) = c$ derivaatta on* 0.

Todistus. Kaikilla x on

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0. \qquad \square$$

Lause 100 (Potenssifunktion derivoimiskaava)**.** *Olkoon $n \in \mathbb{Z}$ (ja $x \neq 0$, jos $n < 0$). Tällöin*

$$D(x^n) = nx^{n-1}.$$

Todistus. Tapauksessa $n = 0$ kaava sanoo, että $D(1) = 0$, joka seuraa lauseesta 99. Todistetaan kaava induktiolla, kun $n \geq 1$.
(1) Alkuaskel ($n = 1$):

$$D\left(x^1\right) = D(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1 = 1 \cdot x^0.$$

(2) Induktioaskel: Oletetaan, että kaava pätee jollekin $n = k \geq 1$, ts. $D(x^k) = kx^{k-1}$. Tällöin tulon derivoimissäännön (lause 2.3.4) nojalla

$$D(x^{k+1}) = D(x \cdot x^k) = D(x)x^k + xD(x^k) = x^k + kx^k = (k+1)x^k.$$

Siten kaava pätee myös n:n arvolla $n = k + 1$.

Tapauksessa $n < 0$ merkitään $m = -n$. Koska $m > 0$, niin edellä todetun perusteella $D(x^m) = mx^{m-1}$ ja osamäärän derivoimissääntöä käyttäen saadaan

$$D(x^n) = D\left(\frac{1}{x^m}\right) = -\frac{D(x^m)}{(x^m)^2} = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1} = nx^{n-1}. \qquad \square$$

Lauseista 2.3.4 ja 100 seuraa, että polynomit ja rationaalifunktiot ovat derivoituvia määrittelyjoukoissaan ja ne voidaan derivoida em. tuloksia käyttäen.

Esimerkki 101. a) Funktion $f(x) = x^3 - \dfrac{1}{x^5}$ derivaatta on

$$f'(x) = 3x^2 - D(x^{-5}) = 3x^2 - (-5)x^{-6} = 3x^2 + \frac{5}{x^6}.$$

b) Funktion $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x^3 - 7}$ derivaatta on

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x^3-7) - (x^2+x)3x^2}{(x^3-7)^2} = \frac{-x^4 - 2x^3 - 14x - 7}{(x^3-7)^2}.$$

Esimerkki 102. Mikä on käyrän $y = x^3 - 4x^2 + 7$ pisteeseen $(3, -2)$ piirretyn tangenttisuoran yhtälö?
Ratkaisu. Kyseessä on funktion $y = y(x)$ kuvaaja, joten tangenttisuoran kulmakertoimen antaa derivaatan arvo pisteessä $x = 3$: $y'(x) = 3x^2 - 8x$, joten $y'(3) = 3$. Siten tangenttisuoran yhtälö (94) on

$$y - (-2) = 3(x - 3), \text{ ts. } y = 3x - 11.$$

Ketjusääntö

Lause 2.3.5 (Ketjusääntö, The Chain Rule)**.** *Olkoon g derivoituva pisteessä x_0 ja f derivoituva pisteessä $g(x_0)$. Silloin yhdistetty funktio $f \circ g$ on derivoituva pisteessä x_0 ja*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

Todistus. Oletuksista ja g:n jatkuvuudesta pisteessä x_0 seuraa, että yhdistetty funktio $f \circ g$ on määritelty x_0:n ympäristössä. Käytetään differentiaalikehitelmää (95) ensin sisäfunktiolle g ja sitten ulkofunktiolle f:

$$\begin{aligned}
&(f \circ g)(x_0 + \Delta x) = f(g(x_0 + \Delta x)) \\
&= f\Big(g(x_0) + \underbrace{g'(x_0)\Delta x + \Delta x \epsilon_g(\Delta x)}_{=:\Delta y}\Big) \\
&= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))\Delta y + \Delta y \epsilon_f(\Delta y) \\
&= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))g'(x_0)\Delta x \\
&\qquad + \Delta x \underbrace{\left(f'(g(x_0))\epsilon_g(\Delta x) + g'(x_0)\epsilon_f(\Delta y) + \epsilon_g(\Delta x)\epsilon_f(\Delta y)\right)}_{=:\epsilon(\Delta x)} \\
&= (f \circ g)(x_0) + f'(g(x_0))g'(x_0)\Delta x + \Delta x \epsilon(\Delta x).
\end{aligned}$$

Kun $\Delta x \to 0$, niin myös $\Delta y \to 0$, joten $\epsilon(\Delta x) \to 0$. Niinpä $f \circ g$ on derivoituva pisteessä x_0 ja derivaatta on $f'(g(x_0))g'(x_0)$. $\square$

Esimerkki 103. Derivoi $h(x) = \left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^{11}$.

Ratkaisu. Tulkitaan h funktioksi $h(x) = f(g(x))$, missä $f(y) = y^{11}$ ja $g(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$. Koska $f'(y) = 11y^{10}$, niin

$$h'(x) = 11\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{10} D\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) = 11\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{10}\left(2x - \frac{1}{x^2}\right).$$

Lause 104 (Käänteisfunktion derivoimissääntö)**.** *Olkoon f aidosti kasvava (vähenevä) ja derivoituva välillä I. Merkitään $y = f(x)$. Tällöin käänteisfunktio $f^{-1}\colon f(I) \to I$ on derivoituva välillä $f(I)$ niissä pisteissä y, joille $f'(x) \neq 0$, ja derivaatta on*

$$D_y f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)} \qquad (y = f(x)).$$

Todistus. Lauseen 2.2.15 mukaan f^{-1} on jatkuva ja $f(I)$ on väli. Tutkitaan f^{-1}:n erotusosamäärää pisteessä $y_0 = f(x_0)$. Merkitään $y = f(x)$ ja vaaditaan, että $y \neq y_0$, jolloin myös $x \neq x_0$. Nyt

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \to \frac{1}{f'(x_0)}, \text{ kun } y \to y_0,$$

sillä f^{-1} on jatkuva ja siten $x = f^{-1}(y) \to f^{-1}(y_0) = x_0$, kun $y \to y_0$. □

Esimerkki 105. Olkoon $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$. Laske $f'(x)$.
Ratkaisu. f:llä on aidosti kasvava ja derivoituva käänteisfunktio $x = f^{-1}(y) = y^3$, jolle $D_y f^{-1}(y) = 3y^2$. Siten myös f on derivoituva ja

$$f'(x) = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2} = \frac{1}{3}x^{-2/3}.$$

Tämän esimerkin menetelmällä saadaan perusteltua potenssifunktion derivoimiskaava rationaalisille eksponenteille. Muiden alkeisfunktioiden derivoimiskaavat perustellaan liitteessä A.5.

Lause 106 (Potenssifunktion derivoimiskaava)**.** *Olkoon $r \in \mathbb{Q}$ ja $x \neq 0$ (ja lisäksi määritelmän 314 määrittelyehto voimassa). Tällöin*

$$D(x^r) = rx^{r-1}.$$

Todistus. Tutkitaan ensin funktiota $y = f(x) = x^{1/n}$, $n \in \mathbb{N}$. f:llä on aidosti kasvava ja derivoituva käänteisfunktio $x = f^{-1}(y) = y^n$, jolle $D_y f^{-1}(y) = ny^{n-1}$. Siten myös f on derivoituva ja

$$f'(x) = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n(x^{1/n})^{n-1}} = \frac{1}{n}x^{1/n-1}.$$

Siten lauseen väite pätee, kun r on muotoa $r = 1/n$.

Yleisessä tapauksessa kirjoitetaan $r = m/n$, missä $n \in \mathbb{N}$. Nyt ketjusäännön mukaan

$$\begin{aligned} D(x^r) &= D((x^{1/n})^m) = m(x^{1/n})^{m-1}D(x^{1/n}) = m(x^{1/n})^{m-1}\frac{1}{n}(x^{1/n-1}) \\ &= \frac{m}{n}x^{m/n-1} = rx^{r-1}. \end{aligned}$$ □

Esimerkki 107. a) $D\sqrt{x} = D(x^{1/2}) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

b) Funktion $f(x) = \left(\sqrt{3x^2 - 7}\right)^3$ derivaatta on

$$f'(x) = D\Big((3x^2 - 7)^{3/2}\Big) = \frac{3}{2}(3x^2 - 7)^{1/2} \cdot 6x = 9x\sqrt{3x^2 - 7}.$$

Toispuoleiset derivaatat

Määritelmä 108. Funktion $f\colon [x_0, b) \to \mathbb{R}$ *oikeanpuoleinen derivaatta (right-hand derivative) pisteessä* x_0 on

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Funktion $f\colon (a, x_0] \to \mathbb{R}$ *vasemmanpuoleinen derivaatta (left-hand derivative) pisteessä* x_0 on

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Funktio on derivoituva pisteessä x_0 jos ja vain jos sillä on x_0:ssa sekä vasemman- että oikeanpuoleinen derivaatta ja ne ovat yhtäsuuret. Tällöin

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0).$$

Määritelmä 2.3.6. Suljetulla välillä $[a, b]$ määritelty funktio $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ on *derivoituva (differentiable)*, mikäli sillä on derivaatta jokaisella $x_0 \in (a, b)$ ja lisäksi välin päätepisteissä on olemassa toispuoleiset derivaatat $f'_+(a)$ ja $f'_-(b)$.

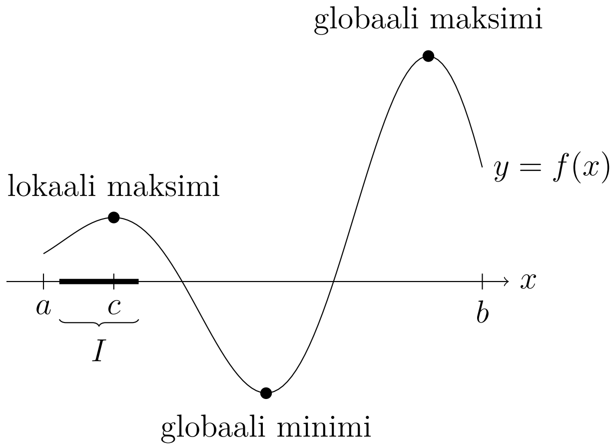
Funktion ääriarvot

Määritelmä 109. Funktiolla $f\colon A \to \mathbb{R}$ on pisteessä $c \in A$

- *(globaali) maksimi*, jos $f(x) \leq f(c)$ kaikilla $x \in A$,
- *(globaali) minimi*, jos $f(x) \geq f(c)$ kaikilla $x \in A$,
- *lokaali maksimi*, jos on olemassa c:n ympäristö I siten, että $f(x) \leq f(c)$ kaikilla $x \in I \cap A$,
- *lokaali minimi*, jos on olemassa c:n ympäristö I siten, että $f(x) \geq f(c)$ kaikilla $x \in I \cap A$.

Pistettä c kutsutaan *ääriarvopisteeksi* (*minimipisteeksi* tai *maksimipisteeksi*) ja arvoa $f(c)$ *ääriarvoksi* (*minimiarvoksi* tai *maksimiarvoksi*). Funktion f globaalia maksimiarvoa joukossa A merkitään $\max_A f$ tai $\max f$ ja minimiarvoa $\min_A f$ tai $\min f$.

Tyypillisesti tarkastelujoukko on suljettu ja rajoitettu väli, ts. $A = [a, b]$. Muistetaan lause 2.2.9: jos f on jatkuva, niin se saavuttaa suljetulla ja rajoitetulla välillä $[a, b]$ pienimmän ja suurimman arvonsa.



Lause 2.3.7. *Jos c on f:n lokaali ääriarvokohta ja f on derivoituva pisteessä c, niin $f'(c) = 0$.*

Todistus. Oletetaan, että c on lokaali maksimipiste. Koska f on derivoituva, niin

$$f'(c) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

ja koska c on lokaali maksimipiste, niin $f(c+h) - f(c) \leq 0$ pienillä h. Siten pienillä $h > 0$ on

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

ja niinpä

$$f'(c) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0.$$

Vastaavasti pienillä $h < 0$ on

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

ja siten

$$f'(c) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0.$$

Nyt $f'(c) \leq 0$ ja $f'(c) \geq 0$, joten on oltava $f'(c) = 0$. □

Määritelmä 110. Pistettä c, jossa $f'(c) = 0$ tai jossa f ei ole derivoituva, kutsutaan f:n *kriittiseksi pisteeksi (critical point)*.

Olemme näin saaneet perusteltua tutun ääriarvojen etsintäohjeen:

Lause 111. *Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Silloin f saavuttaa pienimmän ja suurimman arvonsa, ja jos c f:n ääriarvopiste, niin c on joko kriittinen piste tai välin $[a,b]$ päätepiste.*

Differentiaalilaskennan väliarvolause ja sen sovelluksia

Differentiaalilaskennan väliarvolause on keskeinen työkalu derivoituvien funktioiden ominaisuuksien tutkimisessa. Siitä seuraa mm. funktion kasvua koskeva lause 2.3.13 ja l'Hôpitalin sääntö. Rollen lause on tekninen apuneuvo väliarvolauseen todistamiseksi.

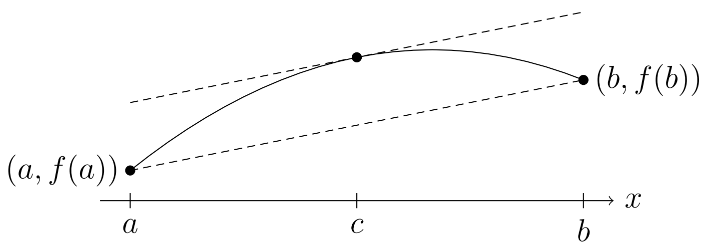
Lause 112 (Rollen lause)**.** *Oletetaan, että f on jatkuva välillä $[a,b]$ ja derivoituva välillä (a,b). Jos $f(a)=f(b)=0$, niin $f'(c)=0$ eräällä $c\in(a,b)$.*

Todistus. Lauseen 2.2.9 mukaan f saavuttaa maksiminsa ja miniminsä välillä $[a,b]$. Jos $\max f=\min f=0$, niin f on vakiofunktio ja $f'(c)=0$ kaikilla $c\in(a,b)$ (lause 99). Muutoin $\max f\neq 0$ tai $\min f\neq 0$. Silloin maksimi tai minimi saavutetaan pisteessä $c\in(a,b)$, koska $f(a)=f(b)=0$. Lauseen 2.3.7 mukaan tällöin $f'(c)=0$. □

Lause 2.3.11 (Differentiaalilaskennan väliarvolause (DVAL), Mean Value Theorem)**.** *Oletetaan, että f on jatkuva välillä $[a,b]$ ja derivoituva välillä (a,b). Silloin eräällä $c\in(a,b)$ on*

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Geometrisesti lauseen väite on ilmeinen: tangentin kulmakerroin on jossakin välin pisteessä c sama kuin pisteiden $(a,f(a))$ ja $(b,f(b))$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin.



Lause seuraa yleistetystä differentiaalilaskennan väliarvolauseesta (lause 2.3.10). Annetaan sille kuitenkin tässä yksinkertainen todistus Rollen lausetta käyttäen.

Todistus. Funktio

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

toteuttaa Rollen lauseen oletukset välillä $[a, b]$ (tarkasta!) ja

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Niinpä eräällä $c \in (a, b)$ on

$$0 = F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \qquad \square$$

Väliarvolauseesta seuraa keskeiset funktion kulusta kertovat lauseet.

Lause 2.3.12. *Oletetaan, että f on jatkuva välillä $[a, b]$ ja että $f'(x) = 0$ kaikilla $x \in (a, b)$. Silloin f on vakiofunktio.*

Todistus. Olkoon $x \in (a, b]$. Sovelletaan väliarvolausetta välillä $[a, x]$: eräällä $c \in (a, x)$ on

$$0 = f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Siten $f(x) - f(a) = 0$ eli $f(x) = f(a)$. $\square$

Seuraus 113 (Integraalifunktion yksikäsitteisyys)**.** *Olkoot f ja g derivoituvia välillä I. Jos $f'(x) = g'(x)$ kaikilla $x \in I$, niin on olemassa vakio C siten, että $f(x) = g(x) + C$ kaikilla $x \in I$.*

Todistus. Sovella lausetta 2.3.12 funktioon $f - g$. $\square$

Lause 2.3.13. *Oletetaan, että f on jatkuva välillä $[a, b]$ ja että $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) kaikilla $x \in (a, b)$. Silloin f on aidosti kasvava (aidosti vähenevä) välillä $[a, b]$.*

Todistus. Olkoon $f'(x) > 0$ kaikilla $x \in (a, b)$ (tapaus $f'(x) < 0$ vastaavasti). Olkoot u ja $v \in [a, b]$, $u < v$. On osoitettava, että $f(u) < f(v)$. Sovelletaan väliarvolausetta välillä $[u, v]$:

$$f'(c) = \frac{f(v) - f(u)}{v - u} \quad \Leftrightarrow \quad f(v) - f(u) = f'(c)(v - u).$$

Koska $f'(c) > 0$ ja $v - u > 0$, niin $f(v) - f(u) > 0$ ja siten $f(u) < f(v)$. $\square$

Huomautus 114. Korostettakoon, että kasvavuuteen vaaditaan $f'(x) > 0$ koko välillä (a, b). Esimerkiksi funktiolle

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{2}, & \text{kun } x \neq 0, \\ 0, & \text{kun } x = 0, \end{cases}$$

on $f'(0) > 0$, mutta f ei ole kasvava millään 0:n sisältävällä välillä.

Differentiaalilaskennan väliarvolause antaa työkalun, jolla käytännössä monesti lasketaan toispuoleiset derivaatat:

Lause 115. *Oletetaan, että f on jatkuva välillä $[a,b]$ ja derivoituva välillä (a,b). Jos derivaatalla on olemassa raja-arvo*

$$L = \lim_{x \to a+} f'(x), \tag{116}$$

niin silloin f:llä on a:ssa oikeanpuoleinen derivaatta $f'_+(a)$ ja $f'_+(a) = L$. Vastaava tulos pätee vasemmanpuoleiselle derivaatalle $f'_-(b)$.

Todistus. Olkoon $x > a$, $x \in (a,b)$. Sovelletaan differentiaalilaskennan väliarvolausetta välillä $[a,x]$: eräällä $c(x) \in (a,x)$ on

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c(x)).$$

Tehdään näin jokaisella $x \in (a,b)$ ja tutkitaan em. erotusosamäärän raja-arvoa. Koska $c(x) \to a+$, kun $x \to a+$, niin

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a+} f'(c(x)) = \lim_{c \to a+} f'(c) = L. \qquad \square$$

Esimerkki 117. Tarkastellaan itseisarvofunktiota $f(x) = |x|$. Koska

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{kun } x < 0, \\ x, & \text{kun } x \geq 0, \end{cases}$$

niin $f(x)$ on jatkuva $\mathbb{R}$:ssä ja derivoituva, kun $x \neq 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{kun } x < 0, \\ 1, & \text{kun } x > 0. \end{cases}$$

Lauseen 115 mukaan pisteessä 0 on olemassa toispuoleiset derivaatat

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0-} f'(x) = -1 \quad \text{ja} \quad f'_+(0) = \lim_{x \to 0+} f'(x) = 1.$$

Huomautus 118. a) Lauseen 115 oletus jatkuvuudesta on oleellinen. Esimerkiksi esimerkin 76 funktiolle $\lim_{x \to 1+} f'(x) = -1$, mutta f:llä ei ole oikeanpuoleista derivaattaa $f'_+(1)$.
b) Oletus (116) tarkoittaa, että f' on oikealta jatkuva pisteessä a. Aina näin ei ole derivoituvallekaan funktiolle. Esimerkiksi funktio

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{kun } x \neq 0, \\ 0, & \text{kun } x = 0, \end{cases}$$

on derivoituva 0:ssa ja $f'(0) = 0$, mutta raja-arvoa $\lim_{x \to 0+} f'(x)$ ei ole olemassa.

Lause 2.3.10 (Yleistetty differentiaalilaskennan väliarvolause, Generalized Mean Value Theorem)**.** *Oletetaan, että f ja g ovat jatkuvia välillä $[a, b]$ ja derivoituvia välillä (a, b). Silloin eräällä $c \in (a, b)$ on*

$$(g(b) - g(a))f'(c) = (f(b) - f(a))g'(c). \tag{119}$$

Tämä tulos yleistää väliarvolauseen: asettamalla $g(x) = x$ saadaan väliarvolause 2.3.11. Kirjoittamalla (119) muotoon

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

saadaan yleistetylle väliarvolauseelle seuraava tulkinta: funktioiden f ja g kasvunopeuksien suhde pisteessä c on sama kuin kokonaiskasvujen suhde.

Todistus. Jos $g(a) = g(b)$, niin väliarvolauseen (lause 2.3.11) mukaan $g'(c) = 0$ eräällä $c \in (a, b)$. Tämä c toteuttaa yhtälön (119).

Tapauksessa $g(a) \neq g(b)$ määritellään funktio

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

F toteuttaa Rollen lauseen oletukset välillä $[a, b]$ ja

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(x).$$

Niinpä eräällä $c \in (a, b)$ on

$$0 = F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(c).$$ □

Lipschitz-jatkuvuus

Määritelmä 120. Funktio $f : I \to \mathbb{R}$ on *Lipschitz-jatkuva (Lipschitz-continuous)* välillä I, jos on olemassa $M \in \mathbb{R}$ siten, että

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

kaikilla x ja $y \in I$.

Lipschitz-jatkuvuus on vahvempi ominaisuus kuin jatkuvuus: jokainen Lipschitz-jatkuva funktio on jatkuva, mutta käänteinen tulos ei päde.

Lause 2.3.13. *Oletetaan, että f on derivoituva välillä I ja derivaatta on rajoitettu, ts. on olemassa $M \in \mathbb{R}$ siten, että $|f'(x)| \leq M$ kaikilla $x \in I$. Tällöin f on Lipschitz-jatkuva välillä I.*

Todistus. Seuraa suoraan väliarvolauseesta 2.3.11. □

2.4 l'Hôpitalin sääntö

Lause 2.4.1 (l'Hôpitalin sääntö). *Olkoot f ja g derivoituvia ja $g'(x) \neq 0$ pisteen a punkteeratussa ympäristössä. Oletetaan, että on olemassa raja-arvot*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0,$$

ja raja-arvo

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Silloin on olemassa myös raja-arvo

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Vastaavat tulokset ovat voimassa myös tapauksessa $a = \pm\infty$ tai $L = \pm\infty$.

Todistus. Oletuksista seuraa, että f ja g voidaan jatkaa jatkuviksi pisteessä a ja $f(a) = g(a) = 0$. Niinpä voidaan soveltaa kullakin $x > a$ yleistettyä väliarvolausetta 2.3.10 välillä $[a, x]$: on olemassa $c(x) \in (a, x)$ siten, että

$$(g(x) - g(a))f'(c(x)) = (f(x) - f(a))g'(c(x)). \tag{121}$$

Koska g':lla ei oletuksen mukaan ole nollakohtia välillä (a, x), niin väliarvolauseesta 2.3.11 seuraa, että $g(x) - g(a) \neq 0$. Kun lisäksi $g(a) = 0$, niin $g(x) \neq 0$ ja (121) saadaan muotoon

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}.$$

Kun $x \to a$, niin $c(x) \to a$, joten on olemassa raja-arvo

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Rajankäynti $x \to a-$ vastaavasti. □

l'Hôpitalin säännöllä voidaan yrittää selvittää raja-arvoa epämääräisessä tapauksessa $\frac{0}{0}$ tai $\frac{\infty}{\infty}$.

Esimerkki 122. **a)** $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(2x)}{\ln x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{2x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} 1 = 1$

Huomautus 123. Käytännössä l'Hôpitalin sääntöä sovellettaessa kirjoitetaan

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Tarkkaan ottaen tämä ei aina pidä paikkaansa, sillä vasemmanpuoleinen raja-arvo saattaa olla olemassa, vaikka oikeanpuoleista ei olisikaan [15, Example 2.4.5].

2.5 Taylorin kaava

Palataan kaavojen (95) ja (97) lineaariseen approksimaatioon funktiolle f: jos f on derivoituva x_0:ssa, niin

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\epsilon(x-x_0)(x-x_0),$$

missä $\epsilon\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ on funktio, jolle $\lim\limits_{h\to 0}\epsilon(h)=0$. Tässä f:ää approksimoidaan ensimmäisen asteen polynomilla

$$T_1(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0), \tag{124}$$

jonka kuvaaja kulkee pisteen $(x_0,f(x_0))$ kautta ja jonka kuvaajan kulmakertoimena on $f'(x_0)$, toisin sanoen

$$T_1(x_0)=f(x_0)\quad\text{ja}\quad T_1'(x_0)=f'(x_0). \tag{125}$$

Tällöin arviossa $f(x)\approx T_1(x)$ tehty virhe on

$$f(x)-T_1(x)=\epsilon(x-x_0)(x-x_0).$$

Miten f:ää voitaisiin approksimoida korkeamman asteen polynomeilla ja mikä virhe silloin olisi?

Määritelmä 126. Olkoon f derivoituva pisteen x_0 ympäristössä. Jos derivaatta f' on derivoituva x_0:ssa, niin sen derivaattaa kutsutaan f:n *toiseksi derivaataksi pisteessä* x_0 ja merkitään $f''(x_0)=f^{(2)}(x_0)$. Jos toinen derivaatta f'' on olemassa x_0:n ympäristössä ja se on derivoituva x_0:ssa, niin sen derivaattaa kutsutaan f:n *kolmanneksi derivaataksi pisteessä* x_0 ja merkitään $f'''(x_0)=f^{(3)}(x_0)$.

Yleisesti n:s derivaatta ($n\in\mathbb{N}$) määritellään induktiivisesti: f:n *nollas derivaatta* $f^{(0)}$ on funktio itse, ts. $f^{(0)}=f$. Jos derivaatta $f^{(n-1)}$ on olemassa x_0:n ympäristössä ja se on derivoituva x_0:ssa, niin $f^{(n-1)}$:n derivaatta x_0:ssa on *f:n n:s derivaatta pisteessä* x_0 ja sitä merkitään $f^{(n)}(x_0)$. Jos n:s derivaatta on olemassa jonkin avoimen joukon $S\subset\mathbb{R}$ jokaisessa pisteessä $x\in S$, niin myös funktiota $f^{(n)}$ kutustaan f:n *n:nneksi derivaataksi.* Usein merkitään myös

$$f^{(n)}=\frac{d^nf}{dx^n}.$$

Huomautus 127. Jos n:s derivaatta $f^{(n)}(x_0)$ on olemassa, niin määritelmä 126 vaatii, että kaikki alemmat derivaatat f, f', $f^{(2)}, \dots, f^{(n-1)}$ ovat olemassa jossakin x_0:n ympäristössä.

Määritelmä 128. Jos $n \in \mathbb{N}$, niin määritellään *n-kertoma (factorial)* $n!$ asettamalla

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

Lisäksi asetetaan $0! = 1$.

Oletetaan nyt, että f:llä on x_0:ssa n:s derivaatta $f^{(n)}(x_0)$. Approksimoidaan f:ää n:nnen asteen polynomilla

$$\begin{aligned} T_n(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k. \end{aligned} \tag{129}$$

Huomautus 130. a) Esityksen (129) ensimmäisessä termissä $(x-x_0)^0 = 1$, jos $x \neq x_0$. Mukavuussyistä sovitaan, että tässä (mutta ei ilman harkintaa muualla!) $0^0 = 1$, jolloin ensimmäinen termi on $a_0(x-x_0)^0 = a_0$ kaikilla x.
b) Mikä tahansa n:nnen asteen polynomi $P(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ voidaan esittää $(x-x_0)$:n potensseina muodossa (129). Jätetään tämän todistaminen harjoitustehtäväksi.

Ehto (125) yleistyy muotoon

$$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \quad 0 \le k \le n.$$

Ratkaistaan polynomin T_n kertoimet a_k derivoimalla T_n k kertaa:

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{j=0}^{n} a_j(x-x_0)^j \\ T_n'(x) &= \sum_{j=1}^{n} j a_j(x-x_0)^{j-1} \\ T_n''(x) &= \sum_{j=2}^{n} j(j-1) a_j(x-x_0)^{j-2} \\ &\vdots \\ T_n^{(k)}(x) &= \sum_{j=k}^{n} j(j-1)(j-2)\cdots(j-k+1) a_j(x-x_0)^{j-k} \end{aligned}$$

Siten

$$T_n^{(k)}(x_0) = k(k-1)(k-2)\cdots 2 \cdot 1 a_k = k! a_k,$$

sillä $(x-x_0)^{j-k} = 0$ kun $x = x_0$ ja $k \neq j$. Tästä ratkaistaan

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},$$

eli

$$\boxed{T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.} \tag{131}$$

Polynomia $T_n(x)$ kutsutaan funktion f n:nnen asteen *Taylorin polynomiksi (Taylor polynomial) pisteessä x_0 (pisteen x_0 suhteen).*

Huomataan, että tapauksessa $n = 1$ saadaan tuttu ensimmäisen asteen polynomi (124).

Lemma 132. *Olkoon olemassa $f^{(n+1)}(x_0)$ ($n \in \mathbb{N}$) ja olkoon T_{n+1} f:n astetta $n+1$ oleva Taylorin polynomi pisteessä x_0. Silloin T'_{n+1} on f':n astetta n oleva Taylorin polynomi pisteessä x_0.*

Todistus. Derivoidaan:

$$\begin{aligned} T'_{n+1}(x) &= D\left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(f')^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k. \end{aligned}$$ □

Lause 2.5.1. *Olkoon olemassa $f^{(n)}(x_0)$ ($n \in \mathbb{N}$) ja olkoon T_n f:n Taylorin polynomi pisteessä x_0. Silloin*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0. \tag{133}$$

Todistus. Induktio.
$n = 1$: Oletus on nyt, että f on derivoituva x_0:ssa. (133) pätee, koska se on derivoituvuuden määritelmä.
$n \geq 1$: Oletetaan, että (133) pätee arvolla n kaikille f, joille on olemassa $f^{(n)}(x_0)$. Olkoon nyt f funktio, jolle on olemassa $f^{(n+1)}(x_0)$. Silloin

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}} \overset{\text{l'Hôpital}}{=} \frac{1}{n+1} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - T'_{n+1}(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

käyttämällä induktio-oletusta funktiolle f' ja sen n:nnen asteen Taylorin polynomille T'_{n+1} (lemma 132). □

Lemma 2.5.2. *Olkoon olemassa $f^{(n)}(x_0)$ ($n \in \mathbb{N}$) ja olkoon T_n f:n Taylorin polynomi pisteessä x_0. Silloin*

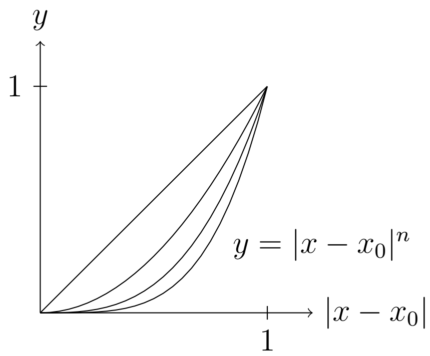
$$f(x) = T_n(x) + \epsilon_n(x - x_0)(x - x_0)^n, \tag{134}$$

missä $\lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$.

Todistus. Väite seuraa lauseesta 2.5.1 asettamalla

$$\epsilon_n(x - x_0) = \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n}. \qquad \square$$

Lause 2.5.1 tietyllä tapaa yleistää derivaatan erotusosamäärämääritelmän. Lemma 2.5.2 puolestaan yleistää lemman 2.3.2. Lisäksi nähdään, että lähellä pistettä x_0, eli kun $|x - x_0|$ on pieni, polynomiapproksimaation virhe $f(x) - T_n(x)$ pienenee n:n kasvaessa, jos $\epsilon_n(x - x_0)$ pysyy kurissa. On kuitenkin tapauksia, joissa n:n kasvattaminen ei lainkaan paranna tarkkuutta. Näin käy esimerkiksi esimerkissä 300, jossa kaikkien asteiden Taylorin polynomit ovat identtisesti nollia.



Seuraava Taylorin kaava on työkalu, jota useimmiten käytetään arvioidessa polynomiapproksimaation virhettä:

Lause 2.5.4 (Taylorin kaava)**.** *Olkoon funktiolla $f\colon I \to \mathbb{R}$ olemassa derivaatta $f^{(n+1)}$ avoimella välillä I ja olkoon $x_0 \in I$. Silloin kaikilla $x \in I$ on voimassa*

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \tag{135}$$

missä

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad \text{missä } z \in [x_0, x) \text{ tai } z \in (x, x_0]. \tag{136}$$

Kaavaa (135) kutsutaan *Taylorin kaavaksi (Taylor's formula)* ja funktiota $R_n(x)$ *Taylorin jäännöstermiksi (Taylor remainder)*. Kurssikirjassa todistetaan ensin induktiolla laajennettu väliarvolause (Theorem 2.5.5), jonka seurauksena Taylorin kaava saadaan. Annetaan tässä Taylorin kaavalle suora todistus.

Todistus. Jos $x = x_0$, niin asia on selvä: $T_n(x_0) = f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$ ja $R_n(x_0) = 0$. Olkoon siis $x \neq x_0$. Määritellään funktio $F\colon I \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$F(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k + A(x-t)^{n+1},$$

missä vakio A on valittu niin, että $F(x_0) = f(x)$. Näin voidaan tehdä, sillä

$$F(x_0) = T_n(x) + A(x-x_0)^{n+1} = f(x),$$

jos

$$A = \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}.$$

Oletuksen mukaan kaikki derivaatat $f^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, ovat derivoituvia (ja erityisesti siis jatkuvia) välillä I. Siten F on jatkuva suljetulla välillä, jonka päätepisteet ovat x ja x_0, ja derivoituva vastaavalla avoimella välillä. Sovelletaan differentiaalilaskennan väliarvolausetta (lause 2.3.11) tällä välillä funktioon F: on olemassa z pisteiden x ja x_0 välissä siten että

$$F(x) - F(x_0) = F'(z)(x-x_0).$$

Koska lisäksi $F(x) = f(x) = F(x_0)$, niin $F'(z) = 0$. Lasketaan $F(t)$:n derivaatan lauseke:

$$\begin{aligned}
F'(t) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}k(x-t)^{k-1} - A(n+1)(x-t)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{(k+1)!}(k+1)(x-t)^{k-1} - A(n+1)(x-t)^n \\
&= \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - A(n+1)(x-t)^n \\
&= \left(\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} - A(n+1)\right)(x-t)^n,
\end{aligned}$$

koska $(k+1)/(k+1)! = 1/k!$. Siten

$$F'(z) = \left(\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!} - A(n+1)\right)(x-z)^n = 0,$$

josta ratkaistaan

$$A = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)n!} = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}.$$

Niinpä

$$f(x) = F(x_0) = T_n(x_0) + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \qquad \square$$

Yleensä Taylorin kaavaa käytetään tilanteessa, jossa $(n+1)$. derivaatta tiedetään rajoitetuksi, ts. $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ kaikilla x. Tällöin virheen itseisarvolle pätee

$$|f(x) - T_n(x)| = |R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1}.$$

Esimerkki 137. a) Arvioi lukua $e^{0.1}$ funktion $f(x) = e^x$ toisen asteen Taylorin polynomilla 0:n suhteen.
b) Millä tarkkuudella toisen asteen Taylorin polynomi 0:n suhteen approksimoi e^x:ää välillä $[-1, 1]$?
c) Hae polynomi, joka approksimoi e^x:ää kahden desimaalin tarkkuudella välillä $[-1, 1]$. "Kahden desimaalin tarkkuudella" tarkoittaa tässä, että virhe < 0.005.
Ratkaisu. a) Koska nyt $f^{(k)}(x) = e^x$ kaikilla k, niin $f^{(k)}(0) = 1$ kaikilla k. Siten toisen asteen Taylorin polynomi 0:n suhteen on

$$T_2(x) = 1 + (x - 0)^1 + \frac{1}{2!}(x - 0)^2 = 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

Kysytty arvio on siis

$$e^{0.1} = f(0.1) \approx T_2(0.1) = 1 + 0.1 + \frac{0.1^2}{2} = 1.105.$$

Arvioidaan tässä tehtyä virhettä Talorin jäännöstermillä:

$$f(0.1) - T_2(0.1) = R_2(0.1) = \frac{f^{(3)}(z)}{3!}(0.1 - 0)^3 = \frac{e^z 0.1^3}{6},$$

missä $0 < z < 0.1$. Koska $0 < e^z < e^{0.1} < e^1 < 3$, niin

$$0 < f(0.1) - T_2(0.1) < 3 \cdot 0.1^3/6 = 0.0005,$$

eli

$$1.105 < e^{0.1} < 1.1055.$$

b) Nyt

$$|f(x) - T_2(x)| = |R_2(x)| = \frac{|f^{(3)}(z)|}{3!}|x-0|^3 = \frac{|e^z||x|^3}{6},$$

missä $x \in [-1,1]$ ja z on x:n ja 0:n välissä, joten ainakin $z \in (-1,1)$. Voidaan arvioida

$$|R_2(x)| \le \frac{e^1|1|^3}{6} < \frac{3 \cdot 1}{6} = 0.5.$$

Niinpä arviossa

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

tehty virhe välillä $-1 \le x \le 1$ on korkeintaan 0.5.
c) Arvioidaan arvion $f(x) \approx T_n(x)$ virhettä ($x, z \in [-1,1]$ kuten edellä):

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!}|x-0|^{n+1} = \frac{|e^z||x|^{n+1}}{(n+1)!} \le \frac{|e^1|1^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Vaaditaan, että

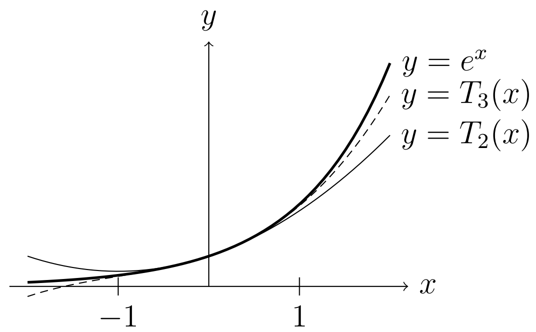
$$\frac{3}{(n+1)!} < 0.005.$$

Kokeilemalla havaitaan, että epäyhtälö toteutuu, kun $n = 5$. Siten haluttuun tarkkuuteen pääsemiseksi riittää käyttää 5:nnen asteen Taylorin polynomia, eli

$$e^x \approx T_5(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$$

kahden desimaalin tarkkuudella välillä $-1 \le x \le 1$.

Seuraavassa kuvassa havainnollistetaan e^x:n Taylorin polynomeja 0:n suhteen. Kolmannen asteen polynomi approksimoi selvästi paremmin kuin toisen asteen polynomi. Viidennen asteen polynomin kuvaaja olisi kuvan piirtotarkkuuden rajoissa sama kuin e^x:n kuvaaja.



Osoitetaan vielä, että Taylorin polynomi on ainoa polynomi, joka approksimoi f:ää siten, että (134) pätee:

Lause 138. *Olkoon funktiolla $f\colon I \to \mathbb{R}$ olemassa derivaatta $f^{(n+1)}$ avoimella välillä I ja olkoon $x_0 \in I$. Jos P on n:nnen asteen polynomi siten, että*

$$f(x) - P(x) = \epsilon(x - x_0)(x - x_0)^n, \tag{139}$$

missä $\lim_{x\to x_0} \epsilon(x - x_0) = 0$, niin P on f:n n:nnen asteen Taylorin polynomi pisteessä x_0.

Todistus. Yhtälön (134) mukaan Taylorin polynomille T_n pätee

$$f(x) - T_n(x) = \epsilon_n(x - x_0)(x - x_0)^n. \tag{140}$$

Vähentämällä yhtälöt (139) ja (140) puolittain toisistaan saadaan

$$T_n(x) - P(x) = (\epsilon(x - x_0) - \epsilon_n(x - x_0))(x - x_0)^n =: \varepsilon(x - x_0)(x - x_0)^n,$$

missä $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x-x_0) = 0$. Erotuspolynomi $T_n - P$ on n:nnen asteen polynomi, joten se voidaan huomautuksen 130 **b)** mukaan kirjoittaa

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k = \varepsilon(x - x_0)(x - x_0)^n. \tag{141}$$

Tutkimalla raja-arvoa $x \to x_0$ nähdään, että on oltava $a_0 = 0$. Tämän jälkeen jaetaan yhtälö (141) puolittain $(x - x_0)$:lla ja samalla tavoin saadaan $a_1 = 0$. Näin jatkaen saadaan $a_0 = \cdots = a_n = 0$, eli $T_n - P = 0$. $\square$

3 Riemann-integraali

Perusopintojaksoilla *Riemann-integraali* määriteltiin Riemannin summan raja-arvona. Tätä raja-arvoa ja sen olemassaoloa eri tilanteissa ei kuitenkaan ollut mahdollista juurikaan käsitellä. Tällä opintojaksolla pohditaan tarkemmin, mistä tässä rajaprosessissa on kyse. Myöhemmillä opintojaksoilla tutustutaan *Lebesguen integraaliin*, joka on yleisempi ja moniin sovelluksiin joustavampi integraalin käsite. Riemann-integraali on kuitenkin hyvin intuitiivinen ja siihen liittyvän koneiston hallinta on käytännössä välttämätöntä yleisempien integraalikäsitteiden ymmärtämiseksi.

3.1 Integraalin määritelmä

Jaetaan väli $[a, b]$ osaväleihin *jakopisteillä (partition point)*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b. \tag{142}$$

Jakopisteiden muodostamaa joukkoa

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

kutsutaan välin $[a, b]$ *jaoksi (partition)*. *Jaon normiksi (norm)* $\|P\|$ sanotaan pisimmän osavälin pituutta:

$$\|P\| = \max\{x_i - x_{i-1} : \ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

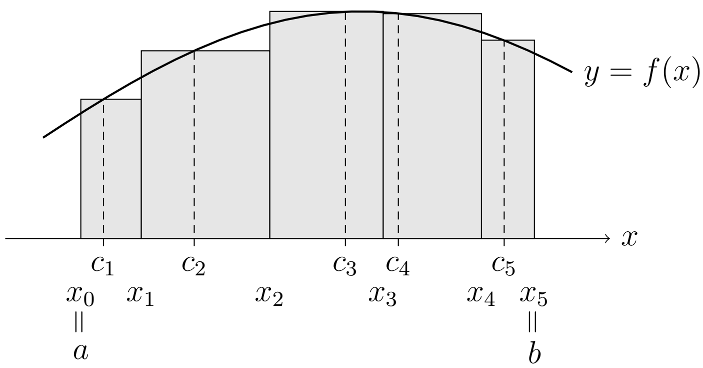
i:nnen osavälin pituutta merkitään $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Jos Δx_i on sama kaikilla i, niin jako on *tasavälinen*. Välin $[a, b]$ jako voidaan valita äärettömän monella eri tavalla; vaikka osavälejä olisi yhtä monta, voidaan jakopisteet valita miten tahansa, kunhan (142) pätee.

Jos välin $[a, b]$ jaoille P ja P' pätee $P \subset P'$, ts. P' on saatu P:stä lisäämällä jakopisteitä, niin jako P' on jaon P *hienonnus (refinement)*.

Olkoon seuraavaksi $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ välillä $[a, b]$ määritelty funktio ja $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ välin $[a, b]$ jako. Valitaan pisteet $c = \{c_1, \ldots, c_n\}$ siten, että $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, ts. valitaan jokaiselta osaväliltä (mielivaltainen) piste c_i. Määritellään funktiolle f jakoon P ja pisteisiin c liittyvä *Riemannin summa*

$$\sigma = R(P, c) = R_f(P, c) := \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x_i. \tag{143}$$

Seuraavassa havannollistetaan erästä Riemannin summaa ei-negatiiviselle funktiolle.



Määritelmä 3.1.1. Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ rajoitettu funktio. f on *Riemann-integroituva* (tai lyhyesti *integroituva*), jos on olemassa reaaliluku I siten, että seuraava pätee: kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|R(P,c) - I| < \epsilon, \tag{144}$$

olipa P mikä tahansa välin $[a,b]$ jako, jolle $\|P\| < \delta$, ja $c = \{c_1, \dots, c_n\}$ mitkä tahansa siihen liittyvät jakopisteet. Tällöin lukua I kutsutaan f:n *Riemann-integraaliksi* (tai lyhyesti *integraali*) yli välin $[a,b]$ ja merkitään

$$I = \int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Määritelmän ehto (144) merkitään usein lyhyesti

$$I = \lim_{\|P\| \to 0} R(P,c). \tag{145}$$

Tällöin on muistettava, että rajankäynti tehdään kaikkien jakojen P ja kaikkien siihen liittyvien pisteiden c valintojen suhteen.

Kurssikirjan määritelmässä [15, Def 3.1.1] ei suoraan vaadita, että f olisi rajoitettu. Kuitenkin funktio, joka on kirjan määritelmän mukaan integroituva, on aina rajoitettu [15, Thm 3.1.2]. Määritelmä 3.1.1 ja kirjan määritelmä ovat siis yhtäpitävät.

Jos $f \geq 0$, niin geometrisesti Riemannin summan (143) kukin termi $f(c_i)\Delta x_i$ voidaan tulkita sellaisen suorakulmion pinta-alaksi, jonka alareuna on x-akselilla välillä $[x_{i-1}, x_i]$ ja ja yläreuna korkeudella $y = f(c_i)$. Riemannin summa antaa siis arvion x-akselin ja funktion kuvaajan väliin jäävän alueen pinta-alalle välillä $[a,b]$. Jos f on integroituva, niin *määritellään*, että kyseinen pinta-ala on olemassa ja että integraali

$$\int_a^b f$$

on kyseinen pinta-ala.

Vastaavasti jos $f \leq 0$ ja f on integroituva, niin f:n kuvaajan ja x-akselin väliin jäävän joukon pinta-ala on

$$-\int_a^b f.$$

Lause 146. *Vakiofunktio* $f(x) = C$ *on integroituva välillä* $[a, b]$ *ja*

$$\int_a^b C\,dx = C(b-a).$$

Todistus. Mille tahansa jaolle P ja pisteiden $c = \{c_1, \ldots, c_n\}$ valinnalle pätee $f(c_i) = C$, joten

$$R(P, c) = \sum_{i=1}^{n} C\Delta x_i = C\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = C(b-a).$$

Väite seuraa. □

Ylä- ja alaintegraali

Riemann-integraali voidaan Riemannin summien sijaan määritellä yhtäpitävästi myös ylä- ja alasummien avulla. Molemmilla näistä tavoista on omat hyvät puolensa. Riemannin summat on intuitiivisesti ja geometrisesti havainnollinen tapa ja sen vuoksi se koulussa ja peruskursseilla esitellään, mutta sen tarkempi tekninen käsittely on vaikeaa kahdestakin syystä: Riemannin summan pisteiden c valinnan vapaus tuottaa hankaluuksia ja integraalin arvo I määritelmän 3.1.1 ehdossa (144) pitäisi etukäteen tietää. Ylä- ja alasummat ovat teknisesti tehokkaampia työkaluja integraalin tutkimiseen.

Seuraavassa annetaan ensin ylä- ja alasummien sekä ylä- ja alaintegraalien määritelmät. Luvun 3.1 loppuosassa pohditaan annettujen määritelmien järkevyyttä ja geometrista tulkintaa, ja lopulta luvussa 3.2 todistetaan ylä- ja alaintegraalien yhteys integraaliin.

Määritelmä 3.1.3. Jos $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on rajoitettu funktio ja $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ välin $[a,b]$ jako, niin merkitään

$$M_i = \sup\{f(x)\colon x \in [x_{i-1}, x_i]\} \qquad \text{ja} \qquad m_i = \inf\{f(x)\colon x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Tällöin f:n *yläsumma (upper sum) jaon P suhteen* on

$$S(P) = S_f(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

ja f:n *alasumma (lower sum) jaon P suhteen* on

$$s(P) = s_f(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i.$$

f:n *yläintegraali (upper integral) yli välin* $[a,b]$ on

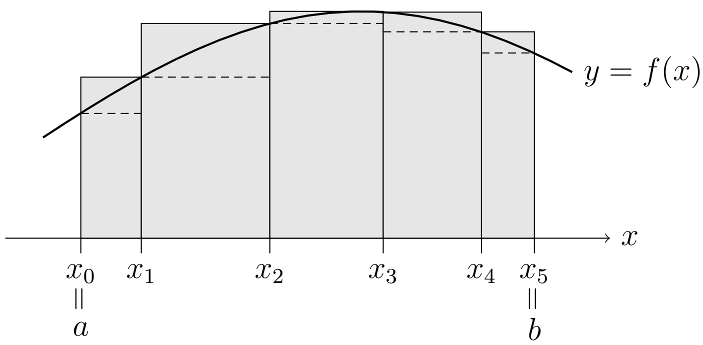
$$\overline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx := \inf\{S(P)\colon P \text{ on välin } [a,b] \text{ jako}\} \tag{147}$$

ja f:n *alaintegraali (lower integral) yli välin* $[a,b]$ on

$$\underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx := \sup\{s(P)\colon P \text{ on välin } [a,b] \text{ jako}\}. \tag{148}$$

Määritelmän 3.1.3 tilanteessa jokainen joukko $\{f(x)\colon x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ on sekä alhaalta että ylhäältä rajoitettu, joten supremum ja infimum M_i ja m_i ovat aina olemassa. Huomaa, että ylä- ja alasummien määritelmissä jako P on kiinnitetty, kun taas ylä- ja alaintegraalien määritelmissä infimum ja supremum otetaan yli kaikkien mahdollisten jakojen P.

Jos $f \geq 0$, niin geometrisesti yläsumman kukin termi $M_i \Delta x_i$ voidaan tulkita sellaisen suorakulmion pinta-alaksi, jonka alareuna on x-akselilla välillä $[x_{i-1}, x_i]$ ja ja yläreuna korkeudella $y = M_i$ kuvaajan yläpuolella (kuvassa yhtenäinen viiva). Vastaavasti alasumma on kuvaajan alapuolella olevien tolppien yhteenlaskettu pinta-ala (kuvassa katkoviiva).



Jos m on f:n alaraja ja M yläraja, ts. $m \le f(x) \le M$ kaikilla $x \in [a,b]$, niin

$$S(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M \Delta x_i = M \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = M(b-a).$$

Vastaavalla tavoin alasummalle $s(P) \ge m(b-a)$. Lisäksi $m_i \le M_i$ jokaisella i, joten $s(P) \le S(P)$. Siten jokaiselle jaolle P pätee

$$m(b-a) \le s(P) \le S(P) \le M(b-a). \tag{149}$$

Tämän epäyhtälöketjun mukaan yläsummien muodostama joukko

$$\{S(P)\colon P \text{ on välin } [a,b] \text{ jako}\}$$

yläintegraalin määritelmässä (147) on alhaalta rajoitettu, joten sillä on infimum ja siten yläintegraalin määritelmä (147) on järkevä. Vastaavasti alasummien muodostama joukko

$$\{s(P)\colon P \text{ on välin } [a,b] \text{ jako}\}$$

alaintegraalin määritelmässä (148) on ylhäältä rajoitettu, joten sillä on supremum ja siten alaintegraalin määritelmä (148) on järkevä.

Seuraava lemma kertoo ylä- ja alaintegraalien määritelmien taustalla olevan idean: hienontamalla jakoa alasummat kasvavat ja yläsummat pienenevät, ja ottamalla näistä supremum ja infimum voidaan ajatella, että jakoa ”hienonnetaan rajatta”.

Lemma 150. *Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ rajoitettu funktio ja P ja P' välin $[a,b]$ jakoja siten, että $P \subset P'$. Tällöin*

$$s(P) \le s(P') \qquad \text{ja} \qquad S(P') \le S(P).$$

Toisin sanoen jakoa hienontamalla alasumma kasvaa ja yläsumma pienenee.

Todistus. Todistus perustuu havaintoon, että jos $A \subset B$, niin $\sup A \leq \sup B$ (infimumille vastaavasti). Tutkitaan ensin tapausta, jossa jakoon $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ lisätään yksi jakopiste z ja saadaan näin tiheämpi jako $P' = P \cup \{z\}$. Nyt z on eräällä välillä $[x_{i-1}, x_i]$. Jaetaan se kahteen osaan $[x_{i-1}, z]$ ja $[z, x_i]$ ja verrataan välillä $[x_{i-1}, x_i]$ yläsumman termiä alkuperäiselle jaolle ja hienomman jaon vastaavia kahta termiä:

$$\begin{aligned}
&\sup\{f(x)\colon x \in [x_{i-1}, x_i]\}(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sup\{f(x)\colon x \in [x_{i-1}, x_i]\}(z - x_{i-1}) + \sup\{f(x)\colon x \in [x_{i-1}, x_i]\}(x_i - z) \\
&\geq \sup\{f(x)\colon x \in [x_{i-1}, z]\}(z - x_{i-1}) + \sup\{f(x)\colon x \in [z, x_i]\}(x_i - z).
\end{aligned}$$

Tästä seuraa $S(P') \leq S(P)$. Alasummalle vastaavasti. Yleinen tapaus (P':ssa n kpl enemmän pisteitä kuin P:ssä) seuraa induktiolla. □

Lopuksi myöhemmin tarvittava havainto ylä- ja alasummien ja Riemannin summan välisestä yhteydestä. Jos jako P on kiinnitetty, niin suoraan määritelmistä 3.1.3 ja (143) seuraa, että

$$s(P) \leq R(P, c) \leq S(P). \tag{151}$$

Kiinnitetyllä P Riemannin summa $R(P, c)$ on siis sekä ylhäältä että alhaalta rajoitettu, joten sillä on supremum ja infimum pisteiden c valinnan suhteen. Geometrisesti on helppo uskoa seuraava tulos.

Lause 3.1.4. *Olkoon $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ rajoitettu ja P välin $[a, b]$ jako. Tällöin*

$$S(P) = \sup\{R(P, c)\colon\ c\} \quad \textit{ja} \quad s(P) = \inf\{R(P, c)\colon\ c\}.$$

3.2 Integraalin olemassaolo

Tässä luvussa todistetaan ensin ylä- ja alaintegraalien yhteys integroituvuuteen (lause 3.2.6) ja sen jälkeen rakennetaan koneistoa integroituvuuden tutkimiseksi. Tähän mennessä olemme näyttäneet vain vakiofunktion intergoituvaksi lauseessa 146. Riemannin ehdon (lause 3.2.7) avulla lopulta saadaan todistettua, että esimerkiksi jatkuvat funktiot ovat integroituvia.

Aloitetaan perustelemalla ylä- ja alasummien ja ylä- ja alaintegraalien (kuvasta katsoen selvältä näyttävä) järjestys.

Lemma 152. *Olkoot R ja T epätyhjiä rajoitettuja reaalilukujoukkoja. Oletetaan lisäksi, että $r \leq t$ kaikilla $r \in R$ ja $t \in T$. Silloin $\sup R \leq \inf T$.*

Todistus. Epäsuora todistus: oletetaan, että $a = \sup R > \inf T = b$. Valitaan $\epsilon = (a-b)/2 > 0$. Nyt lauseiden 1.1.3 ja 1.1.8 mukaan on olemassa $r \in R$ ja $t \in T$ siten, että

$$r > a - \epsilon \qquad \text{ja} \qquad t < b + \epsilon.$$

Tästä seuraa

$$r - t > (a-\epsilon) - (b+\epsilon) = 0,$$

joten $r > t$. Tämä on ristiriita oletuksen $r \leq t$ kanssa. □

Lemma 153. *Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ rajoitettu funktio ja P_1 ja P_2 välin $[a,b]$ jakoja. Silloin $s(P_1) \leq S(P_2)$.*

Todistus. Jako $P = P_1 \cup P_2$ on sekä jaon P_1 että jaon P_2 hienonnus, joten lemman 150 ja yhtälön (149) mukaan

$$s(P_1) \leq s(P) \leq S(P) \leq S(P_2).$$ □

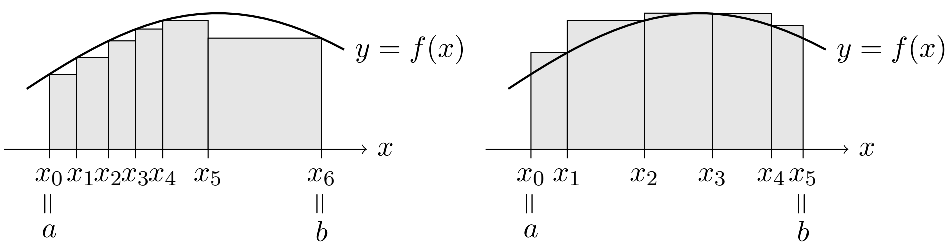
Lause 3.2.2. *Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ rajoitettu funktio. Silloin*

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f.$$

Todistus. Jos otetaan mikä tahansa alkio $s(P_1) \in \{s(P)\colon P \text{ on välin } [a,b] \text{ jako}\}$ ja mikä tahansa alkio $S(P_2) \in \{S(P)\colon P \text{ on välin } [a,b] \text{ jako}\}$, niin lemman 153 mukaan $s(P_1) \leq S(P_2)$. Nyt lemman 152 mukaan

$$\sup\{s(P)\colon P \text{ on välin } [a,b] \text{ jako}\} \leq \inf\{S(P)\colon P \text{ on välin } [a,b] \text{ jako}\}.$$ □

Alla olevassa kuvassa havannollistetaan alasummaa $s(P_1)$ eräällä jaolla P_1 ja yläsummaa $S(P_2)$ eräällä jaolla P_2.



Seuraava lemma antaa rajan sille, kuinka paljon yläsumma pienenee ja alasumma kasvaa jakoa hienonnettaessa.

Lemma 3.2.1. *Oletetaan, että* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *rajoitettu, ts.* $|f(x)| \le M$ *kaikilla* $x \in [a,b]$. *Olkoon* $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ *välin* $[a,b]$ *jako ja olkoon* P' *hienompi jako, jossa on* r *pistettä enemmän kuin* P*:ssä. Silloin*

$$S(P') \ge S(P) - 2Mr\|P\| \quad \text{ja} \quad s(P') \le s(P) + 2Mr\|P\|.$$

Todistus. Todistetaan yläsummia koskeva väite.

Tapaus $r = 1$. P:hen on lisätty yksi piste z, eli $P' = P \cup \{z\}$. Olkoon z jaon P i:nnellä osavälillä: $z \in (x_{i-1}, x_i)$. Merkitään

$$M_i^1 = \sup\{f(x)\colon x \in [x_{i-1}, z]\} \quad \text{ja} \quad M_i^2 = \sup\{f(x)\colon x \in [z, x_i]\}.$$

Yläsummissa $S(P)$ ja $S(P')$ kaikki muut termit ovat samoja paitsi väliä $[x_{i-1}, x_i]$ koskevat termit. Niinpä

$$\begin{aligned} S(P) - S(P') &= M_i(x_i - x_{i-1}) - M_i^1(z - x_{i-1}) - M_i^2(x_i - z) \\ &= (M_i - M_i^1)(z - x_{i-1}) + (M_i - M_i^2)(x_i - z). \end{aligned}$$

Koska $0 \le M_i - M_i^j \le 2M$ $(j = 1, 2)$, niin

$$S(P) - S(P') \le 2M(x_i - x_{i-1}) \le 2M\|P\|,$$

toisin sanoen $S(P') \ge S(P) - 2M\|P\|$.

Yleinen tapaus $r > 1$ seuraa nyt induktiolla. □

Lause 3.2.6. *Olkoon* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *rajoitettu funktio.* f *on integroituva jos ja vain jos*

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f =: I.$$

Tällöin $I = \int_a^b f$.

Todistus. "⇒" Mille tahansa jaolle P ja pisteille c pätee

$$\left| \overline{\int_a^b} f - I \right| \le \left| \overline{\int_a^b} f - S(P) \right| + |S(P) - R(P,c)| + |R(P,c) - I|.$$

Olkoon $\epsilon > 0$. Oletuksen mukaan on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|R(P,c) - I| < \frac{\epsilon}{3}$$

aina kun $\|P\| < \delta$. Määritelmän 3.1.3 ja lemman 150 mukaan on olemassa jako P siten, että $\|P\| < \delta$ ja

$$\overline{\int_a^b} f \le S(P) < \overline{\int_a^b} f + \frac{\epsilon}{3}.$$

Lauseen 3.1.4 mukaan tälle jaolle P voidaan valita pisteet c siten, että

$$S(P) - \frac{\epsilon}{3} \leq R(P, c) \leq S(P).$$

Näin saadulle jaolle P pätee

$$\left| \overline{\int_a^b} f - I \right| < \epsilon.$$

Tämä pätee kaikille $\epsilon > 0$, joten $\overline{\int_a^b} f = I$. Vastaavalla tavoin saadaan $\underline{\int_a^b} f = I$.

"$\Leftarrow$" Olkoon $\epsilon > 0$. Oletuksen ja määritelmän 3.1.3 mukaan on olemassa välin $[a, b]$ jako P_0 siten, että

$$I \leq S(P_0) \leq I + \frac{\epsilon}{2}.$$

Merkitään näin kiinnitetyn jaon P_0 jakopisteiden lukumäärää r:llä. Valitaan lisäksi luku $M > 0$ siten, että $|f(x)| \leq M$ kaikilla $x \in [a, b]$.

Olkoon nyt P mielivaltainen välin $[a, b]$ jako ja tarkastellaan hienonnettua jakoa $P' = P_0 \cup P$. Nyt P':ssa on korkeintaan r pistettä enemmän kuin P:ssä, joten lemmasta 3.2.1 seuraa, että

$$S(P') \geq S(P) - 2Mr\|P\|.$$

Siten

$$\begin{aligned}
R(P, c) &\leq S(P) && \text{yhtälö (151)} \\
&\leq S(P') + 2Mr\|P\| \\
&\leq S(P_0) + 2Mr\|P\| && \text{lemma 150} \\
&< I + \frac{\epsilon}{2} + 2Mr\|P\|.
\end{aligned}$$

Jos tässä P valitaan siten, että $\|P\| < \dfrac{\epsilon}{4Mr} =: \delta_1$, niin pisteiden c valinnasta riippumatta

$$R(P, c) < I + \epsilon.$$

Vastaavalla tavoin alasummia tutkimalla löydetään $\delta_2 > 0$ siten, että

$$I - \epsilon \leq R(P, c)$$

aina kun $\|P\| < \delta_2$. Valitsemalla $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ on siten

$$|R(P, c) - I| < \epsilon$$

aina kun $\|P\| < \delta$. Niinpä f on integroituva ja integraali on I. $\square$

Palataan geometriseen tulkintaan tapauksessa $f \geq 0$. Kukin alasumma $s(P)$ antaa arvion alhaalta päin kuvaajan $y = f(x)$ ja x-akselin rajaamalle pinta-alalle, mikäli pinta-ala on olemassa. Yläsumma $S(P)$ antaa vastaavasti pinta-alalle arvion ylhäältä päin. Jos f on integroituva, niin kyseinen pinta-ala on olemassa ja lauseen 3.2.6 mukaan pinta-alojen arvioiden infimum ylhäältä ja supremum alhaalta yhtyvät, ja pinta-ala on tämä yhteinen arvo. Vertaa sinun 80 kuviin.

Esimerkki 154. Olkoon $a < b$. Osoitetaan, että funktio $f(x) = x^2$ on integroituva välillä $[a, b]$ ja lasketaan integraali.

Tarkastella yksinkertaisuuden vuoksi tilannetta $a \geq 0$. Valitaan välille $[a, b]$ kullakin $n \in \mathbb{N}$ tasavälinen jako P_n, jonka jakopisteinä ovat

$$x_i = a + i\frac{b-a}{n} = a + id, \qquad i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}.$$

Tässä jakovälin pituus $\Delta x_i = (b-a)/n =: d$ on vakio. f:n kasvavuudesta johtuen kullakin jakovälillä f saavuttaa suurimman arvonsa välin loppupisteessä ja pienimmän alkupisteessä, joten i:nnellä jakovälillä

$$\begin{aligned} M_i &= \sup\{f(x) \colon x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(x_i) = (a+id)^2 \quad \text{ja} \\ m_i &= \inf\{f(x) \colon x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(x_{i-1}) = (a+(i-1)d)^2. \end{aligned}$$

Lasketaan yläsumma:

$$\begin{aligned} S(P_n) &= \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (a+id)^2 d = d \sum_{i=1}^{n} (a^2 + 2aid + i^2 d^2) \\ &= d\left(\sum_{i=1}^{n} a^2 + 2ad \sum_{i=1}^{n} i + d^2 \sum_{i=1}^{n} i^2\right) \\ &= d\left(na^2 + 2ad\frac{n(n+1)}{2} + d^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \\ &= \frac{b-a}{n} na^2 + 2a\frac{(b-a)^2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{(b-a)^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &\to (b-a)a^2 + a(b-a)^2 + \frac{(b-a)^3}{3} = \frac{1}{3}(b^3 - a^3), \end{aligned}$$

kun $n \to \infty$. Tässä käytettiin summakaavoja

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{ja} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

jotka voidaan todistaa induktiolla. Yläintegraalin määritelmästä seuraa, että

$$\overline{\int_a^b} x^2 \, dx \leq \frac{1}{3}(b^3 - a^3).$$

Vastaavalla tavoin alasumma laskemalla voidaan perustella, että

$$\underline{\int_a^b} x^2\,dx \geq \frac{1}{3}(b^3 - a^3).$$

Nyt lauseen 3.2.2 mukaan

$$\frac{1}{3}(b^3 - a^3) \leq \underline{\int_a^b} x^2\,dx \leq \overline{\int_a^b} x^2\,dx \leq \frac{1}{3}(b^3 - a^3).$$

Niinpä f on integroituva välillä $[a, b]$ ja

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3).$$

Esimerkki 155. Samaan tapaan voidaan osoittaa, että lineaarinen funktio $f(x) = kx$ ($k \in \mathbb{R}$) on integroituva jokaisella välillä $[a, b]$ ja

$$\int_a^b kx\,dx = \frac{k}{2}(b^2 - a^2).$$

Esimerkki 156. Funktio

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & \text{kun } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

ei ole integroituva millään välillä $[a, b]$: Jos P on mikä tahansa välin $[a, b]$ jako, niin jokaisella jakovälillä on sekä rationaalisia että irrationaalisia pisteitä ja siten $m_i = -1$ ja $M_i = 1$, jolloin

$$s(P) = \sum_{i=1}^{n}(-1)\Delta x_i = -(b - a) \quad \text{ja} \quad S(P) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = b - a.$$

Tästä seuraa, että

$$\underline{\int_a^b} f = -(b - a) < b - a = \overline{\int_a^b} f.$$

Seuraavaa perustyökalua käytetään mm. jatkuvien funktioiden integroituvuuden ja luvun 3.3 integraalin perusominaisuuksien todistamiseen. Lause sanoo, että funktio on integroituva täsmälleen silloin, kun ylä- ja alasummat voidaan saada sopivalla jaon valinnalla mielivaltaisen lähelle toisiaan. Vertaa sivun 78 kuvaan.

Lause 3.2.7 (Riemannin ehto, The Riemann Condition)**.** *Rajoitettu funktio $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on integroituva jos ja vain jos jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa välin $[a,b]$ jako P siten, että*

$$S(P) - s(P) < \epsilon. \tag{157}$$

Todistus. "$\Rightarrow$" Oletetaan, että f on Riemann-integroituva. Olkoon $\epsilon > 0$. Lauseen 3.2.6 ja määritelmän 3.1.3 mukaan on olemassa jako P_1 siten, että

$$\int_a^b f > S(P_1) - \frac{\epsilon}{2}$$

ja jako P_2 siten, että

$$\int_a^b f < s(P_2) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Nyt jaolle $P = P_1 \cup P_2$ pätee

$$S(P) \leq S(P_1) < \int_a^b f + \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{ja} \qquad s(P) \geq s(P_2) > \int_a^b f - \frac{\epsilon}{2},$$

joten

$$S(P) - s(P) < \left(\int_a^b f + \frac{\epsilon}{2}\right) - \left(\int_a^b f - \frac{\epsilon}{2}\right) = \epsilon.$$

"$\Leftarrow$" Olkoon $\epsilon > 0$. Oletuksen mukaan on olemassa jako P siten, että (157) pätee. Nyt

$$s(P) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq S(P) < s(P) + \epsilon.$$

Tästä seuraa, että

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f < \epsilon. \tag{158}$$

(158) pätee kaikilla $\epsilon > 0$, joten on oltava

$$\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f.$$

Väite seuraa nyt lauseesta 3.2.6. □

Lause 3.2.8. *Jatkuva funktio $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on integroituva.*

Todistus. Lauseen 2.2.8 mukaan f on rajoitettu. Olkoon $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ välin $[a, b]$ jako. Koska f on jatkuva jokaisella osavälillä $[x_{i-1}, x_1]$, niin se saavuttaa jokaisella osavälillä suurimman ja pienimmän arvonsa pisteissä c_i ja $d_i \in [x_{i-1}, x_1]$:

$$\begin{aligned} f(c_i) &= M_i = \sup\{f(x) \colon x \in [x_{i-1}, x_i]\} \qquad \text{ja} \\ f(d_i) &= m_i = \inf\{f(x) \colon x \in [x_{i-1}, x_i]\}. \end{aligned}$$

Nyt

$$S(P) - s(p) = \sum_{i=1}^{n} (f(c_j) - f(d_j))(x_i - x_{i-1}).$$

Käytetään Riemannin ehtoa (lause 3.2.7). Olkoon $\epsilon > 0$. f on jatkuva suljetulla ja rajoitetulla välillä $[a, b]$, joten se on tasaisesti jatkuva (lause 2.2.12). Siten on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(c) - f(d)| < \frac{\epsilon}{b - a},$$

kun $|c - d| < \delta$. Valitaan edellä jako P siten, että $\|P\| < \delta$. Silloin $|c_i - d_i| < \delta$ kaikilla i ja siten

$$S(P) - s(p) < \frac{\epsilon}{b - a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \frac{\epsilon}{b - a}(b - a) = \epsilon.$$

f toteuttaa Riemannin ehdon, joten se on integroituva. □

Lause 3.2.9. *Monotoninen funktio $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ on integroituva.*

3.3 Integraalin perusominaisuudet

Käydään läpi tuttujen integraalin perusominaisuuksien todistukset. Piirrä kunkin ominaisuuden kohdalla kuva, josta selviää väitteen geometrinen tulkinta.

Lemma 159. *Joukossa $I \subset \mathbb{R}$ rajoitetuille funktioille f ja g pätee* $\sup\{f(x) + g(x) \colon x \in I\} \leq \sup\{f(x) \colon x \in I\} + \sup\{g(x) \colon x \in I\}$.

Todistus. Väite seuraa suoraan supremumin määritelmästä 5. Merkitään supremumeja c, a ja b, ts, $c \leq a + b$. Koska a on joukon $\{f(x) \colon x \in I\}$ yläraja, niin $f(x) \leq a$ kaikilla $x \in I$. Vastaavasti $g(x) \leq b$ kaikilla $x \in I$. Niinpä $f(x) + g(x) \leq a + b$ kaikilla $x \in I$, eli $a + b$ on eräs joukon $\{f(x) + g(x) \colon x \in I\}$ yläraja. □

Lauseet 3.3.1–2 (Integroinnin lineaarisuus). *Jos f ja g ovat integroituvia välillä $[a,b]$ ja $c \in \mathbb{R}$, niin cf ja $f+g$ on integroituva välillä $[a,b]$ ja*

$$\int_a^b (cf) = c\int_a^b f \qquad \text{ja} \qquad \int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Todistus. Todistetaan summan $f+g$ integroituvuus ja integrointikaava, cf voidaan hoidella samaan tapaan. Koska f ja g ovat rajoitettuja funktioita, niin summafunktiokin on rajoitettu. Käytetään Riemannin ehtoa (lause 3.2.7). Olkoon $\epsilon > 0$. Koska f ja g ovat integroituvia, niin on olemassa välin $[a,b]$ jaot P_1 ja P_2, joille

$$S_f(P_1) - s_f(P_1) < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{ja} \qquad S_g(P_2) - s_g(P_2) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Tarkastellaan hienonnettua jakoa $P = P_1 \cup P_2 = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Lemmasta 150 seuraa, että

$$S_f(P) - s_f(P) < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{ja} \qquad S_g(P) - s_g(P) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Summafunktion yläsummalle pätee (ks. lemma 159)

$$\begin{aligned}
S_{f+g}(P) &= \sum_{i=1}^{n} \sup\{f(x)+g(x)\colon x \in [x_{i-1}, x_1]\}\Delta x_i \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} (\sup\{f(x)\colon x \in [x_{i-1}, x_1]\} + \sup\{g(x)\colon x \in [x_{i-1}, x_1]\})\Delta x_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sup\{f(x)\colon x \in [x_{i-1}, x_1]\}\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \sup\{g(x)\colon x \in [x_{i-1}, x_1]\}\Delta x_i \\
&= S_f(P) + S_g(P).
\end{aligned}$$

Vastaavasti alasummalle saadaan $s_{f+g}(P) \geq s_f(P) + s_g(P)$. Niinpä

$$\begin{aligned}
S_{f+g}(P) - s_{f+g}(P) &\leq (S_f(P) + S_g(P)) - (s_f(P) + s_g(P)) \\
&= (S_f(P) - s_f(P)) + (S_g(P) - s_g(P)) \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

$f+g$ toteuttaa Riemannin ehdon, joten se on integroituva. Integrointikaava: em. jaolle P pätee

$$\int_a^b f - \frac{\epsilon}{2} < s_f(P) \leq S_f(P) < \int_a^b f + \frac{\epsilon}{2}$$

ja

$$\int_a^b g - \frac{\epsilon}{2} < s_g(P) \le S_g(P) < \int_a^b g + \frac{\epsilon}{2},$$

joten

$$\begin{aligned}\left(\int_a^b f + \int_a^b g\right) - \epsilon < s_f(P) + s_g(P) \le s_{f+g}(P) \le \int_a^b (f+g) \\ \le S_{f+g}(P) \le S_f(P) + S_g(P) \le \left(\int_a^b f + \int_a^b g\right) + \epsilon.\end{aligned}$$

Tämä pätee kaikilla $\epsilon > 0$, joten on oltava

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g. \qquad \square$$

Lauseet 3.3.1–2 voidaan yhdistää induktiota käyttäen seuraavaan muotoon:

Lause 3.3.3. *Jos $f_1, f_2, \dots, f_n$ ovat integroituvia välillä $[a,b]$ ja $c_1, c_2, \dots, c_n$ ovat reaalilukuja, niin myös $c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n$ on integroituva välillä $[a,b]$ ja*

$$\int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n) = c_1 \int_a^b f_1 + c_2 \int_a^b f_2 + \dots + c_n \int_a^b f_n.$$

Huomautus 160. Jos f ja $g\colon A \to \mathbb{R}$ ($A \subset \mathbb{R}$), niin merkitään seuraavaan tapaan:

- $f = 0$, jos $f(x) = 0$ kaikilla $x \in A$,
- $f = g$, jos $f(x) = g(x)$ kaikilla $x \in A$,
- $f > 0$, jos $f(x) > 0$ kaikilla $x \in A$,
- $f \ge g$, jos $f(x) \ge g(x)$ kaikilla $x \in A$.

Lause 3.3.4 (Epäyhtälön säilyminen)**.** *Jos f ja g ovat integroituvia välillä $[a,b]$ ja $f(x) \le g(x)$ kaikilla $x \in [a,b]$, niin*

$$\int_a^b f \le \int_a^b g.$$

Todistus. Lauseen 3.3.3 mukaan funktio $g - f$ on integroituva. Koska $g - f \ge 0$, niin $s_{g-f}(P) \ge 0$ jokaiselle jaolle P ja siten

$$\int_a^b g - \int_a^b f = \int_a^b (g-f) = \underline{\int_a^b} (g-f) \ge s_{g-f}(P) \ge 0. \qquad \square$$

Seuraus 161. *Jos f on integroituva välillä $[a,b]$ ja $m \leq f(x) \leq M$ kaikilla $x \in [a,b]$, niin*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

Määritellään funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *itseisarvo* $|f|\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ asettamalla $|f|(x) = |f(x)|$.

Lause 3.3.5. *Jos f on integroituvia välillä $[a,b]$, niin myös $|f|$ on integroituva välillä $[a,b]$ ja*

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|.$$

Todistus. Olkoon P välin $[a,b]$ jako. Merkitään f:n ja $|f|$:n ylä- ja alasummissa

$$\begin{aligned} M_i &= \sup\{f(x)\colon x \in [x_{i-1},x_i]\},\\ m_i &= \inf\{f(x)\colon x \in [x_{i-1},x_i]\},\\ \overline{M}_i &= \sup\{|f(x)|\colon x \in [x_{i-1},x_i]\},\\ \overline{m}_i &= \inf\{|f(x)|\colon x \in [x_{i-1},x_i]\}.\end{aligned}$$

Nyt (perustele!)

$$\begin{aligned} \overline{M}_i - \overline{m}_i &= \sup\{|f(x)|\colon x \in [x_{i-1},x_i]\} - \inf\{|f(x)|\colon x \in [x_{i-1},x_i]\}\\ &= \sup\{|f(x)|\colon x \in [x_{i-1},x_i]\} + \sup\{-|f(x)|\colon x \in [x_{i-1},x_i]\}\\ &= \sup\{|f(x)| - |f(y)|\colon x,y \in [x_{i-1},x_i]\}\\ &\leq \sup\{|f(x)-f(y)|\colon x,y \in [x_{i-1},x_i]\}\\ &= M_i - m_i.\end{aligned}$$

Siten jos merkitään $|f|$:n ylä- ja alasummia $\overline{S}(P)$ ja $\overline{s}(P)$, niin

$$\overline{S}(P) - \overline{s}(P) \leq S(P) - s(P).$$

$|f|$:n integroituvuus seuraa nyt Riemannin ehdosta (lause 3.2.7). Väitteen epäyhtälön todistamiseksi todetaan, että $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ kaikilla $x \in [a,b]$. Lauseiden 3.3.4 ja 3.3.1–2 mukaan

$$-\int_a^b |f| = \int_a^b (-|f|) \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|.$$

Lauseen epäyhtälö seuraa tästä, sillä $\left|\int_a^b f\right| = -\int_a^b f$ tai $\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b f$. $\square$

Huomautus 162. **a)** Käänteinen väite ei päde. Esimerkiksi esimerkin 156 funktiolle $|f| = 1$ on integroituva välillä $[0, 1]$, mutta f ei ole integroituva.
b) Epäyhtälö voi olla aito, kuten esimerkki $f(x) = x$ välillä $[-1, 1]$ osoittaa.

Huomautus 163. Integroituvan funktion $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ kuvaajan ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-ala on

$$\int_a^b |f|.$$

Lause 3.3.6. *Jos f ja g ovat integroituvia välillä $[a, b]$, niin myös tulofunktio fg on integroituva välillä $[a, b]$.*

Todistus. Ks. kurssikirja [15]. □

Huomautus 164. Yleistä kaavaa tulofunktion integraalin laskemiseksi ei ole. Erityisesti yleensä

$$\int_a^b (fg) \neq \left(\int_a^b f\right)\left(\int_a^b g\right).$$

Lause 3.3.8–9 (Additiivisuus välin suhteen)**.** *Olkoon $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ rajoitettu funktio ja $c \in (a, b)$. Tällöin f on integroituva välillä $[a, b]$ jos ja vain jos f on integroituva väleillä $[a, c]$ ja $[c, b]$. Tällöin*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \tag{165}$$

Todistus. Oletetaan, että f on integroituva välillä $[a, b]$. Käytetään Riemannin ehtoa. Olkoon $\epsilon > 0$. On olemassa välin $[a, b]$ jako P, jolle

$$S(P) - s(P) < \epsilon.$$

Voidaan olettaa, että $c \in P$, sillä hienonnettulle jaolle $P' = P \cup \{c\}$ pätee $S(P') - s(P') < S(P) - s(P)$ (lemma 150). Numeroidaan jakopisteet seuraavasti:

$$P = \{x_0, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m\}, \quad \text{missä} \quad x_0 = a,\ x_n = c \text{ ja } x_m = b.$$

Nyt $P_1 = \{x_0, \dots, x_n\}$ on välin $[a, c]$ jako, jolle

$$\begin{aligned}\epsilon > S(P) - s(P) &= \sum_{i=1}^{m} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &\geq \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = S(P_1) - s(P_1).\end{aligned}$$

Siten Riemannin ehdon mukaan f on integroituva välillä $[a, c]$. Vastaavasti nähdään integroituvuus välillä $[c, b]$.

Toinen suunta vastaavasti. Integrointikaava voidaan perustella samaan tapaan kuin lauseessa 3.3.1–2. □

Määritelmä 166. Jos $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$ on integroituva, niin määritellään

$$\int_b^a f := -\int_a^b f.$$

Mille tahansa pisteessä a määritellylle funktiolle g määritellään

$$\int_a^a g := 0.$$

Huomautus 167. Määritelmän 166 merkinnöin lauseen 3.3.8–9 kaava (165) on voimassa kaikille luvuille a, b ja $c \in \mathbb{R}$ niiden järjestyksestä riippumatta, kunhan f on integroituva ko. väleillä.

Lemma 168. *Olkoon $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ integroituva, $c \in [a, b]$ ja $k \in \mathbb{R}$. Tällöin myös funktio $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$,*

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{kun } x \neq c, \\ k, & \text{kun } x = c, \end{cases}$$

on integroituva ja

$$\int_a^b g = \int_a^b f.$$

Toisin sanoen integoituvan funktion arvon muuttaminen yksittäisessä pisteessä ei vaikuta integroituvuuteen eikä integraalin arvoon.

Todistus. Käytetään Riemannin ehtoa (lause 3.2.7). Olkoon $\epsilon > 0$. Tällöin on olemassa välin $[a, b]$ jako $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ siten, että

$$S_f(P) - s_f(P) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Nyt jollekin i_0 pätee $c \in [x_{i_0}, x_{i_0 - 1}]$. Merkitään f:n supremumeja ja infimumeja osaväleillä M_i ja m_i kuten määritelmässä 3.1.3. Nyt

$$M := \sup\{g(x)\colon x \in [x_{i_0}, x_{i_0-1}]\} = \max\{M_{i_0}, k\} \quad \text{ja}$$
$$m := \inf\{g(x)\colon x \in [x_{i_0}, x_{i_0-1}]\} = \min\{m_{i_0}, k\}.$$

Jaetaan väli $[x_{i_0}, x_{i_0-1}]$ nyt osiin siten, että sen osan pituus, johon c kuuluu, on alle

$$\frac{\epsilon}{2\max\{M - m, 1\}}$$

ja merkitään tätä uutta hienonnettua jakoa P'. Nyt

$$S_g(P') - s_g(P') < S_f(P') - s_f(P') + \frac{\epsilon}{2} \leq S_f(P) - s_f(P) + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon. \qquad \square$$

Lemmasta 168 seuraa, että vaikka integroituvan funktion f arvoja muutetaan äärellisen monessa pisteessä, niin f säilyy integroituvana ja integraalin arvo samana.

Lause 169. *Paloittain jatkuva funktio $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on integroituva.*

Todistus. Paloittain jatkuvuuden määritelmän 2.2.4 mukaan väli $[a,b]$ voidaan jakaa osaväleihin

$$[a,b] = \bigcup_{i=1}^{n} [c_{i-1}, c_i],$$

missä $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_n = b$, f on jatkuva jokaisella välillä (c_{i-1}, c_i) ja f saadaan jatkuvaksi jokaisella välillä $[c_{i-1}, c_i]$, kun määritellään f sopivasti osavälin päätepisteissä. Lemman 168 ja lauseen 3.2.8 mukaan f on siten integroituva jokaisella välillä $[c_{i-1}, c_i]$ ja niin ollen lauseen 3.3.8–9 mukaan myös koko välillä $[a,b]$. $\square$

Lauseen 169 tilanteessa

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{n} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f. \tag{170}$$

Tutkitaan nyt integraalin ja derivoinnin välistä yhteyttä ja todistetaan analyysin peruslause 3.3.14, jonka avulla useissa käytännön tilanteissa integraali voidaan laskea. Esivalmisteluna tarvitaan integraalilaskennan väliarvolause. Muotoillaan se ensin yksinkertaisemmassa muodossaan (lause 171), jonka todistuksessa tarvittava argumentointi on selvemmin nähtävissä ja jonka formuloinnista voidaan helpommin päätellä tärkeä keskiarvotulkinta. Lauseen yksinkertainen muoto seuraisi myös yleisemmästä muodosta 3.3.7 asettamalla $g = 1$.

Lause 171 (Integraalilaskennan väliarvolause, IVAL)**.** *Jos $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva, niin on olemassa $c \in [a,b]$ siten, että*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

Todistus. Suljetulla ja rajoitetulla välillä $[a,b]$ jatkuvana funktiona f saavuttaa siellä pienimmän arvonsa m ja suurimman arvonsa M (lause 2.2.9). Nyt $m \leq f(x) \leq M$ kaikilla $x \in [a,b]$, joten seurauksen 161 mukaan

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a),$$

josta

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M.$$

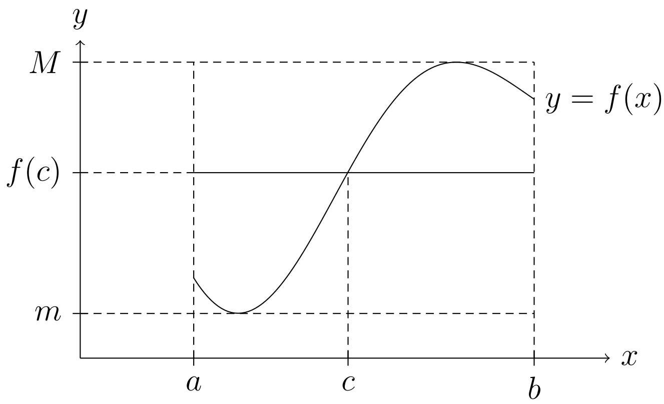
Jatkuvien funktioiden väliarvolauseen (lause 2.2.10) mukaan f saavuttaa kaikki pienimmän arvonsa m ja suurimman arvonsa M väliset arvot, joten se saavuttaa eräässä pisteessä $c \in [a, b]$ arvon

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx. \qquad \square$$

Olkoon c kuten lauseessa 171. Silloin

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x) - f(c))\,dx &= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f(c)\,dx \\ &= \int_a^b f(x)\,dx - f(c)(b-a) \\ &= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = 0.\end{aligned}$$

Niinpä funktion $f(x) - f(c)$ kuvaajan ja x-akselin väliin jäävästä pinta-alasta on yhtä paljon x-akselin ala- kuin yläpuolella. Siten funktion $f(x)$ kuvaajan ja suoran $y = f(c)$ väliin jäävästä pinta-alasta on yhtä paljon suoran $y = f(c)$ ala- kuin yläpuolella.



Tällä perusteella arvoa $f(c)$ voidaan sanoa funktion f keskiarvoksi välillä $[a, b]$. Keskiarvo voidaan määritellä myös niille integroituville funktioille, jotka eivät ole jatkuvia.

Määritelmä 172. Integroituvan funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *keskiarvo (average value)* on luku

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Integraalilaskennan väliarvolause voidaan siis muotoilla niin, että ”jatkuva funktio saavuttaa keskiarvonsa”.

Lause 3.3.7 (Integraalilaskennan yleistetty väliarvolause, IYVAL)**.** *Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jatkuva, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integroituva ja $g \geq 0$. Tällöin on olemassa $c \in [a,b]$ siten, että*

$$\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g. \tag{173}$$

Todistus. Suljetulla ja rajoitetulla välillä $[a,b]$ jatkuvana funktiona f saavuttaa siellä pienimmän arvonsa m ja suurimman arvonsa M (lause 2.2.9). Nyt $m \leq f(x) \leq M$ kaikilla $x \in [a,b]$ ja koska $g(x) \geq 0$, niin $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$ kaikilla $x \in [a,b]$. Lauseesta 3.3.4 seuraa

$$m \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M \int_a^b g. \tag{174}$$

Jos $\int_a^b g = 0$, niin (173) seuraa arvioista (174) millä tahansa c:n arvolla. Muussa tapauksessa $\int_a^b g > 0$ ja voidaan määritellä reaaliluku

$$\boxed{\overline{f} := \frac{\displaystyle\int_a^b fg}{\displaystyle\int_a^b g}.} \tag{175}$$

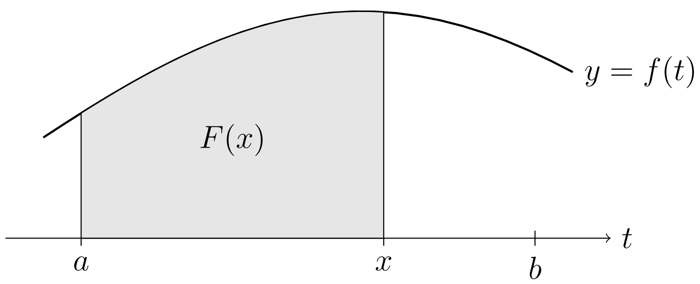
(174):n mukaan $m \leq \overline{f} \leq M$. Koska f on jatkuva, niin jatkuvien funktioiden väliarvolauseeen (lause 2.2.10) mukaan f saavuttaa kaikki pienimmän arvonsa m ja suurimman arvonsa M väliset arvot, joten se saavuttaa eräässä pisteessä $c \in [a,b]$ arvon $f(c) = \overline{f}$. (173) seuraa tästä. □

Yhtälön (175) luku $\overline{f}$ on f:n *painotettu keskiarvo funktion g suhteen* välillä $[a,b]$. Lause 3.3.7 sanoo, että painotettu keskiarvo on aina funktion pienimmän ja suurimman arvon välissä ja että se saavutetaan, jos f on jatkuva.

Seuraavassa tutkitaan integroituvan funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integraalia välillä $[a,x]$ ylärajan x funktiona, ts. funktiota

$$F(x) = \int_a^x f = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Jos integroimismuuttuja merkitään näkyviin, niin on käytettävä jotakin muuta muuttujan nimeä kuin x, joka on integroinnin suhteen vakio. Geometrinen tulkinta tapauksessa $f \geq 0$ on f:n kuvaajan ja akselin rajaaman alueen pinta-ala välillä $[a,x]$.



Lause 3.3.10. *Jos $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ on integroituva, niin funktio*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

on jatkuva.

Geometrisesti lause vaikuttaa järkevältä: ei-negatiiviselle f pinta-alat $F(x)$ ja $F(y)$ saadaan lähelle toisiaan, kun x ja y ovat lähellä toisiaan.

Todistus. f on rajoitettu, ts. on olemassa M siten, että $|f(t)| \leq M$ kaikilla $t \in [a,b]$. Olkoot x ja $y \in [a,b]$. Nyt

$$\begin{aligned}
|F(x) - F(y)| &= \left|\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^y f(t)\,dt\right| \\
&= \left|\int_y^a f(t)\,dt + \int_a^x f(t)\,dt\right| \\
&= \left|\int_y^x f(t)\,dt\right| && \text{L. 3.3.8–9 ja H. 167} \\
&\leq \left|\int_y^x |f(t)|\,dt\right| && \text{L. 3.3.5} \\
&\leq M|x-y|.
\end{aligned}$$
□

F on siis Lipschitz-jatkuva (määritelmä 120), ja siten jatkuva.

Lause 3.3.11. *Olkoon $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ jatkuva. Tällöin funktio*

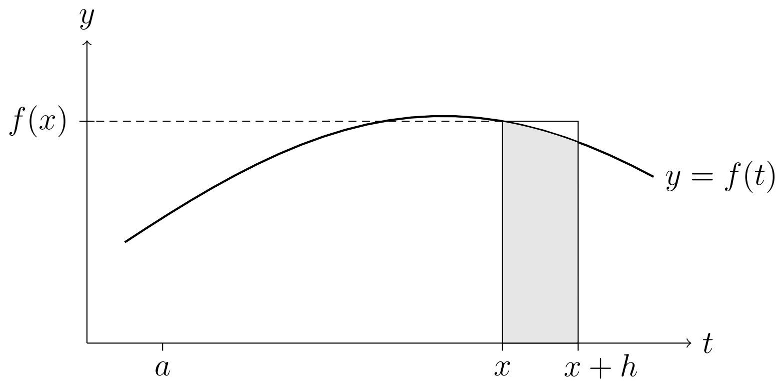
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

on derivoituva ja $F'(x) = f(x)$ (päätepisteissä toispuoleiset derivaatat).

Pohditaan väitteen järkevyyttä ensin geometrisesti. Oletetaan, että $f \geq 0$ ja että $h > 0$. Tällöin erotus $F(x+h) - F(x)$ on kuvan väritetyn alueen pinta-ala. Jos f on jatkuva pisteessä x, niin tämän alueen pinta-ala on likimain sama kuin kuvaan piirretyn suorakulmion pinta-ala:

$$F(x+h) - F(x) \approx f(x)h.$$

Siten
$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \approx f(x).$$
Tässä vasemman puolen lauseke on funktion F erotusosamäärä pisteessä x, joten menemällä rajalle $h \to 0$ saadaan ilmeisesti $F'(x) = f(x)$.



Todistus. Tutkitaan F:n oikeanpuoleista derivaattaa pisteessä $x \in [a, b)$, vasemmanpuoleiset derivaatat ja päätepiste $x = b$ vastaavasti. Kirjoitetaan F:n erotusosamäärä pisteessä x, käytetään tietoa
$$\int_a^{x+h} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$
ja sovelletaan integraalilaskennan väliarvolausetta välillä $[x, x+h]$, missä $h > 0$:
$$\begin{aligned}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right)\\ &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(c),\end{aligned}$$
missä c on x:n ja $(x+h)$:n välissä. Koska $c \to x$, kun $h \to 0$, niin on olemassa
$$F'(x+) = \lim_{h\to 0+} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{c\to x+} f(c) = f(x),$$
missä viimeinen yhtäsuuruus seuraa f:n jatkuvuudesta pisteessä x. □

Seuraus 176. *Jos $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva, niin on olemassa derivaatta*
$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

Määritelmä 177. Olkoon $f\colon I \to \mathbb{R}$ välillä $I \subset \mathbb{R}$ määritelty funktio. Funktio $F\colon I \to \mathbb{R}$ on funktion f *antiderivaatta (antiderivative)*, jos

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in I$$

(mahdollisissa päätepisteissä toispuoleinen derivaatta).

Esimerkki 178. Funktio $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + 5$ on funktion $f(x) = e^{2x}$ antiderivaatta $\mathbb{R}$:ssä, sillä $F'(x) = f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Huomautus 179. Antiderivaatta on seurauksen 113 mukaan vakiota vaille yksikäsitteinen: jos F ja G ovat f:n antiderivaattoja, niin on olemassa vakio C siten, että $F(x) = G(x) + C$ kaikilla x.

Lause 3.3.14 (Analyysin peruslause, Fundamental Theorem of Calculus)**.** *Jos $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuva, niin f:llä on antiderivaatta*

$$F_0(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \tag{180}$$

ja jos F on mikä tahansa f:n antiderivaatta, niin

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{181}$$

Todistus. F_0 on lauseen 3.3.11 mukaan antiderivaatta. Jos F on nyt mikä tahansa antiderivaatta, niin $F(x) = F_0(x) + C$, joten

$$F(b) - F(a) = \left(\int_a^b f(x)\,dx + C\right) - \left(\int_a^a f(x)\,dx + C\right) = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad \square$$

Huomautus 182. Erotukselle (181) käytetään merkintöjä

$$F(b) - F(a) = \Big/_{\!a}^{\,b} F(x) = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(x)\Big|_a^b$$

(luetaan ”sijoitus a:sta b:hen $F(x)$”).

Esimerkki 183.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{3} (5x^2 + 2)\,dx = \Big/_{\!-1}^{\,3} \left(\frac{5}{3}x^3 + 2x\right) = 51 - \left(-\frac{11}{3}\right) = \frac{164}{3}$

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\Big/_{\!1}^{\,2} \ln(x^2+1) = \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 2)$

Huomautus 184. Integroituvalla funktiolla ei välttämättä ole antiderivaattaa. Esimerkiksi hyppyfunktio

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0, \end{cases}$$

on integroituva välillä $[-1, 1]$ (ks. lause 169 ja kaava (170)):

$$\int_{-1}^{1} f = \int_{-1}^{0} (-1) + \int_{0}^{1} 1 = (-1) \cdot (0 - (-1)) + 1 \cdot (1 - 0) = 0.$$

Kuitenkin jos $F'(x) = f(x)$, niin

$$F(x) = \begin{cases} -x + A, & \text{kun } x < 0, \\ x + B, & \text{kun } x > 0, \end{cases}$$

joten F ei voi olla derivoituva pisteessä $x = 0$. Erityisesti funktio

$$F_0(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\, dt = \begin{cases} -x - 1, & \text{kun } x < 0, \\ x - 1, & \text{kun } x \geq 0, \end{cases}$$

ei ole derivoituva pisteessä $x = 0$.

Integroituvalla epäjatkuvalla funktiolla ei siis välttämättä ole antiderivaattaa, jota voitaisiin käyttää integraalin laskemiseen. Jos antiderivaatta kuitenkin on olemassa, niin osoittautuu, että kaava (181) on voimassa:

Lause 3.3.12. *Olkoon $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ integroituva. Jos f:llä on antiderivaatta F, niin*

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Todistus. Jos $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ on välin $[a, b]$ jako, niin

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1})).$$

Differentiaalilaskennan väliarvolauseen 2.3.11 mukaan jokaisella osavälillä on piste $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ siten, että

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(c_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Niinpä

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Tämä on f:n Riemannin summa välillä $[a,b]$. Olkoon nyt $\epsilon > 0$. Koska f on integroituva, niin lauseen 3.2.6 mukaan on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - (F(b) - F(a)) \right| < \epsilon, \tag{185}$$

kunhan $\|P\| < \delta$. Arvio (185) pätee kaikilla $\epsilon > 0$, joten väite seuraa. □

Seuraus 3.3.13. *Jos f' on integroituva välillä $[a,b]$, niin*

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Huomautus 186. a) Esimerkki epäjatkuvasta funktiosta f, joka on integroituva ja jolla on antiderivaatta F: Asetetaan

$$F\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

F on derivoituva ja derivaatta on

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

(derivoi, kun $x > 0$ ja tutki erotusosamäärää, kun $x = 0$). Seurauksen 218 mukaan f on integroituva välillä $[0,1]$, mutta f ei ole jatkuva välillä $[0,1]$.
b) On olemassa rajoitettu funktio $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ siten, että f:llä on antiderivaatta välillä $[a,b]$, mutta f ei ole integroituva välillä $[a,b]$. Tällainen funktio konstruoidaan Gordonin kirjan [4] lausetta 3.9 seuraavassa esimerkissä, jossa **a)**-kohdan funktio F siirretään ja skaalatan sopivasti äärettömän monelle välin $[a,b]$ osavälille siten, että saadaan derivoituva funktio, jonka derivaatan epäjatkuvuuspisteiden joukko ei ole nollamittainen, eikä F' siten ole integroituva (lause 3.5.6).

Näiden hankalien esimerkkien jälkeen voimme onneksi todeta, että jatkuvalle funktiolle tilanne on selkeä: jatkuva funktio on integroituva ja sillä on analyysin peruslauseen 3.3.14 mukaan antiderivaatta, jonka avulla integraali voidaan laskea. Käytämme jatkuvan funktion tapauksessa antiderivaatalle seuraavaa nimitystä:

Määritelmä 187. Jatkuvalle funktiolle $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jokaista antiderivaattaa

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C \tag{188}$$

kutsutaan *integraalifunktioksi.*

Huomautus 189. a) Joissakin teksteissä nimityksellä *integraalifunktio* tarkoitetaan minkä tahansa funktion antiderivaattaa. Tämä on kuitenkin ongelmallista niissä tapauksissa, joissa funktio on integroituva, mutta sillä ei ole antiderivaattaa.
b) Integraalifunktiolle käytetään usein merkintää

$$\int f(x)\,dx,$$

joka tarkoittaa toisinaan jotakin f:n integraalifunktiota ja toisinaan kaikkia f:n integraalifunktioita. Erityisesti "integroidaan puolittain" -tyyppisissä päättelyissä kannattaa olla huolellinen: esimerkiksi

$$f'(x) = 2x \quad \not\Longrightarrow \quad f(x) = x^2,$$

sillä yhtä hyvin voisi olla $f(x) = x^2 + 7$.

Oletetaan perusopintojaksoilta tutut sivun 182 taulukon integrointikaavat ja lauseiden 3.3.15 ja 3.3.17 integroimiskeinot integraalifunktion hakemiseksi tunnetuiksi. Analyysin peruslauseen käytössä täytyy muistaa, että f:n täytyy olla jatkuva integroimisvälillä. Esimerkiksi huolimattomasti voitaisiin laskea

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx \overset{\text{VÄÄRIN!}}{=} \Big/_{-1}^{1} \left(-\frac{1}{3x^3}\right) = \Big/_{-1}^{1} \left(-\frac{1}{3x^3}\right) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}, \tag{190}$$

minkä täytyy olla väärin jo sen vuoksi, että integroitava funktio $f(x) = 1/x^2 > 0$ kaikilla $x \neq 0$. Tässä f ei ole jatkuva eikä edes rajoitettu välillä $[-1, 1]$ (eikä sen epäoleellinen integraalikaan suppene välillä $[-1, 1]$).

Lause 3.3.15 (Osittaisintegrointi, Integration by Parts)**.** *Jos f' ja g' ovat integroituvia välillä $[a, b]$, niin*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \Big/_a^b f(x)g(x) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Todistus. f ja g ovat derivoituvina funktioina jatkuvia ja siten integroituvia, joten lauseisen 3.3.6 ja 3.3.1–2 mukaan myös funktio

$$(fg)' = f'g + fg'$$

on integroituva. Soveltamalla seurausta 3.3.13 funktioon fg saadaan

$$\int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\,dx = \Big/_a^b f(x)g(x),$$

josta väite seuraa. □

Osittaisintegrointia sovellettaessa kirjoitetaan integoitava funktio tulona, jonka toinen tekijä $f'(x)$ osataan integroida ja $g(x)$ derivoida. Jos $f(x)g'(x)$ osataan integroida, päästään tulokseen. Tässä $f'(x)$:n integraalifunktio $f(x)$ on vain vakiota vaille yksikäsitteinen. Jätetään harjoitustehtäväksi näyttää, että osittaisintegrointikaava antaa saman tuloksen siitä riippumatta, mikä integraalifunktio valitaan (sijoita kaavaan $f(x)$:n paikalle $f(x) + C$).

Esimerkki 191. Laske $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}\,dx$.

Ratkaisu. Osittaisintegroidaan valinnoilla $f'(x) = e^{-x}$ ja $g(x) = x$. Tällöin $g'(x) = 1$ ja funktioksi f voidaan valita $f(x) = -e^{-x}$. Nyt

$$\int_0^1 xe^{-x}\,dx = -\Big/_0^1 xe^{-x} + \int_0^1 e^{-x}\,dx = -\frac{1}{e} - \Big/_0^1 e^{-x} = 1 - \frac{2}{e}.$$

Muuttujanvaihto

Tarkastellaan seuraavassa tapaa laskea integraaleja käyttämällä sijoitusta $x = x(u)$ eli muuttujanvaihtoa muuttujasta x muuttujaan u.

Lause 3.3.17 (Integrointi sijoituksella)**.** *Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jatkuva sekä $x\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$ derivoituva ja x' integroituva välillä $[\alpha,\beta]$. Tällöin*

$$\int_{x(\alpha)}^{x(\beta)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x(u))x'(u)\,du. \tag{192}$$

Todistus. Yhtälön (192) molemmat integraalit ovat olemassa. Vasemmalla puolella f on jatkuvana funktiona integroituva. Oikealla puolella x on derivoituvana funktiona jatkuva, joten yhdistety funktio $f \circ x$ on myös jatkuva ja siten integroituva, ja niinpä yhtälön oikean puolen funktio on lauseen 3.3.6 mukaan integroituva. Analyysin peruslauseen 3.3.14 mukaan

$$\int_{x(\alpha)}^{x(\beta)} f(x)\,dx = F(x(\beta)) - F(x(\alpha)),$$

missä F on f:n integraalifunktio, ts. $F' = f$. Tämä yhtälö pätee myös tapauksessa $x(\alpha) \ge x(\beta)$. Merkitään $G(u) = F(x(u))$. Ketjusäännön mukaan $G'(u) = f(x(u))x'(u)$, joten G on yhtälön (192) oikean puolen funktion antiderivaatta ja siten lauseen 3.3.12 mukaan

$$\int_\alpha^\beta f(x(u))x'(u)\,du = G(\beta) - G(\alpha) = F(x(\beta)) - F(x(\alpha)). \qquad \square$$

Huomautus 193. Lauseen 3.3.17 funktion ei tarvitse olla monotoninen, mutta yleensä funktioksi x pyritään valitsemaan aidosti kasvava bijektio, jolloin $a = x(\alpha)$ ja $b = x(\beta)$, ja siten

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x(u))x'(u)\,du.} \tag{194}$$

Kaavan (194) muistisääntönä voidaan käyttää (sinänsä mieletöntä) laskua

$$\frac{dx}{du} = x'(u) \;\Rightarrow\; x'(u)\,du = dx.$$

Kaavassa (194) ajatellaan, että sitä käytetään vasemmanpuoleisen integraalin laskemiseen muuttamalla se oikean puolen integraaliksi, joka ensi alkuun näyttää hankalammalta kuin alkuperäinen integraali, mutta on sopivaa sijoitusta käyttämällä laskettavissa. Tällaisesta sijoituksesta käytetään joskus nimitystä *käänteinen sijoitus (inverse substitution)*.

Jos vaihdetaan (194):ssa x:n ja u:n roolit, saadaan

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(u(x))u'(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,du,} \tag{195}$$

missä $a = u(\alpha)$ ja $b = u(\beta)$. Tässä laskettavana on vasemman puolen integraali, josta tunnistetaan sopiva sisäfunktio $u(x)$ ja sen derivaatta $u'(x)$. Tällöin kyseessä on *suora sijoitus*. Muistisääntönä samaan tapaan kuin edellä

$$\frac{du}{dx} = u'(x) \;\Rightarrow\; u'(x)\,dx = du.$$

Bijektiivistä sijoitusta $x = x(u) \;\Leftrightarrow\; u = u(x)$ käytettäessä toisinaan keksitään ensin käänteisfunktio. Käänteisfunktion derivoimissääntöä käyttämällä voi käydä niin, että itse funktion lauseketta ei tarvitse selvittää:

$$\frac{dx}{du} = x'(u) = \frac{1}{u'(x)} = \frac{1}{\frac{du}{dx}},$$

josta voidaan laskea sijoituksen jälkeen syntyvä integraali operoimalla muuttujien x ja u lisäksi myös symboleilla dx ja du ikään kuin ne olisivat lukuja.

Esimerkki 196. Laske suoralla sijoituksella

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(1+2x)^2}$ **b)** $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{x}{x^4+1}\,dx$ **c)** $\displaystyle\int_{-1/3}^2 \frac{x}{\sqrt[3]{3x+2}}\,dx$

Ratkaisu. a) Sijoitetaan $u = 1 + 2x$, jolloin $du = 2\,dx$. Rajat: kun $x = 1$, niin $u = 3$ ja kun $x = 2$, niin $u = 5$ ja siten

$$\int_1^2 \frac{dx}{(1+2x)^2} = \frac{1}{2}\int_3^5 \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{2}\Big/_3^5 \frac{1}{u} = \frac{1}{15}.$$

b) Sijoitetaan $u = x^2$, jolloin $du = 2x\,dx$. Rajat: kun $x = -1$, on $u = 1$ ja kun $x = 2$, on $u = 4$, joten

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 \frac{x}{x^4+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{2}\Big/_1^4 \arctan u \\ &= \frac{1}{2}(\arctan 4 - \arctan 1) = \frac{1}{2}\arctan 4 - \frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

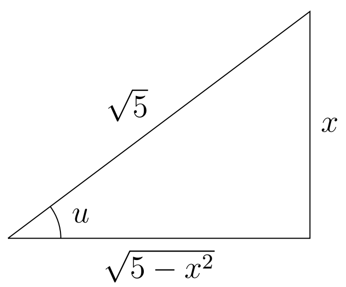
c) Sijoitetaan $u = \sqrt[3]{3x+2}$ eli $x = u^3/3 - 2/3$, jolloin $dx = u^2\,du$. Rajat: kun $x = -1/3$, niin $u = 1$ ja kun $x = 2$, niin $u = 2$. Siten

$$\begin{aligned}\int_{-1/3}^2 \frac{x}{\sqrt[3]{3x+2}}\,dx &= \int_1^2 \frac{u^3/3 - 2/3}{u}\,u^2\,du = \frac{1}{3}\int_1^2 (u^4 - 2u)\,du \\ &= \frac{1}{3}\Big/_1^2 \left(\frac{u^5}{5} - u^2\right) = \frac{16}{15}.\end{aligned}$$

Esimerkki 197. Laske käänteisellä sijoituksella $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(5-x^2)^{3/2}}$.

Ratkaisu. Sijoitetaan $x = \sqrt{5}\sin u$. Motivaatio tälle sijoitukselle tulee kuvan suorakulmaisesta kolmiosta, josta päätellään

$$\cos u = \frac{\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{5}} \quad \text{ja} \quad \tan u = \frac{x}{\sqrt{5-x^2}}.$$



Rajat: kun $x = 0$, niin $u = 0 =: a$ ja kun $x = 1$, niin $u = \arcsin(1/\sqrt{5}) =: b$.

Lisäksi $dx = \sqrt{5}\cos u\,du$, joten

$$\int_0^1 \frac{dx}{(5-x^2)^{3/2}} = \int_a^b \frac{\sqrt{5}\cos u}{5^{3/2}\cos^3 u}\,du = \frac{1}{5}\int_a^b \frac{du}{\cos^2 u}$$
$$= \Big/_{u=a}^{b} \frac{1}{5}\tan u = \Big/_{x=0}^{1} \frac{1}{5}\frac{x}{\sqrt{5-x^2}} = \frac{1}{10}.$$

Tässä $(1/\cos^2 u)$:n integrointi onnistui muistamalla $(\tan u)$:n derivointikaava (taulukkokirjatietoa). Lopussa siirryttiin takaisin alkuperäiseen muuttujaan x, jota käyttämällä sijoitus on helpompi laskea.

3.4 Epäoleellinen integraali

Edellä integraali määriteltiin vain rajoitetulla välillä $[a, b]$ määritellylle rajoitetulle fuktiolle. Yleistämme nyt tätä määritelmää myös tapauksiin, joissa

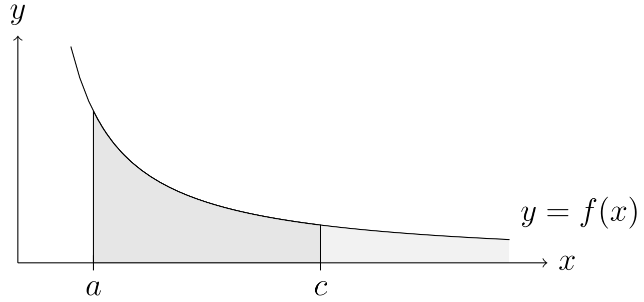
- integroimisväli on rajoittamaton, ts. $a = -\infty$ tai $b = \infty$, tai
- funktio ei ole rajoitettu.

Määritelmä 198. Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ (rajoitettu tai rajoittamaton) väli. Jos f on integroituva välin I jokaisella suljetulla ja rajoitetulla osavälillä, niin f on *lokaalisti integoituva (locally integrable)* välillä I.

Esimerkki 199. a) $f(x) = x^2$ on lokaalisti integroituva joukossa $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, sillä se on jatkuvana funktiona integroituva jokaisella välillä $[a, b] \subset \mathbb{R}$.
b) $f(x) = 1/x$ on lokaalisti integroituva välillä $(0, 1]$, sillä se on jatkuvana funktiona integroituva jokaisella välillä $[a, b] \subset (0, 1]$.

Kurssikirjassa kaikki epäoleelliset integraalit määritellään samassa määritelmässä 3.4.1. Jaetaan selvyyden vuoksi määritelmä kahteen osaan sen mukaan, onko "ongelmana" rajoittamaton integroimisväli vai rajoittamaton funktio.

Rajoittamaton integroimisväli



Määritelmä 3.4.1 (a). Jos $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ on lokaalisti integroituva välillä $[a,\infty)$, niin määritellään *epäoleellinen integraali (improper integral) välillä* $[a,\infty)$ raja-arvona

$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{c\to\infty} \int_a^c f(x)\,dx.$$

Vastaavasti jos $f\colon (-\infty,b] \to \mathbb{R}$ on lokaalisti integroituva välillä $(-\infty,b]$, niin määritellään *epäoleellinen integraali välillä* $(-\infty,b]$ raja-arvona

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx := \lim_{c\to-\infty} \int_c^b f(x)\,dx.$$

Mikäli kyseinen raja-arvo on (äärellisenä) olemassa, epäoleellinen integraali *suppenee (converges)*, muulloin *hajaantuu (diverges)*.

Lause 200. *Olkoon $a > 0$ ja $p \in \mathbb{R}$. Tällöin*

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^p} \quad \textit{suppenee jos ja vain jos} \quad p > 1.$$

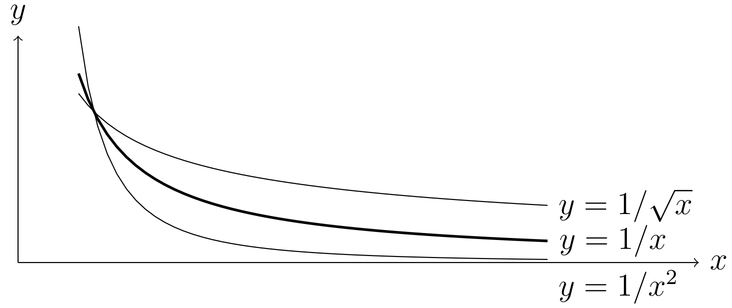
Todistus. Olkoon $c > a$. Oletetaan ensin, että $p \neq 1$. Tällöin

$$\int_a^c \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}\bigg/_a^c \frac{1}{x^{p-1}} = \frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{c^{p-1}} - \frac{1}{a^{p-1}}\right) \to \begin{cases} \frac{a^{1-p}}{p-1}, & \text{kun } p > 1, \\ \infty, & \text{kun } p < 1, \end{cases}$$

kun $c \to \infty$. Tapauksessa $p = 1$

$$\int_a^c \frac{dx}{x} = \bigg/_a^c \ln x = \ln c - \ln a \to \infty, \quad \text{kun } c \to \infty. \qquad \square$$

Potenssifunktioiden integroituvuudessa välillä $[a,\infty)$ $1/x$ on siis rajatapaus. Vertaa tulosta funktioiden kuvajiin:



Huomautus 201. Hajaantuvan integraalin arvo ei välttämättä ole ∞ tai $-\infty$. Esimerkiksi

$$\int_0^c \cos x\,dx = \Big/_{0}^{c} \sin x = \sin c,$$

jolla ei ole raja-arvoa, kun $c \to \infty$. Niinpä

$$\int_0^\infty \cos x\,dx$$

hajaantuu. Miten voit päätellä tämän jo kosinin kuvaajasta?

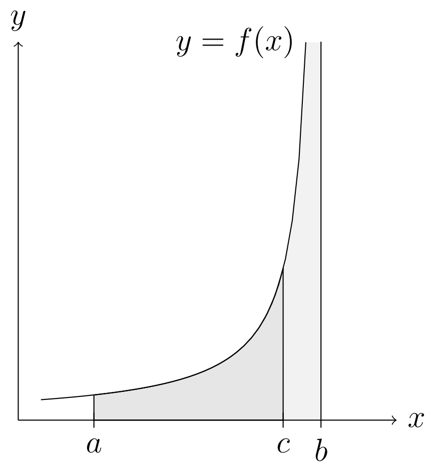
Huomautus 202. Jatkuville funktioille f, joilla analyysin peruslauseen mukaan on integraalifunktio F, voidaan käyttää merkintää

$$\Big/_{a}^{\infty} F(x) := \lim_{c\to\infty} \Big/_{a}^{c} F(x).$$

Esimerkiksi

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \Big/_{1}^{\infty} \ln x = \ln(\infty) - \ln 1 = \infty.$$

Rajoittamaton funktio



Määritelmä 3.4.1 (b). Jos $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ on rajoittamaton, mutta lokaalisti integroituva välillä $[a,b)$, niin määritellään *epäoleellinen integraali välillä* $[a,b)$ raja-arvona

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{c\to b-} \int_a^c f(x)\,dx. \tag{203}$$

Vastaavasti jos $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ on rajoittamaton, mutta lokaalisti integroituva välillä $(a,b]$, niin määritellään *epäoleellinen integraali välillä* $(a,b]$ raja-arvona

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{c\to a+} \int_c^b f(x)\,dx.$$

Mikäli kyseinen raja-arvo on (äärellisenä) olemassa, epäoleellinen integraali *suppenee*, muulloin *hajaantuu*.

Huomautus 204. Jos $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ on rajoitettu ja lokaalisti integroituva välillä $[a,b)$, niin f on lauseen 217 mukaan Riemann-integroituva välillä $[a,b]$ ja (203) pätee. Eli vaikka f olisi rajoitettu, niin emme tulisi tässä määritelleeksi uutta integraalin käsitettä.

Lause 205. *Olkoon $a > 0$ ja $p \in \mathbb{R}$. Tällöin*

$$\int_0^a \frac{dx}{x^p} \quad \text{suppenee jos ja vain jos} \quad p < 1.$$

Todistus. Samaan tapaan kuin lause 200. □

Esimerkki 206. Suppeneeko vai hajaantuuko $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(x-2)^2}$?

Ratkaisu. Integroitava funktio

$$\frac{1}{(x-2)^2} \to \infty, \quad \text{kun } x \to 2-,$$

joten kyseessä on epäoleellinen integraali ja

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{dx}{(x-2)^2} &= \lim_{c\to 2-} \int_1^c \frac{dx}{(x-2)^2} = \lim_{c\to 2-} \Big/_1^c -\frac{1}{x-2} \\ &= \lim_{c\to 2-} \left(-\frac{1}{c-2} - 1\right) = \infty.\end{aligned}$$

Integraali siis hajaantuu.

Integroimisvälin jako osiin

Määritelmä 3.4.3. Jos integroimisväli $I \subset \mathbb{R}$ on $(-\infty, \infty)$ tai f on rajoittamaton muualla kuin rajoitetun välin toisessa päätepisteessä, niin integroimisväli on jaettava osiin siten, että saadaan määritelmissä 3.4.1 (a) ja 3.4.1 (b) käsitellyt välit, jotka ovat tyyppiä

$$[a, b), \ (a, b], \ [a, \infty) \quad \text{tai} \quad (-\infty, b]. \tag{207}$$

Määritellään, että f:n epäoleellinen integraali välillä I *suppenee*, jos f:n epäoleellinen integraali suppenee jokaisella osavälillä. Tällöin integraali yli välin I on em. integraalien summa. Jos f:n epäoleellinen integraali hajaantuu yhdelläkin osavälillä, niin f epäoleellinen integraali välillä I *hajaantuu*.

Esimerkki 208. Tutki suppenemista ja laske arvo, jos suppenee:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2}$ **b)** $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^{1/3}}$ **c)** $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$

Ratkaisu. a) Integroitava funktio $1/x^2 \to \infty$, kun $x \to 0+$, joten kyseessä on epäoleellinen integraali, joka täytyy jakaa osiin

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2} = \int_0^\alpha \frac{dx}{x^2} + \int_\alpha^\infty \frac{dx}{x^2},$$

missä $\alpha > 0$. Voidaan osoittaa, että tallaisissa tilanteissa α:n valinta ei vaikuta suppenemiseen ja integraalin arvoon tai hajaantumiseen. Luontevin valinta tässä on $\alpha = 1$:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2} + \int_1^\infty \frac{dx}{x^2},$$

Lauseen 205 mukaan ensimmäinen näistä integraaleista hajaantuu, joten kysytty integraali myös hajaantuu.
b) Integroitava funktio $1/x^{1/3} \to \pm\infty$, kun $x \to 0\pm$, joten kyseessä on epäoleellinen integraali, joka täytyy jakaa osiin 0:n kohdalta:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^{1/3}} &= \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^{1/3}} + \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/3}} = \lim_{c\to 0-} \int_{-1}^c \frac{dx}{x^{1/3}} + \lim_{c\to 0+} \int_c^1 \frac{dx}{x^{1/3}} \\ &= \lim_{c\to 0-} \Big/_{-1}^{c} \frac{3}{2}x^{2/3} + \lim_{c\to 0+} \Big/_{c}^{1} \frac{3}{2}x^{2/3} = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0.\end{aligned}$$

c) Integroitava funktio on rajoitettu ($0 < 1/(1+x^2) \le 1$ kaikilla x), mutta integroimisväli on molemmista päistä rajoittamaton, joten integroimisväli täytyy jakaa kahteen osaan (mistä kohtaa tahansa, mutta 0 on tässä mukavin valinta):

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}&=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}\\&=\lim_{c\to-\infty}\int_{c}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\lim_{c\to\infty}\int_{0}^{c}\frac{dx}{1+x^2}\\&=\lim_{c\to-\infty}\Big/_{c}^{0}\arctan x+\lim_{c\to\infty}\Big/_{0}^{c}\arctan x\\&=\Big(0-\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)\Big)+\Big(\frac{\pi}{2}-0\Big)=\pi.\end{aligned}$$

Huomautus 209. Parittoman funktion integraali 0:n suhteen symmetrisen välin yli ei ole välttämättä nolla. Esimerkiksi

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{x}=-\infty+\infty,$$

ts. integraali hajaantuu.

Lause 3.4.4 (Epäoleellisen integraalin lineaarisuus)**.** *Oletetaan, että* f_1 *ja* $f_2\colon [a,b)\to\mathbb{R}$ *ovat lokaalisti integroituva. Jos integraalit* $\int_a^b f(x)\,dx$ *ja* $\int_a^b g(x)\,dx$ *suppenevat ja* c_1 *ja* $c_2\in\mathbb{R}$*, niin myös* $\int_a^b (c_1f(x)+c_2f_2(x))\,dx$ *suppenee ja*

$$\int_a^b (c_1f(x)+c_2f_2(x))=c_1\int_a^b f(x)\,dx+c_2\int_a^b g(x)\,dx.$$

Vastaava tulos pätee kaikille väleille (207)*.*

Todistus. Jos $a<c<b$, niin lauseen 3.3.3 mukaan

$$\int_a^c (c_1f(x)+c_2f_2(x))=c_1\int_a^c f(x)\,dx+c_2\int_a^c g(x)\,dx.$$

Väite seuraa ottamalla raja-arvo $c\to b-$. □

Ei-negatiivisen funktion epäoleellinen integraali

Lemma 210. *Olkoon* $f\colon [a,b)\to\mathbb{R}$ *kasvava funktio. Tällöin on olemassa raja-arvo*

$$\lim_{x\to b-}f(x)\in\mathbb{R}\quad \textit{tai}\quad \lim_{x\to b-}f(x)=\infty.$$

Tulos pätee myös tapauksessa $b=\infty$*.*

Todistus. Todistetaan tapaus $b < \infty$. Tapaus $b = \infty$ todistetaan samaan tapaan. Jaetaan todistus kahteen osaa sen mukaan, onko kuvajoukko $f([a,b)) = \{f(x) \colon x \in [a,b)\}$ ylhäältä rajoitettu vai ei.

(1) $f([a,b))$ ei ole ylhäältä rajoitettu. Olkoon $M \in \mathbb{R}$. Tällöin on olemassa jokin $c \in (a,b)$ siten, että $f(c) > M$. Kasvavuuden nojalla

$$f(x) > M \qquad \forall\, x \in (c,b).$$

Epäoleellisen raja-arvon määritelmän 2.1.8 mukaan on siten $\lim\limits_{x \to b-} f(x) = \infty$.

(2) $f([a,b))$ on ylhäältä rajoitettu. Täydellisyysaksiooman mukaan on olemassa $M = \sup(f([a,b)))$. Osoitetaan, että

$$\lim_{x \to b-} f(x) = M.$$

Olkoon siis $\epsilon > 0$. Lauseen 1.1.3 mukaan on olemassa $c \in [a,b)$ siten, että $f(c) > M - \epsilon$. Kasvavuuden nojalla

$$f(x) > M - \epsilon \qquad \forall\, x \in (c,b).$$

Koska lisäksi $f(x) \le M$, niin $|f(x) - M| < \epsilon$ kaikilla $x \in (c,b)$. Vasemmanpuoleisen raja-arvon määritelmän 2.1.5 mukaan on siten $\lim\limits_{x \to b-} f(x) = M$. $\square$

Lause 3.4.5. *Jos $f \colon [a,b) \to \mathbb{R}$ on lokaalisti integroituva ja $f \ge 0$, niin*

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \textit{suppenee tai} \quad \int_a^b f(x)\,dx = \infty.$$

Vastaava tulos pätee kaikille väleille (207).

Todistus. Koska $f(x) \ge 0$ kaikilla x, niin funktio $F \colon [a,b) \to \mathbb{R}$,

$$F(c) = \int_a^c f(x)\,dx$$

on kasvava. Väite seuraa lemmasta 210. $\square$

Ei-negatiivisen funktion integraali ei siis voi hajaantua muuten kuin olemalla ∞ (vrt. huomautus 201). Siksi ei-negatiiviselle $f \ge 0$ integraalin suppenemista usein merkitään

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx < \infty.} \tag{211}$$

Lause 3.4.6 (Vertailuperiaate, Comparison Test)**.** *Jos f ja $g\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ ovat lokaalisti integroituvia ja $0 \le f \le g$, niin*

$$\int_a^b g(x)\,dx < \infty \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x)\,dx < \infty$$
$$\int_a^b f(x)\,dx = \infty \;\Rightarrow\; \int_a^b g(x)\,dx = \infty$$

Vastaava tulos pätee kaikille väleille (207)*.*

Vrt. sivun 105 kuvaan.

Todistus. Lauseen 3.3.4 mukaan

$$\int_a^c f(x)\,dx \le \int_a^c g(x)\,dx$$

kaikilla $c \in [a,b)$. Väite seuraa nyt lauseesta 3.4.5 ja raja-arvon ($c \to b-$) ominaisuuksista: jos epäyhtälön oikean puolen integraalilla on raja-arvo $<\infty$, niin myös vasemmanpuoleisella integraalilla on raja-arvo $<\infty$. Jos taas epäyhtälön vasemman puolen integraalilla on raja-arvo ∞, niin myös oikean puolen integraalilla on raja-arvo ∞. $\square$

Käytännössä lausetta 3.4.6 sovellettaessa kirjoitetaan lyhyesti

$$0 \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx < \infty \quad \text{tai} \quad \infty = \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

ja tehdään tästä johtopäätös suppenemisesta. Vertailufunktiona käytetään jotakin tunnetusti käyttäytyvää funktiota, kuten $1/x^p$ (lauseet 200 ja 205).

Esimerkki 212. Suppeneeko vai hajaantuuko

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$ **b)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$?

Ratkaisu. a) $\displaystyle 0 \le \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}} \le \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3}} = \int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}} < \infty,$
eli integraali suppenee.
b) Koska $\sqrt{x} \ge 1$, kun $x \ge 1$, niin voidaan arvioida

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+\sqrt{x}} \ge \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \int_1^\infty \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{dx}{x^{1/2}} = \infty.$$

Integraali siis hajaantuu.

Lause 3.4.7 (Osamäärätesti)**.** *Olkoot f ja $g\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ lokaalisti integroituvia, $f \geq 0$ ja $g \geq 0$. Oletetaan lisäksi, että raja-arvo*

$$L = \lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{213}$$

on olemassa äärellisenä tai $L = \infty$.

(1) *Jos $L < \infty$ ja $\int_a^b g(x)\,dx < \infty$, niin $\int_a^b f(x)\,dx < \infty$.*

(2) *Jos $L > 0$ ja $\int_a^b g(x)\,dx = \infty$, niin $\int_a^b f(x)\,dx = \infty$.*

Vastaava tulos pätee kaikille väleille (207).

Todistus. (1) Oletuksista seuraa, että on olemassa $c \in (a,b)$ siten, että

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq L+1 \;\Leftrightarrow\; f(x) \leq (L+1)g(x)$$

kaikilla $x \in [c,b)$. Väite seuraa lauseesta 3.4.6.
(2) Samaan tapaan. □

Esimerkki 214. Suppeneeko $\displaystyle\int_1^\infty \frac{3x-2}{x^2+1}\,dx$?

Ratkaisu. Integroitava funktio $f(x)$ on ei-negatiivinen ja lisäksi jatkuvana funktiona lokaalisti integroituva. Tutkitaan integroituvuutta ensin tekemällä seuraava karkea arvio: suurilla x vakio sekä osoittajassa että nimittäjässä voidaan unohtaa, joten

$$f(x) = \frac{3x-2}{x^2+1} \approx \frac{3x}{x^2} \approx \frac{1}{x}.$$

$\int_1^\infty (1/x)\,dx = \infty$, joten ilmeisesti tutkittava integraali hajaantuu. Tästä päätellään sopiva vertailufunktio $g(x) = 1/x$ osamäärätestiä varten:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\dfrac{3x-2}{x^2+1}}{\dfrac{1}{x}} = \frac{3x^2-2x}{x^2+1} = \frac{3-\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{1}{x^2}} \to 3,$$

kun $x \to \infty$. Osamäärätestin kohdan (2) perusteella tutkittava integraali hajaantuu.

Itseinen suppeneminen

Määritelmä 3.4.8. Olkoon $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ lokaalisti integroituva. Tällöin epäoleellinen integraali

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

suppenee itseisesti (converges absolutely), jos integraali

$$\int_a^b |f(x)|\,dx$$

suppenee. Vastaavalla tavoin määritellään itseinen suppeneminen kaikilla väleillä (207).

Lause 3.4.9. *Jos epäoleellinen integraali suppenee itseisesti, niin se suppenee.*

Todistus. Tarkastellaan välillä $[a,b)$ lokaalisti integroituvaa f (muut välit (207) vastaavasti). Määritellään $g = |f| - f$. Funktio g on välillä $[a,b)$ lokaalisti integroituva (lauseet 3.3.5 ja 3.3.1–2) ja

$$0 \leq g \leq 2|f|.$$

Koska $|f|$:n integraali suppenee, niin vertailuperiaatteen mukaan myös g:n integraali suppenee. Niinpä funktion $f = |f| - g$ integraali suppenee (lause 3.4.4). $\square$

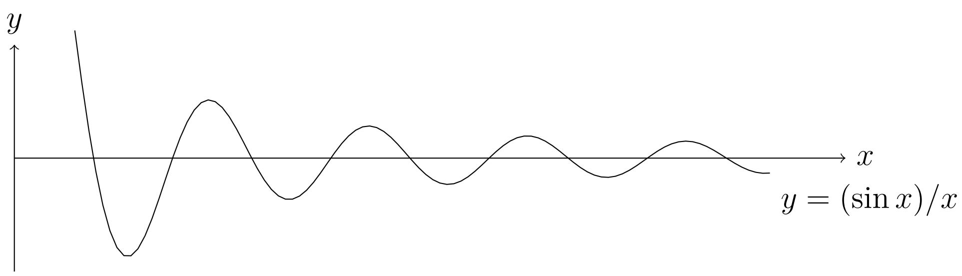
Esimerkki 215. Tutkitaan integraalin

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p}\,dx \tag{216}$$

suppenemista, kun $p > 0$.

$$\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x^p}\right| dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx < \infty,$$

kun $p > 1$, joten (216) suppenee itseisesti ja siten suppenee, kun $p > 1$. Voidaan osoittaa, että arvoilla $0 < p \leq 1$ (216) suppenee, mutta ei itseisesti [15, Examples 3.4.13–14]. Tämä johtuu funktion oskilloinnista ("positiivinen ja negatiivinen pinta-ala").



Sanotaan, että epäoleellinen integraali *suppenee ehdollisesti (converges conditionally)*, jos se suppenee, mutta ei suppene itseisesti.

3.5 Riemann-integroituvuudesta – Lebesguen ehto

Pohditaan vielä lyhyesti, millainen on välillä $[a,b]$ integroituvien funktioiden joukko.

Lause 217. *Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ rajoitettu välillä $[a,b]$ ja integroituva jokaisella välillä $[a,c] \subset [a,b)$. Silloin f on integroituva välillä $[a,b]$ ja*

$$\int_a^b f = \lim_{c \to b-} \int_a^c f.$$

Vastaava tulos pätee myös, jos f on integroituva jokaisella välillä $[c,d] \subset (a,b)$.

Todistus. Valitaan M siten, että $|f(x)| < M$ kaikilla $x \in [a,b]$. Olkoon $\epsilon > 0$. Valitaan $r > 0$ siten, että $r \leq \epsilon/(4M)$ ja $a < b - r$. Koska f on integroituva välillä $[a, b-r]$, niin on olemassa välin $[a, b-r]$ jako $P = \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ siten, että

$$S(P) - s(P) = \sum_{i=1}^{n-1} (M_i - m_i)\Delta x_i < \frac{\epsilon}{2}.$$

Nyt $P' = P \cup \{b\}$ on välin $[a,b]$ jako. Kun merkitään $b = x_n$, niin

$$S(P') - s(P') = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i < \frac{\epsilon}{2} + (M_n - m_n)\Delta x_n < \frac{\epsilon}{2} + 2Mr \leq \epsilon.$$

f toteuttaa Riemannin ehdon (lause 3.2.7) välillä $[a,b]$ ja on siten integroituva välillä $[a,b]$. Kaava:

$$\left| \int_a^b f - \int_a^{b-r} f \right| = \left| \int_{b-r}^b f \right| \leq \int_{b-r}^b |f| \leq Mr \to 0,$$

kun $r \to 0+$. □

Seuraus 218. *Jos $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja rajoitettu, niin f on integroituva välillä $[a,b]$.*

Todistus. f voidaan jatkaa rajoitetuksi funktioksi $f_1\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ asettamalla $f_1(x) = f(x)$ kaikilla $x \in (a,b)$ ja vaikkapa $f(a) = f(b) = 0$ (f_1:n arvoilla päätepisteissä ei lemman 168 mukaan ole vaikutusta integroituvuuteen eikä integraaliin). On osoitettava, että f_1 on integroituva välillä $[a,b]$. Näin on, koska f_1 toteuttaa lauseen 217 oletukset, koska se on jatkuvana funktiona integroituva jokaisella välillä $[c,d] \subset (a,b)$. □

Lause 219. *Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ rajoitettu. Jos f:n epäjatkuvuuspisteiden joukko on äärellinen, niin f on integroituva välillä $[a,b]$.*

Todistus. Olkoot $a \le c_1 < c_2 < \cdots < c_n \le b$ ne pisteet, joissa f ei ole jatkuva. Nyt

$$[a,b] = [a,c_1] \cup [c_1,c_2] \cup \cdots \cup [c_{n-1},c_n] \cup [c_n,b]$$

(jos $c_0 = a$ tai $c_n = b$, niin jätetään ko. yhden pisteen väli pois). f on seurauksen 218 mukaan integroituva jokaisella näistä osaväleistä, joten f on lauseen 3.3.8–9 mukaan integroituva koko välillä $[a,b]$. □

Lauseen 219 tilanteessa f ei välttämättä ole paloittain jatkuva, sillä ei välttämättä ole olemassa raja-arvoja

$$\lim_{x \to c_i \pm} f(x).$$

Siten lausetta 169 ei voida käyttää.

Lause 220. *Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ rajoitettu. Jos f:n epäjatkuvuuspisteiden joukko $\{c_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ on numeroituvasti ääretön siten, että on olemassa*

$$c = \lim_{n \to \infty} c_n,$$

niin f on integroituva välillä $[a,b]$.

Todistus. Todistetaan tapaus, jossa $c \in (a,b)$; tapaukset $c = a$ ja $c = b$ menevät vastaavasti. Jokaisella $r > 0$, jolle $a < c - r < c + r < b$, on oletuksen mukaan olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että $c - r < c_n < c + r$ kaikilla $n > N$. f:n epäjatkuvuuspisteiden joukko on siten äärellinen sekä välillä $[a, c-r]$ että välillä $[c+r, b]$, joten lauseen 219 mukaan f on integroituva näillä väleillä. Koska näin käy kaikilla pienillä $r > 0$, on f lauseiden 219 ja 217 mukaan integroituva väleillä $[a,c]$ ja $[c,b]$, ja siten koko välillä $[a,b]$ (lause 3.3.8–9). □

Merkitään seuraavassa välin $I = (a,b)$ pituutta $\Delta I = b - a$.

Määritelmä 221. Joukko $A \subset \mathbb{R}$ on *nollamittainen*, jos jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa (äärellinen tai ääretön) kokoelma $\{I_k\}$ avoimia välejä I_k siten, että

$$A \subset \bigcup_k I_k \quad \text{ja} \quad \sum_k \Delta I_k < \epsilon.$$

Vaaditaan siis, että jokaisella $\epsilon > 0$ joukko A voidaan peittää avoimilla väleillä I_k, joiden yhteenlaskettu pituus on alle ϵ.

Esimerkiksi jokainen numeroituva joukko $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ on nollamittainen: jos $\epsilon > 0$, niin voidaan valitaan välit

$$I_k = \left(a_k - \frac{\epsilon}{2^{k+2}}, a_k + \frac{\epsilon}{2^{k+2}}\right),$$

joille selvästi $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k$ ja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Delta I_k = \sum_{k=1}^{\infty} 2\frac{\epsilon}{2^{k+2}} = \frac{\epsilon}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Toisaalta ylinumeroituva joukkokin voi olla nollamittainen. Mittoihin palataan tarkemmin mitta- ja integraaliteorian opintojaksolla.

Lopulta vastaus kysymykseen, millainen on integroituvien funktioiden joukko. Todistus on melko syvällinen, ks. esimerkiksi [14, Thm 6.29] tai [11, Thm 24.4].

Lause 3.5.6 (Lebesguen ehto)**.** *Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ rajoitettu. f on integroituva jos ja vain jos f:n epäjatkuvuuspisteiden joukko on nollamittainen.*

4 Jonot ja sarjat

4.1 Lukujono

Lukujonon raja-arvo ja perusominaisuudet

Jos jokaista luonnollista lukua $n \in \mathbb{N}$ vastaa reaaliluku a_n, niin päättymätöntä järjestettyä luetteloa

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (a_n) = (a_n)_{n=1}^{\infty}$$

kutsutaan *lukujonoksi (sequence)*. Luvut a_n ovat lukujonon *termejä (term)* (tai *alkioita*). Indeksointi voidaan aloittaa mistä tahansa kokonaisluvusta.

Lukujono $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ voidaan samastaa funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = a_n$, kanssa.

Esimerkki 222. a) $(2n)_{n=0}^{\infty} = (0, 2, 4, 6, \ldots)$

b) $(2n-1)_{n=1}^{\infty} = (1, 3, 5, 7, \ldots)$

c) $\Big((-1)^n 2^n\Big)_{n=1}^{\infty} = (-2, 4, -8, 16, -32, \ldots)$

d) $\left(\dfrac{1}{3^n}\right)_{n=0}^{\infty} = \left(1, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{27}, \ldots\right)$

Joskus lukujonon termeille ei anneta (tai ei voida antaa) edellisen esimerkin mukaista kaavaa.

Esimerkki 223. a) Kasvavaan järjestykseen asetetut alkuluvut muodostavat jonon

$$(2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots).$$

b) Määrittely $a_1 = 1$ ja $a_n = 2a_{n-1} + 3$, kun $n > 1$, tuottaa lukujonon

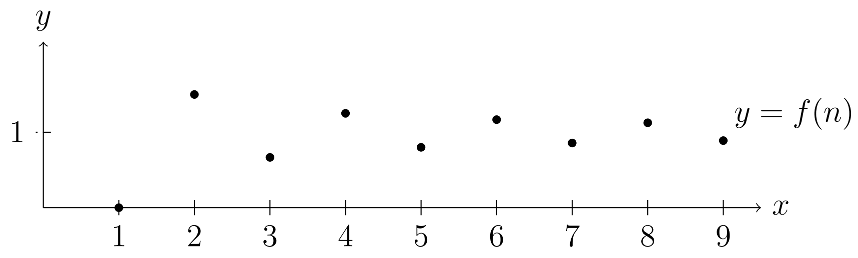
$$(1, 5, 13, 29, 61, \ldots).$$

c) Määrittely $a_1 = a_2 = 1$ ja $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, kun $n > 2$, tuottaa ns. *Fibonaccin jonon*

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots).$$

Kohdissa **b)** ja **c)** on kyse *rekursiivisesti* (*induktiivisesti*) määritellystä lukujonosta, joka asetetaan määräämällä, kuinka kukin termi riippuu edellisestä tai edellisistä termeistä.

Lukujonoa (a_n) voidaan havainnollistaa geometrisesti piirtämällä sitä vastaavan funktion $f(n)$ kuvaaja.



Huomautus 224. Joskus lukujono esitellään listaamalla muutama ensimmäinen termi, esimerkiksi

$$(1, 2, 3, \dots). \tag{225}$$

Tällainen määrittely ei kuitenkaan ole yksikäsitteinen, esimerkiksi jono (225) voisi olla

$$(n+1)_{n=0}^{\infty} = (1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots)$$

tai vaikkapa

$$\left(-\frac{1}{2}n^3 + \frac{3}{2}n^2 + 1\right)_{n=0}^{\infty} = (1, 2, 3, 1, -7, -24, \dots).$$

Määritelmä 4.1.1. Lukujono (a_n) *suppenee (converges)* kohti *raja-arvoa (limit)* $L \in \mathbb{R}$, jos

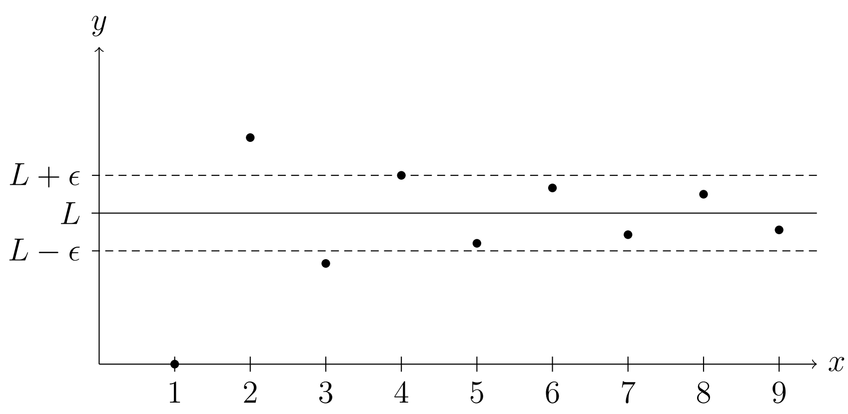
$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \colon n > N \ \Rightarrow \ |a_n - L| < \epsilon.$$

Tällöin merkitään

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L \qquad \text{tai} \qquad a_n \to L, \ \text{kun } n \to \infty.$$

Jos lukujono ei suppene, se *hajaantuu.*

Seuraavan kuvan tilanteessa valitulla ϵ voidaan valita $N = 4$.



Lause 4.1.2. *Jos on olemassa raja-arvo* $\lim_{n\to\infty} a_n$*, niin se on yksikäsitteinen.*

Todistus. On osoitettava, että jos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \text{ja} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = b,$$

niin $a = b$. Olkoon $\epsilon > 0$. Määritelmän mukaan on olemassa $N_1 \in \mathbb{N}$ ja $N_2 \in \mathbb{N}$ siten, että

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \tag{226}$$

kun $n > N_1$ ja

$$|a_n - b| < \frac{\epsilon}{2} \tag{227}$$

kun $n > N_2$. Jos valitaan $N = \max\{N_1, N_2\}$, niin sekä (226) että (227) ovat voimassa, kun $n > N$. Niinpä

$$|a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

kun $n > N$. Jokaiselle $\epsilon > 0$ pätee siis, että $|a - b| < \epsilon$. Jos olisi $a \neq b$, niin valinnalla $\epsilon = |b - a| > 0$ olisi $|a - b| \geq \epsilon$. Näin ei ole, joten on oltava $a = b$. □

Esimerkki 228. a) Vakiojono suppenee: jos $a_n = c$ kaikilla n, niin $\lim_{n\to\infty} a_n = c$, sillä $|a_n - c| = |c - c| = 0$ kaikilla n.

b) Jos $a_n = \dfrac{3n+1}{n-2}$, niin on olemassa $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$:

Olkoon $\epsilon > 0$. Nyt

$$|a_n - 3| = \left| \frac{3n+1}{n-2} - \frac{3(n-2)}{n-2} \right| = \left| \frac{7}{n-2} \right|.$$

Jos siis valitaan $N \in \mathbb{N}$ siten, että $N > 7/\epsilon + 2$, niin $|a_n - 3| < \epsilon$ aina kun $n > N$.

Lause 4.1.8. *Jos* (a_n) *ja* (b_n) *suppenevat ja* $c \in \mathbb{R}$*, niin seuraavat raja-arvot ovat olemassa ja*

(1) $\lim_{n\to\infty} (ca_n) = c \lim_{n\to\infty} a_n,$

(2) $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n,$

(3) $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n,$

(4) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}, \quad$ *jos* $\quad \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0.$

Todistus. Todistetaan (2) summalle $a_n + b_n$. Merkitään

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \qquad \text{ja} \qquad b = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Olkoon $\epsilon > 0$. Määritelmän mukaan on olemassa N_1 ja $N_2 \in \mathbb{N}$ siten, että

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \tag{229}$$

kun $n < N_1$ ja

$$|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} \tag{230}$$

kun $n > N_2$. Jos valitaan $N = \max\{N_1, N_2\}$, niin sekä (229) että (230) ovat voimassa, kun $n > N$. Niinpä kolmioepäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned}|(a_n + b_n) - (a + b)| &= |(a_n - a) + (b_n - b)| \\ &\le |a_n - a| + |b_n - b| \\ &\le \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,\end{aligned}$$

kun $n > N$. Siten summalla $a_n + b_n$ on raja-arvo $a + b$. □

Huomautus 231. a) Jonon suppenemiseen ja mahdolliseen raja-arvoon ei äärellisen monella jonon alkupään termillä ole merkitystä.
b) Lauseen 4.1.8 kohdassa (4) ehdosta $\lim b_n \neq 0$ seuraa, että on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että $b_n \neq 0$ kaikilla $n > N$: kun valitaan raja-arvon määritelmässä $\epsilon = |b| > 0$, niin on olemassa N siten, että kaikilla $n > N$ pätee

$$|b_n - b| < |b|.$$

Tästä seuraa $-|b| < b_n - b < |b|$ eli $b - |b| < b_n < b + |b|$. Jos $b > 0$, niin saadaan $b_n > 0$, ja jos $b < 0$, niin saadaan $b_n < 0$, kun $n > N$. Siten jono (a_n/b_n) on määritelty, kun $n > N$.

Rajoitettu ja monotoninen lukujono

Määritelmä 4.1.3. Lukujono (a_n) on *ylhäältä rajoitettu (bounded above)*, jos on olemassa luku M, jolle $a_n \le M$ kaikilla n. Vastaavasti määritellään *alhaalta rajoitettu (bounded below)* lukujono. Lukujono on *rajoitettu (bounded)*, jos se on sekä alhaalta että ylhäältä rajoitettu.

Määritelmä 4.1.5. Tarkastellaan lukujonoa (a_n). Jos kaikilla n pätee

- $a_n \leq a_{n+1}$, niin lukujono (a_n) on *kasvava (increasing, nondecreasing)*,
- $a_n < a_{n+1}$, niin kukujono (a_n) on *aidosti kasvava ((strictly) increasing)*,
- $a_n \geq a_{n+1}$, niin lukujono (a_n) on *vähenevä (decreasing, nonincreasing)*,
- $a_n > a_{n+1}$, niin lukujono (a_n) on *aidosti vähenevä ((strictly) decreasing)*.

Lukujono on *monotoninen (monotone)*, jos se on kasvava tai vähenevä. Vastaavasti aidosti kasvavaa tai aidosti vähenevää lukujonoa sanotaan *aidosti monotoniseksi (strictly monotone)*.

Esimerkki 232. a) Vakiolukujono $(1, 1, 1, \ldots)$ on kasvava, vähenevä ja rajoitettu.
b) Jos

$$a_n = \frac{1}{2n^2 + 7},$$

niin lukujono (a_n) on vähenevä, sillä $2n^2 + 7$ on kasvava joukossa $n \in \mathbb{N}$. Lisäksi lukujono on rajoitettu, sillä selvästikin $0 < a_n < 1$ kaikilla n.
c) Jos

$$a_n = \frac{n + 2}{n + 13},$$

niin lukujono (a_n) on kasvava, sillä funktion

$$f(x) = \frac{x + 2}{x + 13}$$

derivaatta on

$$f'(x) = \frac{11}{(x + 13)^2} > 0$$

kaikilla $x \geq 1$. Lukujono on lisäksi rajoitettu: kasvavuuden nojalla $a_n \geq a_1 = 3/14$ ja koska $n + 2 \leq n + 13$ kaikilla n, niin $a_n \leq 1$ kaikilla n.

Lause 4.1.4. *Suppeneva lukujono on rajoitettu.*

Todistus. Olkoon $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Valitaan lukujonon raja-arvon määritelmässä $\epsilon = 1$. Silloin on olemassa N siten, että

$$|a_n - a| < 1$$

kaikilla $n > N$. Siten

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a|,$$

kun $n > N$. Asetetaan $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_N|, 1 + |a|\}$. Nyt

$$-M \leq a_n \leq M$$

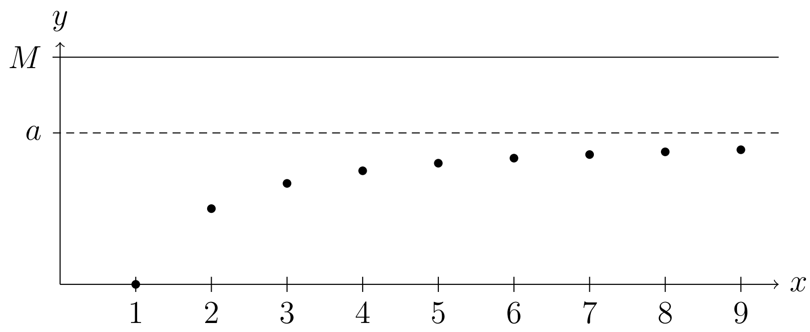
kaikilla $n \in \mathbb{N}$. □

Täydellisyysaksioomalla on tärkeä seuraus:

Lause 4.1.6. *(a) Ylhäältä rajoitettu kasvava lukujono suppenee.*
(b) Alhaalta rajoitettu vähenevä lukujono suppenee.

Todistus. Todistetaan (a). Olkoon (a_n) kasvava ja ylhäältä rajoitettu. Merkitään $S = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Joukko S on ylhäältä rajoitettu, joten täydellisyysaksiooman mukaan on olemassa $a = \sup S$. Osoitetaan, että $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Olkoon $\epsilon > 0$. Lauseesta 1.1.3 seuraa, että on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että $a - \epsilon < a_N \leq a$. Koska lukujono on kasvava, on $a_N \leq a_n \leq a$ kaikilla $n > N$. Siten $a - \epsilon < a_n \leq a$, josta seuraa $|a_n - a| < \epsilon$, kun $n > N$. □



Hajaantuminen kohti ääretöntä

Määritelmä 233. Lukujono (a_n) *hajaantuu kohti ääretöntä (diverges to infinity)*, merkitään

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty,$$

jos jokaisella M on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että $a_n > M$ kaikilla $n > N$. Vastaavasti määritellään *hajaantuminen kohti miinus ääretöntä.*

Esimerkki 234. Tarkastellaan jonoa (a_n).
a) Jos $a_n = \sin(n)$, niin jono on rajoitettu, mutta hajaantuu.
b) Jos $a_n = (-n)^2$, niin jono ei ole rajoitettu, ei suppene, eikä hajaannu kohti ääretöntä tai miinus ääretöntä.
c) Jos $a_n = -n^2$, niin jono hajaantuu kohti miinus ääretöntä: $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Lauseesta 4.1.6 seuraa suoraan:

Seuraus 235. *Kasvavalla jonolla* (a_n) *joko on raja-arvo* $\lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$ *tai se hajaantuu kohti ääretöntä:* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Lause 4.1.7. *Olkoon olemassa* $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, *missä* $L \in \mathbb{R}$ *tai* $L = \pm\infty$, *ja olkoon* $a_n = f(n)$ *jostakin* n*:n arvosta lähtien. Silloin on olemassa*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Käytämme tätä lausetta usein tapauksissa, joissa lukujonon termeille on annettu lauseke $a_n = f(n)$ ja f:n raja-arvo saadaan selvitettyä vaikkapa derivaattatarkastelulla tai l'Hôpitalin säännöllä. ”Käänteinen” tulos ei päde, ts. (a_n):llä voi olla raja-arvo, vaikka jollakin vastaavalla funktiolla ei olisikaan, kuten esimerkki $a_n = \sin(n\pi)$ osoittaa.

Cauchyn suppenemiskriteerio

Osoitettaessa jono suppenevaksi määritelmää käyttäen täytyy raja-arvo olla etukäteen tiedossa. Seuraavalla kriteeriolla jonon suppenemista voidaan tutkia ilman tietoa raja-arvosta.

Määritelmä 236. Lukujono (a_n) on *Cauchy-jono*, jos

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}: \quad n, m > N \;\Rightarrow\; |a_n - a_m| < \epsilon.$$

Lause 4.1.13 (Cauchyn suppenemiskriteerio lukujonolle)**.** *Lukujono* (a_n) *suppenee jos ja vain jos se on Cauchy-jono.*

Todistus. ”$\Rightarrow$” Helppo harjoitustehtävä.

”$\Leftarrow$” Oletetaan, että (a_n) on Cauchy-jono. Todistetaan ensin, että (a_n) on rajoitettu. Valitaan Cauchy-jonon määritelmässä $\epsilon = 1$. Silloin on olemassa N siten, että $|a_n - a_m| < 1$, kun $n, m > N$, ja siten

$$|a_n| = |a_n - a_N + a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| < 1 + |a_N|,$$

kun $n > N$. Siten

$$|a_n| \leq \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_N|, 1 + |1_N|\}$$

kaikilla n, eli (a_n) on rajoitettu.

Käytetään seuraavaksi luvun 4.2 tietoja osajonoista. Lauseen 4.2.5 mukaan on olemassa suppeneva osajono: $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. Osoitetaan, että on olemassa $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Kiinnitetään $\epsilon > 0$. Nyt on olemassa k_0 siten, että

$$|a_{n_k} - a| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{kun } k > k_0.$$

Toisaalta Cauchy-ehdon mukaan on olemassa N siten, että

$$|a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{kun } n, m > N.$$

Valitaan $l > k_0$ siten, että $n_l > N$. Jos nyt $n > N$, niin

$$|a_n - a| = |a_n - a_{n_l} + a_{n_l} - a| \le |a_n - a_{n_l}| + |a_{n_l} - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \qquad \square$$

Neperin luku

Lemma 237. *Lukujono (a_n), missä*

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

on kasvava ja ylhäältä rajoitettu.

Todistus. Bernoullin epäyhtälön (lause 11) nojalla

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^{n+1} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \ge \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-(n+1)\frac{1}{(n+1)^2}\right) = 1,
\end{aligned}$$

joten jono (a_n) on kasvava. Vastaavalla tavoin voidaan osoittaa, että myös jono

$$b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

on kasvava. Nyt

$$\begin{aligned}
a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^n = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right)^n \\
&\le \left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{1}{b_n} \le \frac{1}{b_2} = 4,
\end{aligned}$$

eli (a_n) on ylhäältä rajoitettu. $\square$

Lauseen 4.1.6 mukaan lemman lukujonolla on raja-arvo. Tällä raja-arvolla on keskeinen asema eksponenttifunktioiden teoriassa, joten sille annetaan oma nimi:

Määritelmä 238. Raja-arvoa

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828\ldots$$

kutsutaan *Neperin luvuksi.*

4.2 Jatkuvien funktioiden ominaisuudet jonojen avulla

Lause 4.2.6 (Jatkuvuuden jonokarakterisointi)**.** *Funktio $f\colon I\to\mathbb{R}$ on jatkuva pisteessä $x_0\in I$ jos ja vain jos*

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

jokaiselle välin I jonolle (x_n), jolle $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Todistus. Seuraa melko suoraan lauseesta 2.2.2. $\square$

Jatkuvuuden jonokarakterisointi antaa vaihtoehtoisen tavan tutkia jatkuvien funktioiden ominaisuuksia. Todistetaan jonojen avulla, että suljetulla ja rajoitetulla välillä jatkuva funktio on rajoitettu ja saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa (lauseet 2.2.8 ja 2.2.9). Aloitetaan esivalmisteluilla.

Määritelmä 4.2.1. Lukujonon (a_n) *osajono (subsequence)* on jono (a_{n_k}), missä $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$.

Lause 4.2.5. *Rajoitetulla jonolla on suppeneva osajono.*

Todistus. Olkoon $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ rajoitettu jono. Merkitään $S = \{a_n\colon n\in\mathbb{N}\}$, ts. kaikkien jonon termien muodostama joukko. Jaetaan tarkastelu sen mukaan, onko S äärellinen vai ääretön.

(1) Jos S on äärellinen, ts. $S = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$, niin jokin $b\in S$ esiintyy jonossa (a_n) äärettömän monta kertaa (perustele epäsuoralla todistuksella). Tällöin voidaan valita osajono (a_{n_k}) siten, että $a_{n_k} = b$, jolloin

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = b.$$

(2) Jos taas S on ääretön, niin Bolzanon ja Weierstrassin lauseen 1.3.8 mukaan joukolla S on kasautumispiste a. Osoitetaan, että on olemassa osajono (a_{n_k}), joka suppenee kohti pistettä a. Haetaan tällainen osajono induktiivisesti.
$k = 1$: Koska a on joukon S kasautumispiste, niin voidaan valita $a_{n_1} \in S$ siten, että $|a - a_{n_1}| < 1$.
$k = 2$: Koska a on joukon S kasautumispiste, niin voidaan taas valita $a_{n_2} \in S$ siten, että $|a - a_{n_2}| < 1/2$. Mutta tässä mikään ei takaa, että olisi $n_2 > n_1$. Näin valinta voidaan kuitenkin tehdä, sillä jos olisi $|a - a_{n_2}| \geq 1/2$ kaikilla $n > n_1$, niin a ei olisi S:n kasautumispiste. (Rakenna tälle tarkka perustelu!)
$k = 3$: Kuten edellä, voidaan valita $a_{n_3} \in S$ siten, että $n_3 > n_2$ ja $|a - a_{n_3}| < 1/3$.
Näin jatkaen löydetään osajono (a_{n_k}), $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$, jolle
$|a - a_{n_k}| < 1/k$ jokaisella $k \in \mathbb{N}$. Tästä seuraa $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. □

Lemma 239. *Olkoon (x_n) suppeneva jono, jonka alkiot kuuluvat suljetulle ja rajoitetulle välille: $x_n \in [a, b]$ kaikilla n. Tällöin jonon raja-arvo $c = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ on myös välillä $[a, b]$.*

Todistus. Epäsuora todistus: oletetaan, että $c \notin [a, b]$. Tällöin $c < a$ tai $c > b$. Tarkastellaan tapausta $c < a$ (tapaus $c > b$ vastaavasti). Valitaan lukujonon raja-arvon määritelmässä $\epsilon = a - c > 0$. Tällöin on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että kaikilla $n > N$ on $|x_n - c| < \epsilon$, josta seuraa $x_n - c < a - c$ eli $x_n < a$, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa. □

Lause 4.2.7. *Suljetulla ja rajoitetulla välillä $[a, b]$ jatkuva funktio f on rajoitettu välillä $[a, b]$.*

Todistus. Epäsuora todistus: oletetaan, että f ei ole rajoitettu välillä $[a, b]$. Silloin jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on olemassa $x_n \in [a, b]$ siten, että

$$|f(x_n)| > n. \tag{240}$$

Jono (x_n) on rajoitettu, joten sillä on lauseen 4.2.5 mukaan suppeneva osajono (x_{n_k}). Merkitään

$$c = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}.$$

Koska $x_{n_k} \in [a, b]$, niin $c \in [a, b]$ (lemma 239). Nyt jatkuvuuden jonokarakterisoinnin (lause 4.2.6) mukaan on olemassa raja-arvo

$$f(c) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}).$$

Jono $(f(x_{n_k}))_{k=1}^{\infty}$ siis suppenee ja on siten lauseen 4.1.4 mukaan rajoitettu. Näin ei kuitenkaan ehdon (240) mukaan ole. Ei siis voi olla niin, että f ei ole rajoitettu välillä $[a, b]$. □

Lause 241. *Suljetulla ja rajoitetulla välillä jatkuva funktio $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa.*

Todistus. Lauseen 4.2.7 mukaan f on rajoitettu, joten on olemassa $M = \sup\{f(x)\colon x \in [a,b]\}$ ja $m = \inf\{f(x)\colon x \in [a,b]\}$. On osoitettava, että on olemassa c ja $d \in [a,b]$ siten, että $f(c) = M$ ja $f(d) = m$. Todistetaan ensin mainittu.

Supremumin perusominaisuuksien mukaan (lause 1.1.3) jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on olemassa $x_n \in [a,b]$ siten, että

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M. \tag{242}$$

Jono (x_n) on rajoitettu, joten sillä on suppeneva osajono (x_{n_k}) (lause 4.2.5), jonka raja-arvo $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c$ on välillä $[a,b]$ (lemma 239). Nyt jatkuvuuden jonokarakterisoinnin (lause 4.2.6) mukaan

$$f(c) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}).$$

Toisaalta arviosta (242) seuraa, että

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M.$$

Siten $f(c) = M$. □

4.3 Vakiotermiset sarjat

Määritelmä 4.3.1. Olkoon (a_k) lukujono. Muodollista summaa

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

kutsutaan *sarjaksi (series)*. Luku a_k on sarjan k:s *termi*. Sarjan ensimmäisten termien summa indeksiin n saakka on sarjan n:s *osasumma (partial sum)*. Osasummaa merkitään S_n, ts.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Jos osasummien S_n muodostama jono $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee ja sen raja-arvo on

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n,$$

niin sanotaan, että sarja *suppenee (converges)* ja että sen *summa (sum)* on S. Tällöin merkitään

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S.$$

Jos $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ hajaantuu, niin sanotaan, että sarja *hajaantuu (diverges)*. Tapauksissa $\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$ merkitään

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \pm\infty.$$

Esimerkki 243. Sarjan

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

neljä ensimmäistä osasummaa ovat

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \\ S_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\ S_3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \\ S_4 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \end{aligned}$$

Korostettakoon, että sarja voi hajaantua muutenkin kuin kohti ± ääretöntä, jos osasummien jono $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ oskilloi kuten esimerkiksi esimerkissä 244 **b)**.

Esimerkki 244. **a)** Osoita, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots$$

suppenee ja laske summa.

Ratkaisu. Muodostamalla osamurtokehitelmä nähdään, että yleinen termi voidaan kirjoittaa muodossa

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

joten osasummalle S_n pätee

$$\begin{aligned} S_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots \\ &\quad + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1, \quad \text{kun } n \to \infty. \end{aligned}$$

Siten sarja suppenee ja $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$

b) Osoita, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

hajaantuu.

Ratkaisu. Ensimmäiset osasummat ovat

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 \\ S_2 &= 1 - 1 = 0 \\ S_3 &= 1 - 1 + 1 = 1 \\ S_4 &= 1 - 1 + 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Nähdään, että osasummien jono on $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$, jolla ei ole raja-arvoa.

Huomautus 245. Sarjan indeksointi voidaan aloittaa muustakin indeksistä kuin 1, esimerkiksi

$$\sum_{i=5}^{\infty} \frac{1}{(i-4)^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots .$$

Tämän sarjan osasummat ovat

$$S_5 = 1, \quad S_6 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \quad S_7 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{49}{36}, \quad \dots .$$

Määritelmä 246. Sarja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ on *geometrinen sarja (geometric series)*, jos on olemassa $r \in \mathbb{R}$ siten, että

$$a_{k+1} = r a_k$$

kaikilla k, ts. ensimmäisen termin jälkeen kukin termi saadaan edeltävästä termistä kertomalla *suhdeluvulla (ratio)* r.

Jos geometrisen sarjan ensimmäistä termiä merkitään a:lla, niin sarjan termit ovat $a_0 = a$, $a_1 = ar$, $a_2 = ar^2$, $a_3 = ar^3$ jne. Niinpä geometrinen sarja voidaan kirjoittaa muodossa

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots .} \tag{247}$$

Lause 248. *Jos $|r| < 1$, niin geometrinen sarja (247) suppenee ja*

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}.$$

Jos $|r| \geq 1$ ja $a \neq 0$, niin geometrinen sarja hajaantuu.

Todistus. Kirjoitetaan n:s osasumma ja kerrotaan yhtälö puolittain suhdeluvulla:

$$\begin{aligned} S_n &= a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n \\ rS_n &= \phantom{a + {}} ar + ar^2 + \cdots + ar^n + ar^{n+1} \end{aligned}$$

Vähentämällä nämä yhtälöt puolittain saadaan

$$(1-r)S_n = a - ar^{n+1},$$

joten

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{a(1-r^{n+1})}{1-r}, & \text{kun } r \neq 1, \\ (n+1)a, & \text{kun } r = 1. \end{cases}$$

Kun $|r| < 1$, niin $\lim_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$, joten

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}.$$

Kun $|r| > 1$, niin raja-arvoa $\lim_{n\to\infty} r^{n+1}$ ei ole olemassa ja silloin sarja hajaantuu, mikäli $a \neq 0$. Myös tapauksissa $r = \pm 1$, $a \neq 0$, sarja hajaantuu. $\square$

Geometrisen sarjan indeksointia ei aina aloiteta nollasta. Silloin paras tapa lukea lauseen 248 kaava on

$$\boxed{\sum_{k=p}^{\infty} ar^k = \frac{1.\text{ termi}}{1 - \text{suhdeluku}} \qquad (p \in \mathbb{N}).} \tag{249}$$

Geometrisen sarjan osasummaa S_n kutsutaan *geometriseksi summaksi*, jolle edellisen todistuksen mukaan

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} ar^k = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} \qquad (r \neq 1).} \tag{250}$$

Lause 4.3.3. *Jos sarjat* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *ja* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *suppenevat ja* c *on vakio, niin myös sarjat* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ca_k$ *ja* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ *suppenevat ja*

$$\sum_{k=1}^{\infty} ca_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad \textit{ja} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Todistus. Sarjan summa on osasummien jonon raja-arvo, joten väite seuraa lauseesta 4.1.8. $\square$

Esimerkki 251. Sarja, joka voidaan esittää suppenevien geometristen sarjojen summana:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \left(2\left(-\frac{1}{3}\right)^k + \frac{\pi}{e^k}\right) &= 2\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^k + \pi \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^k \\ &= 2 \cdot \frac{-1/3}{1-(-1/3)} + \pi \frac{1/e}{1-1/e} = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{e-1}.\end{aligned}$$

Lause 4.3.6. *Jos* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *suppenee, niin* $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

Kurssikirjassa tämä lause saadaan sarjojen Cauchyn kriteerion seurauksena. Annetaan tässä sille määritelmään perustuva todistus.

Todistus. Merkitään $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Silloin $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1}$, joten

$$a_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0, \quad \text{kun } n \to \infty. \qquad \square$$

Seuraus 252. *Jos* $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$ *tai raja-arvoa* $\lim_{k\to\infty} a_k$ *ei ole olemassa, niin* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *hajaantuu.*

Huomautus 253. Lauseen 4.3.6 käänteinen väite ei päde, ts. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ voi hajaantua, vaikka olisi $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Esimerkiksi tästä käy harmoninen sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ (lause 260).

Esimerkki 254. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k}$ hajaantuu, sillä $\frac{k-1}{k} = 1 - \frac{1}{k} \to 1 \neq 0$, kun $k \to \infty$.

Määritelmä 255. Sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *n:s jäänöstermi (remainder)* on sarja $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$. Jos jäännöstermi suppenee, niin sen summaa merkitään R_n.

Seuraava lause toteaa sen ilmeisen seikan, että suppenevan sarjan summa S voidaan jakaa osiin

$$S = \underbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}_{=S_n} + \underbrace{a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots}_{=R_n} = S_n + R_n$$

ja että sarja suppenee jos ja vain jos jäännöstermi suppenee.

Lemma 4.3.4. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *suppenee* $\Leftrightarrow$ $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ *suppenee kaikilla* $n \geq 0$.

Suppenevassa tapauksessa

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k. \tag{256}$$

Todistus. "$\Leftarrow$" Selvä (valitse $n = 0$).
"$\Rightarrow$" Koska $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee, niin on olemassa raja-arvo (seuraavassa $m > n$)

$$\begin{aligned} S - S_n &= \lim_{m\to\infty} S_m - S_n = \lim_{m\to\infty} (S_m - S_n) \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{m} a_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = R_n. \end{aligned}$$

Tämä yhtälö todistaa samalla kaavan (256). $\square$

Lemmasta seuraa erityisesti, että mikään äärellinen määrä sarjan alkupään termejä ei vaikuta sarjan suppenemiseen. Jos tutkitaan sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenemista eikä olla kiinnostuneita tarkasta summasta, niin monesti sarjaa merkitään lyhyesti $\sum a_k$.

Positiivitermiset sarjat

Määritelmä 257. Sarja $\sum a_k$ on *positiiviterminen*, jos $a_k \geq 0$ kaikilla k.

Positiiviterminen sarjojen käyttäytyminen on sikäli selkeää, että sarja joko suppenee tai se hajaantuu kohti ääretöntä, koska osasummien jonon oskillointia ei voi esiintyä (lause 4.3.8). Tästä seuraa, että tällaisen sarjan suppenemisen tutkiminen on yleistä tapausta helpompaa ja käytössä on useita suppenemistestejä, joita käydään seuraavassa läpi.

Lause 4.3.8. *Positiiviterminen sarja $\sum a_k$ joko suppenee tai $\sum a_k = \infty$.*

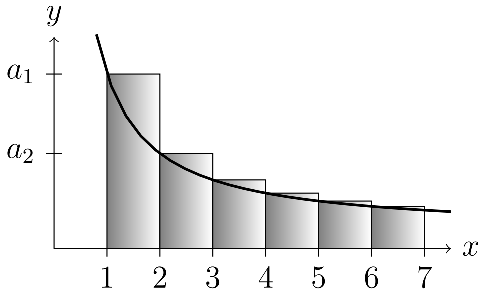
Todistus. Osasummien jono on kasvava: $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$ jokaisella n, sillä $a_{n+1} \geq 0$. Väite seuraa nyt lauseesta 4.1.6. $\square$

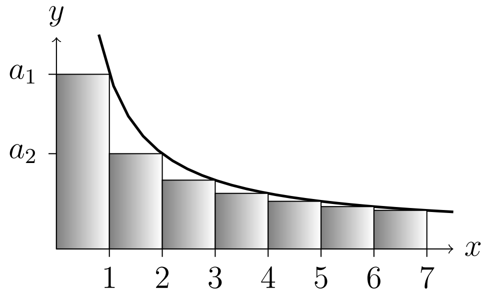
Positiivitermisille sarjoille on useita suppenemistestejä. Ensimmäisessä sarjan summaa verrataan sopivaan integraaliin.

Lause 4.3.10 (Integraalitesti, The Integral Test)**.** *Olkoon $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ positiiviterminen sarja sekä $f\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$ vähenevä funktio, jolle $f(k) = a_k$ kaikilla $k \geq 1$. Tällöin*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ suppenee} \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^{\infty} f(x)\,dx \text{ suppenee.}$$

Todistus. Perustellaan väite ensin kuvan avulla: Oheisissa kuvissa k:nnen suorakulmion pinta-ala on kanta $\times$ korkeus $= 1 \times f(k) = a_k$. Sarjan summa on siis suorakulmioiden yhteenlaskettu pinta-ala. Integraalin pinta-alatulkinta huomioiden vasemmanpuoleisesta kuvasta voidaan nyt päätellä, että jos $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ hajaantuu, niin myös $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ hajaantuu ja oikeanpuoleisesta kuvasta, että jos $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ suppenee, niin myös $\sum_{k=2}^{\infty} a_k$ suppenee ja siten myös $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee.





Tarkempi todistus: Oletetaan ensin, että $I = \int_1^\infty f(x)\,dx$ suppenee. Koska $f(x)$ on vähenevä, niin $a_{k+1} \le f(x)$ välillä $k \le x \le k+1$. Niinpä

$$a_{k+1} = \int_k^{k+1} a_{k+1}\,dx \le \int_k^{k+1} f(x)\,dx.$$

Siten osasummalle S_n pätee

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n} a_{k+1} \le a_1 + \int_1^{n+1} f(x)\,dx \le a_1 + I.$$

Tässä viimeinen arvio perustuu siihen, että ei-negatiiviselle jatkuvalle integroituvalle funktiolle $f(x)$ integraalifunktio

$$F(y) = \int_1^y f(x)\,dx$$

on kasvava ja sillä on ylärajana integraalin arvo

$$\lim_{y\to\infty} F(y) = \int_1^\infty f(x)\,dx.$$

S_n on siis kasvava ja ylhäältä rajoitettu lukujono ja niin ollen se suppenee.

Vastaavalla tavoin päätellään, että jos $\int_1^\infty f(x)\,dx$ hajaantuu, niin myös $\sum_{k=1}^\infty a_k$ hajaantuu. $\square$

Määritelmä 258. Olkoon $p > 0$. Tarkastellaan *p-sarjaa (p-series)*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}. \tag{259}$$

- Jos $p < 1$, niin (259) on *aliharmoninen sarja.*
- Jos $p = 1$, niin (259) on *harmoninen sarja.*
- Jos $p > 1$, niin (259) on *yliharmoninen sarja.*

Lause 260. *p-sarja (259) suppenee jos ja vain jos $p > 1$. Toisin sanoen harmoninen ja aliharmoninen sarja hajaantuvat ja yliharmoninen sarja suppenee.*

Todistus. Tutkitaan suppenemista eri p:n arvoilla integraalitestiä (lause 4.3.10) käyttäen. Testin funktioksi kelpaa $f(x) = 1/x^p$. Lauseen 200 mukaan integraali

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$$

suppenee jos ja vain jos $p > 1$, joten sarja (259) suppenee jos ja vain jos $p > 1$. □

Esimerkki 261. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots$

on aliharmoninen sarja ja hajaantuu,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

on harmoninen sarja ja hajaantuu ja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots$$

on yliharmoninen sarja ja suppenee.

Seuraavissa kahdessa suppenemistestissä tutkittavaa sarjaa verrataan sopivaan tunnettuun sarjaan.

Lause 4.3.9 (Vertailuperiaate, The Comparison Test)**.** *Oletetaan, että $0 \leq a_k \leq b_k$ kaikilla k.*

(1) *Jos $\sum b_k$ suppenee, niin $\sum a_k$ suppenee (majoranttiperiaate).*

(2) *Jos $\sum a_k$ hajaantuu, niin $\sum b_k$ hajaantuu (minoranttiperiaate).*

Todistus. (1) Merkitään $S = \sum b_k$. Nyt

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} b_k \leq S,$$

joten sarjan $\sum a_k$ osasummien jono on kasvava ja ylhäältä rajoitettu ja siten suppenee.

(2) Jos $\sum b_k$ suppenisi, niin kohdan (1) mukaan myös $\sum a_k$ suppenisi. Sarjan $\sum b_k$ täytyy siis hajaantua. □

Esimerkki 262. Tutki, suppeneeko vai hajaantuuko

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k+1}$ **b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$.

Ratkaisu. a) Sarja suppenee, sillä

$$0 \leq \frac{1}{2^k+1} \leq \frac{1}{2^k}$$

ja $\sum(1/2)^k$ on suppeneva geometrinen sarja.
b) Verrataan harmoniseen sarjaan $\sum(1/k)$. $\ln x$ on kasvava funktio ja $\ln e = 1$, joten $\ln k \geq 1$, kun $k \geq 3$. Siten

$$\frac{\ln k}{k} \geq \frac{1}{k}$$

kaikilla $k \geq 3$. Koska sarja $\sum(1/k)$ on hajaantuu harmonisena sarjana, niin myös tutkittava sarja hajaantuu.

Huomautus 263. Vertailuperiaatteen käyttämiseksi täytyy löytää nimenomaan suurempiterminen sarja, joka suppenee, tai pienempiterminen sarja, joka hajaantuu. Esimerkiksi sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k-1}$$

suppenemisen tutkiminen ei edellisen esimerkin vertailusarjaa $\sum(1/2^k)$ käyttämällä suoraan onnistu, koska

$$\frac{1}{2^k-1} > \frac{1}{2^k}.$$

Tämä arvio ei ole käyttökelpoinen, sillä pienempiterminen sarja $\sum(1/2^k)$ suppenee, joten vertailuperiaatteen mukaan tutkittava sarja voi supeta tai hajaantua. Tällaisia tilanteita voi tutkia seuraavilla testeillä.

Lause 4.3.12 (Osamäärätesti, The Limit Comparison Test)**.** *Olkoot $\sum a_k$ ja $\sum b_k$ positiivitermisiä sarjoja ja olkoon*

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k}$$

olemassa äärellisenä tai $L = \infty$.

(1) *Jos $L < \infty$ ja $\sum b_k$ suppenee, niin $\sum a_k$ suppenee.*

(2) *Jos $L > 0$ ja $\sum b_k$ hajaantuu, niin $\sum a_k$ hajaantuu.*

Todistus. (1) Isoilla indekseillä $b_k \neq 0$ ja

$$\frac{a_k}{b_k} \leq L+1, \quad \text{ts.} \quad a_k \leq (L+1)b_k,$$

joten $\sum a_k \leq (L+1)\sum b_k < \infty$.
(2) Samaan tapaan. $\square$

Esimerkki 264. Suppeneeko $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3k-2}{k^2+1}$?

Ratkaisu. Tutkitaan ensin asiaa tekemällä seuraava arvio: suurilla k vakio sekä osoittajassa että nimittäjässä voidaan unohtaa, joten

$$\frac{3k-2}{k^2+1} \approx \frac{3k}{k^2} = \frac{3}{k}.$$

$\sum(1/k)$ hajaantuu harmonisena sarjana, joten ilmeisesti tutkittava sarjakin hajaantuu. Tämä ei vielä riitä todistamaan hajaantumista, mutta päättely antaa sopivan vertailusarjan $\sum(1/k)$ osamäärätestiä varten:

$$\frac{\dfrac{3k-2}{k^2+1}}{\dfrac{1}{k}} = \frac{3k^2-2k}{k^2+1} = \frac{3-\dfrac{2}{k}}{1+\dfrac{1}{k^2}} \to 3,$$

kun $k \to \infty$. Osamäärätestin kohdan (2) perusteella tutkittava sarja hajaantuu.

Seuraavassa testissä ei tarvita vertailusarjaa, vaan sarjan suppeneminen tai hajaantuminen päätellään sarjan termien käyttäytymisestä.

Lause 4.3.15 (Suhdetesti, The Ratio Test)**.** *Olkoon $\sum a_k$ positiiviterminen sarja ja olkoon*

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

olemassa äärellisenä tai $L = \infty$.

(1) *Jos $L < 1$, niin sarja suppenee.*

(2) *Jos $L > 1$, niin sarja hajaantuu.*

Tapauksessa $L = 1$ voi käydä kummin vain.

Todistus. (1) Valitaan $r \in (L, 1)$. Raja-arvon määritelmän mukaan on olemassa $K \in \mathbb{N}$ siten, että kaikilla $k \geq K$ pätee

$$\frac{a_k+1}{a_k} \leq r, \quad \text{ts.} \quad a_{k+1} \leq a_k r.$$

Siten

$$
\begin{aligned}
a_{K+1} &\leq a_K r \\
a_{K+2} &\leq a_{K+1} r \leq a_K r^2 \\
a_{K+3} &\leq a_{K+2} r \leq a_K r^3
\end{aligned}
$$

ja yleisesti

$$a_{K+k} \leq a_K r^k.$$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_K r^k$ on suppeneva geometrinen sarja (suhdeluku $r \in (-1, 1)$), joten

$$R_K = \sum_{k=K+1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{K+k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_K r^k < \infty.$$

Siten $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee (lemma 4.3.4).

(2) Suurilla k on $a_k > 0$ ja $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$, jolloin $0 < a_k \leq a_{k+1}$. Ei siis voi olla $\lim\limits_{k \to \infty} a_k = 0$, eikä sarja siten suppene (lause 4.3.6).

Harmoniselle sarjalle $\sum(1/k)$ ja yliharmoniselle sarjalle $\sum(1/k^2)$ on $L = 1$, mutta ensin mainittu näistä hajaantuu ja toinen suppenee. Tapauksessa $L = 1$ tämä testi ei siis anna tulosta. $\square$

Esimerkki 265. Suppeneeko $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{10^k}{k!}$?

Ratkaisu. Sarja on positiiviterminen. Käytetään suhdetestiä:

$$
\begin{aligned}
\frac{a_{k+1}}{a_k} &= \frac{\dfrac{10^{k+1}}{(k+1)!}}{\dfrac{10^k}{k!}} = \frac{k!}{(k+1)!} \frac{10^{k+1}}{10^k} = \frac{k(k-1)\cdots 2 \cdot 1}{(k+1)k(k-1)\cdots 2 \cdot 1} 10 \\
&= \frac{10}{k+1} \to 0,
\end{aligned}
$$

kun $k \to \infty$, joten sarja suppenee.

Vuorottelevat sarjat ja itseinen suppeneminen

Määritelmä 266. Sarja on *vuorotteleva (alternating)*, jos sen termit ovat vuorotellen positiivisia ja negatiivisia, ts. sarja on muotoa

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \cdots \tag{267}$$

tai

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}a_k = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \cdots, \tag{268}$$

joissa $a_k > 0$ kaikilla k.

On huomattava, että tässä merkinnässä a_k:lla ei merkitä k:tta termiä, vaan k:nnen termin itseisarvoa.

Lause 4.3.22 (Leibnizin testi)**.** *Jos vuorottelevalle sarjalle* (267) *tai* (268) *pätee, että*

- $a_k \geq a_{k+1}$ *kaikilla* k *ja*
- $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$,

niin sarja suppenee. Silloin jäännöstermille R_n *pätee*

$$|R_n| \leq a_{n+1},$$

toisin sanoen jäännöstermin itseisarvo on pienempi kuin ensimmäisen poisjätetyn termin itseisarvo.

Todistus. [15, Thm 4.3.20–22]. □

Esimerkki 269. *Vuorotteleva harmoninen sarja*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

suppenee, sillä

$$a_k = \frac{1}{k} \geq \frac{1}{k+1} = a_{k+1}$$

kaikilla k ja $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k} = 0$. Lisäksi esimerkiksi arviossa

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k} \approx \sum_{k=1}^{10}\frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{747}{1\,157} \approx 0{,}65$$

tehdylle virheelle pätee $|R_{10}| \leq a_{11} = 1/11 \leq 0{,}091$.

Määritelmä 4.3.18. Sarja $\sum a_k$ *suppenee itseisesti (converges absolutely)*, jos sarja $\sum |a_k|$ suppenee.

Lause 4.3.19. *Jos sarja suppenee itseisesti, niin se suppenee. Toisin sanoen jos $\sum |a_k|$ suppenee, niin $\sum a_k$ suppenee.*

Todistus. Koska

$$|a_k| = \begin{cases} a_k, & \text{jos } a_k \geq 0, \\ -a_k, & \text{jos } a_k \leq 0, \end{cases}$$

niin

$$0 \leq |a_k| + a_k \leq |a_k| + |a_k| = 2|a_k|.$$

Niinpä sarja

$$\sum (|a_k| + a_k) \tag{270}$$

on positiiviterminen ja sillä on majoranttina sarja $\sum 2|a_k|$. Oletuksen mukaan tämä sarja suppenee, joten myös sarja (270) suppenee. Nyt sarja

$$\sum a_k = \sum \Big((|a_k| + a_k) - |a_k| \Big) = \sum (|a_k| + a_k) - \sum |a_k|$$

voidaan esittään kahden suppenevan sarjan erotuksena, joten se lauseen 4.3.3 mukaan suppenee. □

Käänteinen tulos ei päde, sillä esimerkiksi vuorotteleva harmoninen sarja suppenee, mutta sen itseisarvosarja on harmoninen sarja, joka hajaantuu. Tällaista sarjaa, joka suppenee, mutta ei suppene itseisesti, sanotaan *ehdollisesti suppenevaksi (conditionally convergent)*.

Esimerkki 271. Suppeneeko $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{2^k}$?

Ratkaisu. Tutkitaan itseistä suppenemista suhdetestillä:

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{\frac{k+1}{2^{k+1}}}{\frac{k}{2^k}} = \frac{1}{2}\frac{k+1}{k} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{k}\right) \to \frac{1}{2},$$

kun $k \to \infty$, joten sarja suppenee itseisesti. Niinpä se suppenee.

Muokataan suhdetesti (lause 4.3.15) muotoon, jota voidaan käyttää suoraan kaikille (myös ei-positiivitermisille) sarjoille:

Lause 272 (Suhdetesti). *Olkoon $\sum a_k$ sarja ja olkoon*

$$L = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$$

olemassa äärellisenä tai $L = \infty$.

(1) *Jos $L < 1$, niin sarja suppenee itseisesti.*

(2) *Jos $L > 1$, niin sarja hajaantuu.*

Tapauksessa $L = 1$ voi käydä kummin vain.

Todistus. Sarja $\sum |a_k|$ on positiiviterminen, joten väite (1) seuraa suoraan lauseesta 4.3.15. Kohdassa (2) soveltamalla lauseen 4.3.15 todistuksen päättelyä sarjaan $\sum |a_k|$ nähdään, että ei ole $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$. Siten ei myöskään ole $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, joten sarja $\sum a_k$ ei suppene. □

4.4 Funktiojonot ja -sarjat

Tutustutaan funktiojonoihin ja sarjoihin, joiden n:s termi riippuu muuttujasta x. Niillä x, joilla jonolla on raja-arvo tai joilla sarja suppenee, kyseinen raja-arvo tai summa määrittelee x:n funktion. Tutkitaan tämän rajafunktion olemassaoloa ja ominaisuuksia. Eräänä tärkeänä sovelluksena saadaan potenssisarjojen derivointi ja integrointi termeittäin.

Määritelmä 273. Olkoon $D \subset \mathbb{R}$. Jos jokaista $n \in \mathbb{N}$ vastaa funktio $f_n \colon D \to \mathbb{R}$, niin jonoa

$$(f_1, f_2, f_3, \ldots) = (f_n) = (f_n)_{n=1}^{\infty}$$

kutsutaan joukon D *funktiojonoksi (sequence of functions)*.

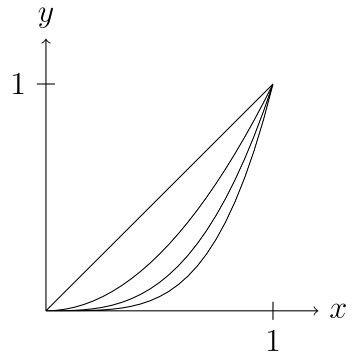
Määritelmä 4.4.1. Joukon $D \subset \mathbb{R}$ funktiojono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *suppenee pisteittäin (converges pointwice)* kohti rajafunktiota $f \colon S \to \mathbb{R}$ joukossa $S \subset D$, jos jokaisella $x \in S$ jono $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ suppenee kohti lukua $f(x)$, toisin sanoen jos

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \forall\, x \in S.$$

Huomautus 274. Lauseesta 4.1.2 seuraa, että pisteittäin suppenevan funktiojonon (f_n) rajafunktio f on yksikäsitteinen.

Esimerkki 275. a) Määritellään jokaisella $n \in \mathbb{N}$ funktio $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$. Jos $0 \le x < 1$, niin $f_n(x) = x^n \to 0$, kun $n \to \infty$. Lisäksi $f_n(1) = 1$ kaikilla n, joten jono (f_n) suppenee pisteittäin kohti funktiota

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } 0 \le x < 1, \\ 1, & \text{kun } x = 1. \end{cases}$$

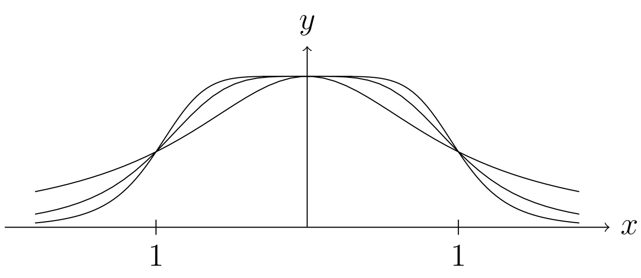


b) Määritellään jokaisella $n \in \mathbb{N}$ funktio $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + x^{2n}}.$$

Päättelemällä samaan tapaan kuin **a)**-kohdassa nähdään, että jono (f_n) suppenee pisteittäin kohti funktiota $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } |x| < 1, \\ 1/2, & \text{kun } |x| = 1, \\ 0, & \text{kun } |x| > 1. \end{cases}$$



Kohdissa **a)** ja **b)** funktiot f_n ovat jatkuvia ja derivoituvia, mutta rajafunktio ei ole jatkuva (eikä siten derivoituva).

c) Määritellään jokaisella $n \in \mathbb{N}$ funktio $f_n\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = nx$. Nyt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} -\infty, & \text{kun } -1 \le x < 0, \\ 0, & \text{kun } x = 0, \\ \infty, & \text{kun } 0 < x \le 1. \end{cases}$$

Jono (f_n) suppenee pisteittäin vain joukossa $\{0\}$ (vaikka jokainen funktio f_n on rajoitettu joukossa $[-1, 1]$).
d) Määritellään jokaisella $n \in \mathbb{N}$ funktio $f_n\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x = 0, \\ n, & \text{kun } 0 < x < 1/n, \\ 0, & \text{kun } 1/n \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Jos $x = 0$, niin $f_n(x) = 0$. Jos taas $x > 0$, niin suurilla n on $1/n < x$ ja siten $f_n(x) = 0$. Niinpä jono (f_n) suppenee pisteittäin kohti funktiota $f = 0$. Tässä esimerkissä sekä jokainen f_n että rajafunktio f ovat integroituvia, mutta

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = 1 \neq 0 = \int_0^1 f.$$

e) Numeroidaan välin $[0, 1]$ rationaaliluvut: $[0, 1] \cap \mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \ldots\}$, missä $q_i \neq q_j$, kun $i \neq j$. Määritellään jokaisella $n \in \mathbb{N}$ funktio $f_n\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}, \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Nyt (f_n) selvästi suppenee pisteittäin kohti funktiota $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tässä jokainen f_n on integroituva, koska kukin f_n eroaa nollafunktiosta vain äärellisen monessa pisteessä. Rajafunktio f ei sen sijaan ole integroituva (ks. esimerkki 156).

Funktiojonon tasainen suppeneminen

Oletetaan, että joukon $S \subset \mathbb{R}$ funktiojono (f_n) suppenee pisteittäin kohti funktiota $f\colon S \to \mathbb{R}$. Keskeinen kysymys on, mitkä funktioiden f_n ominaisuudet periytyvät rajafunktiolle f.

- Jos jokainen f_n on jatkuva, niin onko f jatkuva?
- Jos jokainen f_n on derivoituva, niin onko f derivoituva?
- Jos jokainen f_n on integroituva, niin onko f integroituva?

Esimerkki 275 osoittaa, että vastaus jokaiseen näistä kysymyksistä on kielteinen. Tarvitaan vahvempi raja-arvon käsite.

Lemma 276. *Joukon S funktiojono (f_n) suppenee pisteittäin kohti rajafunktiota $f\colon S \to \mathbb{R}$ jos ja vain jos*

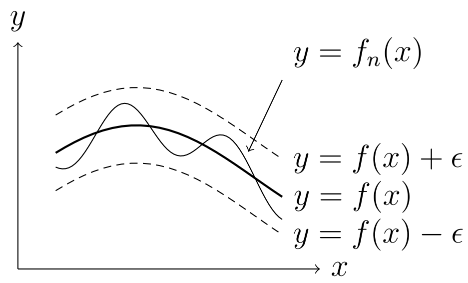
$$\forall \epsilon > 0\ \forall x \in S\ \exists N \in \mathbb{N}\colon \quad n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon. \tag{277}$$

Todistus. Kirjoita määritelmä 4.4.1 ja lukujonon raja-arvon määritelmä 4.1.1 auki. □

Määritelmä 4.4.3. Joukon S funktiojono (f_n) *suppenee tasaisesti joukossa* S kohti rajafunktiota $f\colon S \to \mathbb{R}$, jos

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall x \in S\colon \quad n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Tässä tiukennettiin ehtoa (277) vaatimalla, että sama N toimii kaikille x, ts. jostakin n:n arvosta alkaen kaikki funktiot f_n kulkevat koko määrittelyvälillä rajafunktion lähellä "ϵ-putken" sisällä.



Kurssikirjassa [15] määritelmä kirjoitetaan määrittelemällä ensin funktiolle $g\colon S \to \mathbb{R}$ *supremum-normi*

$$\|g\|_S = \sup\{|g(x)|\colon x \in S\}.$$

Tällöin (f_n) suppenee tasaisesti joukossa S kohti f:ää jos ja vain jos

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_S = 0,$$

toisin sanoen

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\colon \quad n > N \Rightarrow \|f_n - f\|_S < \epsilon$$

(ks. kurssikirjan lause 4.4.4 (b)).

Suoraan määritelmistä seuraa, että jos funktiojono (f_n) suppenee tasaisesti kohti funktiota f, niin se suppenee pisteittäin kohti funktiota f. Käänteinen ei päde, kuten seuraavat esimerkit osoittavat.

Esimerkki 278. **a)** Tarkastellaan funktioiden $f_n(x) = x/n$ muodostamaa jonoa. Joukossa $\mathbb{R}$ jono suppenee pisteittäin kohti funktiota $f = 0$, sillä jokaisella $x \in \mathbb{R}$ $f_n(x) \to 0$, kun $n \to \infty$.

Jono (f_n) ei kuitenkaan suppene tasaisesti $\mathbb{R}$:ssä, sillä valitsemalla esimerkiksi $\epsilon = 1$ jokaiselle n löytyy $x \in \mathbb{R}$ siten, että $|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = |x|/n > 1$. Piirrä kuva funktioista $f_1, f_2, \ldots$!

Jos rajoitutaan esimerkiksi välille $I = (-1, 2]$, niin (f_n) suppenee tasaisesti kohti f:ää: Olkoon $\epsilon > 0$. Jos valitaan $N \in \mathbb{N}$ siten, että $2/N < \epsilon$, niin kaikilla $x \in I$ on

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{|x|}{n} \leq \frac{2}{n} < \epsilon$$

aina kun $n > N$.

b) Esimerkin 275 **a**-kohdan funktiojono ei suppene tasaisesti joukossa $[0, 1]$, eikä edes joukossa $[0, 1)$: jos siinä valitaan $\epsilon = 1/2$, niin jokaiselle n löytyy $x < 1$ siten, että $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) > \epsilon$.

Sen sijaan suppeneminen on tasaista väleillä $[0, b)$, missä $0 < b < 1$, sillä

$$|f_n(x) - f(x)| = x^n \leq b^n \to 0,$$

kun $n \to \infty$.

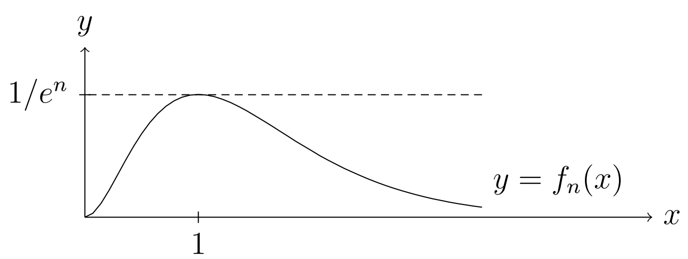
c) Tarkastellaan funktioita $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^2 e^{-nx}$. Derivaatasta

$$f_n'(x) = nx^{n-1}e^{-nx}(x - 1)$$

päätellään, että f_n:n maksimi saavutetaan pisteessä $x = 1$, joten

$$0 \leq f_n(x) \leq f_n(1) = \frac{1}{e^n} \to 0,$$

kun $n \to \infty$. Jono (f_n) suppenee siis tasaisesti kohti funktiota $f = 0$ välillä $[0, \infty)$.



Seuraavassa yleistetään Cauchyn suppenemiskriteerio lukujonon suppenemiselle (määritelmä 236 ja lause 4.1.13) koskemaan funktiojonon tasaista suppenemista. Ideana on, että voidaan tutkia tasaista suppenemista, vaikka rajafunktiota ei tiedetä.

Lause 4.4.6 (Cauchyn suppenemiskriteerio tasaiselle suppenemiselle)**.** *Joukon S funktiojono (f_n) suppenee tasaisesti joukossa S jos ja vain jos*

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall x \in S\colon \quad n, m > N \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon. \tag{279}$$

Todistus. "$\Rightarrow$" Oletetaan, että (f_n) suppenee tasaisesti välillä S kohti funktiota f. Olkoon $\epsilon > 0$. Tällöin on olemassa N siten, että kaikilla $x \in S$

$$|f_k(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$$

kun $k > N$. Niinpä kaikilla $x \in S$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

kun $n, m > N$.

"$\Leftarrow$" Oletetaan, että (279) pätee. Lauseesta 4.1.13 vakiolukujonoille seuraa, että jono $(f_n(x))$ suppenee jokaisella x, ts. (f_n) suppenee pisteittäin kohti rajafunktiota f. Osoitetaan, että suppeneminen on tasaista.

Olkoon siis $\epsilon > 0$. Arvioidaan kolmioepäyhtälöllä:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)|.$$

Oletuksen (279) mukaan on olemassa N siten, että

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon}{2}$$

kaikilla $x \in S$ ja kaikilla $n, m > N$. Pisteittäisestä suppenemisesta seuraa, että kullakin x on olemassa $m > N$ siten, että

$$|f_m(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Tässä m:n arvo riippuu x:stä, mutta joka tapauksessa kaikilla $n > N$ ja kaikilla $x \in S$ kyseinen m on olemassa ja pätee

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Siten (f_n) suppenee tasaisesti kohti f:ää. $\square$

Tasaisessa suppenemisessa periytyvät ominaisuudet

Lause 4.4.7. *Oletetaan, että funktiojono (f_n) suppenee tasaisesti kohti funktiota f joukossa S. Oletetaan lisäksi, että jokainen f_n on jatkuva pisteessä $x_0 \in S$. Tällöin myös rajafunktio f on jatkuva pisteessä x_0.*

Todistus. Jos $x \in S$ ja $n \in \mathbb{N}$, niin kolmioepäyhtälön nojalla

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|.$$

Koska suppeneminen on tasaista, on olemassa indeksin n arvo N siten, että kaikilla $x \in S$ on $|f(x) - f_N(x)| < \epsilon/3$, erityisesi myös $|f_N(x_0) - f(x_0)| < \epsilon/3$. Koska f_N on jatkuva pisteessä x_0, niin on olemassa $\delta > 0$ siten, että $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \epsilon/3$ aina kun $|x - x_0| < \delta$. Niinpä

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

aina kun $|x - x_0| < \delta$. □

Seuraus 4.4.8. *Oletetaan, että funktiojono (f_n) suppenee tasaisesti kohti funktiota f joukossa S. Oletetaan lisäksi, että jokainen f_n on jatkuva joukossa S. Tällöin myös rajafunktio f on jatkuva joukossa S.*

Lause 4.4.10. *Oletetaan, että funktiojono (f_n) suppenee tasaisesti kohti funktiota f välillä $[a, b]$. Oletetaan lisäksi, että jokainen f_n on integroituva välillä $[a, b]$. Silloin myös rajafunktio f on integroituva välillä $[a, b]$ ja*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Todistus. Osoitetaan ensin, että lukujono $\left(\int_a^b f_n\right)_{n=1}^{\infty}$ suppenee. Olkoon $\eta > 0$. Lauseen 4.4.6 mukaan on olemassa N siten, että kaikilla $x \in [a, b]$ on $|f_n(x) - f_m(x)| < \eta$, kun $n, m > N$. Siten

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f_m\right| = \left|\int_a^b (f_n - f_m)\right| \leq \int_a^b |f_n - f_m| \leq \eta(b - a),$$

kun $n, m > N$. Lukujono $\left(\int_a^b f_n\right)_{n=1}^{\infty}$ on siis Cauchy-jono ja siten se suppenee (lause 4.1.13). Merkitään raja-arvoa L. Osoitetaan seuraavaksi, että f on integroituva ja että $\int_a^b f = L$.

Olkoon $\epsilon > 0$. Koska (f_n) suppenee tasaisesti kohti f:ää, on olemassa N siten, että kaikilla $x \in [a, b]$ on $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, kun $n > N$. Edellä todetun perusteella on edelleen olemassa $m > N$ siten, että

$$\left|\int_a^b f_m - L\right| < \epsilon.$$

Koska f_m on integroituva, on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$\left|R_{f_m}(P, c) - \int_a^b f_m\right| < \epsilon$$

aina kun P on välin $[a, b]$ jako, jolle $\|P\| < \delta$ (lause 3.2.6). Jos $P = \{x_0, \ldots, x_k\}$ on välin $[a, b]$ jako ja $c = \{c_1, \ldots, c_k\}$ Riemannin summaan liittyvät pisteet, niin $|f_m(c_i) - f(c_i)| < \epsilon$ kaikilla i. Siten

$$\begin{aligned} |R_{f_m}(P, c) - R_f(P, c)| &= \left|\sum_{i=1}^{k}(f_m(c_i) - f(c_i))\Delta x_i\right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{k} |f_m(c_i) - f(c_i)|\, \Delta x_i \leq \epsilon \sum_{i=1}^{k} \Delta x_i = \epsilon(b-a). \end{aligned}$$

Niinpä

$$\begin{aligned} |R_f(P, c) - L| &\leq |R_f(P, c) - R_{f_m}(P, c)| + \left|R_{f_m}(P, c) - \int_a^b f_m\right| + \left|\int_a^b f_m - L\right| \\ &< \epsilon(b-a) + \epsilon + \epsilon, \end{aligned}$$

aina kun P on välin $[a, b]$ jako, jolle $\|P\| < \delta$. Lauseen 3.2.6 mukaan f on integroituva ja $\int_a^b f = L$. □

Esimerkki 280. Välillä $[a, b]$, missä $0 < a < b < 1$, derivoituvien funktioiden

$$f_n(x) = x^n \sin \frac{1}{x^{n-1}}$$

muodostama jono suppenee tasaisesti kohti funktiota $f = 0$ välillä $[a, b]$, sillä

$$|f_n(x)| \leq x^n \leq b^n \to 0,$$

kun $n \to \infty$. Kuitenkin

$$f_n'(x) = nx^{n-1} \sin \frac{1}{x^{n-1}} + (1-n) \cos \frac{1}{x^{n-1}},$$

joten $(f_n'(x))$ ei suppene millään $x \in [a, b]$.

Derivoituvuus ei siis periydy edes tasaisessa suppenemisessa. Seuraava tulos kuitenkin riittää meille funktiosarjojen tutkimiseen.

Määritelmä 281. Funktio $f \colon I \to \mathbb{R}$ on *jatkuvasti derivoituva välillä* I, jos se on derivoituva ja f' on jatkuva välillä I.

Lause 4.4.11. *Olkoon (f_n) jono välin $[a, b]$ jatkuvasti derivoituvia funktioita siten, että $(f_n(x_0))$ suppenee jollakin $x_0 \in [a, b]$ ja (f_n') suppenee tasaisesti kohti rajafunktiota g välillä $[a, b]$. Silloin (f_n) suppenee tasaisesti kohti funktiota f välillä $[a, b]$, f on derivoituva ja $f' = g$ välillä $[a, b]$.*

Funktiosarjat

Määritelmä 4.4.12. Olkoon $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ joukon D funktiojono. Muodollista summaa

$$f_1 + f_2 + f_3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$$

kutsutaan *funktiosarjaksi (series of functions)* joukossa D. Funktiosarjan ensimmäisten funktioiden summa indeksiin n saakka on funktiosarjan n:s *osasumma*. Osasummaa merkitään F_n, ts.

$$F_n = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n = \sum_{k=1}^{n} f_k.$$

Kukin osasumma F_n on funktio $F_n\colon D \to \mathbb{R}$, joten ne muodostavat joukon D funktiojonon $(F_n)_{n=1}^{\infty}$. Jos tämä funktiojono suppenee pisteittäin joukossa $S \subset D$ kohti funktiota F, niin sanotaan, että funktiosarja $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *suppenee pisteittäin* joukossa S kohti funktiota F, ja merkitään

$$F = \sum_{k=1}^{\infty} f_k.$$

Jos osasummien jono $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee tasaisesti joukossa S kohti funktiota F, niin sanotaan, että funktiosarja $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *suppenee tasaisesti* joukossa S kohti funktiota F.

Funktiosarja $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ siis suppenee pisteittäin joukossa S, jos sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

suppenee jokaisella $x \in S$.

Esimerkki 282. a) Sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x} \qquad (x > 0)$$

suppenee, kun $x > 1$ (yliharmoninen sarja) ja hajaantuu, kun $x = 1$ (harmoninen sarja) tai kun $x < 1$ (aliharmoninen sarja). Siten funktiosarja $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$, missä $f_k(x) = 1/k^x$, suppenee pisteittäin välillä $(1, \infty)$ ja hajaantuu välillä

$(-\infty, 1]$.
b) Tarkastellaan funktiosarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

välillä $\mathbb{R}$. Kullakin x kyseessä on geometrinen sarja, joten (250):n mukaan osasummat ovat

$$F_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, & \text{kun } x \neq 1, \\ n + 1, & \text{kun } x = 1. \end{cases}$$

Sarja suppenee pisteittäin kohti funktiota

$$F(x) = \frac{1}{1 - x},$$

kun $|x| < 1$ (ts. välillä $(-1, 1)$) ja hajaantuu, kun $|x| \geq 1$ (lause 248). Ts.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1 - x} \qquad (-1 < x < 1).} \tag{283}$$

Tutkitaan vielä tasaista suppenemista laskemalla erotus

$$|F_n(x) - F(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{1 - x}.$$

Kullakin n tämän raja-arvo on ∞, kun lähestytään 1:stä ja toisaalta lähestyttäessä -1:stä raja-arvo on $1/2$. Suppeneminen ei siis ole tasaista väleillä $[-r, 1)$ eikä väleillä $(-1, r]$, missä $0 < r < 1$. Sen sijaan väleillä $[-r, r]$, missä $0 < r < 1$, suppeneminen on tasaista, sillä kaikilla $x \in [-r, r]$ pätee

$$\frac{|x|^{n+1}}{1 - x} \leq \frac{r^{n+1}}{1 - r} \to 0,$$

kun $n \to \infty$.

Funktiosarjan tasaisen suppenemisen testaaminen

Todistetaan Weierstrassin testi, joka antaa määritelmää 4.4.12 suoraviivaisemman menetelmän tutkia tasaista suppenemista. Tämä testi soveltuu mm. potenssisarjoille, joihin monisteen loppuosa keskittyy.

Määritelmä 284. Funktiosarja $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *suppenee itseisesti (converges absolutely)* joukossa S, jos itseisarvofunktioista muodostettu funktiosarja $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$ suppenee joukossa S.

Funktiosarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ siis suppenee itseisesti joukossa S, jos vakioterminen sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$$

suppenee jokaisella $x \in S$. Itseisesti suppeneva funktiosarja siis suppenee (lause 4.3.19).

Lause 4.4.15 (Weierstrassin M-testi)**.** *Olkoon (f_k) joukon S funktiojono. Olkoon jokaisella $k \in \mathbb{N}$ olemassa luku $M_k \in \mathbb{R}$ siten, että*

$$|f_k(x)| \leq M_k \qquad \forall x \in S.$$

Jos $\sum\limits_{k=1}^{\infty} M_k < \infty$, niin funktiosarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ suppenee itseisesti ja tasaisesti joukossa S.

Todistus. Itseinen suppeneminen seuraa vertailuperiaatteesta (lause 4.3.9), sillä jokaisella $x \in S$ on

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} M_k < \infty.$$

Käytetään tasaisen suppenemisen todistamiseksi Cauchyn suppenemiskriteerioita (lauseet 4.1.13 ja 4.4.6). Olkoon $\epsilon > 0$. Merkitään sarjan $\sum\limits_{k=1}^{\infty} M_k$ osasummia S_n:llä ja funktiosarjan $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ osasummia F_n:llä. Koska (S_n) on suppeneva jono, on se Cauchy jono, joten on olemassa $N \in N$ siten, että

$$|S_n - S_m| < \epsilon$$

aina kun $n, m > N$. Osoitetaan, että sama N kelpaa ehtoon (279). Olkoot siis $n, m > N$ ja $x \in S$. Voidaan olettaa, että $n > m$. Nyt

$$\begin{aligned} |F_n(x) - F_m(x)| &= \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(x)| \\ &\leq \sum_{k=m+1}^{n} M_k = S_n - S_m < \epsilon. \end{aligned}$$

$\square$

Funktiosarjan jatkuvuus, derivoituvuus ja integroituvuus

Lause 4.4.18. *Oletetaan, että funktiosarja* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *suppenee tasaisesti joukossa* S*. Oletetaan lisäksi, että jokainen* f_k *on jatkuva joukossa* S*. Tällöin* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *on jatkuva joukossa* S*.*

Todistus. Jokainen osasumma

$$F_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$$

on äärellisenä jatkuvien funktioiden summana jatkuva ja jono (F_n) suppenee tasaisesti joukossa S kohti funktiota $F = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$, joten väite seuraa seurauksesta 4.4.8. □

Lause 4.4.19. *Oletetaan, että funktiosarja* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *suppenee tasaisesti välillä* $[a, b]$*. Oletetaan lisäksi, että jokainen* f_k *on integroituva välillä* $[a, b]$*. Silloin myös* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *on integroituva välillä* $[a, b]$ *ja*

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k.$$

Tällöin siis ”sarja voidaan integroida termeittäin”.

Todistus. Jokainen osasumma

$$F_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$$

on äärellisenä integroituvian funktioiden summana integroituva välillä $[a, b]$ ja jono (F_n) suppenee tasaisesti välillä $[a, b]$ kohti funktiota $F = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$, joten väite seuraa lauseesta 4.4.10. □

Lause 4.4.20. *Olkoon* (f_k) *jono välin* $[a, b]$ *jatkuvasti derivoituvia funktioita siten, että* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$ *suppenee jollakin* $x_0 \in [a, b]$ *ja* $\sum_{k=1}^{\infty} f'_k$ *suppenee tasaisesti välillä* $[a, b]$*. Silloin* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *suppenee tasaisesti välillä* $[a, b]$*, rajafunktio on derivoituva välillä* $[a, b]$ *ja*

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x).$$

Tällöin siis ”sarja voidaan derivoida termeittäin”.

Todistus. Jokainen osasumma

$$F_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$$

on äärellisenä jatkuvasti derivoituvien funktioiden summana jatkuvasti derivoituva ja

$$F_n' = \sum_{k=1}^{n} f_k',$$

joten jono (F_n') suppenee tasaisesti välillä $[a, b]$ kohti funktiota $G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$. Lisäksi jono $(F_n(x_0))$ suppenee. Niinpä lauseen 4.4.11 mukaan (F_n) suppenee tasaisesti kohti derivoituvaa funktiota $F = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ ja $F'(x) = G(x)$. □

4.5 Potenssisarjat

Määritelmä 4.5.1. Muuttujasta $x \in \mathbb{R}$ riippuvaa funktiosarjaa

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \cdots \quad (285)$$

kutsutaan *potenssisarjaksi (power series)* pisteen x_0 suhteen. Luku a_k on k:sta riippuva *kerroin* ja $x_0 \in \mathbb{R}$ on *kehityskeskus*.

Tässä ensimmäinen termi on $a_0(x - x_0)^0 = a_0$ kaikilla x (vrt. huomautus 130 **a**)).

Esimerkki 286. Sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(x - 0)^k$$

on potenssisarja pisteen 0 suhteen ($a_k = 1/k!$). Suhdetestillä nähdään, että sarja suppenee itseisesti, kun $x \neq 0$:

$$\frac{\left|\dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right|}{\left|\dfrac{x^k}{k!}\right|} = \frac{|x|}{k+1} \to 0,$$

kun $k \to \infty$. Myös pisteessä $x = 0$ sarja suppenee itseisesti, joten sarja suppenee itseisesti kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Lause 287. *Jos potenssisarja*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

suppenee jollakin $x = z \neq 0$, niin sarja suppenee itseisesti kaikilla x, joille $-|z| < x < |z|$.

Todistus. Olkoon $x \in (-|z|, |z|)$ ja merkitään $r = |x/z| < 1$. Koska sarja suppenee pisteessä z, on oltava $\lim_{k\to\infty} a_k z^k = 0$ ja siten on olemassa indeksi K siten, että $|a_k z^k| < 1$ kaikilla $k \geq K$. Nyt

$$\sum_{k=K}^{\infty} \left|a_k x^k\right| = \sum_{k=K}^{\infty} \left|a_k z^k\right| \left|\frac{x^k}{z^k}\right| \leq \sum_{k=K}^{\infty} r^k < \infty. \qquad \square$$

Seuraus 288. *Potenssisarjalle (285) pätee täsmälleen yksi seuraavista:*

- *Sarja suppenee vain kun $x = x_0$.*
- *Sarja suppenee itseisesti kaikilla $x \in \mathbb{R}$.*
- *Eräälle $R > 0$ pätee: sarja suppenee itseisesti, kun $x_0 - R < x < x_0 + R$ ja hajaantuu, kun $|x - x_0| > R$.*

Todistus. Väite seuraa edellisestä lauseesta asettamalla $t = x - x_0$, jolloin väite palautuu sarjan $\sum a_k t^k$ tutkimiseksi. $\square$

Lukua $R \in [0, \infty)$ tai $R = \infty$ kutsutaan sarjan *suppenemissäteeksi (radius of convergence)*. Niiden pisteiden joukkoa, joissa sarja suppenee, kutsutaan *suppenemisväliksi (interval of convergence)*. Jos $R \in (0, \infty)$, niin päätepisteissä $x_0 - R$ ja $x_0 + R$ sarja voi supeta tai hajaantua. Potenssisarjan suppenemisväli on siis $\{x_0\}$, $(x_0 - R, x_0 + R)$, $[x_0 - R, x_0 + R)$, $(x_0 - R, x_0 + R]$, $[x_0 - R, x_0 + R]$ tai $\mathbb{R}$.

Suppenemissäde selviää usein suhdetestillä. Päätepisteet $x_0 - R$ ja $x_0 + R$ on tutkittava erikseen.

Esimerkki 289. Selvitä potenssisarjan suppenemisväli:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n! \left(\frac{x}{2}\right)^n$ **c)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+5)^n}{(n^2+1)3^n}$

Ratkaisu. a) Tämä on potenssisarja, jolle $a_0 = 0$ ja $a_k = 1/k$ muilla k sekä $x_0 = 0$. Tutkitaan suppenemista suhdetestillä ($x \neq 0$):

$$\frac{\left|\dfrac{x^{k+1}}{k+1}\right|}{\left|\dfrac{x^k}{k}\right|} = \frac{k}{k+1}|x| \to |x|,$$

kun $k \to \infty$. Sarja siis suppenee itseisesti, kun $|x| < 1$, ts. kun $x \in (-1, 1)$ (ja hajaantuu, kun $|x| > 1$). Tutkitaan vielä päätepisteet: Kun $x = 1$, sarja on harmoninen sarja ja siten hajaantuu. Kun $x = -1$, sarja on vuorotteleva harmoninen sarja ja siten suppenee. Sarjan suppenemisväli on siis $[-1, 1)$.
b) Muokkaamalla

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! \left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^n} x^n$$

nähdään, että kyseessä on potenssisarja, jolle $a_n = n!/2^n$ ja $x_0 = 0$. Tutkitaan suppenemista suhdetestillä ($x \neq 0$):

$$\frac{\left|\dfrac{(n+1)!}{2^{n+1}} x^{n+1}\right|}{\left|\dfrac{n!}{2^n} x^n\right|} = \frac{n+1}{2}|x| \to \infty,$$

kun $n \to \infty$. Sarja siis suppenee vain kun $x = 0$.
c) Nyt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+5)^n}{(n^2+1)3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(x-(-5/2))^n}{(n^2+1)3^n}.$$

Tämän potenssisarjan kehityskeskus on $x_0 = -5/2$. Suhdetesti ($x \neq -5/2$):

$$\frac{\left|\dfrac{2^{n+1}(x-(-5/2))^{n+1}}{((n+1)^2+1)3^{n+1}}\right|}{\left|\dfrac{2^n(x-(-5/2))^n}{(n^2+1)3^n}\right|} = \frac{2}{3}\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}|x-(-5/2)| \to \frac{2}{3}|x-(-5/2)|,$$

kun $n \to \infty$. Sarja suppenee itseisesti, kun

$$\frac{2}{3}|x-(-5/2)| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x-(-5/2)| < \frac{3}{2}.$$

Suppenemissäde on siis $R = 3/2$ ja sarja suppenee ainakin välillä $(-5/2 - 3/2, -5/2 + 3/2) = (-4, -1)$. Päätepisteet: Pisteessä $x = -4$ sarja tulee muotoon

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}.$$

Tämä suppenee itseisesti, sillä

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Pisteessä $x = -1$ sarja tulee muotoon

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1},$$

joka nähdään suppenevaksi samalla arviolla kuin edellä. Kysytty suppenemisväli on siis $[-4, -1]$.

Lause 4.5.2. *Olkoon R potenssisarjan (285) suppenemissäde.*

(1) *Jos $R = \infty$, niin sarja suppenee tasaisesti jokaisessa rajoitetussa joukossa $S \subset \mathbb{R}$.*

(2) *Jos $0 < R < \infty$, niin sarja suppenee tasaisesti jokaisella suljetulla välillä $[x_0 - r, x_0 + r] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$.*

Todistus. Todistetaan (2), (1) menee vastaavasti. Käytetään Weierstrassin M-testiä (lause 4.4.15):

$$|a_k(x - x_0)^k| \leq |a_k| r^k =: M_k$$

kaikilla $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$. Lisäksi $\sum M_k < \infty$, sillä termit $a_k r^k$ ovat potenssisarjan (285) termejä x:n arvolla $x = x_0 + r$, jolla sarja suppenee itseisesti (seuraus 288). $\square$

Potenssisarjan määräämän funktion ominaisuudet

Lause 4.5.4. *Olkoon potenssisarjan*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \tag{290}$$

suppenemissäde $R > 0$ tai $R = \infty$. Silloin f on jatkuva ja derivoituva välillä $(x_0 - R, x_0 + R)$ ja

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1} \tag{291}$$

kaikilla $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$. Toisin sanoen potenssisarja voidaan derivoida termeittäin.

Todistus. Käytetään lausetta 4.4.20 väleillä $[x_0 - r, x_0 + r]$, missä $0 < r < R$. Funktiot $f_k(x) = a_k(x - x_0)^k$ ovat jatkuvasti derivoituvia, koska ne ovat x:n polynomeja, ja sarja (290) suppenee x:n arvolla x_0. Lauseen 4.5.4 todistamiseksi riittää siten osoittaa, että sarja (291) suppenee tasaisesti jokaisella välillä $[x_0 - r, x_0 + r]$.

Olkoon siis $r \in (0, R)$. Valitaan s siten, että $r < s < R$. Seurauksen 288 mukaan sarja $\sum |a_k| s^k$ suppenee, joten myös sarja $\sum |a_k| s^{k-1}$ suppenee. Lisäksi kaikilla $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$ on

$$\begin{aligned} |ka_k(x-x_0)^{k-1}| = k|a_k||x-x_0|^{k-1} &= |a_k| s^{k-1} \left[k \left(\frac{|x-x_0|}{s} \right)^{k-1} \right] \\ &\leq |a_k| s^{k-1} =: M_k \end{aligned}$$

suurilla k. Perustelu: $|x - x_0|/s \leq r/s < 1$, joten $\lim_{k\to\infty} k(r/s)^{k-1} = 0$, ja siten jostakin k:n arvosta lähtien hakasulkulauseke ≤ 1 kaikilla x. Weierstrassin M-testin (lause 4.4.15) mukaan sarja (291) suppenee tasaisesti välillä $[x_0 - r, x_0 + r]$. □

Lause 4.5.5. *Olkoon potenssisarjan* (290) *suppenemissäde $R > 0$ tai $R = \infty$. Silloin f:llä on kaikkien kertalukujen derivaatat ja jokaisella $n \in \mathbb{N}$*

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)a_k(x-x_0)^{k-n} \tag{292}$$

kaikilla $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.

Todistus. Sovelletaan lausetta 4.5.4 n kertaa. Jokaisen derivoinnin jälkeen syntyy uusi potenssisarja, jonka suppenemissäde on R:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} ka_k(x-x_0)^{k-1} \\ f''(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k(x-x_0)^{k-2} \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)(k-2)\cdots(k-(n-1))a_k(x-x_0)^{k-n} \end{aligned}$$

□

Seuraus 4.5.7 (Potenssisarjan yksikäsitteisyys). *Jos*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

välillä $(x_0 - R, x_0 + R)$, *niin*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

kaikilla $n \geq 0$.

Tämän lauseen mukaan funktion potenssisarjaesitys on yksikäsitteinen, sillä jos

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \qquad \text{ja} \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k,$$

niin $a_k = f^{(k)}(x_0)/k! = b_k$ kaikilla k.

Todistus. Sijoittamalla sarjaan $x = x_0$ saadaan $f^{(0)}(x_0) = f(x_0) = a_0$, josta väite seuraa n:n arvolle 1. Kun $n > 0$, sijoitetaan $x = x_0$ sarjaan (292), jolloin sarjasta jää jäljelle vain indeksiä $k = n$ vastaava termi. Saadaan $f^{(n)}(x_0) = n!a_n$. □

Lause 4.5.8. *Olkoon potenssisarjan* (290) *suppenemissäde* $R > 0$ *tai* $R = \infty$. *Silloin* f *on integroituva jokaisella välillä* $[x_0 - r, x_0 + r] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$ *ja*

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k (x - x_0)^{k+1}}{k+1}.$$

kaikilla $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$. *Toisin sanoen potenssisarja voidaan integroida termeittäin.*

Todistus. Seuraa suoraan lauseista 4.5.2 ja 4.4.19. □

Huomautus 293. Lauseissa 4.5.4 ja 4.5.8 f:n, sen derivaatan ja integraalin potenssisarjojen suppenemisvälit voivat päätepisteiden osalta olla erilaiset ja asia täytyy tapauskohtaisesti erikseen tutkia. Varmuudella sarjat suppenevat vain avoimella välillä $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Esimerkki 294. Tutkitaan geometrista sarjaa (283), eli potenssisarjaa

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad (-1 < x < 1) \tag{295}$$

Lauseen 4.5.4 mukaan (295) voidaan derivoida puolittain kaikilla $x \in (-1, 1)$:

$$\boxed{\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \quad (-1 < x < 1)} \tag{296}$$

Toisaalta lauseen 4.5.8 mukaan (295) voidaan integroida puolittain 0:sta x:ään kaikilla $x \in (-1, 1)$:

$$-\ln(1-x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} x^{k+1} = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots .$$

Sijoitetaan tässä x:n paikalle $-x$ $(-1 < x < 1)$:

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots .} \tag{297}$$

Lähtien funktion $1/(1-x)$ potenssisarjaesityksestä saatiin potenssisarjaesitykset funktioille $1/(1-x)^2$ ja $\ln(1+x)$.

Taylorin sarjat

Määritelmä 298. Jos funktiolla $f(x)$ on pisteessä $x = x_0$ kaikkien kertalukujen derivaatat $f^{(k)}(x_0)$, niin seurauksen 4.5.7 määräämää potenssisarjaa

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k =& f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \\ &+ \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots\end{aligned} \tag{299}$$

kutsutaan funktion f *Taylorin sarjaksi (Taylor series)* pisteen x_0 suhteen. Jos $x_0 = 0$, niin sarjasta käytetään myös nimitystä *Maclaurinin sarja (Maclaurin series)*.

Vertaa Taylorin sarjaa Taylorin polynomiin (131).

Vaikka sarja (299) suppenisi pisteessä x, niin se ei välttämättä suppene kohti funktion arvoa $f(x)$.

Esimerkki 300. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{kun } x \neq 0, \\ 0, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

f on jatkuva myös 0:ssa, sillä

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} e^{-1/x^2} = 0.$$

Kun $x \neq 0$, niin

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}.$$

Muuttujanvaihdolla $t = 1/x^2$ nähdään, että

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = 2 \lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^3} = 2 \lim_{t\to\infty} \frac{t^{3/2}}{e^t} = 0. \tag{301}$$

Lauseen 115 mukaan f:n jatkuvuudesta ja (301):sta seuraa, että on olemassa $f'(0) = 0$. $f'(x)$ on siten kaikkialla jatkuva ja kun $x \neq 0$, niin vastaavalla tavoin kuin edellä saadaan

$$f''(x) = \left(-\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right) e^{-1/x^2} \to 0,$$

kun $x \to 0$. Siten on olemassa $f''(0) = 0$. Näin jatkaen nähdään, että f:llä on kaikkien kertalukujen jatkuvat derivaatat ja että ne ovat kaikki nollia 0:ssa: $f^{(k)}(0) = 0$. Niinpä f:llä on kaikilla $x \in \mathbb{R}$ suppeneva Maclaurinin sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0.$$

Kuitenkin $f(x) \neq 0$ kaikilla $x \neq 0$, joten sarja esittää f:ää vain 0:ssa.

Luvun 2.5 Taylorin kaava (lause 2.5.4) antaa keinon tutkia, milloin Taylorin sarja suppenee kohti funktiota. Jos funktiolla f on avoimella välillä I kaikkien kertalukujen derivaatat ja $x_0 \in I$, niin Taylorin kaavan mukaan Taylorin sarja (299) suppenee ja esittää funktiota f niillä $x \in I$, joilla virhetermin raja-arvo on nolla, ts.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

jos ja vain jos

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} = 0.$$

Esimerkki 302. Etsi funktion $f(x) = e^x$ potenssisarjaesitys pisteen $x = 0$ suhteen.

Ratkaisu. Koska $D(e^x) = e^x$, niin $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$ kaikilla k ja siten f:n Maclaurinin sarja on

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Suppeneeko tämä, ja jos suppenee, suppeneeko kohti e^x:ää? Kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee $f^{(n+1)}(z) = e^z \leq e^{|x|}$, joten

$$0 \leq |R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} \right| |x|^{n+1} \leq e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0,$$

kun $n \to \infty$ (lemma 304). Niinpä sarja suppenee kohti funktiota kaikilla x:

$$\boxed{e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \qquad (x \in \mathbb{R})} \tag{303}$$

Lemma 304. *Olkoon $c > 0$. Silloin*

(1) $\left(\frac{c^n}{n!} \right)$ *on vähenevä, kun $n \geq c - 1$ ja*

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{n!} = 0$.

Todistus. (1) Tutkitaan, milloin $a_{n+1} \leq a_n$, ts. $a_{n+1}/a_n \leq 1$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{c^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{c^n}{n!}} = \frac{c}{n+1} \leq 1,$$

kun $n \geq c - 1$.
(2) Olkoon $m = \lfloor c \rfloor = c$:n kokonaisosa. Silloin kaikilla $n > m$

$$\frac{c^n}{n!} = \underbrace{\frac{c}{1}\frac{c}{2}\cdots\frac{c}{m}}_{=:A\in\mathbb{R}} \underbrace{\frac{c}{m+1}}_{\leq 1} \underbrace{\frac{c}{m+2}}_{\leq 1} \cdots \underbrace{\frac{c}{n-1}}_{\leq 1} \frac{c}{n} \leq A\frac{c}{n} \to 0,$$

kun $n \to \infty$. $\square$

Esimerkki 305. Etsi funktion $f(x) = \sin x$ potenssisarjaesitys pisteen $x = 0$ suhteen.

Ratkaisu. Lasketaan f:n derivaattoja pisteessä $x = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \cos x & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\sin x & f''(0) &= 0 \\ f^{(3)}(x) &= -\cos x & f^{(3)}(0) &= -1 \\ f^{(4)}(x) &= \sin x & f^{(4)}(0) &= 0 \end{aligned}$$

Neljäs derivaatta on $\sin x$, joten funktiot ja arvot alkavat toistua syklisesti. Nyt $|f^{(n)}(z)| \leq 1$ kaikilla z, joten

$$0 \leq |R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}\right| |x|^{n+1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0,$$

kun $n \to \infty$. Niinpä

$$\boxed{\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad (x \in \mathbb{R})} \tag{306}$$

Vastaavalla tavoin voidaan johtaa

$$\boxed{\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad (x \in \mathbb{R})} \tag{307}$$

A Liitteet

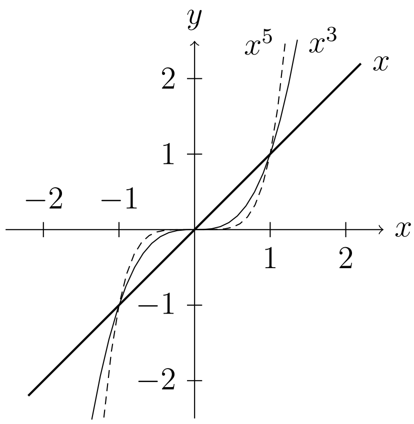
A.1 Potenssifunktio

Kerrataan potenssifunktion määritelmä rationaalieksponenteille.

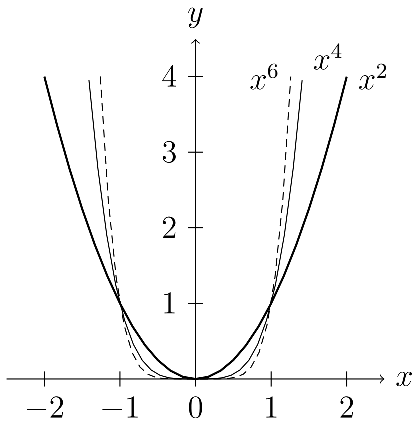
Määritelmä 308. Luonnollisille luvuille n *potenssifunktio (power function)* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^n$, määritellään asettamalla

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ kpl}}.$$

Lukua x kutsutaan *kantaluvuksi* ja lukua n *eksponentiksi*. Tapauksille $n = 2$ ja $n = 3$ on erityisnimitykset: x^2 on x:n *neliö* ja x^3 on x:n *kuutio*.



x:n parittomat potenssit



x:n parilliset potenssit

Määritelmästä 308 seuraa suoraan, että

$$x^{n+m} = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n+m \text{ kpl}} = (\underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ kpl}})(\underbrace{x \cdot x \cdots x}_{m \text{ kpl}}) = x^n x^m.$$

Myös muut tutut laskulait voidaan helposti johtaa määritelmästä:

$$\boxed{x^{n+m} = x^n x^m, \qquad (x^n)^m = x^{nm} \quad \text{ja} \quad (xy)^n = x^n y^n,} \tag{309}$$

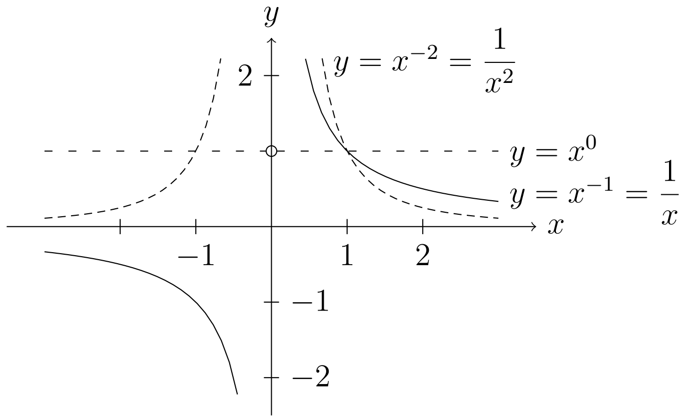
missä $x, y \in \mathbb{R}$ ja $n, m \in \mathbb{N}$.

Määritelmä 310. Negatiivisille eksponenteille $-n$, missä $n \in \mathbb{N}$, potenssifunktio x^{-n} määritellään asettamalla

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad (x \neq 0).$$

Lisäksi sovitaan, että $x^0 = 1$ kaikilla $x \neq 0$.

Näin ollaan saatu potenssifunktio $f(x) = x^n$ määritellyksi kaikilla $n \in \mathbb{Z}$. Kun $n \leq 0$, on f:n määrittelyjoukko $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.



On melko suoraviivaista todistaa, että laskulait (309) ovat voimassa kaikilla $n, m \in \mathbb{Z}$. Tarkastellaan esimerkiksi ensimmäistä lakia tapauksessa $n \geq 0$ ja $m < 0$:

$$x^n x^m = \frac{\overbrace{x \cdot x \cdots x}^{n \text{ kpl}}}{\underbrace{x \cdot x \cdots x}_{-m \text{ kpl}}} = \left\{\begin{matrix} \overbrace{x \cdot x \cdots x}^{n-(-m) \text{ kpl}}, & \text{jos } n \geq -m \\ \frac{1}{\underbrace{x \cdot x \cdots x}_{-m-n \text{ kpl}}}, & \text{jos } n < -m \end{matrix}\right\} = x^{n+m}.$$

Potenssifunktio x^n, $n \in \mathbb{N}$, on aidosti kasvava joukossa $x \in [0, \infty)$, jos n on parillinen ja joukossa $x \in \mathbb{R}$, jos n on pariton. Tämä nähdään tarkastelemalla määritelmän 308 tuloa $x \cdot x \cdots x$: ei-negatiivisilla x tulo kasvaa, kun x kasvaa. Parittomien n tapauksessa negatiivisilla x tulo on negatiivinen ja se kasvaa, kun x kasvaa. Niinpä potenssifunktiolla x^n on käänteisfunktio joukossa $[0, \infty)$, kun n on parillinen ja joukossa $\mathbb{R}$, kun n on pariton.

Määritelmä 311. Potenssifunktion x^n, $n \in \mathbb{N}$, käänteisfunktiota merkitään $x^{1/n}$ tai $\sqrt[n]{x}$ ja sitä kutsutaan *juurifunktioksi (root function)*. Tapauksessa $n = 2$ juurifunktiota merkitään $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$ ja sitä kutsutaan *neliöjuureksi*. $\sqrt[3]{x}$ on *kuutiojuuri*.

Juurifunktio $\sqrt[n]{x}$ on aidosti kasvavan funktion x^n käänteisfunktiona aidosti kasvava (lause 45). Koska x^n ja $\sqrt[n]{x}$ ovat toistensa käänteisfunktioita, niin

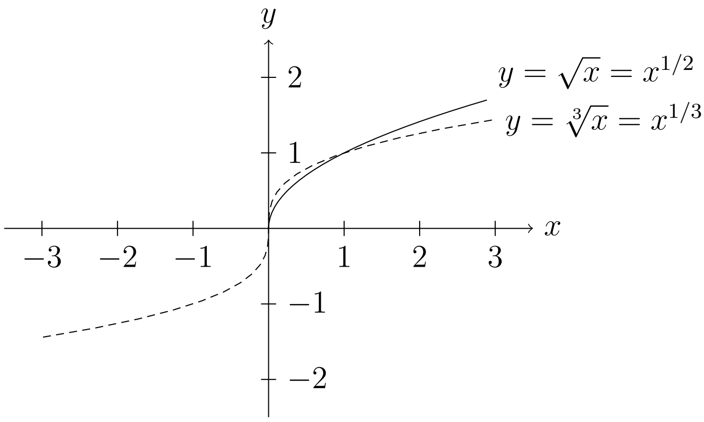
$$\boxed{y = x^n \;\Leftrightarrow\; x = \sqrt[n]{y}} \tag{312}$$

ja

$$\boxed{\sqrt[n]{x^n} = x \quad \text{ja} \quad \left(\sqrt[n]{y}\right)^n = y,} \tag{313}$$

missä parittomilla n x ja $y \in \mathbb{R}$ ja parillisilla n x ja $y \in [0, \infty)$.

x on siis yhtälön $y = x^n$ ratkaisu eli *juuri (root)* täsmälleen silloin kun $x = \sqrt[n]{y}$.

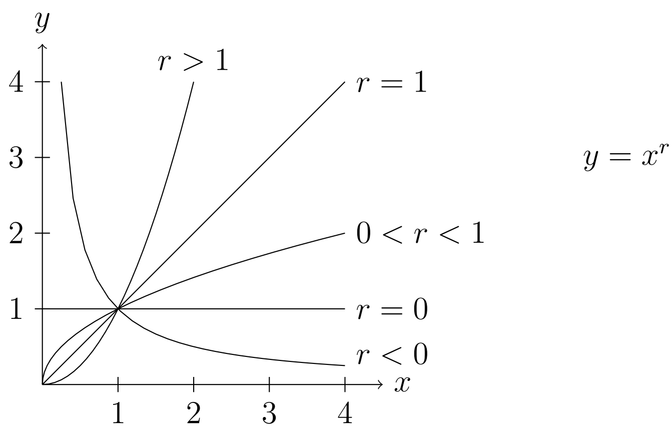


Määritelmä 314. Rationaalisille eksponenteille $r = m/n$, missä $n, m \in \mathbb{Z}$ ja $n > 0$, määritellään

$$x^r = x^{m/n} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m,$$

missä $x \in \mathbb{R}$ parittomilla n ja $x \in [0, \infty)$ parillisilla n. Lisäksi $x \neq 0$, jos $m < 0$.

x^r on siis yhdiste funktioista $g(x) = x^{1/n}$ ja $f(y) = y^m$. Tarkastellaan monotonisuutta joukossa $x > 0$. f on aidosti kasvava, jos $m > 0$ ja aidosti vähenevä, jos $m < 0$. g on aidosti kasvava. Niinpä lauseen 46 mukaan x^r on aidosti kasvava, kun $r > 0$ ja aidosti vähenevä, kun $r < 0$. Seuraavassa kuvassa hahmotellaan potenssifunktion $f(x) = x^r$ kuvaajan kulkua eri eksponenttien r arvoilla joukossa $x > 0$.



Juurifunktion määritelmästä ja ominaisuuksista (309) voidaan johtaa laskulait myös rationaalisille eksponenteille $r, s \in \mathbb{Q}$:

$$\boxed{x^{r+s} = x^r x^s, \qquad (x^r)^s = x^{rs} \quad \text{ja} \quad (xy)^r = x^r y^r.} \tag{315}$$

Todistus. Todistetaan viimeinen laki kolmessa osassa:

(a) $$(a^n)^{1/n} = a = \left(a^{1/n}\right)^n$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$, sillä a^n ja $a^{1/n}$ ovat toistensa käänteisfunktioita.

(b) $$\left(x^{1/n} y^{1/n}\right)^n \overset{(309)}{=} \left(x^{1/n}\right)^n \left(y^{1/n}\right)^n \overset{(a)}{=} xy.$$

Niinpä (korota puolittain potenssiin $1/n$ ja käytä (a)-kohtaa)

$$x^{1/n} y^{1/n} = (xy)^{1/n}.$$

(c) Nyt voidaan laskea

$$\begin{aligned}(xy)^r &= (xy)^{m/n} = \left((xy)^{1/n}\right)^m \overset{(b)}{=} \left(x^{1/n}y^{1/n}\right)^m \overset{(309)}{=} \left(x^{1/n}\right)^m \left(y^{1/n}\right)^m \\ &= x^{m/n} y^{m/n} = x^r y^r.\end{aligned}$$ □

Laskusääntöjen (315) nojalla

$$\boxed{x^{m/n} = \left(x^{1/n}\right)^m = (x^m)^{1/n}.} \tag{316}$$

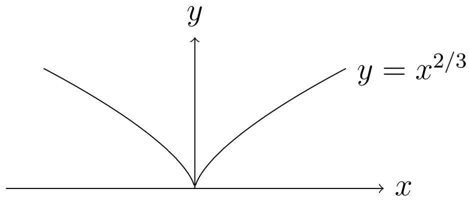
Määritelmässä 314 määrittelyjoukko valitaan siten, että kumpikin yhtälön (316) lausekkeista $\left(x^{1/n}\right)^m$ ja $(x^m)^{1/n}$ on määritelty. Jos m ja n ovat parillisia, niin lauseke $(x^m)^{1/n}$ on määritelty kaikilla $x \neq 0$, mutta $\left(x^{1/n}\right)^m$ ei ole määritelty negatiivisilla x. Tällöin ei ole järkevää pitää myöskään funktiota $x^{m/n}$ määriteltynä, koska eksponentin laskusäännöt eivät ole silloin voimassa. Esimerkiksi

$$1 = 1^{2/2} = \left(1^2\right)^{1/2} = \left((-1)^2\right)^{1/2} = (-1)^1 = -1 \ ?$$

Syy: funktiot x^2 ja $x^{1/2}$ eivät ole toistensa käänteisfunktioita, kun $x < 0$. Itse asiassa

$$\left(x^2\right)^{1/2} = |x|.$$

Esimerkki 317. Funktio $x^{2/3} = \left(x^{1/3}\right)^2$ on määritelty kaikilla $x \in \mathbb{R}$.



Määritelmä 318. *n. asteen polynomi (polynomial)* $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on muotoa

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

oleva funktio, missä *kertoimet (coefficients)* $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ ovat vakioita (ja $a_n \neq 0$, jos $n > 0$).

Määritelmä 319. *Rationaalifunktio (rational function)* on muotoa

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

oleva funktio, missä p ja q ovat polynomeja. f on määritelty joukossa $\{x \in \mathbb{R} : \ q(x) \neq 0\}$.

A.2 Eksponentti- ja logaritmifunktiot

Määritellään eksponenttifunktio ja pohditaan potenssi- ja eksponenttifunktion määritelmiä irrationaalisille eksponenteille.

Määritelmä 320. *Eksponenttifunktioksi (exponential function)* kutsutaan funktiota

$$f(x) = a^x,$$

missä *kantaluku (base)* $a > 0$.

Potenssifunktiosta todetun perusteella eksponenttifunktio on määritelty kaikilla eksponenteilla $x \in \mathbb{Q}$:

$$\boxed{\begin{aligned}
&a^0 = 1, && \\
&a^x = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{x \text{ kpl}}, && \text{kun } x \in \mathbb{N}, \\
&a^x = \frac{1}{a^{-x}}, && \text{kun } x \in \mathbb{Z}_-, \\
&a^x = (a^m)^{1/n} = \sqrt[n]{a^m}, && \text{kun } x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, \text{ missä } n \in \mathbb{N},
\end{aligned}}$$

ja sille pätevät seuraavat laskusäännöt ($x, y \in \mathbb{Q}$):

$$\boxed{a^{x+y} = a^x a^y, \qquad (a^x)^y = a^{xy} \quad \text{ja} \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}.} \tag{321}$$

Lause 322. *Eksponenttifunktio* $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R},\ f(x) = a^x$ *on*

(1) *aidosti kasvava, jos* $a > 1$,

(2) *aidosti vähenevä, jos* $0 < a < 1$,

(3) *vakio* $= 1$, *jos* $a = 1$.

Todistus. (1) Olkoon ensin $x > 0$ ja merkitään $x = m/n$, missä $m, n \in \mathbb{N}$. Koska $a^m \geq a > 1$ ja $y^{1/n}$ on aidosti kasvava, niin

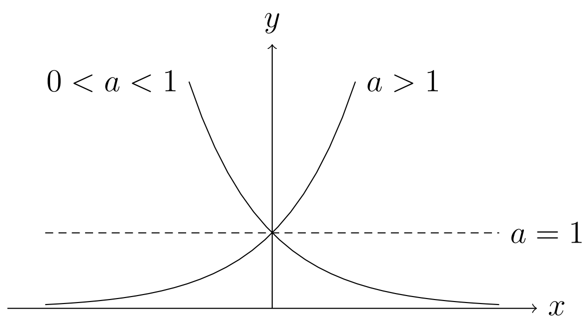
$$a^x = a^{m/n} = (a^m)^{1/n} > 1^{1/n} = 1.$$

Olkoon nyt $x, y \in \mathbb{Q}$, $y > x$. Silloin $y - x > 0$ ja edellä todetun perusteella $a^{y-x} > 1$ ja siten

$$a^y = a^{x+(y-x)} = a^x a^{y-x} > a^x.$$

(2) todistetaan vastaavasti ja (3) on selvä. □

Eksponenttifunktion $f(x) = a^x$ kuvaaja eri a:n arvoilla:



Eksponenttifunktion määrittely voidaan laajentaa koko reaalilukujen joukkoon käyttämällä täydellisyysaksioomaa. Kun $a > 1$, niin joukko $\{a^r : r \in \mathbb{Q},\ r < x\}$ on lauseen 322 mukaan ylhäältä rajoitettu. Niinpä sillä on supremum:

Määritelmä 323. Olkoon $a > 1$. Kun $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, niin asetetaan

$$a^x = \sup\{a^r : r \in \mathbb{Q},\ r < x\},$$

Tapaus $0 < a < 1$ vastaavasti.

Voidaan osoittaa, että näin määritelty eksponenttifunktion laajennus kaikille reaaliluvuille toimii juuri niin kuin pitääkin:

Lause 324. *Funktiolle $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$*

(1) *laskulait (321) pätevät kaikilla x ja $y \in \mathbb{R}$,*

(2) *kun $a \neq 1$, niin f on aidosti monotoninen koko reaalilukujen joukossa,*

(3) *f:n arvojoukko on $f(\mathbb{R}) = (0, \infty)$.*

Todistuksen sivuutamme.

Huomautus 325. Määritelmä 323 on hyvin intuitiivinen, mutta käytännössä sen avulla lauseen 324 todistaminen on hankalaa. Vaihtoehtona olisi määritellä eksponenttifunktio potenssisarjana

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

tai voitaisiin määritellä ensin logaritmifunktio asettamalla

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

ja eksponenttifunktio e^x sen käänteisfunktiona. Näitä määritelmiä käyttäen voitaisiin helpommin todistaa eksponenttifunktion perusominaisuuksien lisäksi derivaattaa koskevat tulokset. Nämä tavat vaatisivat ensin paljon analyysin koneistoa, jota käsitellään vasta myöhemmin. Haluamme kuitenkin eksponenttifunktion käyttöön jo tässä vaiheessa.

Myöhemmin lauseessa 347 todistamme, että eksponenttifunktio on jatkuva. Siitä seuraa, että jos (x_n) on rationaalilukujono, jolle $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$, niin

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = a^x.$$

Esimerkki 326. Tarkastellaan lukua 2^π. $\pi = 3{,}141592\ldots$ on irrationaaliluku, jota voidaan approksimoida rationaaliluvuilla

$$r_1 = 3, \quad r_2 = 3{,}1, \quad r_3 = 3{,}14, \quad r_4 = 3{,}141, \quad \ldots.$$

Luvulle 2^π saadaan rationaalisia eksponentteja käyttäen arviot

$$2^3 = 8, \quad 2^{3{,}1} = 8{,}574187\ldots, \quad 2^{3{,}14} = 8{,}815240\ldots, \quad 2^{3{,}141} = 8{,}821353\ldots$$

ja lopulta raja-arvona saadaan $2^\pi = \lim_{n\to\infty} 2^{r_n} = 8{,}824977\ldots.$

Määritelmässä 238 määriteltiin Neperin luku e.

Määritelmä 327. Funktiota $e^x = \exp(x)$ kutsutaan *luonnolliseksi eksponenttifunktioksi.*

Eksponenttifunktio a^x on aidosti monotoninen, kun $a \neq 1$, joten sillä on käänteisfunktio.

Määritelmä 328. Olkoon $a > 0$ ja $a \neq 1$. Funktion $f\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$, $f(x) = a^x$, käänteisfunktiota $f^{-1}\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ kutsutaan *a-kantaiseksi logaritmifunktioksi (base a logarithm function)* ja sitä merkitään $f^{-1}(x) = \log_a x$.

Koska a^x ja $\log_a x$ ovat toistensa käänteisfunktioita, niin

$$\boxed{y = a^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a y} \tag{329}$$

ja

$$\boxed{\log_a(a^x) = x \qquad \text{ja} \qquad a^{\log_a y} = y} \tag{330}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja kaikilla $y \in (0,\infty)$. Toisin sanoen luku $x = \log_a y$ on se luku, johon a pitää korottaa, jotta saadaan y.

Lauseista 322 ja 45 seuraa:

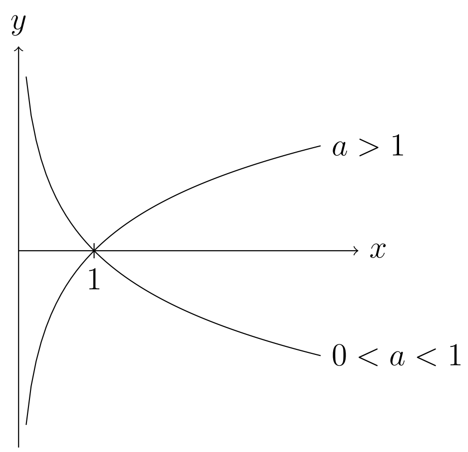
Lause 331. *Logaritmifunktio* $\log_a x$

(1) *on aidosti kasvava, jos* $a > 1$,

(2) *on aidosti vähenevä, jos* $0 < a < 1$,

(3) *ei ole määritelty, jos* $a = 1$.

Koska $a^0 = 1$, on $\log_a 1 = 0$ kaikilla a. Seuraavaan kuvaan on hahmoteltu $\log_a$:n kuvaaja eri a:n arvoilla. Vertaa vastaavaan eksponenttifunktion a^x kuvaajaan; kuvaajat ovat peilikuvia suoran $y = x$ suhteen.



Määritelmä 332. Luonnollisen eksponenttifunktion e^x käänteisfunktiota $\log_e x$ kutsutaan *luonnolliseksi logaritmiksi (natural logarithm)* ja sitä merkitään $\ln x = \log x = \log_e x$. Kymmenkantaista logaritmifunktiota kutsutaan *Briggsin logaritmiksi* ja sitä merkitään $\lg x = \log_{10} x$.

Kun jatkossa puhutaan pelkästä eksponenttifunktiosta tai logaritmifunktiosta täsmentämättä kantalukua, niin tarkoitetaan aina funktioita e^x ja $\ln x$, joille pätee

$$\boxed{\ln(e^x) = x \quad \text{ja} \quad e^{\ln y} = y} \tag{333}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja kaikilla $y \in (0, \infty)$.

Ominaisuuksista (321) seuraa logaritmille seuraavat laskulait $(x, y > 0)$:

$$\boxed{\begin{aligned} \log_a(xy) &= \log_a x + \log_a y \\ \log_a(x^y) &= y \log_a x \\ \log_a \frac{x}{y} &= \log_a x - \log_a y \end{aligned}} \tag{334}$$

Todistetaan kaavoista ensimmäinen luonnolliselle logaritmille: koska

$$xy = e^{\ln(xy)} \quad \text{ja toisaalta} \quad xy = e^{\ln x} e^{\ln y} = e^{\ln x + \ln y},$$

niin

$$e^{\ln(xy)} = e^{\ln x + \ln y}.$$

Eksponenttifunktion aidosta kasvavuudesta seuraa, että on oltava

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

a-kantaisten eksponentti- ja logaritmifunktioiden käsittely voidaan palauttaa e-kantaisiksi kaavoilla

$$\boxed{a^x = e^{x \ln a}} \quad \text{ja} \quad \boxed{\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.} \tag{335}$$

Näistä ensimmäinen voidaan perustella suoralla laskulla

$$a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \ln a}.$$

Toinen saadaan ottamalla yhtälöstä $x = a^{\log_a x}$ luonnollinen logaritmi puolittain ja käyttämällä kaavoja (334):

$$\ln x = \ln\left(a^{\log_a x}\right) = \log_a x \ln a.$$

Luvussa A.1 määriteltiin potenssifunktio $f(x) = x^r$ $(x > 0)$ rationaalisille ekponenteille $r \in \mathbb{Q}$. Eksponenttifunktion avulla määritelmä voidaan yleistää kaikille reaalilukueksponenteille.

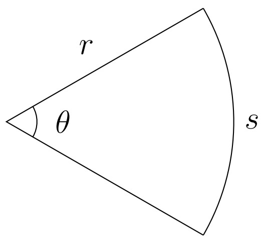
Määritelmä 336. Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Määritellä yleinen potenssifunktio x^a asettamalla

$$x^a = \left(e^{\ln x}\right)^a = e^{a \ln x} \qquad (x > 0).$$

A.3 Trigonometriset funktiot

Kerrataan trigonometristen funktioiden yksikköympyrän avulla annettava määritelmä.

Ympyräsektorin *kulma (angle)* θ määritellään sektorin kaaren pituuden s suhteena säteeseen r:



$$\theta = \frac{s}{r}$$

Tutkitaan seuraavassa *suunnattuja kulmia (directed angles)* xy-koordinaatiston origokeskisessä 1-säteisessä ympyrässä eli *yksikköympyrässä (unit circle)* siten, että sektorin alkukylki on positiivisella x-akselilla. Jos $\theta > 0$, niin kierretään vastapäivään (positiivinen kiertosuunta), ja jos $\theta < 0$, niin kierretään myötäpäivään (negatiivinen kiertosuunta). Koska säde $= 1$, on koko kierros vastapäivään 2π, puoli kierrosta π ja neljänneskierros $\pi/2$. Jos $\theta > 2\pi$ tai $\theta < -2\pi$, niin ajatellaan kierretyn useampia kierroksia.

Kulma on yksikötön suure, mutta toisinaan selvyyden vuoksi käytetään yksikkönä *radiaania (radian)*, jolloin yksi kierros on 2π rad. Kulman yksikkönä käytetään myös *astetta (degree)*, jolloin yksi kierros on $360°$. Niinpä

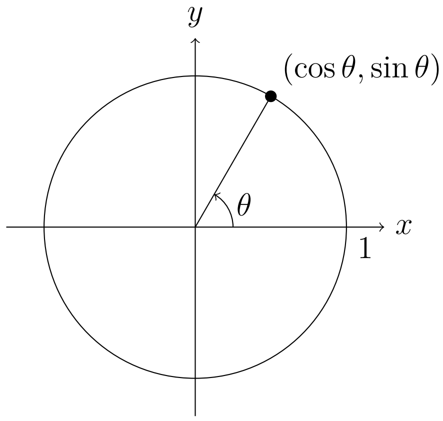
$$1 \text{ rad} = 180°/\pi \qquad \text{eli} \qquad 1° = \pi/180 \text{ rad}.$$

Radiaanit	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π	$3\pi/2$	2π
Asteet	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$270°$	$360°$

Määritelmä 337. Merkitään yksikköympyrässä kulmaa θ vastaavaa kehäpistettä (x, y). Määritellään *sini (sine)* ja *kosini (cosine)* seuraavina funktioina:

$$\begin{aligned} &\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \sin(\theta) = y \quad \text{ja} \\ &\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \cos(\theta) = x. \end{aligned}$$

$\sin(\theta)$ on siis kehäpisteen y-koordinaatti ja $\cos(\theta)$ x-koordinaatti:



Jos sekaannuksen vaaraa ei ole, niin voidaan merkitä lyhyesti $\sin(\theta) = \sin\theta$ ja $(\sin(\theta))^n = \sin^n\theta$ (cos ja tan vastaavasti).

Määritelmä 338. Määritellään *tangentti (tangent)* funktiona

$$\tan\colon \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + n\pi :\ n \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R},\ \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$$

Huomautus 339. Voisimme määritellä myös trigonometriset funktiot analyyttisesti esimerkiksi sarjojen avulla (vrt. huomautus 325). Tyydymme tässä vaiheessa kuitenkin intuitiivisiin määritelmiin 337 ja 338.

Pythagoras'n lauseen sovelluksena saadaan *trigonometrian peruskaava*

$$\boxed{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1.} \tag{340}$$

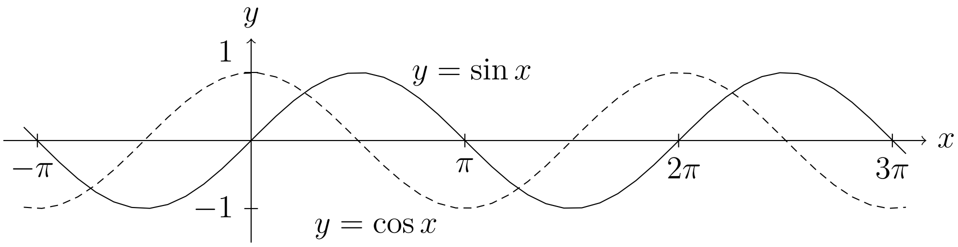
Jos kulma ei ole välillä $0 \leq \theta \leq \pi/2$, niin trigonometrisen funktion arvon laskeminen voidaan palauttaa tälle välille seuraavien *palautuskaavojen* avulla.

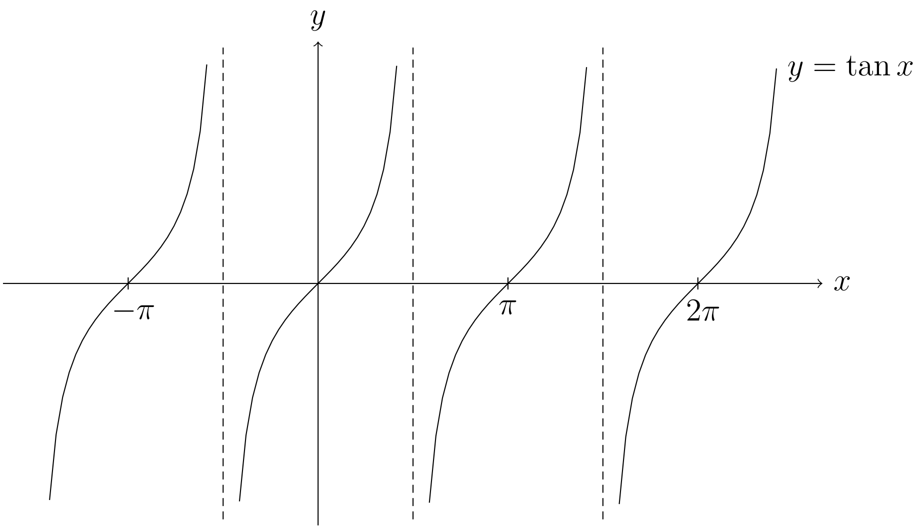
$$\boxed{\begin{aligned}
\sin(\theta + 2n\pi) &= \sin\theta && (n \in \mathbb{Z})\\
\cos(\theta + 2n\pi) &= \cos\theta && (n \in \mathbb{Z})\\
\tan(\theta + n\pi) &= \tan\theta && (n \in \mathbb{Z})\\
\sin(-\theta) &= -\sin\theta\\
\cos(-\theta) &= \cos\theta\\
\sin(\pi + \theta) &= -\sin\theta\\
\cos(\pi + \theta) &= -\cos\theta\\
\cos\theta &= -\sin(\theta - \pi/2) = \sin(\pi/2 - \theta)\\
\sin\theta &= \cos(\theta - \pi/2) = \cos(\pi/2 - \theta)
\end{aligned}} \tag{341}$$

Kaavat voidaan päätellä yksikköympyrästä, sillä esimerkiksi

- kulmia θ ja $\theta + 2\pi n$ vastaa samaa kehäpiste kaikilla $n \in \mathbb{Z}$ ja
- kulmia θ ja $-\theta$ vastaavilla kehäpisteillä on sama x-koordinaatti mutta y-koordinaatit ovat toistensa vastalukuja.

Palautuskaavojen mukaan trigonometriset funktiot ovat jaksollisia, sinin ja kosinin jaksona 2π, tangentin jaksona π. Yksikköympyrän avulla voidaan piirtää trigonometristen funktioiden kuvaajat:





Koska trigonometriset funktiot ovat jaksollisia, on niistä kullakin käänteisfunktio vain rajoittumalla sellaiselle määrittelyjoukon osavälille, jolla funktio on aidosti monotoninen.

Määritelmä 342. Seuraavilla väleillä määritellään trigonometristen funktioiden käänteisfunktiot *arkussini, arkuskosini* ja *arkustangentti.*

Funktio	**Käänteisfunktio**
$\sin\colon [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$	$\arcsin = \sin^{-1}\colon [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$
$\cos\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$	$\arccos = \cos^{-1}\colon [-1, 1] \to [0, \pi]$
$\tan\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$	$\arctan = \tan^{-1}\colon \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$

Muuttuja merkitään trigonometristen funktioiden tapaan yleensä ilman sulkuja, esimerkiksi $\arctan(x) = \arctan x$.

Koska $\sin(x)$ ja $\arcsin(x)$ ovat toistensa käänteisfunktioita, niin

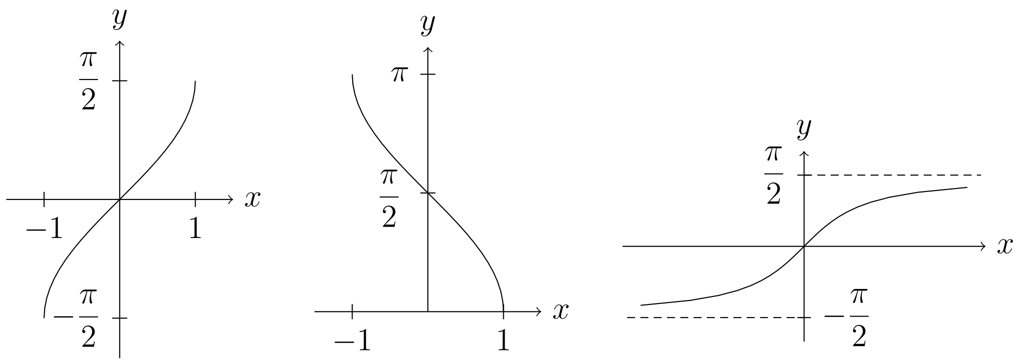
$$\boxed{y = \sin(x) \;\Leftrightarrow\; x = \arcsin(y)} \tag{343}$$

ja

$$\boxed{\arcsin(\sin(x)) = x \quad \text{ja} \quad \sin(\arcsin(y)) = y} \tag{344}$$

kaikilla $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ ja $y \in [-1, 1]$. Vastaavasti kosinille ja tangentille.

Koska funktion ja käänteisfunktion kuvaajat ovat peilikuvia suoran $y = x$ suhteen, niin arkusfunktioiden kuvaajat ovat seuraavan näköisiä:



$y = \arcsin x$ $\qquad$ $y = \arccos x$ $\qquad$ $y = \arctan x$

A.4 Alkeisfunktioiden jatkuvuus

Alkeisfunktioiden jatkuvuuden tutkimisessa keskeisessä asemassa on lause 2.2.15, jonka mukaan jatkuvan funktion käänteisfunktio on jatkuva.

Lause 345. *Potenssifunktio x^r, $r \in \mathbb{Q}$, on jatkuva määrittelyjoukossaan.*

Todistus. Tapaus $r = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. x^n on aidosti kasvava ja jatkuva (esimerkki 72), joten $x^r = x^{1/n}$ on sen käänteisfunktiona jatkuva (lause 2.2.15).

Tapaus $r = m/n$, $n \in \mathbb{N}$. $x^r = (x^{1/n})^m$ on kahden jatkuvan funktion $g(x) = x^{1/n}$ ja $f(y) = y^m$ yhdiste ja siten jatkuva (lause 2.2.7). □

Lause 346. $\sin x$, $\cos x$ *ja* $\tan x$ *ovat jatkuvia määrittelyjoukoissaan.*

Todistus. Todistetaan väite ensin sinille. Olkoon $a \in \mathbb{R}$. On osoitettava, että

$$\lim_{x \to a} \sin x = \sin a.$$

Merkitsemällä $x = a + h$ huomataan, että on yhtäpitävää todistaa, että

$$\lim_{h \to 0} \sin(a + h) = \sin a.$$

Käytetään sinin summakaavaa:

$$\sin(a+h) = \sin a \cos h + \cos a \sin h \to \sin a \cdot 1 + \cos a \cdot 0 = \sin a,$$

kun $h \to 0$, sillä sinin ja kosinin määritelmien mukaan $\lim_{h\to 0} \sin h = 0$ ja $\lim_{h\to 0} \cos h = 1$. Kosinia koskeva väite todistetaan vastaavalla tavoin. Tangentti on jatkuva, sillä

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$ □

Lause 347. *Eksponenttifunktio a^x $(a > 0)$ on jatkuva $\mathbb{R}$:ssä.*

Todistus. Oletetaan lauseen 324 tulokset eksponenttifunktion perusominaisuuksista (laskusäännöt, monotonisuus) tunnetuiksi. Todistetaan tapaus $a > 1$ ($a = 1$ selvä, $0 < a < 1$ vastaavasti).
(1) Jatkuvuus 0:ssa: Olkoon $x \in (-1, 1)$. Valitaan suurin $n \in \mathbb{N}$, jolle

$$-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}.$$

Aidosta kasvavuudesta seuraa, että

$$a^{-1/n} < a^x < a^{1/n}.$$

Kun $x \to 0$, niin $n \to \infty$, jolloin juurifunktion ominaisuuksista (luku A.1) seuraa, että arvion laitimmaiset lausekkeet lähestyvät lukua 1. Niinpä kuristusperiaatteen nojalla on olemassa

$$\lim_{x\to 0} a^x = 1 = a^0$$

ja eksponenttifunktio on siten jatkuva 0:ssa.
(2) Jatkuvuus pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}$: eksponentin laskusäännöistä ja kohdasta (1) seuraa, että

$$\lim_{x\to x_0} a^x = \lim_{x\to x_0} \left(a^{x_0} a^{x-x_0}\right) = a^{x_0} \lim_{x\to x_0} a^{x-x_0} = a^{x_0} a^0 = a^{x_0},$$

joten eksponenttifunktio on jatkuva pisteessä x_0. □

Koska trigonometriset funktiot ja eksponenttifunktio ovat jatkuvia, niin myös niiden käänteisfunktiot eli arkusfunktiot ja logaritmifunktio ovat lauseen 2.2.15 mukaan jatkuvia.

A.5 Alkeisfunktioiden derivaatat

Lauseessa 106 todistettiin potenssifunktion derivoimiskaava

$$D(x^r) = rx^{r-1} \qquad (r \in \mathbb{Q},\ x \neq 0).$$

Käydään läpi muidenkin alkeisfunktioiden derivoimiskaavat.

Lemma 348. *On olemassa raja-arvo* $\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e$.

Todistus. Käyttämällä muuttujanvaihtoa $x = 1/t$ riittää osoittaa, että on olemassa raja-arvot

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \tag{349}$$

missä rajankäynti tehdään yli reaalilukujen x. Lemman 237 ja määritelmän 238 mukaan

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,$$

missä rajankäynti tehdään yli luonnollisten lukujen n. Merkitään reaaliluvun $x > 1$ kokonaisosaa $[x]$:llä. $[x] \in \mathbb{N}$ ja $[x] \le x \le [x]+1$, joten

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x &\le \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^x \le \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}\\ &= \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}\left(1+\frac{1}{[x]}\right) \to e\cdot 1 = e,\end{aligned}$$

kun $x \to \infty$. Toisaalta

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x &\ge \left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^x \ge \left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}\\ &= \left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{-1} \to e\cdot 1 = e,\end{aligned}$$

kun $x \to \infty$. Niinpä kuristusperiaatteen nojalla (349) pätee, kun $x \to \infty$.

Olkoon nyt $x < -1$ reaaliluku. Merkitään $y = -x$ ja sovelletaan (349):sta y:lle:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{y\to\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^y\\ &= \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right) = e\cdot 1 = e. \qquad \square\end{aligned}$$

Lause 350. $D(e^x) = e^x$

Todistus. Tutkitaan erotusosamäärää pisteessä x. Merkitään $t = e^h - 1$, ts. $h = \ln(1+t)$. Eksponentti- ja logaritmifunktioiden ominaisuuksia (luku A.2) ja lemmaa 348 käyttämällä

$$\begin{aligned}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} &= \frac{e^x e^h - e^x}{h} = e^x \frac{e^h-1}{h} = e^x \frac{t}{\ln(1+t)} = e^x \frac{1}{\frac{1}{t}\ln(1+t)} \\ &= e^x \frac{1}{\ln\left((1+t)^{1/t}\right)} \to e^x \frac{1}{\ln e} = e^x,\end{aligned}$$

kun $h \to 0$, sillä tällöin $t \to 0$. □

Esimerkki 351. a) $D\left(e^{3x^2}\right) = e^{3x^2} D\left(3x^2\right) = 6xe^{3x^2}$.

b) $D\left(\sqrt{1+e^{2x}}\right) = \dfrac{D(1+e^{2x})}{2\sqrt{1+e^{2x}}} = \dfrac{2e^{2x}}{2\sqrt{1+e^{2x}}} = \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

Lause 352. $D(\ln x) = \dfrac{1}{x}$

Todistus. Funktion $f(x) = \ln x$ käänteisfunktio on $f^{-1}(y) = e^y$, joten käänteisfunktion derivoimissäännön mukaan

$$D_x(\ln x) = \frac{1}{D_y(e^y)} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$ □

Lause 353. $D\left(a^x\right) = a^x \ln a \qquad$ *ja* $\qquad D\left(\log_a x\right) = \dfrac{1}{x \ln a}$.

Todistus. Kaavoista (335) saadaan

$$\begin{aligned} D\left(a^x\right) &= D\left(e^{x\ln a}\right) = e^{x\ln a} D(x \ln a) = a^x \ln a \quad \text{ja} \\ D\left(\log_a x\right) &= D\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right) = \frac{D(\ln x)}{\ln a} = \frac{1}{x\ln a}.\end{aligned}$$ □

Esimerkki 354. a) $D(3^{x^2}) = 3^{x^2} \ln 3 D(x^2) = 2x3^{x^2} \ln 3$

b) $D \ln(\sqrt{1+x^2}) = \dfrac{D(\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{D(1+x^2)}{2\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{x}{1+x^2}$

c) $D(\ln(\ln x)) = \dfrac{D(\ln x)}{\ln x} = \dfrac{1}{x \ln x}$

Lause 355. $D\left(x^a\right) = ax^{a-1} \qquad (a \in \mathbb{R},\ x > 0)$

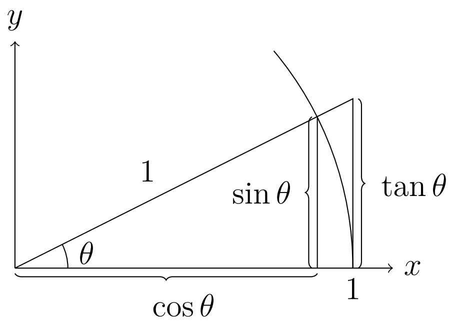
Todistus. Määritelmän 336 mukaan

$$D\left(x^a\right) = D\left(e^{a\ln x}\right) = e^{a\ln x} D(a\ln x) = x^a \frac{a}{x} = ax^{a-1}. \qquad \square$$

Esimerkki 356. $D\left(e^{x^e}\right) = e^{x^e} D(x^e) = ex^{e-1}e^{x^e}$

Lause 357. $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$

Todistus. Todistetaan lause geometrisesti. l'Hôspitalin sääntöä ei voida käyttää tämän todistamiseen, koska sinin derivointikaavan todistamisessa tarvitsemme tätä tulosta.



Oletetaan, että $0 < \theta < \pi/2$. Oheisesta kuvasta päätellään, että

pienen kolmion pinta-ala ≤ sektorin pinta-ala ≤ ison kolmion pinta-ala.

1-säteisen kiekon pinta-ala on $\pi \cdot 1^2 = \pi$, joten sektorin, joka on $\theta/(2\pi)$-osa kiekosta, pinta-ala on $\pi{\cdot}\theta/(2\pi) = \theta/2$. Kolmion pinta-ala on $\frac{1}{2}\times$kanta$\times$korkeus, joten

$$\frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta \le \frac{\theta}{2} \le \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan\theta = \frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{\cos\theta},$$

josta

$$\cos\theta\sin\theta \le \theta \le \frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$$

Jakamalla $\sin\theta$:lla ja ottamalla käänteisluvut saadaan

$$\frac{1}{\cos\theta} \ge \frac{\sin\theta}{\theta} \ge \cos\theta.$$

Koska $\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$, niin kuristusperiaatteen (lause 60) nojalla

$$\lim_{\theta\to 0+} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1.$$

Tapaus $-\pi/2 < \theta < 0$ käsitellään vastaavasti ja saadaan

$$\lim_{\theta\to 0-} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1. \qquad \square$$

Lemma 358. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0.$

Todistus. Lavennetaan $(1+\cos x)$:llä, käytetään tietoa $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ja lausetta 357:

$$\frac{1-\cos x}{x} = \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \frac{\sin x}{x}\frac{\sin x}{1+\cos x} \to 1\cdot\frac{0}{1+1} = 0, \quad \text{kun } x \to 0.$$

□

Lause 359. *Trigonometriset funktiot ovat derivoituvia määrittelyjoukoissaan ja*

$$D\sin x = \cos x$$
$$D\cos x = -\sin x$$
$$D\tan x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Todistus. Kirjoitetaan erotusosamäärä sinille ja käytetään summakaavaa, lausetta 357 ja lemmaa 358:

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} &= \frac{\sin x\cos h + \sin h\cos x - \sin x}{h}\\ &= -\sin x\frac{1-\cos h}{h} + \cos x\frac{\sin h}{h}\\ &\to -\sin x\cdot 0 + \cos x\cdot 1 = \cos x, \quad \text{kun } h \to 0.\end{aligned}$$

Kosinin derivointikaava todistetaan vastaavasti. Tangentin derivointikaava saadaan nyt osamäärän derivoimissäännöllä:

$$D\tan x = D\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

missä viimeinen vaihe voidaan sieventää myös

$$\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = 1 + \tan^2 x.$$

□

Lause 360. *Arkusfunktioiden derivoimiskaavat:*

$$D\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1 < x < 1)$$
$$D\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1 < x < 1)$$
$$D\arctan x = \frac{1}{1+x^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Todistus. Funktiolla $y = \sin x$ on välillä $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ käänteisfunktio $x = \arcsin y$. Välillä $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ (vastaten väliä $y \in (-1, 1)$) on $D \sin x = \cos x \neq 0$, joten käänteisfunktion derivoimissäännön mukaan

$$D_y \arcsin y = \frac{1}{D \sin x} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Tässä toiseksi viimeinen vaihe seuraa kaavasta $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ottamalla huomioon, että $\cos x > 0$ välillä $x \in (-\pi/2, \pi/2)$. Vastaavalla tavoin voidaan päätellä derivoimiskaavat arkuskosinille ja arkustangentille. $\square$

Derivointikaavoista johdetut perusintegraalit

$f(x)$	$F(x)$	Väli
$x^n,\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	$\mathbb{R}$
$x^a,\ a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{1}{a+1}x^{a+1} + C$	$(0, \infty)$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$(-\infty, 0)$ tai $(0, \infty)$
e^x	$e^x + C$	$\mathbb{R}$
$a^x,\ a > 0$ ja $a \neq 1$	$\dfrac{a^x}{\ln a} + C$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$	$\left(-\dfrac{\pi}{2} + n\pi, \dfrac{\pi}{2} + n\pi\right),\ n \in \mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$	$(-1, 1)$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{ar}\sinh x + C$ $= \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{ar}\cosh x + C$ $= \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2-1}\right\rvert + C$	$(-\infty, -1)$ tai $(1, \infty)$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{ar}\tanh x + C$ $= \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1} + C$	$(-1, 1)$

Lähteitä ja kirjallisuutta

[1] Anonyymi. *Bolzano–Weierstrass theorem.* Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Bolzano-Weierstrass_theorem, luettu 17.6.2015.

[2] T. M. Apostol. *Calculus. Vol. I: One-variable calculus, with an introduction to linear algebra.* John Wiley & Sons, 2nd edition, 1967.

[3] T. M. Apostol. *Mathematical analysis.* Addison-Wesley, 2nd edition, 1974.

[4] R. A. Gordon. *The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, volume 4 of *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, 1994.

[5] R. A. Gordon. *Real analysis, a first course.* Pearson Education, 2nd edition, 2002.

[6] T. Hämäläinen. *Matemaattinen analyysi.* Luentomoniste. TTY, Matematiikan laitos, 2012.

[7] T. Kilpeläinen. *Analyysi 1.* Luentomoniste. JY, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, https://www.jyu.fi/maths/opiskelu/yleista/luentomonisteet/, 2002 (luettu 21.5.2014).

[8] T. Kilpeläinen. *Analyysi 2.* Luentomoniste. JY, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, https://www.jyu.fi/maths/opiskelu/yleista/luentomonisteet/, 2003 (luettu 21.5.2014).

[9] S. R. Lay. *Analysis, with an introduction to proof.* Pearson Education, 4th edition, 2005.

[10] J. Merikoski, M. Halmetoja, and T. Tossavainen. *Johdatus matemaattisen analyysin teoriaan.* WSOY, 2004.

[11] M. E. Munroe. *Introduction to measure and integration.* Addison–Wesley, 1953.

[12] S. M. Nikolsky. *A course of mathematical analysis. Vol. 1.* Mir Publishers, 1977. Revised from the 1975 russian edition, translation by V. M. Volosov.

[13] V. T. Purmonen. *Differentiaali- ja integraalilaskentaa, I osa.* Luentomoniste 45. JY, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, 2000.

[14] K. R. Stromberg. *Introduction to classical real analysis.* Wadsworth International, 1981.

[15] W. F. Trench. *Introduction to real analysis.* Digital Commons @ Trinity, http://digitalcommons.trinity.edu/mono/7/, free hyperlinked edition 2.04, 2013 (luettu 12.5.2014).

Hakemisto