Kompleksiluvut OSA 2

Napakoordinaattimuoto ja eksponenttimuoto

Sisältö

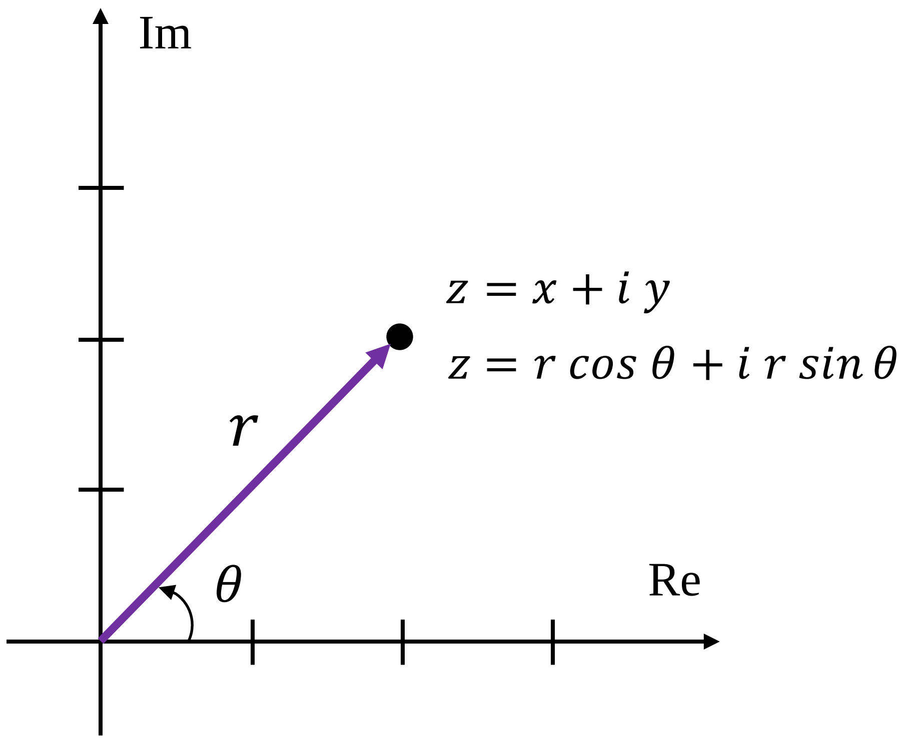
- Vaihtoehtoiset esitystavat kompleksiluvuille
  - Napakoordinaattimuoto
    - De Moivren kaava
  - Eksponenttimuoto
    - Eulerin kaava

Napakoordinaattimuoto

- **Napakoordinaatisto** on koordinaatisto, jossa pisteet ovat määritelty kulman θ ja säteen r funktiona
- Kompleksiluku $z = x + yi$ voidaan esittää napakoordinaattien avulla muodossa

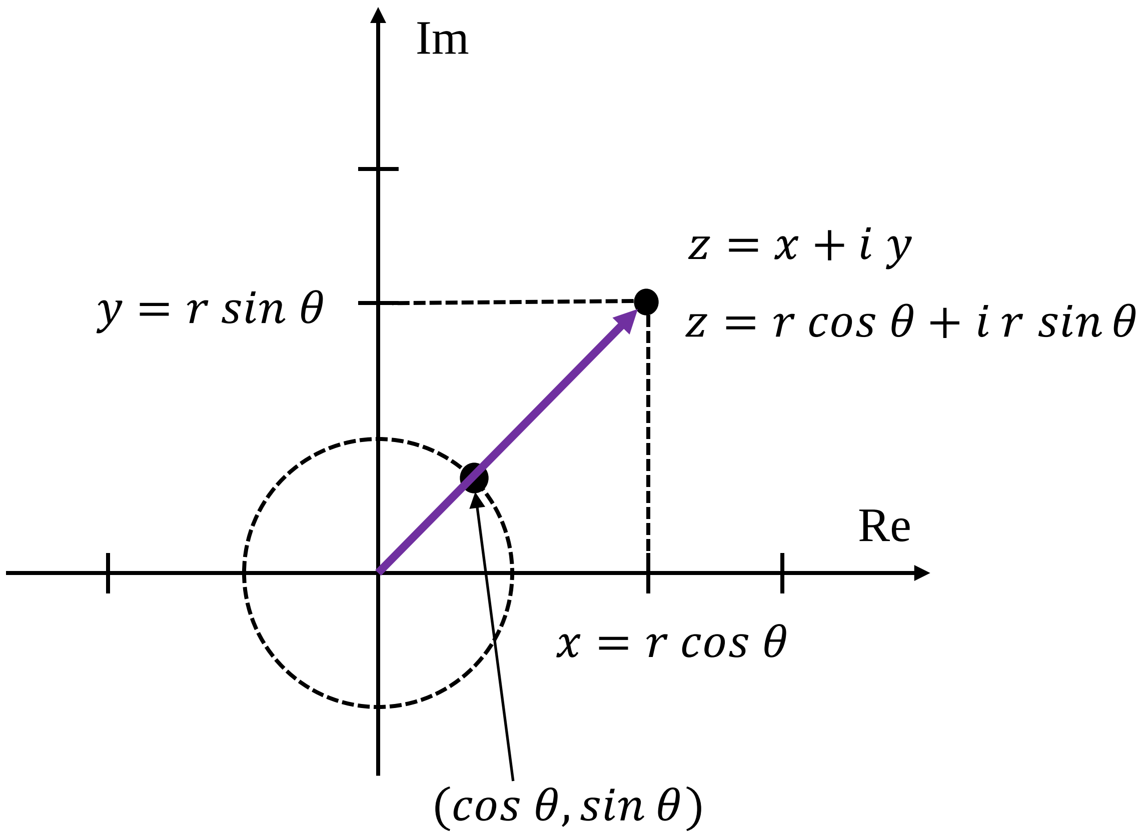
$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\cos\theta + i\,r\sin\theta}$$

- $r = |z|$ eli kompleksiluvun **etäisyys** origosta kompleksitasossa
- θ on kompleksiluvun z paikkavektorin ja reaaliakselin välinen kulma (reaaliakselista vastapäivään mitattuna)
  - **Vaihekulma** eli **argumentti** $\theta = \arg(z)$



Napakoordinaattimuoto

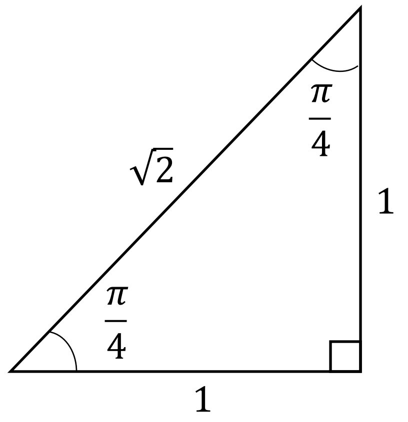
- Tausta napakoordinaattimuodolle
  - Trigonometrian avulla yksikköympyrän pisteen koordinaatit voidaan kirjoittaa kulman θ avulla muodossa $(\cos\theta, \sin\theta)$
  - Näin ollen r-säteisellä ympyrällä pisteen koordinaatit ovat $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

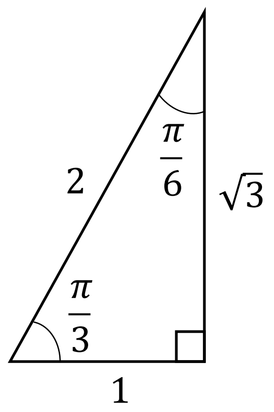


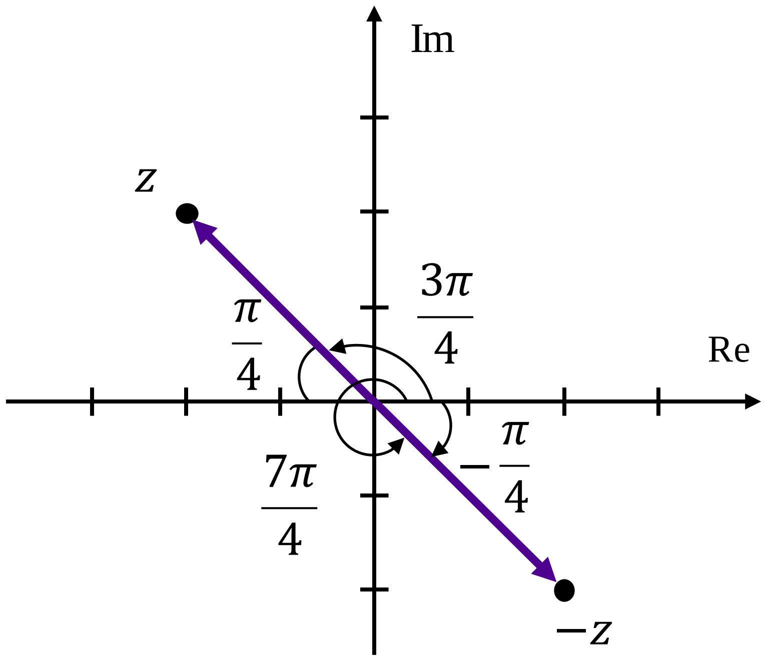
Napakoordinaattimuoto

- Muista hyödyntää muistikolmioita apuna kulman θ ratkaisemisessa!
  - Muista kolmioiden yhdenmuotoisuus kolmion sivun pituuksien ollessa muistikolmion sivujen monikertoja

- Huomioi myös missä koordinaatiston neljänneksessä kompleksiluku sijaitsee!
  - $\arg(z) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$
  - $\arg(-z) = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$ tai $\arg(-z) = -\frac{\pi}{4}$







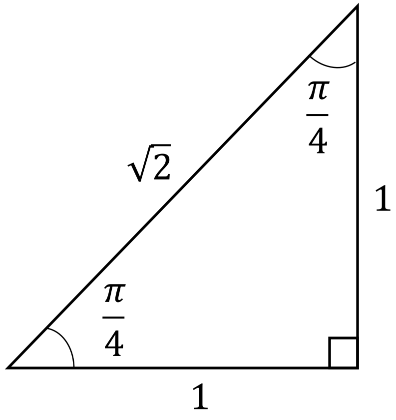
Napakoordinaattimuoto

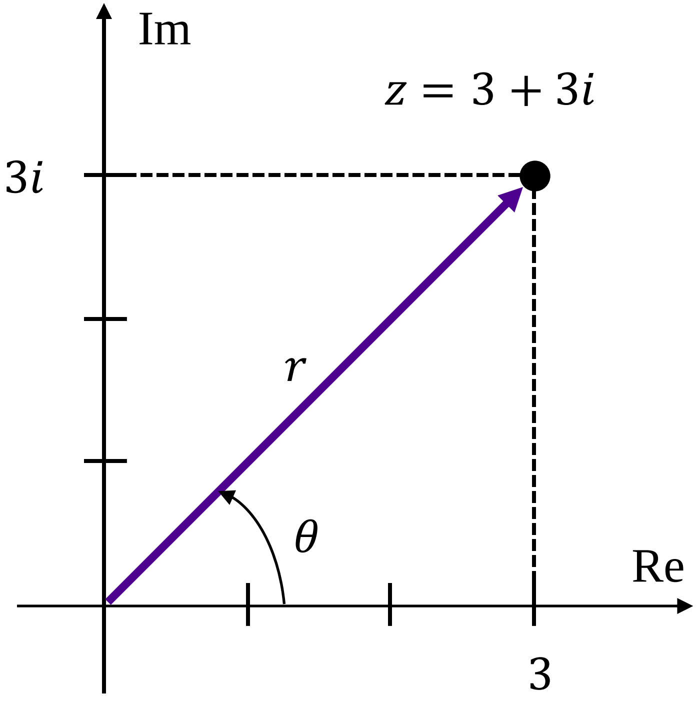
<u>Esimerkki:</u> Esitä kompleksiluku $z = 3 + 3i$ napakoordinaattimuodossa

Lasketaan etäisyys origosta
$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 3^2}$
$= \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

Kulma θ muistikolmion avulla
$\theta = \frac{\pi}{4}$

Napakoordinaattimuoto
$z = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$





Napakoordinaattimuoto

Lause

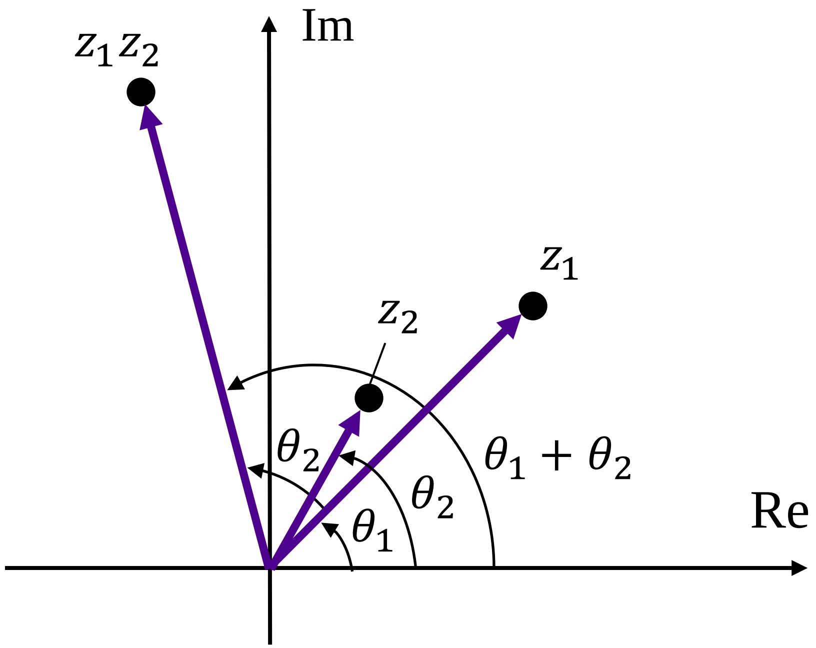
Jos $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ ja $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, niin

1. $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1+\theta_2)) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$
2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$, kun $z_2 \neq 0$

Lause: De Moivren kaava

Jos $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ja n on luonnollinen luku, niin

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$



- Jos luku z_1 kerrotaan luvulla z_2, niin geometrisesti se tarkoittaa pituuden kertomista luvulla r_2 ja kiertoa kulman θ_2 verran

Eksponenttimuoto

Määritelmä

Kompleksimuuttujan $z = x + yi$ *eksponenttifunktio* on muotoa $e^z = e^{x+yi} = e^x(\cos y + i \sin y)$.

Vertaamalla napakoordinaattiesitykseen huomataan, että $r = |e^z| = e^x$ ja $\theta = \arg(e^z) = y$.

Lause

Jos $z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$, niin $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$ ja $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$.

Jos $x = 0$ ja luku z on puhtaasti imaginäärinen, niin eksponenttifunktio saa muodon

$$\boxed{e^{iy} = \cos y + i \sin y}$$

EULERIN KAAVA

Vertaamalla napakoordinaattiesitystä Eulerin kaavaan saadaan napakoordinaattiesitykselle lyhyt merkintä (ns. napakoordinaattiesityksen eksponenttimuoto)

$$\boxed{z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}}$$

Eksponenttimuoto

Lause

Jos $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ ja $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, niin

1. $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$
3. $\bar{z} = re^{-i\theta}$
4. $z^n = r^n e^{in\theta}$

Eksponenttimuoto

Esimerkki: Muunna kompleksiluku $z = 1 - \sqrt{3}i$ napakoordinaattiesityksen eksponenttimuotoon ja laske z^5.

Lasketaan kompleksiluvun z itseisarvo

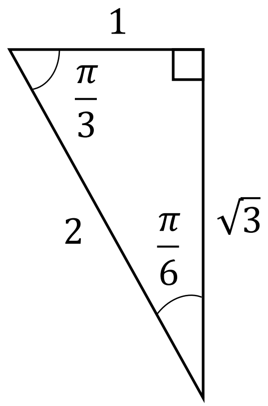
$$r = |z| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}$$
$$= \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

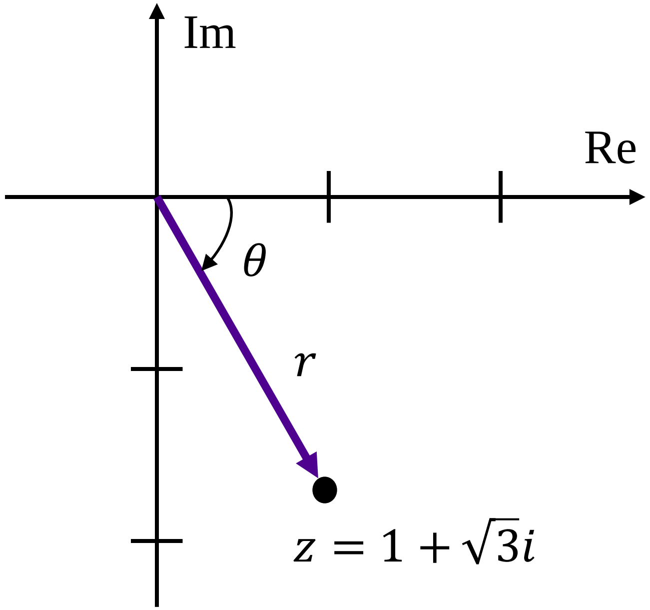
Vaihekulmaksi muistikolmion avulla saadaan

$$\theta = \arg z = -\frac{\pi}{3}$$

Näin ollen $z = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Nyt $z^5 = 2^5 e^{-i\cdot 5\cdot\frac{\pi}{3}} = 32e^{-i\frac{5\pi}{3}}$





Sisältö

- Vaihtoehtoiset esitystavat kompleksiluvuille
  - Napakoordinaattimuoto
    - De Moivren kaava
  - Eksponenttimuoto
    - Eulerin kaava

Kiitos!