Tampereen yliopisto

Kompleksiluvut OSA 3

Kompleksiluvun juuret ja kompleksinen polynomi

Sisältö

- Kompleksiluvun juuret

- Kompleksinen polynomi
  - Algebran peruslause

Kompleksiluvun juuret

Määritelmä

Olkoon n luonnollinen luku. Kompleksiluvun $z \neq 0$ n: *s juuri* on kompleksiluku, joka toteuttaa yhtälön $w^n = z$.

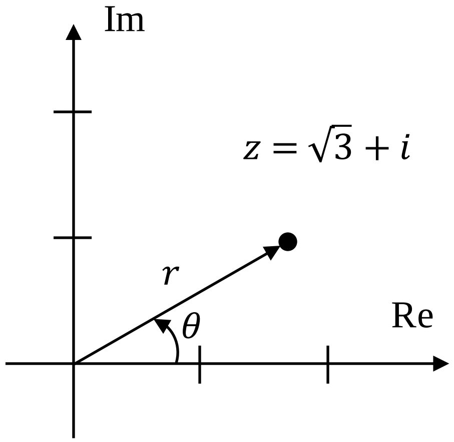
Huom! Kompleksiluvun z n. juurta voidaan merkitä $z^{\frac{1}{n}}$ ja $\sqrt[n]{z}$.

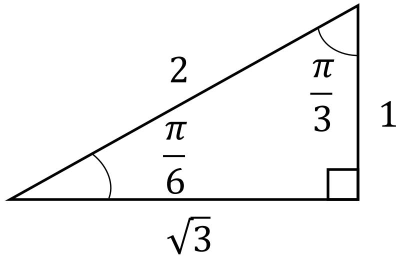
Lause

Kompleksiluvulla $z = re^{i\theta} \neq 0$ on täsmälleen n erisuurta n. juurta, jotka sijaitsevat $\sqrt[n]{r}$-säteisellä origokeskisellä ympyrällä tasaisesti kulman $\frac{2\pi}{n}$ välein.

Käytännössä juuret voidaan laskea kaavasta $w_k = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2\pi k}{n}}$, missä $k = 0,\ 1,\ 2, \dots,\ n-1$.

Kompleksiluvun juuret





<u>Esimerkki:</u> Etsi luvun $\sqrt{3} + i$ neljännet juuret.

Muokataan kompleksiluku ensin eksponenttimuotoon

$$r = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

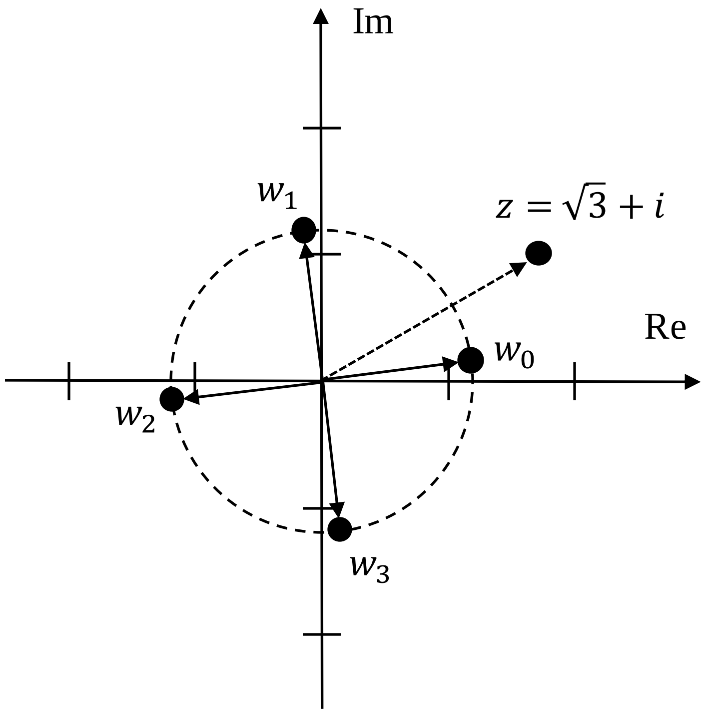
$$\theta = \arg z = \frac{\pi}{6}$$

Näin ollen $z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Juuret $w_k = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\frac{\pi}{6}+2\pi k}{4}} = \sqrt[4]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{2}\right)}$, kun $k = 0, 1, 2, 3.$

$$w_0 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{24}} \qquad w_2 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{25\pi}{24}}$$

$$w_1 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{13\pi}{24}} \qquad w_3 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{37\pi}{24}}$$



Kompleksinen polynomi

Määritelmä

Astetta n oleva *kompleksikertoiminen polynomi* p muuttujan x avulla ilmaistuna on $p = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, missä kertoimet $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ovat kompleksisia vakioita ja $a_n \neq 0$.

Huom!
Polynomin **arvoa** pisteessä z merkitään $p(z)$.
Muuttujan x polynomia voidaan merkitä $p = p(x)$.

Lause: Algebran peruslause

Jokaisella vähintään ensimmäistä astetta olevalla polynomilla on ainakin yksi nollakohta kompleksitasossa.

Kompleksinen polynomi

Määritelmä

Olkoon p polynomi ja k luonnollinen luku. Jos $p = (x - z)^k q$, missä $q \neq 0$ on polynomi, niin kompleksiluku z on polynomin p *k-kertainen nollakohta.*

Lause: Algebran peruslauseen seuraus

Polynomilla $p = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, jonka aste $\deg p = n$, on monikerrat huomioiden täsmälleen n kompleksista nollakohtaa. Jos nollakohdat ovat $z_1, z_2, \ldots, z_n$, niin polynomi p voidaan esittää muodossa $p = a_n(x - z_1)(x - z_2) \ldots (x - z_n)$.

Kompleksinen polynomi

Lause

Toisen asteen polynomiyhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ juuret ovat

- Jos diskriminantti $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, niin $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- Jos diskriminantti $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, niin $x = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$

Esimerkki: Ratkaise yhtälö $2x + x + 1 = 0$.

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{4}$$

Hyödynnetään ominaisuutta
$i^2 = -1 \Longrightarrow \pm i = \sqrt{-1}$

$$= \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{4}$$

$$= -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{7}}{4} i$$

Kompleksinen polynomi

Polynomin juurtenhakualgoritmi

1. Etsitään yksi juuri arvaamalla ja/tai kokeilemalla
2. Jaetaan polynomi juurta vastaavalla binomilla
3. Tuloksena matalampiasteinen polynomi, jolle prosessi voidaan toistaa
4. Jatketaan, kunnes saadaan toisen asteen polynomi, jonka juuret voidaan hakea ratkaisukaavalla

Käsin laskettaessa ei erityisen käyttökelpoinen, mutta tietokoneella voidaan arvauksen sijaan arvioida seuraavaa juurta numeerisesti.

Kompleksinen polynomi

Esimerkki: Hae juuret polynomille $p = 2x^3 - x^2 - 1$ ja jaa se tekijöihin.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 + x + 1 \\
\hline
x - 1 & 2x^3 - x^2 - 1 \\
 & -\ (2x^3 - 2x^2) \\
\hline
 & x^2 \\
 & -\ (x^2 - x) \\
\hline
 & x - 1 \\
 & -\ (x - 1) \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

Huomataan, että $p(1) = 2 \cdot 1^3 - 1^2 - 1 = 0$
eli $x = 1$ on eräs nollakohdista.

Binomi $x - 1$ jakaa siis polynomin p ja jakolaskun avulla polynomi saadaan muotoon $p = (x-1)(2x^2 + x + 1)$.

Toisen asteen tekijän nollakohdiksi ratkaisukaavalla saadaan $x = -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{7}}{4} i$.

Polynomin juuret ovat siis $x = 1$ ja $x = -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{7}}{4} i$.

Näin ollen se saadaan muotoon

$$p = 2(x-1)\left(x - \left(-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4} i\right)\right)\left(x - \left(-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4} i\right)\right)$$

$$= 2(x-1)\left(x + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4} i\right)\left(x + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4} i\right)$$

Kompleksinen polynomi

Lause

Jos kompleksiluku z on **reaalikertoimisen** polynomin p nollakohta, niin myös $\bar{z}$ on kyseisen polynomin nollakohta.

Lause

Reaalikertoiminen polynomi $p = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ voidaan jakaa ensimmäisen ja toisen asteen reaalikertoimisiin tekijöihin, jolloin

$$p = a_n (x - x_1)^{m_1} \dots (x - x_k)^{m_k} (x^2 + b_1 x + c_1)^{n_1} \dots (x^2 + b_l x + c_l)^{n_l},$$

missä $x_1, \dots x_k$ ovat polynomin erilliset reaaliset nollakohdat, $m_1, \dots, m_k$ niiden kertaluvut. Polynomeilla $x^2 + b_i x + c_i,\ \ i = 1, \dots, l$ ei ole reaalisia nollakohtia.

Sisältö

- Kompleksiluvun juuret

- Kompleksinen polynomi
  - Algebran peruslause

Tampereen yliopisto

Kiitos!