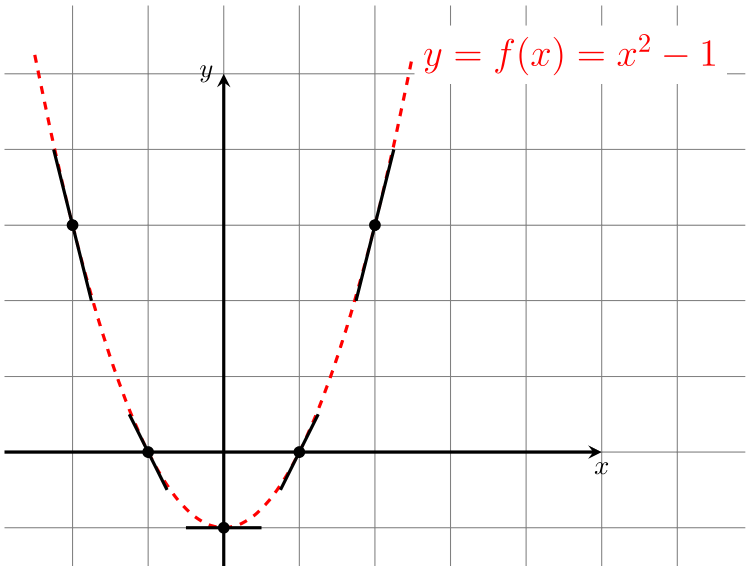
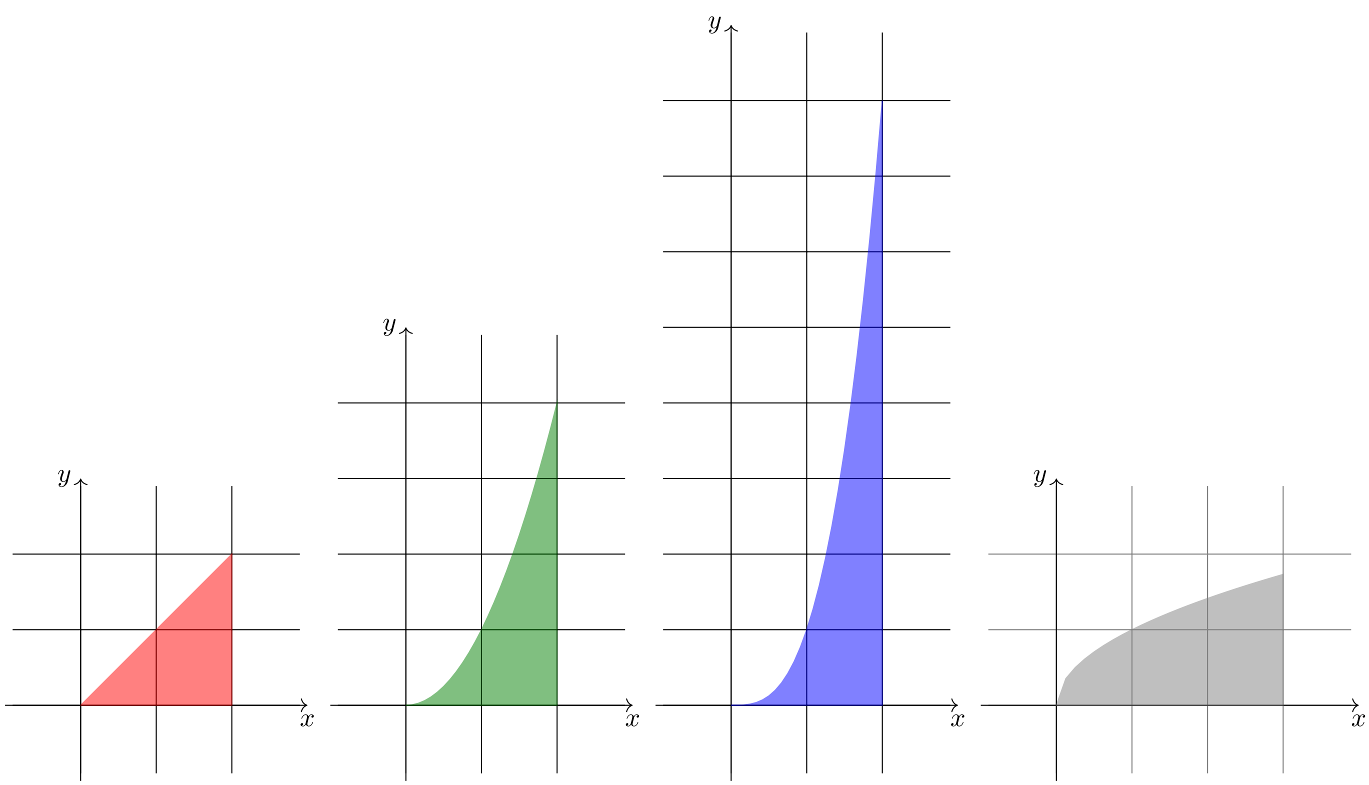
Derivointi ja integrointi lomittain

– eri funktiotyyppien tehtäviä viikoittain

Juha-Matti Huusko





Esipuhe

Materiaalissa tarkastellaan matematiikan tehtäviä aiheista derivaatta (=kasvunopeus) ja integraali (=pinta-alan kertymä). Materiaali koostuu pääosin esimerkeistä ja tehtävistä. Kaavojen todistuksia ei juurikaan ole.

Usein muissa materiaaleissa integrointia käsitellään vasta, kun derivointi on käsitelty[1] Tästä poiketen, tässä materiaalissa pyritään tutustumaan viikoittain

- alkeisfunktion derivaattaan
- alkeisfunktion integraaliin
- menetelmiin (monimutkaisemmat derivointisäännöt)
- sovelluksiin
- graafiseen puoleen

Materiaali on jaoteltu viikoittaisiin paketteihin - yksi funktiotyyppi viikkoa kohti. Etuna lienee, että jo kaksi ensimmäistä viikkoa antavat mielikuvan, mitä derivointi ja integrointi ovat. Lisäksi uusia kaavoja tulee tasaisemmin, kuin perinteisessä esitystavassa.

Materiaali oli käytössä keväällä 2024. Puutteita ja virheitä lienee sekä sisällössä että esitystavassa.

Oulussa 17.4.2024, Juha-Matti Huusko

[1] Lukion pitkässä matematiikassa on erilliset kurssit

- MAA6 Derivaatta (3 op)
- MAA7 Integraalilaskenta (2 op)

lähde `https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2019.pdf#page=226`

Sisällys

1 Lineaarinen funktio

1.1 Suoran yhtälö

Esimerkki. Pisteiden $p = (1, 2)$ ja $q = (4, 3)$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 2}{4 - 1} = \frac{1}{3}.$$

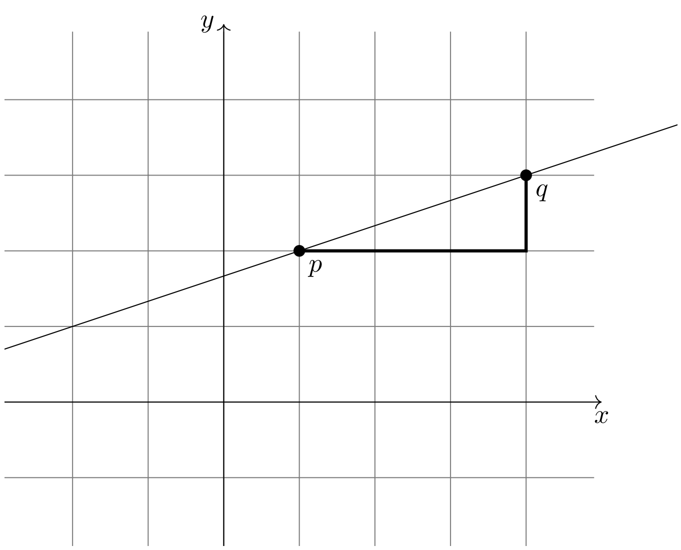
Pisteiden p ja q kautta kulkeva suora on

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

eli

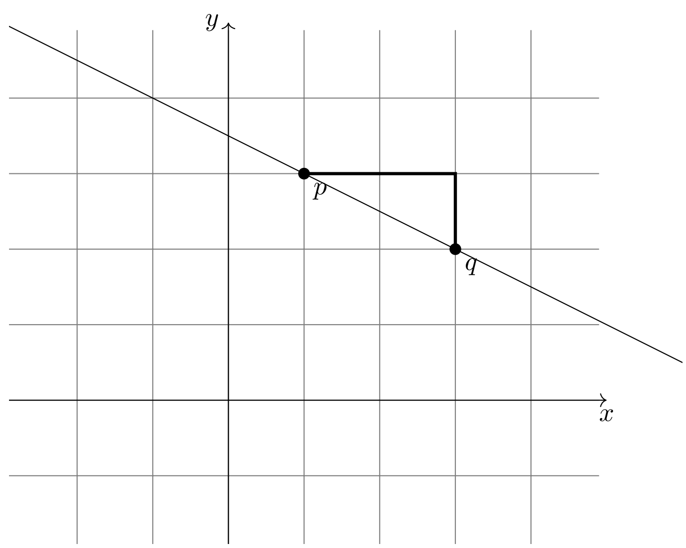
$$y - 2 = \frac{1}{3}(x - 1)$$

eli normaalimuodossa $y = kx + b$ suoran yhtälö on $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$.



Tehtäviä. Voit myös piirtää tehtävissä kuvat, jos haluat.

1. Tarkastellaan pisteiden $p = (1, 3)$ ja $q = (4, 2)$ kautta kulkevaa suoraa. Määritä suoran kulmakerroin ja suoran yhtälö normaalimuodossa. Ratkaisu. $k = -1/3$, $y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$
2. Tarkastellaan pisteiden $p = (1, 2)$ ja $q = (4, 2)$ kautta kulkevaa suoraa. Määritä suoran kulmakerroin ja suoran yhtälö normaalimuodossa. Ratkaisu. $k = 0$, $y = 2$
3. Tarkastellaan pisteiden $p = (1, 2)$ ja $q = (1.01, 4)$ kautta kulkevaa suoraa. Määritä suoran kulmakerroin ja suoran yhtälö normaalimuodossa. Ratkaisu. $k = 200$, $y = 200x - 198$
4. Tarkastellaan suoraa $3y = 2x + 1$. Kirjoita yhtälö muodossa $y = kx + b$. Mikä on suoran kulmakerroin k? Etsi kaksi suoran pistettä. Piirrä suoran kuvaaja. Ratkaisu. $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$, esim. $p = (1, 1)$ ja $q = (4, 3)$
5. Määritä alla olevassa kuvassa pisteet p ja q. Määritä suoran kulmakerroin ja suoran yhtälö normaalimuodossa. Ratkaisu. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$



1.2 Sijoitusmerkki

Kurssilla opetellaan laskemaan pinta-aloja integroimalla tavalla

$$\int_a^b f(x)dx \overset{(1)}{=} \Big/_{a}^{b} F(x) \overset{(2)}{=} F(b) - F(a).$$

Vaiheen (1) lasku riippuu siitä, mikä funktio f on.

Harjoitellaan tällä viikolla vaihe (2) eli sijoitusmerkin käyttö. Sijoitettaessa lasketaan “arvo ylärajalla miinus arvo alarajalla”.

$$\Big/_{a}^{b} F(x) = F(b) - F(a)$$

Funktio $F(x)$ kertoo pinta-alan kertymän. Sijoitus

$$\Big/_{a}^{b} F(x) = F(b) - F(a)$$

kertoo “kuinka paljon lisää pinta-alaa välillä $[a, b]$ kertyi”.

Esimerkki. Lasketaan sijoitus

$$\Big/_{2}^{5} x^2 = 5^2 - 2^2 = 25 - 4 = 21.$$

Esimerkki. Lasketaan sijoitus

$$\Big/_{2}^{5} \frac{1}{x} = \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = \frac{2}{10} - \frac{5}{10} = -\frac{3}{10}.$$

Esimerkki. Lasketaan sijoitus

$$\Big/_{1}^{2} 3x^2 - x = (3 \cdot 2^2 - 2) - (3 \cdot 1^2 - 1) = (12 - 2) - (3 - 1) = 8.$$

6. Laske sijoitukset.

   (a) $\Big/_{3}^{4} x^2$ Ratkaisu. 7

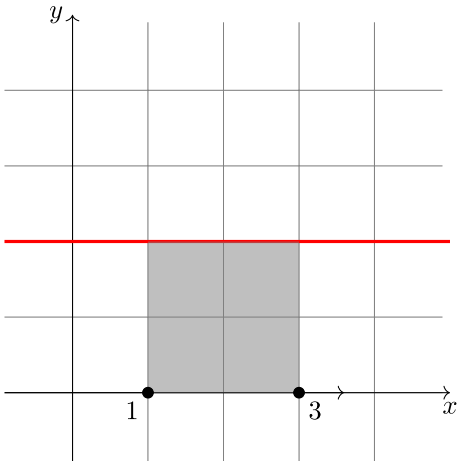
   (b) $\Big/_{3}^{4} \frac{1}{x}$ Ratkaisu. $-\frac{1}{12}$

   (c) $\Big/_{2}^{3} 2x^2 - x$ Ratkaisu. 9

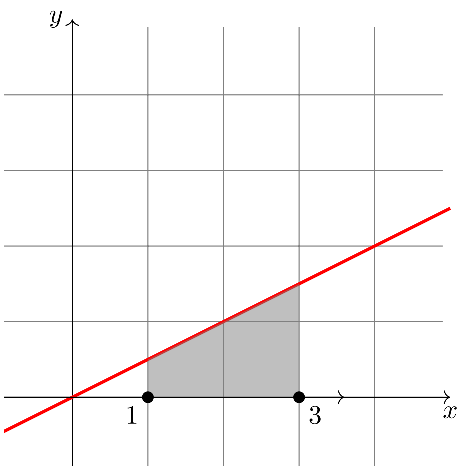
   (d) $\Big/_{2}^{6} \ln(x)$ Ratkaisu. $\ln(3)$

   (e) $\Big/_{0}^{\pi} \cos(x)$ Ratkaisu. -2

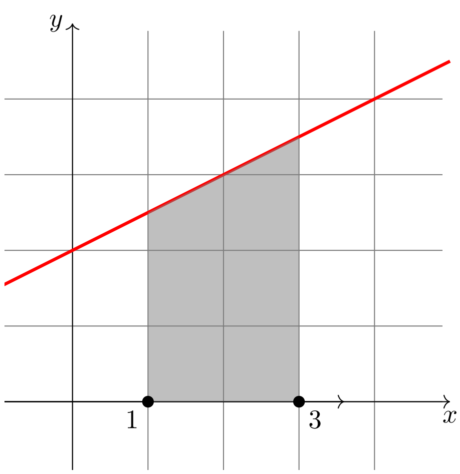
7. Laske alla olevien kuvien varjostetut pinta-alat. Riittää laskea sijoitukset.



$\int_1^3 2dx = \Big/_{1}^{3} 2x =$



$\int_1^3 0.5xdx = \Big/_{1}^{3} 0.25x^2 =$



$\int_1^3 2 + 0.5xdx = \Big/_{1}^{3} 2x + 0.25x^2 =$

2 Polynomi

2.1 Monomin ja potenssin derivointi

Monomia derivoidaan kaavalla $Dx^n = nx^{n-1}$.

Esimerkki. Monomin $2x^7$ derivaatta on $2 \cdot 7x^6 = 14x^6$. Toisin sanoin, jos $f(x) = 2x^7$, niin $f'(x) = 14x^6$.

1. Derivoi monomit.

   (a) $3x^5$ — Ratkaisu. $15x^4$

   (b) $-3x^{11}$ — Ratkaisu. $-33x^{10}$

   (c) $4x^1$ — Ratkaisu. 4

   (d) 2 eli $2x^0$ — Ratkaisu. 0

Derivointikaava $Dx^n = nx^{n-1}$ toimii myös, kun n on negatiivinen, murtoluku tai mikä tahansa luku. (Tällöin lauseke x^n on muuttujan x potenssi.)

Esimerkki. Lauseke $\dfrac{1}{x^3}$ voidaan kirjoittaa muodossa x^{-3}. Lausekkeen derivaatta on $-3x^{-3-1} = -3x^{-4} = \dfrac{-3}{x^4}$.

Esimerkki. Viidennen juuren $\sqrt[5]{x}$ voi kirjoittaa muodossa $x^{1/5}$. Tämän derivaatta on $\frac{1}{5}x^{1/5-1} = \frac{1}{5}x^{-4/5}$.

Esimerkki. $Dx^{3.1} = 3.1x^{2.1}$

2. Derivoi muuttujan x potenssit

   (a) $\dfrac{3}{x^2}$ — Ratkaisu. $-6x^{-3}$

   (b) $\sqrt{x}$ — Ratkaisu. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

   (c) $x\sqrt{x}$ — Ratkaisu. $\frac{3}{2}\sqrt{x}$

   (d) $2x^{-2.3}$ — Ratkaisu. $-4.6x^{-3.3}$

2.2 Polynomin derivointi

Summan termejä derivoidaan erikseen ja edessä olevat vakiot säilyvät.

Vakion derivaatta on nolla eli $Da = 0$ ja yksittäinen x häviää derivoitaessa pois eli $Dax = a$, jos a on vakio

Esimerkki. Derivoidaan lauseketta $3x^2 - 2x^7 + 5x + 3$. Saadaan

$$\begin{aligned} &D3x^2 - 2x^7 + 5x + 3 \\ &= 3 \cdot 2x^1 - 2 \cdot 7x^6 + 5 + 0. \end{aligned}$$

3. Derivoi polynomit

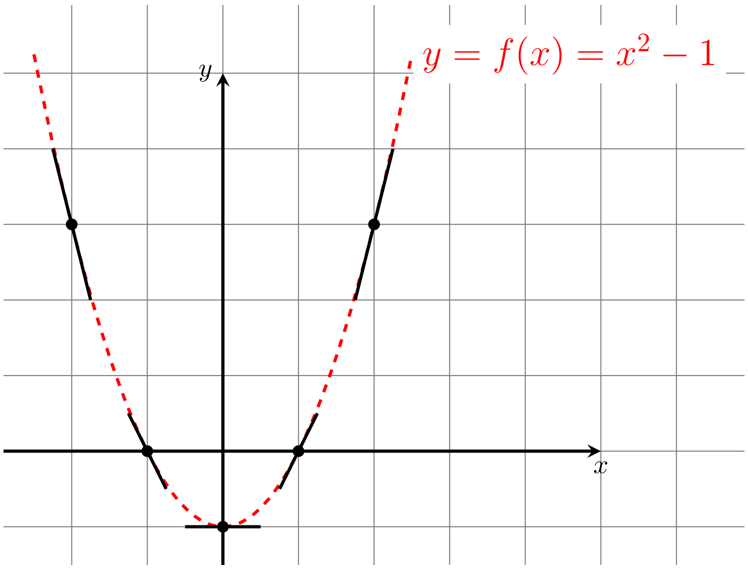
   (a) $x^2 - 2x + 1$ — Ratkaisu. $2x - 2$

   (b) $4x^3 + 7x - 100$ — Ratkaisu. $12x^2 + 7$

   (c) $5x^2 - x + 2$ — Ratkaisu. $10x - 1$

   (d) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ — Ratkaisu. $4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 + 0$

2.3 Polynomin derivointi ja kuvaaja



4. Olkoon $f(x) = x^2 - 1$. Laske
   (a) $f'(x)$ Ratkaisu. $2x$
   (b) $f'(-2)$ Ratkaisu. -4
   (c) $f'(-1)$ Ratkaisu. -2
   (d) $f'(0)$ Ratkaisu. 0
   (e) $f'(1)$ Ratkaisu. 2
   (f) $f'(2)$ Ratkaisu. 4
5. Selvitä funktion $f(x) = x^2 - 1$ kuvaajalle pisteeseen $(1, 0)$ piirretyn tangenttisuoran yhtälö.
   Ratkaisu. $y - 0 = 2(x - 1)$
6. Selvitä funktion $f(x) = x^2 - 1$ kuvaajalle pisteeseen $(0, -1)$ piirretyn tangenttisuoran yhtälö.
   Ratkaisu. $y = -1$
7. Selvitä funktion $f(x) = x^2 - 1$ kuvaajalle pisteeseen $(-2, 3)$ piirretyn tangenttisuoran yhtälö.
   Ratkaisu. $y - 3 = -4(x - (-2))$

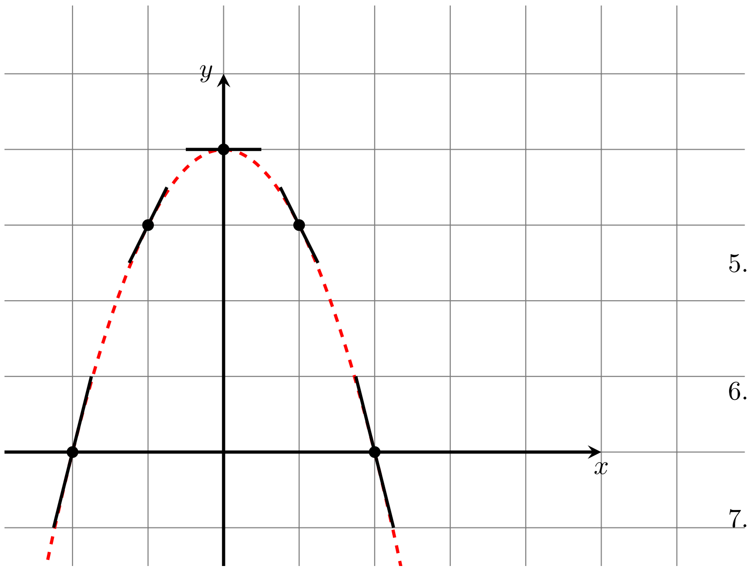
Ratkaisu.

5. Tangenttisuoran yhtälön kaava on $y - y_1 = k(x - x_1)$. Täytyy selvittää, mitä ovat x_1, y_1 ja k, ja sijoittaa arvot yhtälöön.

Nyt $(x_1, y_1) = (1, 0)$, joten $x_1 = 1$ ja $y_1 = 0$.

Derivaatan avulla saadaan tangenttisuoran kulmakerroin k. Se on $k = f'(x_1) = f'(1) = 2$. (Laskettiin tehtävässä 4.)

Sijoittamalla arvot saadaan $y - y_1 = k(x - x_1)$ muotoon $y - 0 = 2(x - 1)$.
Jos halutaan, voidaan siistiä tämä muotoon $y = 2x - 2$.



4. Olkoon $f(x) = -x^2 + 4$. Laske

   (a) $f'(x)$ Ratkaisu. $-2x$

   (b) $f'(-2)$ Ratkaisu. 4

   (c) $f'(-1)$ Ratkaisu. 2

   (d) $f'(0)$ Ratkaisu. 0

   (e) $f'(1)$ Ratkaisu. -2

   (f) $f'(2)$ Ratkaisu. -4

5. Selvitä funktion $f(x) = -x^2+4$ kuvaajalle pisteeseen $(1, 3)$ piirretyn tangenttisuoran yhtälö.

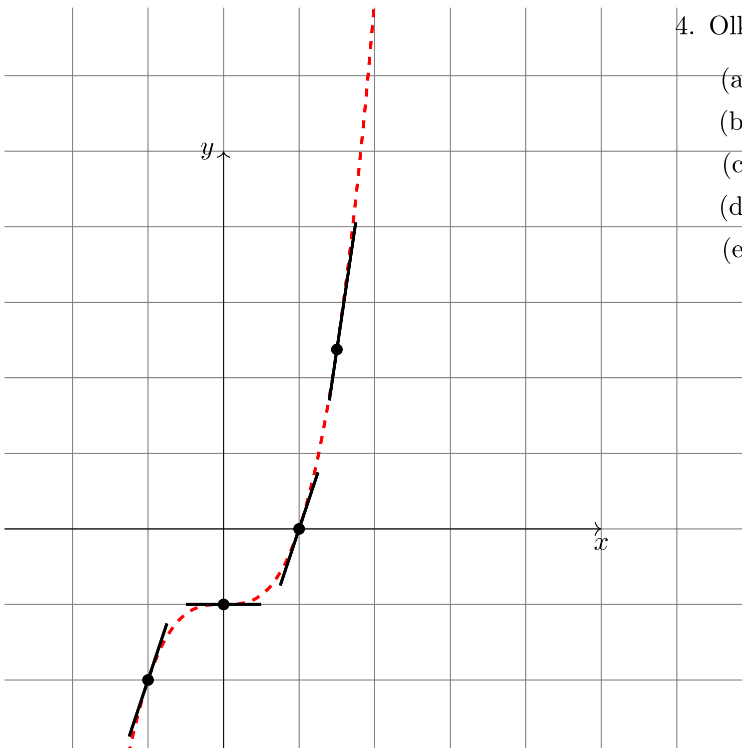
   Ratkaisu. $y - 3 = -2(x - 1)$

6. Selvitä funktion $f(x) = -x^2+4$ kuvaajalle pisteeseen $(0, 4)$ piirretyn tangenttisuoran yhtälö.

   Ratkaisu. $y = 4$

7. Selvitä funktion $f(x) = -x^2+4$ kuvaajalle pisteeseen $(-2, 0)$ piirretyn tangenttisuoran yhtälö.

   Ratkaisu. $y - 0 = 4(x - (-2))$



4. Olkoon $f(x) = x^3 - 1$. Laske
   (a) $f'(x)$ Ratkaisu. $3x^2$
   (b) $f'(-1)$ Ratkaisu. 3
   (c) $f'(0)$ Ratkaisu. 0
   (d) $f'(1)$ Ratkaisu. 3
   (e) $f'(3/2)$ Ratkaisu. $27/4$

2.4 Sovellus: ääriarvokohta (paikallinen minimi tai maksimi)

Jos sileällä funktiolla $f(x)$ on paikallinen minimi tai maksimi jossakin pisteessä x_0, niin $f'(x_0) = 0$. Siis derivaatan nollakohdat ovat mahdollisia minimi- tai maksimikohtia.

Yhteinen nimitys minimille tai maksimille on ääriarvo.

Tässä funktion sileys tarkoittaa sitä, että funktio on jatkuva (kuvaaja ei ole katkonainen) ja että funktio on derivoituva (kuvaajalla ei ole teräviä kärkiä).

Esimerkki. Etsitään funktion $f(x) = x^2 - 4x + 7$ paikalliset ääriarvokohdat. Derivoimalla saadaan $f'(x) = 2x - 4$. Asetetaan derivaatta nollaksi, saadaan $2x - 4 = 0$. Saadaan $x = 2$. Koska funktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, kyseessä on paikallinen minimi. **Vastaus: paikallinen minimi kohdassa $x = 2$.**

8. Olkoon $f(x) = 3x^2 + 5x + 13$. Etsi ääriarvokohdat.
   (a) Laske $f'(x)$. Ratkaisu. $f'(x) = 6x + 5$
   (b) Kirjoita $f'(x) = 0$. Ratkaisu. $6x + 5 = 0$
   (c) Ratkaise saadusta yhtälöstä x. Ratkaisu. $x = -\frac{5}{6}$
   (d) Voitko päätellä, onko kyseessä minimi vai maksimi? Ratkaisu. Minimi kohdassa $x = -\frac{5}{6}$
9. Olkoon $f(x) = -3x^2 + 6x + 2$. Etsi ääriarvokohdat. Ratkaisu. Maksimi kohdassa $x = 1$
10. Olkoon $f(x) = x^2(1 - x)$. Etsi ääriarvokohdat.
    (a) Avaa sulut. Ratkaisu. $f(x) = x^2 - x^3$
    (b) Laske $f'(x)$. Ratkaisu. $f'(x) = 2x - 3x^2$
    (c) Kirjoita $f'(x) = 0$. Ratkaisu. $2x - 3x^2 = 0$
    (d) Ratkaise saadusta yhtälöstä x. Ratkaisu. $x = 0$ tai $x = \frac{2}{3}$
    (e) Voitko päätellä, onko kyseessä paikallinen minimi vai maksimi? Ratkaisu. Paikallinen minimi kohdassa $x = 0$ ja paikallinen maksimi kohdassa $x = \frac{2}{3}$.
11. Olkoon $f(x) = x^3(1 - x)^2$. Etsi ääriarvokohdat. Ratkaisu. Paikallinen maksimi kohdassa $x = \frac{3}{5}$.

2.5 Potenssifunktion integrointi

Integrointi on derivoinnille päinvastainen operaatio.

Derivoitaessa potenssifunktiota kerrotaan potenssilla ja uusi potenssi on yhtä pienempi, esimerkiksi $Dx^5 = 5x^4$.

Toisaalta, integroitaessa potenssifunktiota uusi potenssi on yhtä suurempi ja sillä jaetaan, esimerkiksi $\int x^5 dx = \frac{1}{6}x^6$.

Integrointia voidaan käyttää pinta-alan laskemiseen. Tällöin tarvitaan pinta-alan alkupiste a ja loppupiste b. Vastaus saadaan sijoitusmerkin avulla

$$\Big/_{a}^{b} F(x) = F(b) - F(a).$$

Esimerkiksi

$$\int_2^3 x^7 dx = \Big/_{2}^{3} \frac{1}{8}x^8 = \frac{1}{8}3^8 - \frac{1}{8}2^8.$$

8. Laske integraalit.

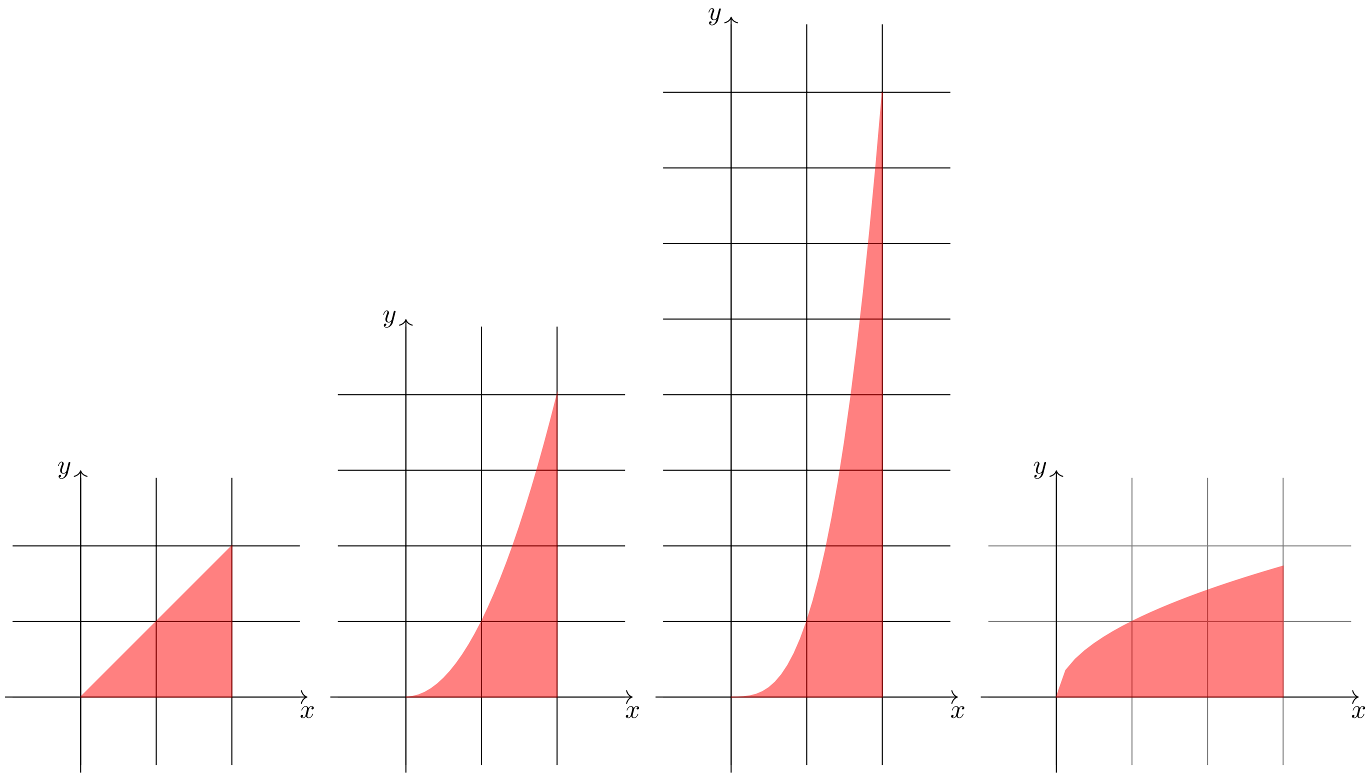
(a) $\int_0^2 x dx$ Ratkaisu. 2

(b) $\int_0^2 x^2 dx$ Ratkaisu. $\frac{8}{3}$

(c) $\int_0^2 x^3 dx$ Ratkaisu. 4

(d) $\int_0^3 \sqrt{x} dx$ Ratkaisu. $2\sqrt{3} \approx 3.464$.

Integraalit kertovat eräiden tasoalueiden pinta-alat. Tasoalueet on piirretty alla oleviin kuviin.



3 Eksponenttifunktio

3.1 Eksponenttifunktion derivointi

Eksponenttifunktiolle voidaan ottaa eri kantalukuja, esimerkiksi 2^x, 3^x, 1.1^x.

Yleisesti eksponenttifunktio on muotoa a^x, missä $a > 0$. Pätee derivointikaava

$$Da^x = a^x \ln(a).$$

Esimerkki. Pätee $D8^x = 8^x \ln(8)$.

Derivoidaan eksponenttifunktioita eri kantaluvuilla. Muista, että $a^0 = 1$ kaikilla $a > 0$.

1. (**Laskettiin tunnilla! Ei tarvitse palauttaa.**)Olkoon $f(x) = 2^x$.
   (a) Laske $f'(x)$. Ratkaisu. $2^x \ln(2)$
   (b) Laske $f'(0)$. Ratkaisu. 0.69
2. Olkoon $g(x) = 3^x$.
   (a) Laske $g'(x)$. Ratkaisu. $3^x \ln(3)$
   (b) Laske $g'(0)$. Ratkaisu. 1.0986
3. Olkoon $h(x) = 1.1^x$.
   (a) Laske $h'(x)$. Ratkaisu. $1.1 \ln(1.1)$
   (b) Laske $h'(0)$. Ratkaisu. 0.095
4. (**Laskettiin tunnilla! Ei tarvitse palauttaa.**) Olkoon $k(x) = 0.5^x$.
   (a) Laske $k'(x)$. Ratkaisu. $0.5^x \ln(0.5)$
   (b) Laske $k'(0)$. Ratkaisu. -0.69
5. Mikä tehtävien 1-4 funktioista kasvaa nopeimmin? Mikä funktioista kasvaa hitaimmin? Onko jokin funktioista jopa vähenevä?
6. Olkoon $m(x) = e^x$.
   (a) Laske $m'(x)$. Ratkaisu. $e^x \ln(e)$
   (b) Laske $m'(0)$. Ratkaisu. 1

Jos eksponenttifunktion a^x kantaluku on $a = e = 2.71\ldots$, niin derivointikaavassa $\ln(a) = \ln(e) = 1$ ja derivointikaava yksinkertaistuu muotoon

$$De^x = e^x.$$

3.2 Yhdistetyn funktion derivointi

Huom. $a^{b^c} = a^{(b^c)}$ ja $(a^b)^c = a^{bc}$.

Usein monimutkaisen funktion voi ajatella koostuvan useista sisäkkäisistä funktioista.

Esimerkki. Funktio e^{x^3} on $f(g(x)$, missä $f(x) = e^x$, $g(x) = x^3$.

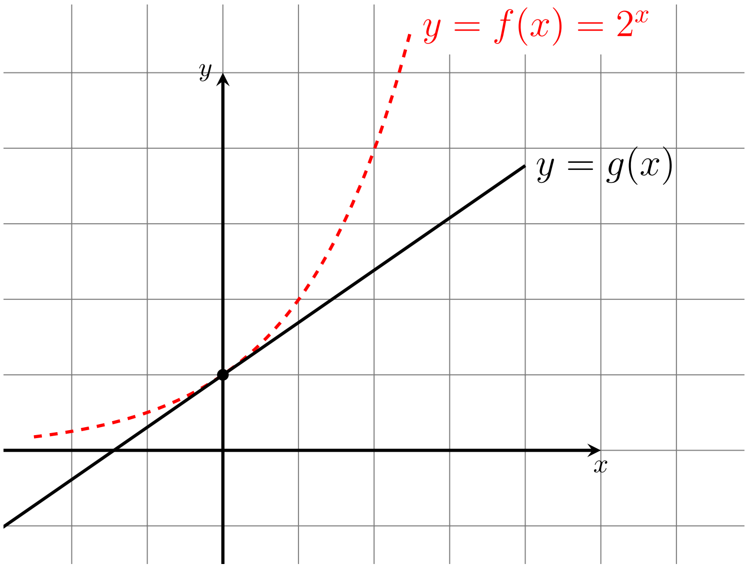
Pätee yhdistetyn funktion derivoimiskaava

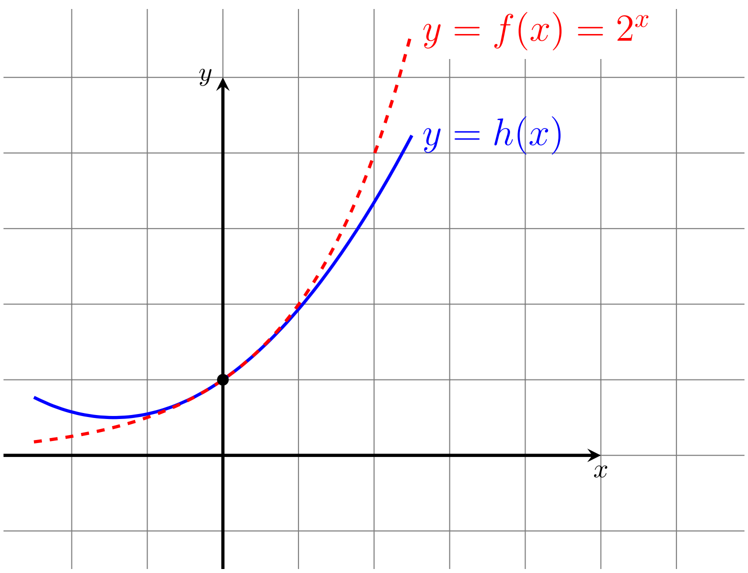
$$Df(g(x)) = f'(g(x))g'(x).$$

Esimerkki. $De^{x^3} = e^{x^3} \cdot Dx^3 = e^{x^3} \cdot 3x^2$.
Lasketaan yhdistettyjen funktioiden derivaattoja. Saadaan samalla kertausta viime viikon asioista.

7. Laske
   (a) De^{x^5} — Ratkaisu. $5x^4e^{x^5}$
   (b) $D2^{x^5}$ — Ratkaisu. $5x^4 2^{x^5} \ln(2)$
   (c) $De^{x^3+x^7}$ — Ratkaisu. $De^{x^3+x^7} \cdot (3x^2 + 7x^6)$
   (d) De^{5x^3+x} — Ratkaisu. $e^{5x^3+x} \cdot (15x^2 + 1)$
   (e) De^{5x+1} — Ratkaisu. $5e^{5x+1}$
   (f) $D2^{3x}$ — Ratkaisu. $2^{3x} \cdot 3 \cdot \ln(2)$
8. Laske
   (a) $De^{\sqrt{x}}$ — Ratkaisu. $e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$
   (b) $De^{(1/x^2)}$ — Ratkaisu. $e^{(1/x^2)} \cdot \frac{-2}{x^3}$
   (c) $D2^{(1/\sqrt{x})}$ — Ratkaisu. $2^{(1/\sqrt{x})} \cdot \frac{-1}{2x\sqrt{x}}$
9. Laske (Lähde: Kari Jyrkkä, Tekoäly on vaikea, vai onko?, video `https://www.youtube.com/watch?v=zgaw65VZZT8&t=295s`
   (a) $D2x^3$ — Ratkaisu. $6x^2$
   (b) $D(2x^3)^5$ — Ratkaisu. $5 \cdot (2x^3)^4 \cdot 6x^2$
   (c) $\frac{\partial}{\partial k}(2x^3 + 2k^2)^5$ — Ratkaisu. $5(2x^3 + 2k^2) \cdot 4k^1$

3.3 Eksponenttifunktion derivointi ja kuvaaja





10. Olkoon $f(x) = 2^x$. Laske
    (a) $f'(x)$ Ratkaisu. $2^x \ln(2)$
    (b) $f'(0)$ Ratkaisu. $\ln(2) \approx 0.7$
    (c) $f'(1)$ Ratkaisu. 1.4
    (d) $f'(2)$ Ratkaisu. 2.8
    (e) $f'(-1)$ Ratkaisu. 0.35
    (f) $f'(-2)$ Ratkaisu. 0.175
11. Selvitä funktion $f(x) = 2^x$ kuvaajalle pisteeseen $(0, 1)$ piirretyn tangenttisuoran
    (a) kulmakerroin Ratkaisu. $\ln(2) \approx 0.7$
    (b) yhtälö. Ratkaisu. $y = 1 + 0.7x$
12. Olkoon
    $f(x) = 2^x$,
    $g(x) = 1 + 0.693x$, ja
    $h(x) = 1 + 0.693x + (0.693x)^2/2$.

    Laske
    (a) $f(0.1)$ Ratkaisu. 1.07177
    (b) $g(0.1)$ Ratkaisu. 1.0693
    (c) $h(0.1)$ Ratkaisu. 1.0717

3.4 Sovellus: käännepiste

Käännepiste tarkoittaa toisen derivaatan nollakohtaa. (Usein vaaditaan joitakin lisäehtoja, mutta sivuutetaan nämä.)

Siis x_0 on funktion $f(x)$ käännepiste, jos $f''(x_0) = 0$.

Esimerkki. Funktiolle $f(x) = x^5 + x^4$ ensimmäinen derivaatta on $f'(x) = 5x^4 + 4x^3$ ja toinen derivaatta on

$$f''(x) = 20x^3 + 12x^2 = 4x^2(5x + 3) = 0,$$

jos $x = 0$ tai $x = -3/5$. Käännepisteet ovat siis $x = 0$ ja $x = -3/5$.

13. Etsi funktion $f(x) = x^3 + x^2$ käännepisteet.
    (a) Laske $f'(x)$.
    (b) Laske $f''(x)$. Ratkaisu. $3x + 2$
    (c) Merkitse $f''(x) = 0$ ja ratkaise x. Ratkaisu. $x = -2/3$

14. Etsi funktion $f(x) = e^{-x^2/2}$ käännepisteet.
    (a) Laske $f'(x)$.
    (b) Laske $f''(x)$. Ratkaisu. $e^{-x^2/2}(x^2 - 1)$
    (c) Merkitse $f''(x) = 0$ ja ratkaise x. Ratkaisu. $x = \pm 1$

3.5 Eksponenttifunktion integrointi

Integrointi on derivoinnille päinvastainen operaatio.

Derivoitaessa eksponenttifunktiota kerrotaan kantaluvun logaritmilla $Da^x = a^x \ln(a)$, esimerkiksi $D2^x = 2^x \ln(2)$. Toisaalta, integroitaessa eksponenttifunktiota jaetaan kantaluvun logaritmilla, esimerkiksi $\int 2^x \; dx = 2^x \frac{1}{\ln(2)}$.

Integrointia voidaan käyttää pinta-alan laskemiseen. Tällöin tarvitaan pinta-alan alkupiste a ja loppupiste b. Vastaus saadaan sijoitusmerkin avulla

$$\Big/_{a}^{b} F(x) = F(b) - F(a).$$

Esimerkiksi

$$\int_0^3 2^x dx = \Big/_{0}^{3} 2^x / \ln(2) = (1/\ln(2)) \Big/_{0}^{3} 2^x = (1/\ln(2))(2^3 - 2^0) = 7/\ln(2).$$

Yhdistetyn funktion integrointi ei aina onnistu. Esimerkiksi integraali

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} \; dx$$

kertoo erään pinta-alan (normaalijakauman tiheysfunktion kertymä välillä $[a, b]$). Ei kuitenkaan ole suljettua kaavaa (kaava ilman sarjoja, integraalia, raja-arvoa jne.), kertoisi tämän luvun.

15. Laske integraalit.

    (a) $\int_0^2 2^x dx$ Ratkaisu. 4.3281

    (b) $\int_0^2 3^2 dx$ Ratkaisu. 7.2819

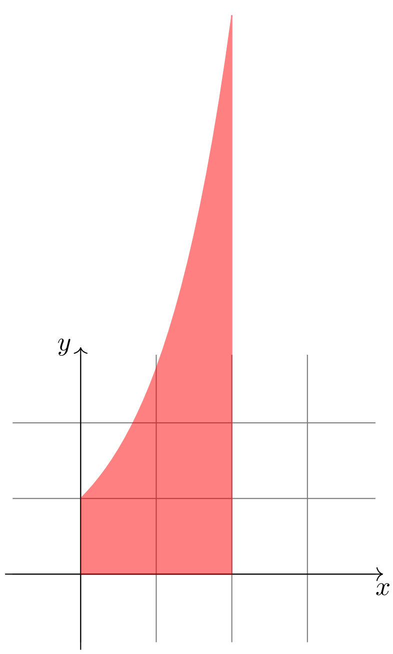
    (c) $\int_0^2 0.5^x dx$ Ratkaisu. 1.082

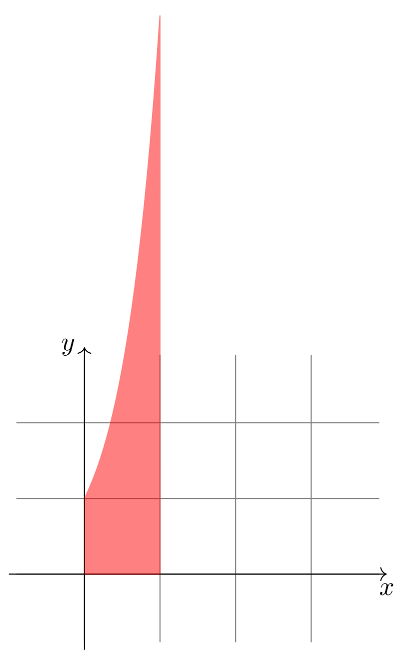
16. Laske sijoitukset. Integraalit kertovat eräiden tasoalueiden pinta-alat. Tasoalueet on piirretty alla oleviin kuviin.

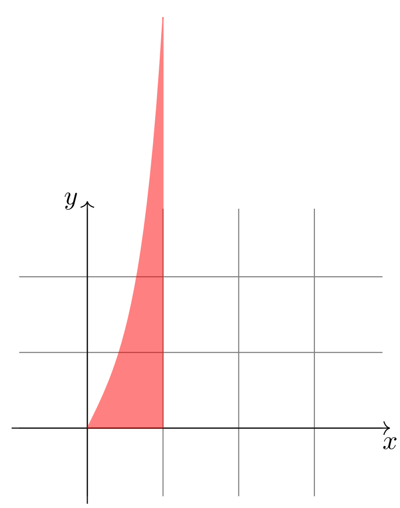
    (a) $\int_0^2 e^x = \Big/_{0}^{2} e^x$ Ratkaisu. 6.3891

    (b) $\int_0^1 e^{2x} dx = \Big/_{0}^{1} \frac{e^{2x}}{2}$ Ratkaisu. 26.8

    (c) $\int_0^1 2x \cdot e^{x^2} = \Big/_{0}^{1} e^{x^2}$ Ratkaisu. 1.7183







4 Logaritmifunktio

Viime viikolla käsiteltiin eksponenttifunktion derivointia ja integrointia kaavoilla

$$Da^x = a^x \ln(a) \quad \text{ja} \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)}.$$

Jos kantalukuna on $a = e$, niin kaavat yksinkertaistuvat.

Jos $x > 0$, niin

$$D\ln(x) = \frac{1}{x} \quad \text{ja} \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln(x) \quad \text{ja} \quad \int \ln(x) dx = x\ln(x) - x.$$

Muiden kantalukujen logaritmit voi muuttaa luonnolliseksi logaritmiksi eli $\log_a(x) = \frac{1}{\ln(a)} \ln(x)$

4.1 Logaritmifunktion derivointi

Jos logaritmin sisällä on jokin funktio, niin derivointi onnistuu kaavalla

$$D\ln(f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Esimerkki.

$$D\ln(x^2+3) = \frac{2x+0}{x^2+3}$$

Jos logaritmin sisällä on jokin potenssi, niin ehkä on helpointa sieventää ennen derivointia kaavalla $\ln(x^n) = n\ln(x)$.

Esimerkki.

$$D\ln(x^7) = D7\ln(x) = \frac{7}{x}$$

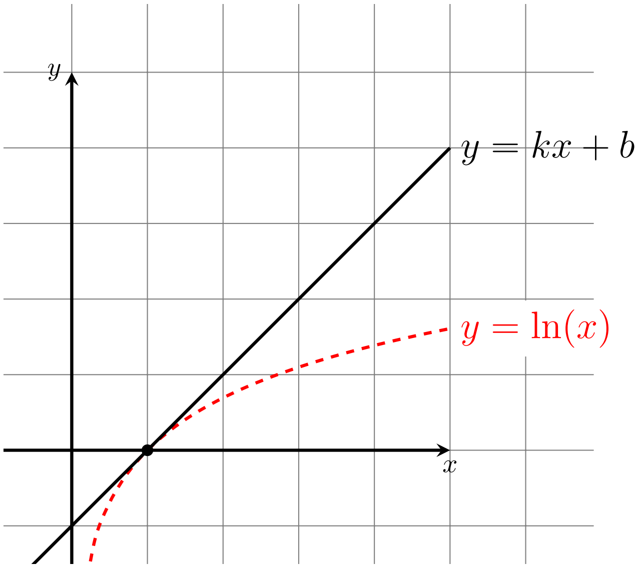
Esimerkki.

$$D\sqrt[3]{(x^7)} = D\ln(x^{\frac{7}{3}}) = \frac{7}{3} D\ln(x) = \frac{7}{3}\ln(x).$$

Derivoidaan logaritmifunktioita.

1. Laske
   (a) $D\ln(x^5)$ Ratkaisu. $\frac{5}{x}$
   (b) $D\log_2(x^5)$ Ratkaisu. $\frac{1}{\ln(2)}\frac{5}{x}$
   (c) $D\ln(x^3+x^7)$ Ratkaisu. $\frac{3x^2+7x^6}{x^3+x^7}$
   (d) $D\ln(5x^3+x)$ Ratkaisu. $\frac{15x^2+1}{5x^3+x}$
   (e) $D\ln(5x+1)$ Ratkaisu. $\frac{5}{5x+1}$
   (f) $D\log_2(3x)$ Ratkaisu. $\frac{1}{\ln(2)}\frac{3}{x}$
2. Laske
   (a) $D\ln(\sqrt{x})$ Ratkaisu. $\frac{1}{2}\frac{1}{x}$
   (b) $D\ln(1/x^2)$ Ratkaisu. $-2\frac{1}{x}$
   (c) $D\log_2(1/\sqrt{x})$ Ratkaisu. $\frac{1}{\ln(2)}\frac{1}{2}\frac{1}{x}$

4.2 Logaritmifunktion derivointi ja kuvaaja



3. Olkoon $f(x) = \ln(x)$. Laske

   (a) $f'(x)$ Ratkaisu. $\frac{1}{x}$

   (b) $f'(1)$ Ratkaisu. 1

   (c) $f'(2)$ Ratkaisu. 0.5

   (d) $f'(3)$ Ratkaisu. 0.33

   (e) $f'(4)$ Ratkaisu. 0.25

   (f) $f'(5)$ Ratkaisu. 0.2

4. Selvitä funktion $f(x) = \ln(x)$ kuvaajalle pisteeseen $(1, 0)$ piirretyn tangenttisuoran

   (a) kulmakerroin Ratkaisu. 1

   (b) yhtälö. Ratkaisu. $y = x - 1$

4.3 Funktion potenssin integrointi

Aiemmin nähtiin

$$Dx^n = nx^{n-1} \quad \text{ja} \quad \int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}, n \neq 1.$$

Jos kyseessä on yhdistetty funktio, niin

$$Df(x)^n = nf(x)^{n-1}f'(x) \quad \text{ja} \quad \int f(x)^n f'(x)dx = \frac{1}{n+1}f(x)^{n+1}, n \neq 1.$$

Yllä olevissa integrointikaavoissa ei voida laittaa $n = -1$, koska silloin jaettaisiin nollalla. Potenssia $n = -1$ vastaa integrointikaava

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln(f(x)).$$

Esimerkki.

$$\int 3x^2(x^3+1)^5 dx = \frac{1}{6}(x^3+1)^6$$

$$\int \frac{3x^2}{(x^3+1)^5}dx = \frac{1}{-4}\frac{1}{(x^3+1)^4}$$

$$\int \frac{3x^2}{x^3+1}dx = \ln(x^3+1)$$

5. Laske integraalit

   (a) $\int 2x(x^2+1)^3 dx$ Ratkaisu. $\frac{1}{4}(x^2+1)^4$

   (b) $\int \dfrac{2x}{(x^2+1)^3}$ Ratkaisu. $\frac{1}{-2}\frac{1}{(x^2+1)^2}$

   (c) $\int \dfrac{2x}{x^2+1}dx$ Ratkaisu. $\ln(x^2+1)$

6. Laske integraalit

   (a) $\int \dfrac{5x^4+1}{x^5+x}dx$

   (b) $\int (5x^4+1)(x^5+x)^7 dx$

   (c) $\int (5x^4+1)\sqrt{x^5+x}dx$

5 Trigonometriset funktiot

5.1 Sinin ja kosinin derivaatta

Sinin derivaatta on kosini eli $D\sin(x) = \cos(x)$.

Kosinin derivaatta on sini $D\cos(x) = -\sin(x)$. (Jos kosahtaa, se on miinus sinulta.)

Esimerkki. $D\sin(3x+2) = \cos(3x+2)D(3x+2) = \cos(3x+2)\cdot(3+0) = 3\cos(3x+2)$.

1. Laske derivaatta.
   (a) $f(x) = \sin(7x)$ — Ratkaisu. $f'(x) = 7\cos(7x)$
   (b) $g(x) = \cos(7x)$ — Ratkaisu. $g'(x) = -7\sin(7x)$
   (c) $h(x) = \sin(2-3x)$ — Ratkaisu. $h'(x) = -3\cos(2-3x)$

Esimerkki. $D\sin(x^3) = \cos(x^3)\cdot 3x^2$.

2. Laske derivaatta.
   (a) $f(x) = \sin(x^7)$ — Ratkaisu. $f'(x) = 7x^6\cos(x^7)$
   (b) $g(x) = \cos(x^7)$ — Ratkaisu. $g'(x) = -7x^6\sin(x^7)$
   (c) $h(x) = \sin(x^{-3})$ — Ratkaisu. $h'(x) = -3x^{-4}\cos(x^{-3})$

Esimerkki.

$$\begin{aligned}
D2e^{5\sin(3x)} &= 2De^{5\sin(3x)} \\
&= 2e^{5\sin(3x)}\cdot D(5\sin(3x)) \\
&= 10e^{5\sin(3x)}D\sin(3x) \\
&= 10e^{5\sin(3x)}\cdot\cos(3x)\cdot 3 \\
&= 30e^{5\sin(3x)}\cos(3x)
\end{aligned}$$

3. Laske derivaatta.
   (a) $f(x) = 2e^{\sin(7x)}$ — Ratkaisu. $f'(x) = 14e^{\sin(7x)}\cos(7x)$
   (b) $g(x) = 3e^{2\cos(2x)}$ — Ratkaisu. $g'(x) = -12e^{2\cos(2x)}\sin(2x)$
   (c) $h(x) = -2e^{-\cos(5x)}$ — Ratkaisu. $h'(x) = -10e^{-\cos(5x)}\sin(5x)$

Huomautus. Merkintä $\sin^3(x)$ tarkoittaa samaa kuin $(\sin(x))^3$. Merkinnän etu on siinä, että tarvitaan vähemmän sulkuja. Merkintää käytetään yleensä vain kokonaisluvuille.

Esimerkki. $D\sin^5(x) = 5\sin^4(x)D\sin(x) = 5\sin^4(x)\cos(x)$

4. Derivoi
   (a) $D\sin^7(x)$ — Ratkaisu. $7\sin^6(x)\cos(x)$
   (b) $D\cos^3(x)$ — Ratkaisu. $-3\cos^2(x)\sin(x)$
   (c) $D\sin^5(2x)$ — Ratkaisu. $10\sin^4(2x)\cos(2x)$
   (d) $D\frac{1}{\sin^2(3x)}$ — Ratkaisu. $-6(\sin(3x))^{-3}\cos(3x)$
   (e) $D\sqrt{\cos(4x)}$ — Ratkaisu. $-2(\cos(4x))^{-1/2}\sin(4x)$

5.2 Tulon ja osamäärän derivaatta

Kahden funktion tulon derivaatan voi laskea kaavalla[2]

$$D(fg) = gDf + fDg.$$

Kahden funktion osamäärän derivaatan voi laskea kaavalla[3]

$$D\frac{f}{g} = \frac{gDf - fDg}{g^2}.$$

Esimerkki. $Dx^3 \sin(5x) = 3x^2 \cdot \sin(5x) + x^3 \cdot 5\cos(5x)$

5. Derivoi
   (a) $Dx^7 \cos(2x)$
   (b) $Dx^3 e^x$
   (c) $Dx^5 \ln(x)$
   (d) $D\sin(x)\ln(x)$
   (e) $De^{2x}\cos(3x)$

Esimerkki.

$$D\frac{x^3}{\sin(5x)} = \frac{3x^2 \cdot \sin(5x) + x^3 \cdot 5\cos(5x)}{\sin^2(5x)}$$

6. Derivoi
   (a) $D\dfrac{x^7}{\cos(2x)}$
   (b) $D\dfrac{x^3}{e^x}$
   (c) $D\dfrac{x^5}{\ln(x)}$
   (d) $D\dfrac{\sin(x)}{\ln(x)}$
   (e) $D\dfrac{e^{2x}}{\cos(3x)}$

Tangenttifunktio ja kotangenttifunktio ovat

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

7. Laske $D\tan(x) = D\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Ratkaisu. $\dfrac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$
8. Laske $D\cot(x) = D\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$. Ratkaisu. $\dfrac{-\cos^2(x) - \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)}$
9. Laske $D\ln(\sin(2x))$. Ratkaisu. $\dfrac{2\cos(2x)}{\sin(2x)}$
10. Laske $D\ln(2\cos(2x))$. Ratkaisu. $\dfrac{-\sin(2x)}{\cos(2x)}$

[2]**Perustelu.** Funktioilla on lineaariset approksimaatiot

$$\begin{aligned} f(x+h) &\approx f(x) + f'(x)h \\ g(x+h) &\approx g(x) + g'(x)h, \quad \text{kun} \quad h \to 0. \end{aligned}$$

Tulon lineaarinen approksimaatio on

$$\begin{aligned} f(x+h)g(x+h) &\approx (f(x) + f'(x)h)(g(x) + g'(x)h) \\ &= f(x)g(x) + [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]h + f'(x)g'(x)h^2 \\ &\approx f(x)g(x) + [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]h, \quad \text{kun} \quad h \to 0. \end{aligned}$$

[3]**Perustelu.** Kaavan voi johtaa laskemalla derivaatan $Df(x)g(x)^{-1}$ tulon derivaatan kaavalla.

5.3 Sovellus: käämi ja kondensaattori

Jos käämin läpi kulkevaa virtaa muutetaan, muutos tapahtuu viiveellä.

- Syy, lyhyesti: käämi vastustaa virran muutoksia.
- Syy, pidemmästi: kun virta muuttuu, sen tuottaman magneettikentän vuo käämin läpi muuttuu, mikä aiheuttaa käämiin induktiojännitteen, joka vaikuttaa varausten liikkeeseen eli virtaan.

Käämille (eli kelalle)

$$u(t) = -L\frac{d}{dt}i(t).$$

Tässä

- t on aika, yksikkö [s]
- $i(t)$ on käämin läpi kulkeva virta hetkellä t, yksikkö [mA]
- L on käämin induktanssi, yksikkö [H] “henry”
- $u(t)$ on käämin tuottama induktiojännite, yksikkö [V]
- miinusmerkki liittyy siihen, että käämi vastustaa virran muutosta
- yksiköille V=H*A

Esimerkki. Vaihtovirtapiirissä on virta $i(t) = 5\sin(50 \cdot 2\pi t)$ mA. (Virran taajuus on 50 Hz “hertzi”.) Virta kulkee käämin[4] (induktanssi $L = 0.0002$ H) läpi. Laske käämin napojen välinen maksimijännite olettaen, että käämin resistanssi on nolla.

Ratkaisu. Virran derivaatta on

$$\frac{d}{dt}i(t) = \frac{d}{dt}5\sin(100\pi t) = 500\pi\cos(100\pi t) \text{ mA/s}.$$

Saadaan

$$u(t) = -L\frac{d}{dt}i(t) = -0.0002 \cdot 500\pi\cos(100\pi t) \text{ H mA/s} = -0.1\cos(100\pi t) \text{ mV}.$$

Kosinin maksimiarvo on 1. Siis $u(t)$:n maksimi on 0.1 mV.

Kondensaattorin latautuessa tai purkautuessa kulkee virta, jonka suuruus on

$$i(t) = C\frac{d}{dt}u(t).$$

Tässä C on kondensaattorin kapasitanssi, yksikkö F “faradi”. Yksiköille A=F*V.

Pari tehtävää.

11. Ison kondensaattorin[5] (kapasitanssi $C = 0.001$ F) napojen välinen jännite on

    $$u(t) = 15e^{-t} \text{ mV}.$$

    Laske kondensaattorin läpi kulkeva virta hetkellä $t = 1$ s. Ratkaisu. $0.015e^{-1} \approx 0.0055$ mA

12. Vaihtovirtapiirissä on virta $i(t) = 5\sin(5000 \cdot 2\pi t)$ mA. Virta kulkee käämin (induktanssi $L = 0.0002$ H) läpi. Laske käämin napojen välinen maksimijännite olettaen, että käämin resistanssi on nolla. Ratkaisu. 10 V

[4] esim. `https://www.spelektroniikka.fi/p23721-kuristin-suurille-virroille-n-200uh-fi.html`

[5] esim. `https://www.radioduo.fi/elektroniikka/elektrolyyttikondensaattori-tht-1000uf-50vdc-200-kpl/p/UKZ1H102MHM/`

5.4 Funktion potenssin integrointi

Aiemmin nähtiin

Derivointi	**Integrointi**
$Dx^n = nx^{n-1}$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq 1,$
$D\ln(x) = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x)$

Vastaavat yhdistetyn funktion kaavat

Derivointi	**Integrointi**
$Df(x)^n = nf(x)^{n-1}f'(x)$	$\int f(x)^n f'(x) dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq 1,$
$D\ln(f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(f(x))$

Esimerkki. Integraali

$$\int \cos(x)(\sin(x))^5 dx = \frac{1}{6}(\sin(x))^6$$

onnistui suoraan. Integraalissa

$$\int \frac{\sin(x)}{(\cos(x))^5} dx = -\int \frac{-\sin(x)}{(\cos(x))^5} dx = -\frac{1}{-4}\frac{1}{(\cos(x))^4}$$

piti saada puuttuva miinus integraalin sisälle. Integraalissa

$$\int \frac{\cos(7x)}{\sin(7x)} dx = \frac{1}{7}\int \frac{7\cos(7x)}{\sin(7x)} dx = \ln(\sin(x))$$

piti saada puuttuva 7 integraalin sisälle.

13. Laske integraalit

    (a) $\int \sin(x)(\cos(x))^3 dx$ Ratkaisu. $-\frac{1}{4}(\cos(x))^4$

    (b) $\int \frac{\cos(x)}{(\sin(x))^3}$ Ratkaisu. $\frac{1}{-2}\frac{1}{(\sin(x))^2}$

    (c) $\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} dx$ Ratkaisu. $\ln(\sin(x))$

14. Laske integraalit

    (a) $\int (\cos(x))^3(\sin(x))^7 dx$ Vihje. Sijoita $(\cos(x))^3 = \cos(x) - \cos(x)(\sin(x))^2$.

    (b) $\int \tan(x) dx$ Vihje. Sijoita $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

    (c) $\int \sin(x)\sqrt{\cos(x)} dx$ Vihje. Muista $\sqrt{a} = a^{1/2}$.

    (d) $\int 2\sin(7x)\sin(3x) dx$ Vihje. Käytä kaavaa $2\sin(a)\sin(b) = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

5.5 Sinin ja kosinin integrointi

Esimerkki. Käyrän $y = \sin(x)$, suoran $y = 0$ (siis x-akseli) ja suorien $x = 0$ ja $x = \pi/4$ rajaama pinta-ala on

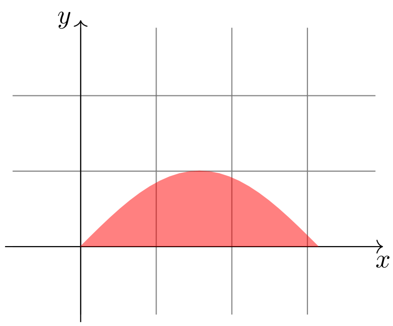
$$\int_0^{\pi/4} \sin(x)dx = \Big/_{0}^{\pi/4} - \cos(x) = -\cos(\pi/4) - (-\cos(0)) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \approx 0.292893.$$

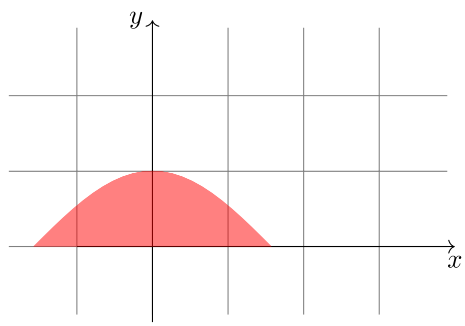
15. Laske määrätyt integraalit. Kuvat vastaavista pinta-aloista löytyvät alta. Punainen pinta-ala lasketaan positiivisena ja sininen pinta-ala negatiivisena.

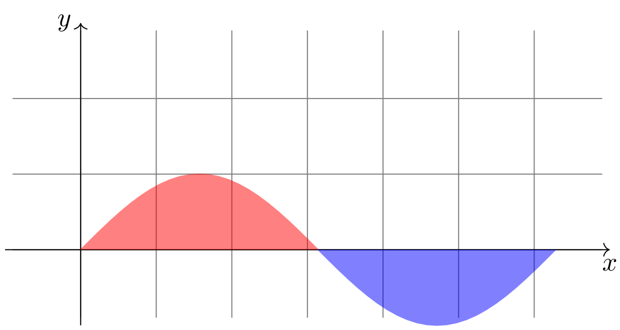
(a)
$$\int_0^{\pi} \sin(x)dx$$

(b)
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx$$

(c)
$$\int_0^{2\pi} \sin(x)dx$$







6 Numeerista derivointia ja integrointia

6.1 Numeerista derivointia

Funktion f derivaatta pisteessä x on määritelmän mukaan

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Jos $h \approx 0$, niin

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

eli murtolauseketta (erotusosamäärä eli etenevä differenssi) voidaan käyttää derivaatan arvioimiseen.

Esimerkki. Arvioidaan funktion $f(x) = \sin(3x)$ derivaattaa pisteessä $x = 1$. Valitaan $h = 0.01$. Nyt $x+h = 1.01$. Sijoittamalla lukuarvot ylläolevaan kaavaan saadaan

$$f'(x) \approx \frac{\sin(3 \cdot 1.01) - \sin(3 \cdot 1)}{0.01} = 0.536.$$

Alla olevissa tehtävissä laske derivaatalle likiarvo kaavalla

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

missä x on tarkastelupiste ja $h = 0.01$.

1. (Viikolta 2) Olkoon $f(x) = x^2 - 1$. Laske numeerisesti
   (a) $f'(x)$, ohita — Ratkaisu. $2x$
   (b) $f'(-2)$ — Ratkaisu. -4
   (c) $f'(-1)$ — Ratkaisu. -2
   (d) $f'(0)$ — Ratkaisu. 0
   (e) $f'(1)$ — Ratkaisu. 2
   (f) $f'(2)$ — Ratkaisu. 4
2. (Viikolta 3) Olkoon $f(x) = 2^x$. Laske numeerisesti
   (a) $f'(x)$, ohita — Ratkaisu. $2^x \ln(2)$
   (b) $f'(0)$ — Ratkaisu. $\ln(2) \approx 0.7$
   (c) $f'(1)$ — Ratkaisu. 1.4
   (d) $f'(2)$ — Ratkaisu. 2.8
   (e) $f'(-1)$ — Ratkaisu. 0.35
   (f) $f'(-2)$ — Ratkaisu. 0.175

6.2 Numeerista integrointia

Integraalia voidaan arvioida vasemman päätepisteen menetelmällä

$$\int_a^b f(x)dx \approx V = \sum_{k=1}^{N} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})$$

oikean päätepisteen menetelmällä

$$\int_a^b f(x)dx \approx O = \sum_{k=1}^{N} f(x_k)(x_k - x_{k-1})$$

puolisuunnikasmenetelmällä

$$\int_a^b f(x)dx \approx P = \sum_{k=1}^{N} \frac{f(x_k) + f(x_{k-1})}{2}(x_k - x_{k-1})$$

ja keskipistemenetelmällä

$$\int_a^b f(x)dx \approx K = \sum_{k=1}^{N} f\left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2}\right)(x_k - x_{k-1}).$$

Tässä pätee $P = (V + O)/2$. Simpsonin menetelmä on $S = (P + 2K)/3$. **On hyvä tietää, että erilaisia menetelmiä on olemassa.** Kuitenkin usein jokin yksinkertainen menetelmä (esim. vasemman päätepisteen menetelmä) on sovelluksissa ihan OK. Tietokoneella askelpituuden $x_k - x_{k-1}$ saa asetettua tarvittavan pieneksi.

Helpointa on laittaa jakopisteet x_k tasavälisesti kaavalla

$$x_k = a + (b - a)\frac{k}{N}.$$

Esimerkki. Tiedetään, että

$$\int_0^\pi \sin(x)dx = 2.$$

Lasketaan tämä numeerisesti kahdella tavalla

(a) WolframAlphalla komennolla

```
sum k=1 to k=100 sin(x)*w where x=a+(b-a)*k/100 and w=(b-a)/100 and a=0 and b=pi
```

linkki `https://www.wolframalpha.com/input?i=sum+k%3D1+to+k%3D100+sin%28x%29*w+where+x%3Da%2B%28b-a%29*k%2F100+and+w%3D%28b-a%29%2F100+and+a%3D0+and+b%3Dpi`

tulos on 1.99984.

(b) Octave-koodilla (asenna Octave tai käytä OctaveOnlinea `https://octave-online.net/`)

```
format long
a=0;
b=pi;
N=100;
dx=(b-a)/N;
s=0;
for k=1:100
x=a+(b-a)*k/N;
s=s+sin(x)*dx;
end
s
```

lopputulos on $s = 1.999835503887444$, joka antaa pyöristettynä $s = 1.99984$.

Alla olevissa tehtävissä käytä jompaa kumpaa menetelmää. Integraalit ovat alkukurssilta tuttuja.

3. (Viikolta 2) Laske integraalit.

(a) $\int_0^2 x dx$ Ratkaisu. 2

(b) $\int_0^2 x^2 dx$ Ratkaisu. $\frac{8}{3}$

(c) $\int_0^2 x^3 dx$ Ratkaisu. 4

(d) $\int_0^3 \sqrt{x} dx$ Ratkaisu. $2\sqrt{3} \approx 3.464$.

4. (Viikolta 3) Laske integraalit.

(a) $\int_0^2 2^x dx$ Ratkaisu. 4.3281

(b) $\int_0^2 3^x dx$ Ratkaisu. 7.2819

(c) $\int_0^2 0.5^x dx$ Ratkaisu. 1.082

5. (Viikolta 5) Laske integraalit.

(a) $\int_0^{\pi} \sin(x) dx$ Ratkaisu. 2

(b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx$ Ratkaisu. 0

(c) $\int_0^{2\pi} \sin(x) dx$ Ratkaisu. 0

6.3 Taylorin sarja

Derivoinnin sovelluksena voidaan etsiä polynomi, joka on lähellä annettua funktiota.

Taylorin sarja on kaava

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Merkintä $f^{(n)}$ tarkoittaa funktiota f derivoituna n kertaa. Merkintä $n!$ tarkoittaa luvun n kertomaa, joka on $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. Pätee $0! = 1$ ja $1! = 1$.

Usein asetetaan $a = 0$ (ns. Maclaurin sarja). Saadaan helpompi kaava

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Sarjassa on äärettömän monta termiä, esimerkiksi

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots.$$

Katkaisemalla sarja jostakin kohtaa saadaan funktiota arvioiva Taylorin polynomi, esimerkiksi

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}, \quad \text{kun} \quad x \approx 0.$$

Taylorin polynomien avulla voidaan näppärästi määritellä funktioita ohjelmistoihin ja laskea likiarvoja.

Esimerkki. Arvioi integraalia

$$\int_0^1 e^x dx = \Big/ 01 e^x = e^1 - e^0 \approx 1.71828.$$

korvaamalla eksponenttifunktio Taylorin polynomilla

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

Ratkaisu. Saadaan

$$\int_0^1 1 + x + \frac{x^2}{2} dx = \Big/_0^1 x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{6 \cdot 4} = 1 + 1^2/2 + 1^3/6 + 1^4/24 = 1.708333$$

Virhe on noin 0.01.

Esimerkki. Arvioi integraalia

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx 1.46265.$$

korvaamalla eksponenttifunktio Taylorin polynomilla

$$e^t \approx 1 + t + \frac{t^2}{2}.$$

Ratkaisu. Sijoitetaan $t = x^2$ lausekkeeseen

$$e^t \approx 1 + t + \frac{t^2}{2},$$

saadaan

$$e^{x^2} \approx 1 + x^2 + \frac{x^4}{2}.$$

Siis

$$\int_0^1 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} = \Big/_0^1 x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} = 1 + 1/3 + 1/10 \approx 1.4333.$$

Virhe on noin 0.03.

Taylorin sarjoja löytyy esim. sivulta `https://fi.wikipedia.org/wiki/Taylorin_sarja`.

6. (Vapaaehtoinen.) Arvioi integraaleja käyttämällä sopivaa Taylorin sarjaa.

(a) $\int_0^1 \sin(x^2)dx = 0.310268\ldots$ Ratkaisu. Esimerkiksi

$$\int_0^1 x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{120} dx \approx 0.31028.$$

(b) $\int_0^1 \cos(x^2)dx = 0.9045\ldots$ Ratkaisu. Esimerkiksi

$$\int_0^1 1 - \frac{x^4}{2} dx = 0.9$$

(c) $\int_0^1 \arctan(x^2)dx = 0.2979\ldots$ Ratkaisu. Esimerkiksi

$$\int_0^1 x^2 - \frac{x^6}{3} dx \approx 0.2857.$$