Tampereen yliopisto

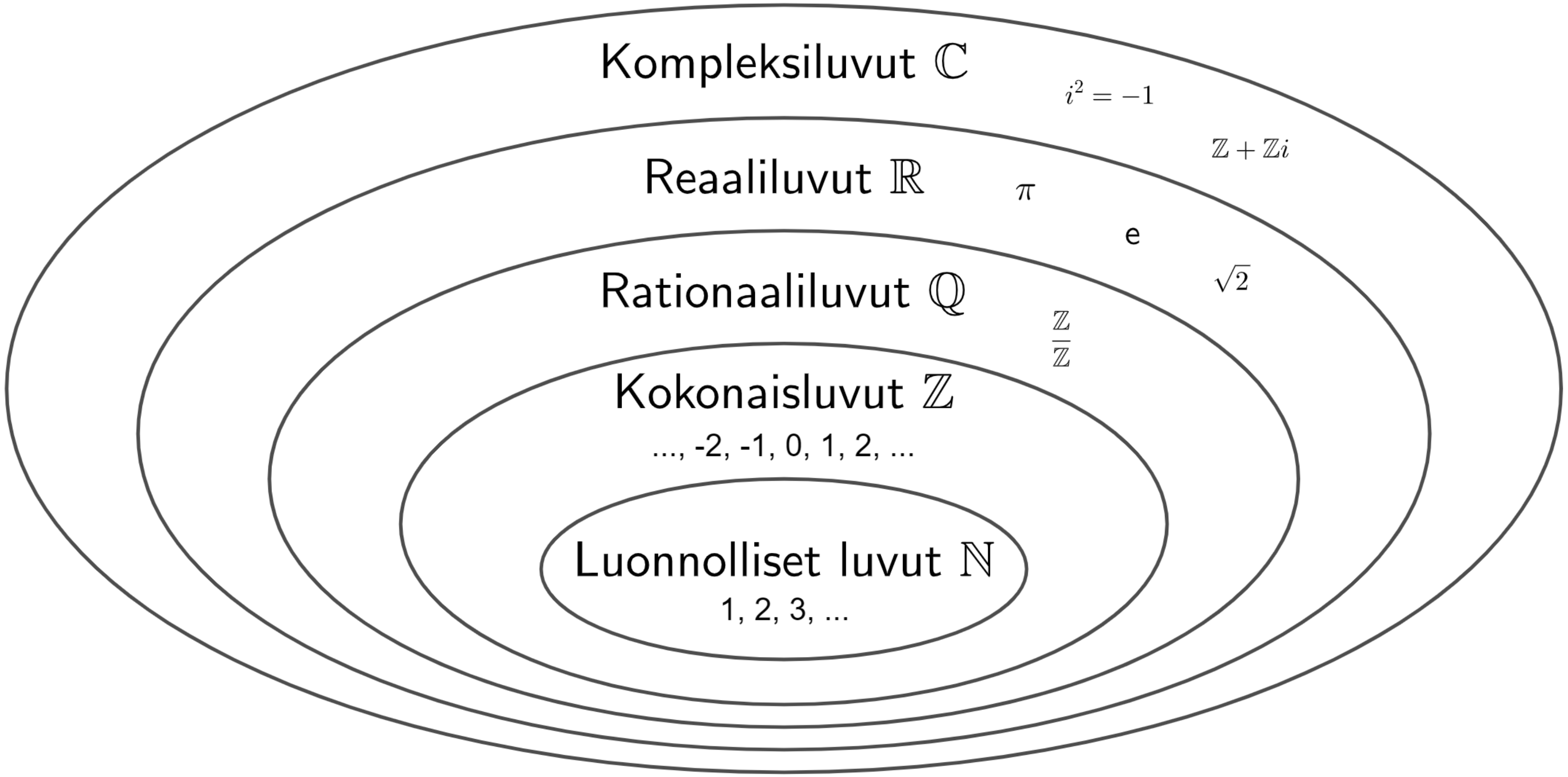
Kompleksiluvut OSA 1

Kompleksilukujen ominaisuudet ja laskutoimitukset

Sisältö

- Lukualueet
- Kompleksiluvut ja tulkinta kompleksitasossa
- Kompleksilukujen laskutoimitukset
- Liittoluku ja itseisarvo

Lukualueet


Kompleksiluvut $\mathbb{C}$
$i^2 = -1$
$\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$
Reaaliluvut $\mathbb{R}$
π
e
$\sqrt{2}$
Rationaaliluvut $\mathbb{Q}$
$\frac{\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}}$
Kokonaisluvut $\mathbb{Z}$
..., -2, -1, 0, 1, 2, ...
Luonnolliset luvut $\mathbb{N}$
1, 2, 3, ...

Kompleksiluvut

Määritelmä

Kompleksiluvut $\mathbb{C}$ ovat muotoa $z = a + bi$, missä a ja b ovat reaalilukuja $\mathbb{R}$ ja i on imaginääriyksikkö.

$$z = a + bi$$

Reaaliosa
$Re(z) = a$

Imaginääriosa
$Im(z) = b$

Kompleksiluku $z = a + bi$ on

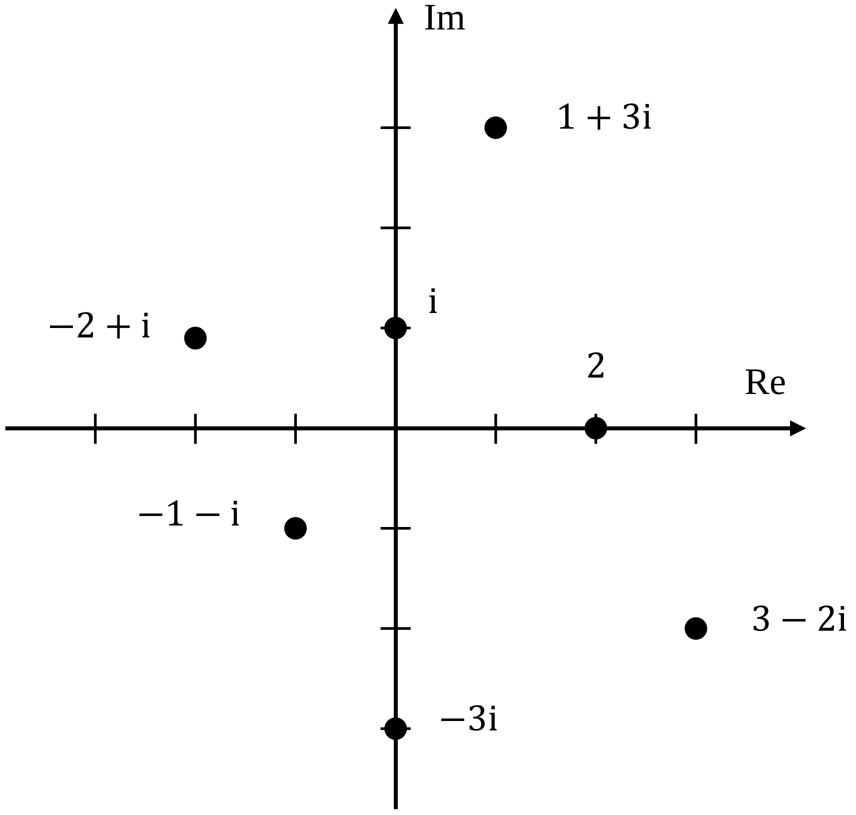
- **Reaalinen**,
  jos $b = 0$
- **Imaginäärinen**,
  jos $b \neq 0$
- **Puhtaasti imaginäärinen**,
  jos $a = 0$ ja $b \neq 0$

Kompleksiluvut kompleksitasossa

- Kompleksilukuja voidaan havainnollistaa pisteinä tai vektoreina **kompleksitasossa**
  - Reaaliakseli ja imaginääriakseli

- Kompleksiluvut ovat samoja, jos ja vain jos niiden reaali- ja imaginääriosat ovat samat

$$z = w \Leftrightarrow Re(z) = Re(w)\ ja\ Im(z) = Im(w)$$



Tampereen yliopisto

Kompleksilukujen laskutoimitukset

Määritelmä

Kompleksilukujen *summa* määritellään kaavalla

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

Määritelmä

Kompleksilukujen *tulo* määritellään kaavalla

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

Esimerkki tulon määritelmästä

$(1-2i)(-3-i)$

$=(-3-2)+(-1+6)i$

$=-5+5i$

Lause

$i^2=i\cdot i=-1$

Laske
$(0+1i)(0+1i)$
tulon määritelmällä

Esimerkki tulosta kahden binomin tulon avulla

$(1-2i)(-3-i)$

$=-3-i+6i+2i^2$

$=-3+5i-2$

$=-5+5i$

Kompleksilukujen laskutoimitukset

Määritelmä

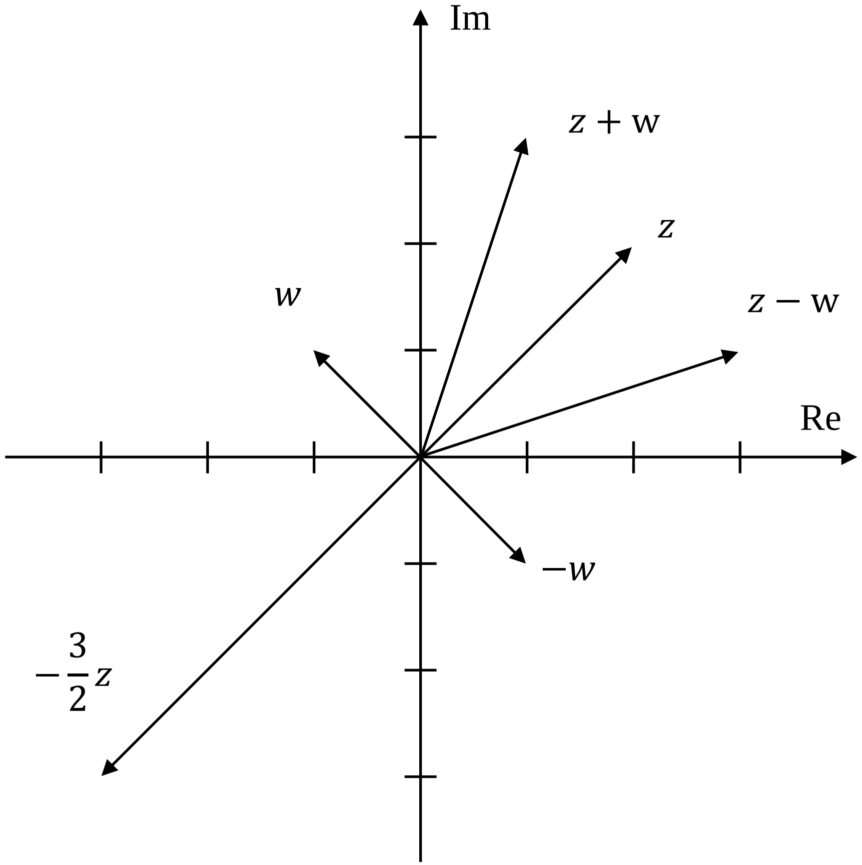
Kompleksiluvun $z = a + bi$ *vastaluku* määritellään kaavalla

$$-z = -a - bi$$

Määritelmä

Kompleksilukujen *erotus* määritellään kaavalla

$$z - w = z + (-w) = (a - c) + (b - d)i$$



Kompleksilukujen laskutoimitukset

Lause

Kun x, y ja z ovat kompleksilukuja, niin

1. $x + y = y + x$ ja $xy = yx$ (vaihdantalait)
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$ ja $x(yz) = (xy)z$ (liitäntälait)
3. $x(y + z) = xy + xz$ (osittelulaki)

Kompleksilukujen laskutoimitukset

Lause

Jokaisella kompleksiluvulla $z \neq 0$ on olemassa yksikäsitteinen käänteisluku z^{-1}, joka toteuttaa ehdon $zz^{-1} = 1$

Määritelmä

Kompleksilukujen z ja w *osamäärä* $\frac{z}{w}$, missä $w \neq 0$,

määritellään $\frac{z}{w} = zw^{-1}$

Lemma

Jos $z \neq 0$ ja $w \neq 0$ ovat kompleksilukuja, niin

$(zw)^{-1} = z^{-1}w^{-1}$ eli $\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{w} = \frac{1}{zw}$

Kompleksilukujen laskutoimitukset

Esimerkki: Etsi luvun $4-3i$ käänteisluku muodossa $a+bi$

Haetaan siis lukua $(4-3i)^{-1}=\frac{1}{4-3i}$

Lavennetaan luvulla $4+3i$

$$(4-3i)^{-1}=\frac{1}{4-3i}=\frac{4+3i}{(4+3i)(4-3i)}=\frac{4+3i}{16-9i^2}=\frac{4+3i}{16+9}=\frac{4+3i}{25}=\frac{4}{25}+\frac{3}{25}i$$

Esimerkki: Ilmoita osamäärä $\frac{2-3i}{1+i}$ muodossa $a+bi$

Lavennetaan luvulla $1-i$

$$\frac{2-3i}{1+i}=\frac{(1-i)(2-3i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2-3i-2i+3i^2}{1-i^2}=\frac{2-5i-3}{1-(-1)}=\frac{-1-5i}{2}=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$$

Kompleksilukujen laskutoimitukset

Esimerkki: Ratkaise z muodossa $a+bi$ yhtälöstä $(2-2i)z+1-i=3+2i$

Ratkaisu on olemassa, sillä luvulla $2-2i$ on käänteisluku

Siirretään vakiot yhtälön oikealle puolelle
$(2-2i)z+1-i=3+2i$
$\Longrightarrow (2-2i)z=2+3i$

Jaetaan yhtälö puolittain luvulla $2-2i$ ja lavennetaan luvulla $2+2i$

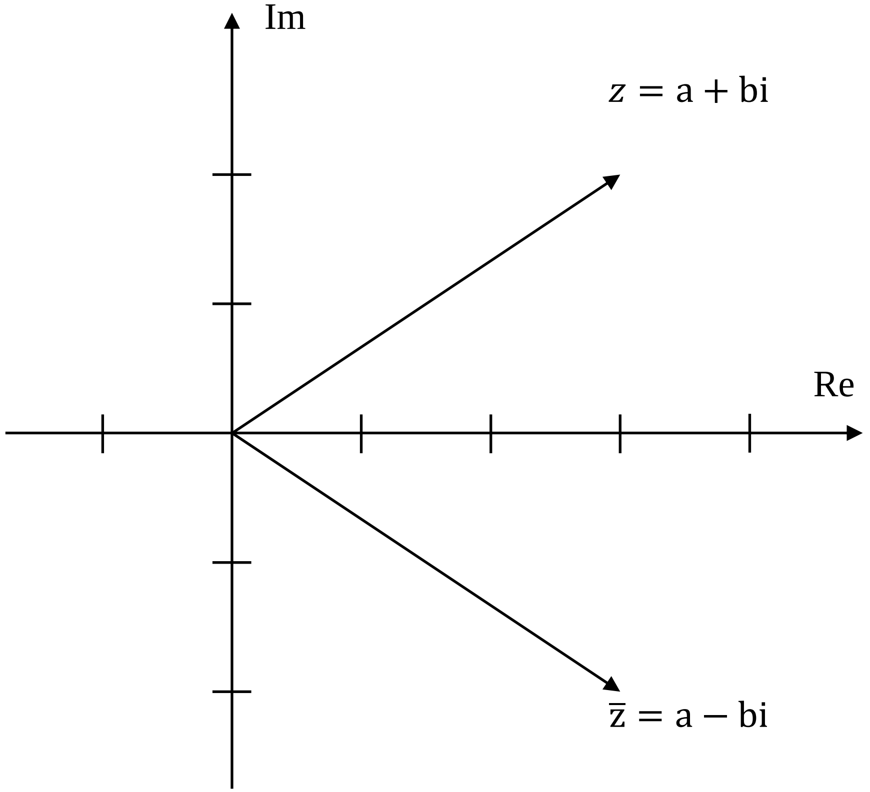
$$z=\frac{(2+2i)(2+3i)}{(2+2i)(2-2i)}=\frac{4+6i+4i+6i^2}{4-4i^2}=\frac{4+10i-6}{4+4}=\frac{-2+10i}{8}=-\frac{1}{4}+\frac{5}{4}i$$

Tampereen yliopisto

Liittoluku

Määritelmä

Kompleksiluvun $z = a + bi$ *liittoluku* eli *kompleksikonjugaatti* $\bar{z}$ on $\bar{z} = a - bi$



- Geometrisesti liittoluku on peilikuva reaaliakselin suhteen

Liittoluku

Lause

Jos z ja w ovat kompleksilukuja, niin

1. $\bar{\bar{z}} = z$
2. $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$
3. $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
4. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}} \quad (\bar{w} \neq 0)$
5. z on reaalinen jos ja vain jos $z = \bar{z}$

Todistetaan esimerkkinä kohta 2:

Merkitään $z = a + bi$ ja $w = c + di$.
Tällöin

$$\overline{z+w} = \overline{(a+bi)+(c+di)}$$

$$= \overline{(a+c)+(b+d)i}$$

$$= (a+c)-(b+d)i$$

$$\bar{z} + \bar{w} = (a-bi)+(c-di)$$

$$= (a+c)+(-b+(-d))i$$

$$= (a+b)-(b+d)i$$

Liittoluku

<u>Esimerkki:</u> Ratkaise yhtälö $2z - \bar{z} = 3 + i\bar{z}$

Merkitään $z = x + yi$
$2(x + yi) - (x - yi) = 3 + i(x - yi)$
$\Longrightarrow 2x + 2yi - x + yi = 3 + xi - yi^2$
$\Longrightarrow x + 3yi = 3 + xi + y$
$\Longrightarrow x + 3yi = 3 + y + xi$

Reaali- ja imaginääriosien on oltava yhtä suuret

$$\begin{cases} x = 3 + y \\ 3y = x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

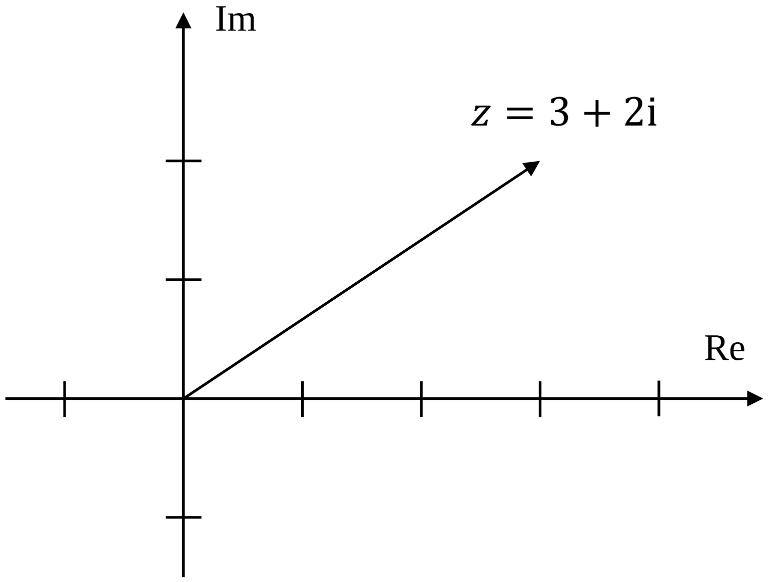
Vastaus: $z = \frac{9}{2} + \frac{3}{2}i$

Itseisarvo

Määritelmä

Kompleksiluvun $z = a + bi$ *itseisarvo* eli *moduli* $|z|$ on $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

- Kompleksiluvut voidaan tulkita kompleksitasossa tason vektoreina, joten itseisarvo vastaa luvun paikkavektorin **pituutta** eli luvun **etäisyyttä** origosta



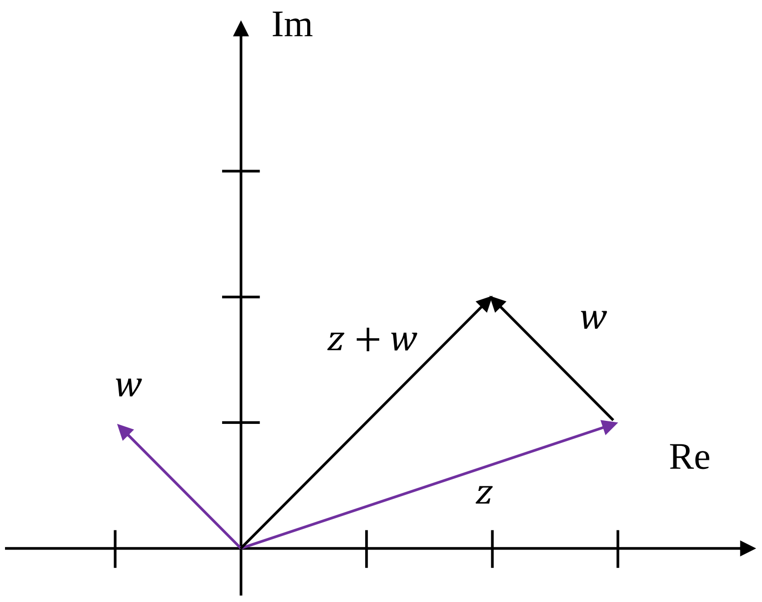
$$|z| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

Itseisarvo

Lause

Jos z ja w ovat kompleksilukuja, niin

1. $|z|^2 = z\bar{z}$
2. $|z| = 0$ jos ja vain jos $z = 0$
3. $|z| = |\bar{z}|$
4. $|zw| = |z||w|$
5. $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \quad (w \neq 0)$
6. $|z + w| \leq |z| + |w|$ (kolmioepäyhtälö)



$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

Itseisarvo

Esimerkki: Ratkaise yhtälö $\left|\frac{z+i}{z+1-2i}\right| = 1$

$z \neq -1 + 2i$, jotta yhtälö on määritelty

Itseisarvot voidaan ottaa erikseen osoittajasta ja nimittäjästä

$$\left|\frac{z+i}{z+1-2i}\right| = 1 \Longrightarrow \frac{|z+i|}{|z+1-2i|} = 1 \Longrightarrow |z+i| = |z+1-2i|$$

Merkitään $z = x + yi$

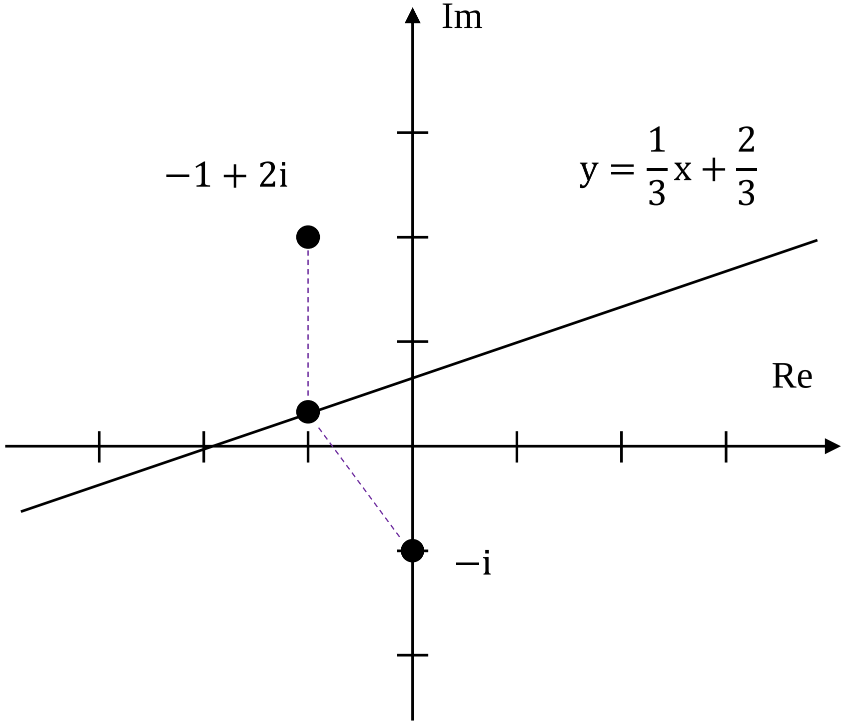
$$|x+yi+i| = |x+yi+1-2i| \Longrightarrow |x+(y+1)i| = |(x+1)+(y-2)i|$$

Itseisarvon määritelmästä

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2} \Longrightarrow x^2+(y-1)^2 = (x+1)^2+(y-2)^2$$

$$\Longrightarrow x^2+y^2-2y+1 = x^2+2x+1+y^2-4y+4$$

$$\Longrightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

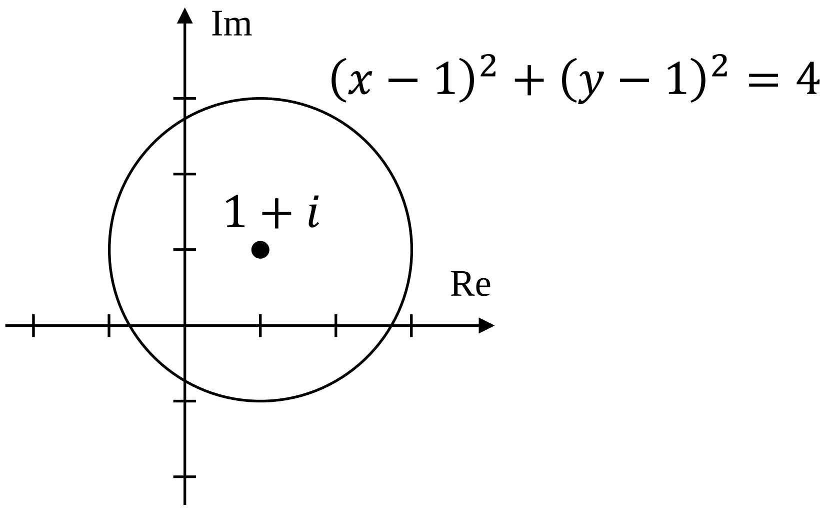


Itseisarvo

<u>Esimerkki:</u> Ratkaise yhtälö $|z-(1+i)|=2$

Merkitään $z=x+yi$
$|x+yi-(1+i)|=2$
$\Longrightarrow |(x-1)+(y-1)i|=2$

Itseisarvon määritelmästä
$\Longrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=2$
$\Longrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=2^2$



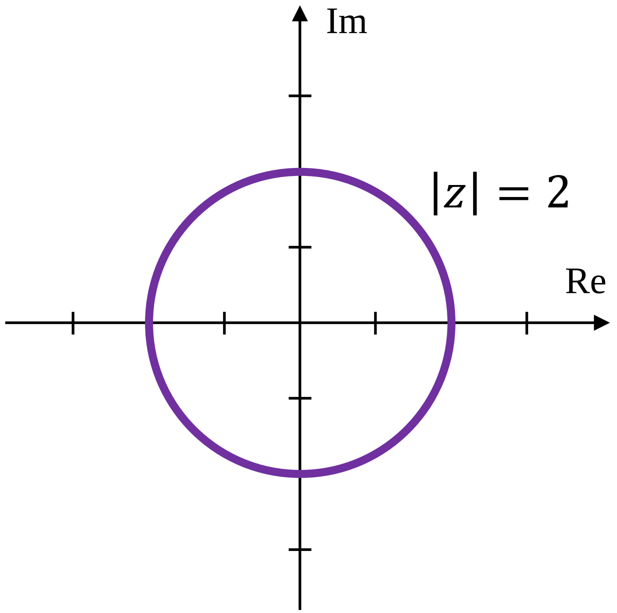
Ratkaisujoukko on siis ympyrä, jonka keskipiste on $z=1+i$ ja säde on 2.

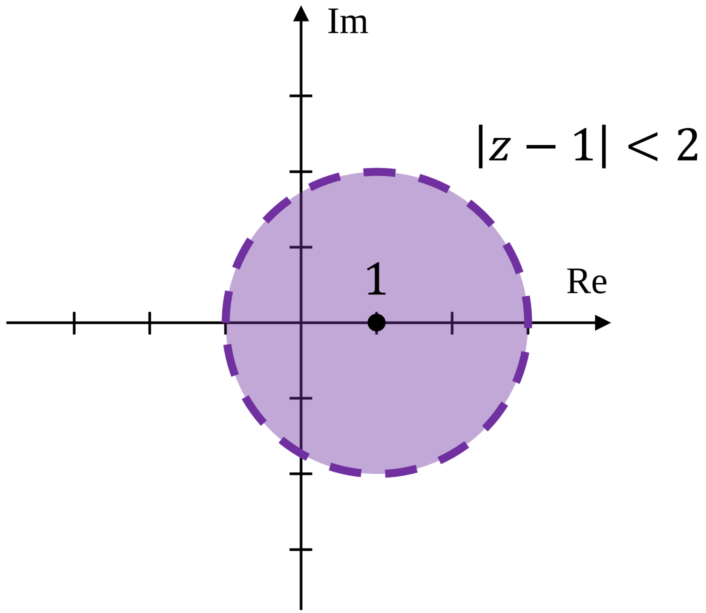
Itseisarvo

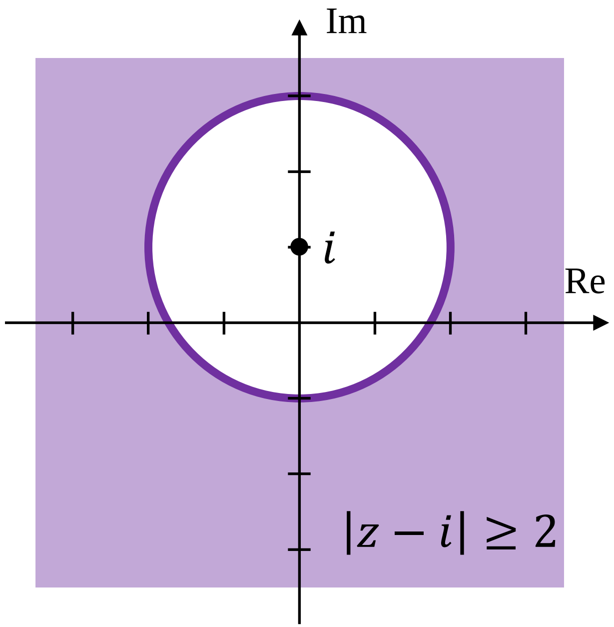
Itseisarvoyhtälön ratkaisu on esimerkiksi suoran tai ympyrän pisteiden joukko. **Itseisarvoepäyhtälön** tapauksessa ratkaisujoukko on esimerkiksi suoran tai ympyrän rajaama alue.

Jos z ja w ovat kompleksilukuja, niin geometrisesti $|z-w|$ on kompleksiluvun z etäisyys kompleksiluvusta w.

- Tällöin $|z-w|=r$ on niiden pisteiden joukko, joiden etäisyys pisteestä w on r (ympyrä, jonka keskipiste on w ja säde r)
  - Ympyrän sisäpuoli $|z-w|<r$ ja ulkopuoli $|z-w|>r$
- Tällöin $|z|=r$ on niiden pisteiden joukko, joiden etäisyys origosta on r (origokeskinen ympyrä, jonka säde on r)
  - Ympyrän sisäpuoli $|z|<r$ ja ulkopuoli $|z|>r$







Sisältö

- Lukualueet
- Kompleksiluvut kompleksitasossa
- Kompleksilukujen laskutoimitukset
- Liittoluku ja itseisarvo

Kiitos!