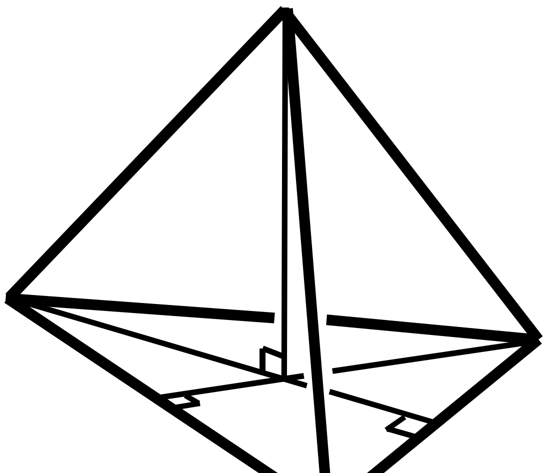
Antti Majaniemi

GEOMETRIA

geometriaa, trigonometriaa ja vektorilaskentaa



2016

ISBN 978-952-93-7040-5

Antti Majaniemen perikunta on päättänyt antaa tämän teoksen käytettäväksi yllä olevalla lisenssillä. Painatus ei ollut enää kannattavaa alhaisen kysynnän vuoksi, mutta tällä tavalla oppimateriaali on edelleen opiskelijoiden ja oppilaitosten käytettävissä.

Tämä teos on ladattavissa osoitteessa http://anttimajaniemi.fi

Turussa 29.3.2016

Jari Majaniemi

jari @ anttimajaniemi.fi

Sisällys

Moniste on tarkoitettu käytettäväksi insinöörikoulutuksen geometrian opetuksessa yhdessä algebran monisteiden kanssa. Asioiden esittämisjärjestykseen ovat vaikuttaneet muiden oppiaineiden tarpeet, mutta joillakin opintosuunnilla voi olla syytä muuttaa tätä järjestystä.

Harjoitustehtävät on jaettu kolmeen ryhmään A, B ja C vaikeustason ja yleisyyden perusteella. Niiden joukossa on aika vähän soveltavia tehtäviä mm siksi, että sovellukset ovat linjakohtaisia, jopa oppilaitoskohtaisia ja oppilaiden pitää saada opinnoilleen ensin yleinen matemaattinen pohja. Matematiikan opettajan olisi kuitenkin hyvä tuntea sen opintosuunnan matemaattisia sovelluksia, joita hän opettaa. Näitä hän voi sijoittaa opetukseensa motivoimaan matematiikan tarpeellisuutta ja tukemaan kyseisen alan ammattiopintoja.

Tähän painokseen olen muuttanut lähinnä monisteen ulkoasua. Korjaukset ja muut muutokset sen sijaan ovat aika vähäisiä. Tähdellä * merkittyjä valinnaisia osia olen lisännyt jonkin verran.

Turussa 1. 8. 1999 Antti Majaniemi

Olen päivittänyt monistetta muuttaen sitä yhdenmukaiseksi muun monistesarjan kanssa.

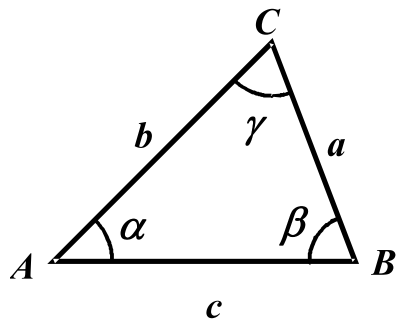
Turussa 28.6.2008 Jari Majaniemi

1 KOLMIO

1.1 Peruskäsitteitä

Kolmion perusosat

Kolmion ABC merkintä on ΔABC. Sivuja (tai niiden pituuksia) merkitään pienillä kirjaimilla a, b ja c. Kulmia ja niiden suuruuksia merkitään kreikkalaisilla kirjaimilla α, β ja γ.



Kirjaimet valitaan siten, että *sivua, sen vastaista kulmaa ja tämän kulman kärkeä merkitään vastaavilla kirjaimilla* (esim. b, B ja β). Kulmalla on useita merkintätapoja, mm. seuraavat:

$$\gamma = \angle ACB = \angle C = \measuredangle ACB = \wedge ACB.$$

Sivun pituus

Standardien mukainen janan merkintä on $\overline{AB}$, mutta se on yleensä geometriseen käyttöön turhan mutkikas. Niinpä esimerkiksi kolmion kärkien A ja B välistä sivua merkitään yleensä AB:llä tai vielä lyhemmin c:llä.

Standardien mukaan janan $\overline{AB}$ pituus on $\left|\overline{AB}\right|$, mutta yleinen geometrinen käytäntö on merkitä janan $c = AB$ pituuttakin c:llä tai AB:llä.

Geometriassa on myös tavallista (ja oikein) puhua esimerkiksi kolmiosta, jonka sivut ovat $a = b = 1$, $c = \sqrt{3}$ ilmoittamatta mittayksikköä ja käyttäen tarkkoja arvoja. Tällöin tarkastelut tapahtuvat ns. *euklidisessa tasossa*, missä on valittuna jokin *yksikköjana.*

Euklidinen taso on konkreettisen tason (paperin, pöytälevyn tms.) eräänlainen ihannetapaus, rajatapaus. Sen voisi kuvitella tasolevyksi, joka jatkuu täysin suorana äärettömyyteen saakka ja jolla ei ole mitään paksuutta.

Jos euklidisen tason (tasakylkinen) kolmio, jonka sivut ovat esimerkiksi $a = b = 2$, $c = 2\sqrt{3}$, piirretään jollekin fysikaaliselle (konkreettiselle) tasolle, esim. paperille tai liitutaululle, yksikköjanaksi valitaan jokin sopiva jana. Paperilla yksikköjanaksi valitaan esim. jana jonka pituus on mahdollisimman tarkasti 10 mm tai paperin ruutuväli. Yksikköjanan valinta määrää piirretyn kolmion koon. Tällaiselle tasolle piirretyn janan $c = 2\sqrt{3}$ pituus voi olla esim. $c \approx 3{,}4\ cm$ tai $c \approx 4{,}8\ ruutua$.

Usein tässä yhteydessä "*noin*"-merkin ≈ sijasta käytetään yhtäläisyysmerkkiä =.

Kulman suuruus

Kulman suuruus esitetään perinteisesti ***astemittoja*** käyttäen, esim. α ≈ 52,4567° (esitys asteina *4 desimaalin eli 6 numeron tarkkuudella*), β ≈ 25°15'17" (sekuntien tarkkuus). ***Suora kulma*** = 90°. ***Oikokulma*** = 180° ja ***täysi kulma*** = 360°.

Nykyään (esim. yhdyskuntatekniikassa) käytetään myös kulman yksikköä ***gooni*** (1 *gon*) eli ***graadi***. Suora kulma = 100 *gon* (lue: "100 goonia"). Oikokulma = 200 *gon* ja täysi kulma = 400 *gon*.

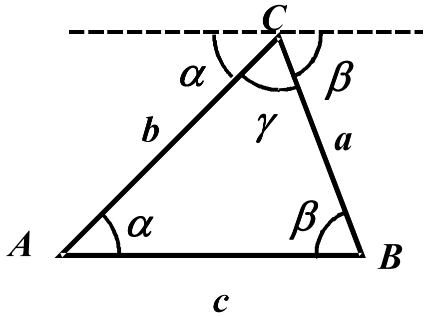
Matematiikassa ja pidemmälle menevässä tekniikassa yleisin kulman yksikkö on ***radiaani***. Suora kulma = $\pi/2$ *rad*. (Lue: "pii per 2 radiaania". Sanaa "*per*" = "kautta" käytetään jakolaskun lyhenteenä, esim. "2 jaettuna 3:lla" = "2 *per* 3").

Kulmayksiköistä puhutaan tarkemmin myöhemmin.

Todistetaan nyt seuraava tulos:

Lause 1. *Jokaisessa kolmiossa kulmien summa on* 180°.

Tod. Piirrä C:n kautta AB:n suuntainen suora. Tämän suoran viereen muodostuvat kulmat ovat = α ja β (A- ja B-kulmat 180° kierrettyinä) sekä γ. Siten $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.



Esim. 1. Jos kolmion kaksi kulmaa ovat 100 *gon* ja 60 *gon*, niin kolmas on $200\ gon - 160\ gon = 40\ gon = 36°$.

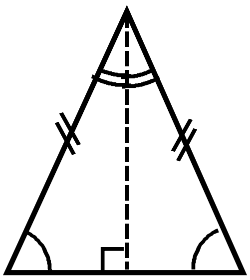
Kolmion korkeusjanat ja keskijanat

Korkeusjana = kolmion jostakin kärjestä kohtisuoraan vastakkaista sivua vastaan piirretty jana (tai suora). Piirrä kuva.

Keskijana (mediaani) = kolmion jostakin kärjestä vastakkaisen sivun keskipisteeseen piirretty jana. Piirrä kuva.

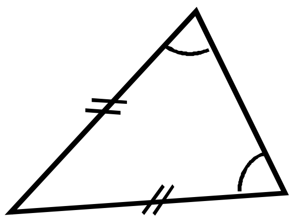
Esim. vektoreiden avulla voidaan todistaa, että kolmion keskijanat leikkaavat toisensa samassa pisteessä. Tämä piste on sama kuin *kolmion (kolmiolevyn)* ***painopiste***.

1.2 Kolmiolajeja. Pythagoraan lause



1. ***Tasakylkinen kolmio.*** Tasakylkisen kolmion kaksi sivua, ns. kyljet ovat yhtä pitkät. Kylkien viereiset kulmat (kantakulmat) ovat yhtä suuret.

Huipusta kolmion *kantaa* vastaan piirretty korkeusjana on kolmion symmetria-akseli.

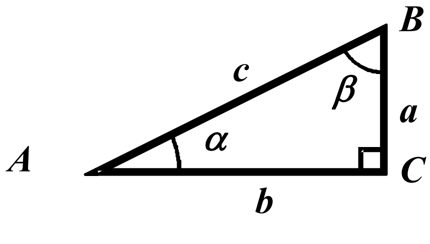


Tasakylkisen kolmion kantasivua sanotaan kannaksi vaikka se olisi vinossa asennossa.

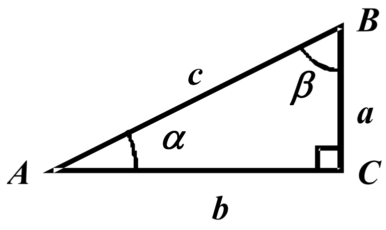
2. ***Tasasivuinen kolmio.*** Kaikki kolme sivua ovat yhtä pitkiä. Täten kolmion jokainen kulma on 60°. Piirrä kuva.

3. ***Terävä- ja tylppäkulmainen kolmio***. Kolmio, jonka kaikki kulmat ovat teräviä ts. alle 90° (100 *gon*), on teräväkulmainen. Kolmio, jossa on yksi tylppä kulma (> 90°), on tylppäkulmainen.

4. ***Suorakulmainen kolmio.*** Suoran kulman vastainen sivu *c* on ***hypotenuusa*** ja kaksi muuta sivua *a* ja *b* ovat kolmion ***kateetit***.



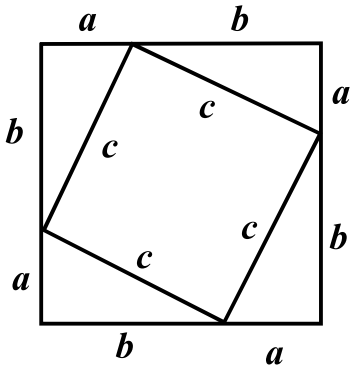
Pythagoraan lause. *Suorakulmaisessa kolmiossa hypotenuusan neliö on yhtä suuri kuin kateettien neliöiden summa*, ts.



$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

Esim. 2. Jos hypotenuusa $c = \sqrt{13}$ ja yksi kateetti $a = 3$, niin toinen kateetti on

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{13 - 9} = 2.$$



**Pythagoraan lauseen todistus:* Lasketaan viereisen neliön ala kahdella tavalla:

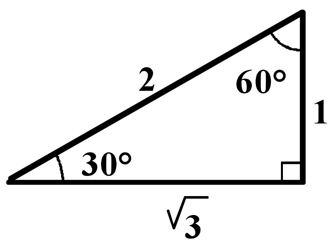
$$(a+b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2.$$

1.3 Kolme erikoiskolmiota

1. ***Suorakulmainen kolmio, jonka yksi kulma on 30°***. Toinen kulma on silloin 60° (Lauseen 1 mukaan).

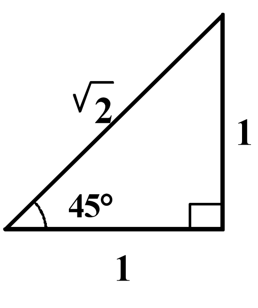


Tämä kolmio on puolet tasasivuisesta kolmiosta (piirrä kuva). Jos kolmion lyhempi kateetti valitaan yksiköksi, niin hypotenuusa on 2 ja pidempi kateetti $\sqrt{3}$ yksikköä, sillä

$$2^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2.$$

Tätä tulosta käytetään usein seuraavassa muodossa:

Jos suorakulmaisen kolmion yksi kulma on 30°, *niin sivujen suhde on* $\mathbf{1 : \sqrt{3} : 2}$.

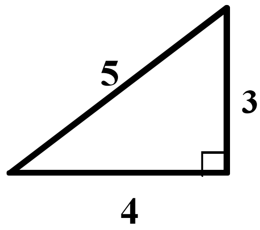


2. ***Tasakylkinen suorakulmainen kolmio***. Jos kateetit otetaan pituusyksiköksi, niin hypotenuusan pituus on $\sqrt{2}$, sillä

$$1^2 + 1^2 = (\sqrt{2})^2.$$

Jos siis suorakulmaisen kolmion yksi kulma on $45°$, *niin sivujen suhde on* $1:1:\sqrt{2}$.

3. ***Suorakulmainen kolmio, jonka kateetit ovat 3 ja 4***. Tällaisen kolmion hypotenuusa on ***5*** (yksikköä), sillä $3^2+4^2=5^2$.



Harjoituksia

A

Hanki A4-kokoista paperia (ruutukoko 7 *mm*), hyvä harppi, kolmioviivain, jossa on myös "astelevy" sekä ehkä myös levy, jossa on erikokoisia ympyröitä. Opettele piirtämään paljon kuvioita, täsmällisesti, mutta nopeasti, sopivaan kokoon. Yksinkertainen kolmiokuvion sopiva koko on esim. sellainen, että pisin sivu on 5...8 *cm*. Mutkikkaammat, paljon viivoja sisältävät kuviot on syytä piirtää isompaan kokoon.

Yleensä tehtävän vastaus on pyrittävä esittämään samantapaisessa muodossa kuin lähtöarvotkin.

Jos lähtöarvot ovat esim. 3-numeroisia likiarvoja (tekniikassa esim. mittoja 4,56 *mm* tai 0,279 *m*), merkitse välitulokset 4 numeron tarkkuudella (esim. 0,5342...*m*) ja tallenna ne laskimen muisteihin. Käytä laskuissa näitä nelinumeroisia välituloksia (tai laskimen muisteissa olevia lukuja). Pyöristä vastaus 3 numeron tarkkuuteen (esim. 0,764 m^2).

Jos taas lähtöarvot ovat tarkkoja arvoja (esim. $2\sqrt{2}$), vastauskin on pyrittävä esittämään samantapaisessa muodossa.

Esimerkiksi luettelossa 2,34, 5,36, 6,28 voisi olla sopivampaa käyttää desimaalipilkun sijasta desimaalipistettä tai sitten erottaa luvut toisistaan pilkun sijasta puolipisteillä, siis 2,34; 5,36; 6,28. Tällaiset mitat, joissa ei esiinny mittayksikköä, ovat *euklidisen tason* mittoja. Niistä ei oikeastaan ilman lisämainintaa voi tietää, ovatko ne tarkkoja arvoja vai likiarvoja.

1.1 Piirrä sopivaan kokoon seuraavanlaiset kolmiot ja niille keski- ja korkeusjanat a) tasasivuinen kolmio, b) tasakylkinen suorakulmainen kolmio, c) tylppäkulmainen kolmio. Voit käyttää piirtämisessä kolmioviivainta ja sen *mm*-asteikkoa.

1.2 Piirrä harjoitusten edellä esitetyt kolme erikoiskolmiota niin, että niiden hypotenuusat ovat (paperilla) vaakasuorassa.

1.3 Tasakylkisen kolmion huippukulma on 36,2°. Laske kantakulmat.

1.4 Suorakulmaisen kolmion yksi kulma on 30°. Laske (ilman trigonometriaa) kolmion sivut, kun a) lyhin sivu on 3,52 *m*, b) hypotenuusa on 54, c) pidempi kateetti on 5,44 *cm*.

1.5 Neliön sivu on a) 3,44 cm, b) $5\sqrt{2}$. Laske neliön *lävistäjä.*

1.6 Teräväkulmaisessa kolmiossa *CDE* on $CD = 3{,}22$, $CE = 4{,}55$ ja korkeusjana $CF = 2{,}86$. Laske kolmion ala. Vastaus kolmen numeron tarkkuudella.

1.7 Laudasta tehdään kolmio, jonka kaksi lyhintä sivua ovat 60,0 *cm* ja 80,0 *cm*. Kuinka pitkäksi on kolmas sivu valittava, jotta kolmio olisi suorakulmainen ?

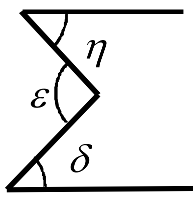
B

1.8 Kolmion kantasivun ja kyljille piirrettyjen korkeusjanojen väliset kulmat ovat 34,2 *gon* ja 47,5 *gon*. Laske huippukulman suuruus *gooneissa* ja ilmoita tulos myös asteissa.

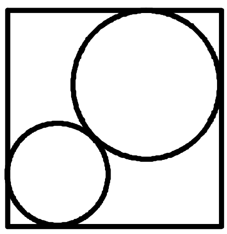
1.9 Ympyrän säde on 34 ja jänne 44. Kuinka kaukana jänne on keskipisteestä ?

1.10 Piirrä harpilla ja viivaimella a) tasasivuinen kolmio, b) säännöllinen 6-kulmio (sivut yhtä pitkät, kulmat yhtä suuret).

1.11 Laske kulma η, kun $\delta = 44{,}22°$, $\varepsilon = 89{,}33°$ ja lisäksi kuvan ylin ja alin viiva ovat yhdensuuntaiset. (Nämä kreikkalaiset kirjaimet luetaan suunnilleen "*eetta*", "*deltta*" ja "*epsilon*".)



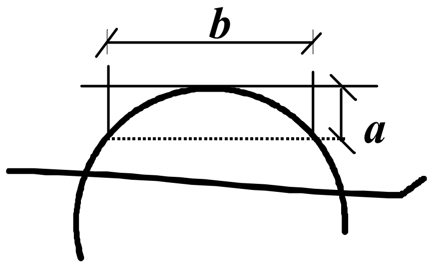
1.12 Ympyrät sivuavat toisiaan ja neliön sivuja (kuva). Ympyröiden säteet ovat 23,2 *mm* ja 34,1 *mm*. Laske neliön sivu.



1.13 Kolmion alan "kaava" on "kanta kertaa korkeus jaettuna 2:lla". Johda tämän avulla suunnikkaan ja puolisuunnikkaan alojen vastaavat tulokset.

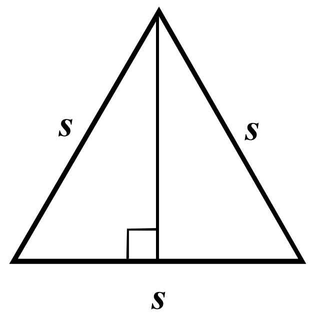
C

1.14 Maahan upotetusta tynnyristä pystytään mittaamaan a ja b (kuva). Johda ympyrän halkaisijalle lauseke



$$d = a + \frac{b^2}{4a}.$$

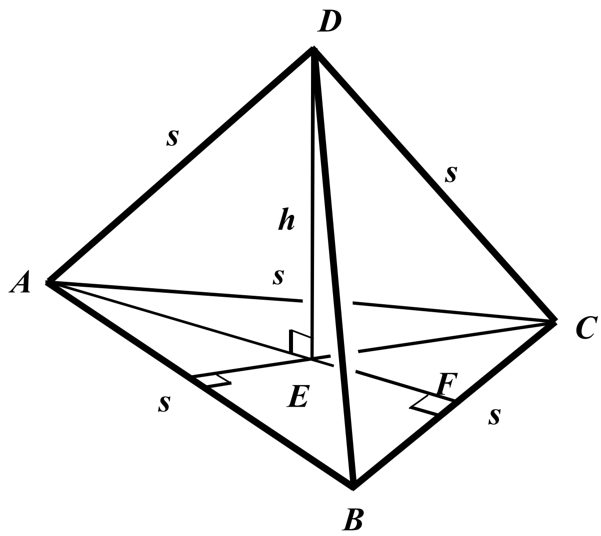
1.15 Todista, että tasasivuisen kolmion korkeus h ja ala A ovat



$$\boldsymbol{h = \frac{s\sqrt{3}}{2}, \quad A = \frac{s^2\sqrt{3}}{4}.}$$

1.15 Voidaan todistaa, että ***kolmiolevyn painopiste eli keskijanojen leikkauspiste jakaa jokaisen keskijanan suhteessa 1 : 2***, ts. siten, että keskijanasta jää kaksi kolmasosaa kärjen puolelle ja yksi kolmasosa sivun puolelle. Tätä tietoa tarvitaan seuraavan tehtävän ratkaisemisessa:

Laske edellistä tietoa ja edellistä tehtävää apuna käyttäen viereisen kuvan mukaisen säännöllisen *tetraedrin* (nelitahokkaan) korkeuden h lauseke:



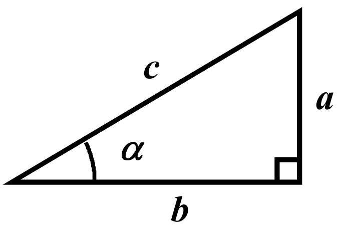
1.17 Osoita, että edellisen tetraedrin tilavuus on

$$V = \frac{s^3\sqrt{2}}{12},$$

kun tiedetään, että yleisesti pyramidin tilavuus on kolmannes pohjan alan ja korkeuden tulosta.

2 Suorakulmaisen kolmion trigonometriaa

2.1 Terävän kulman trigonometriset funktiot



Esim. viereisessä kolmiossa suhteen a/c suuruus riippuu kulman α suuruudesta eli on α:n funktio $f(\alpha)$. Tätä funktiota merkitään $\sin(\alpha)$:lla tai lyhemmin $\sin\alpha$:lla ja sitä sanotaan kulman α siniksi. Vastaavasti suhdetta b/c sanotaan kulman α kosiniksi. Tällaisia trigonometrisia funktioita on kuusi:

Määritelmä:

$\mathbf{\sin\alpha = \dfrac{a}{c}}$	$\cot\alpha = \dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{\tan\alpha}$
$\mathbf{\cos\alpha = \dfrac{b}{c}}$	$\sec\alpha = \dfrac{c}{b} = \dfrac{1}{\cos\alpha}$
$\mathbf{\tan\alpha = \dfrac{a}{b}}$	$\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{\sin\alpha}$

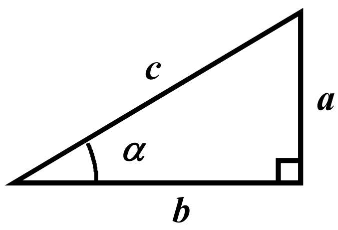
Jatkossa käytetään lähinnä vain kolmea ensimmäistä funktiota: *siniä, kosinia* ja *tangenttia. Kotangentti, sekantti* ja *kosekantti* ovat aika harvinaisia (paitsi amerikkalaisessa kirjallisuudessa). Opettele määritelmät myös seuraavassa muodossa:

"Sini α on vastaisen kateetin suhde hypotenuusaan".
"Kosini α on viereisen kateetin suhde hypotenuusaan".
"Tangentti α on vastaisen kateetin suhde viereiseen".

Määritelmästä saadaan seuraavat kaksi tulosta (joita käytetään paljon sovelluksissa):

$\mathbf{a = c\sin\alpha}$ *(vastainen kateetti on hypotenuusa kertaa kulman sini),*

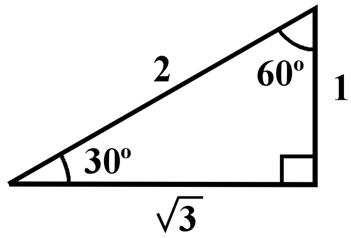
$\mathbf{b = c\cos\alpha}$ *(viereinen kateetti on hypotenuusa kertaa kulman kosini).*



Myös esimerkiksi $a = b\tan\alpha$, $b = \dfrac{a}{\tan\alpha}$ ja $c = \dfrac{a}{\sin\alpha}$.

Esim. 1 $\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

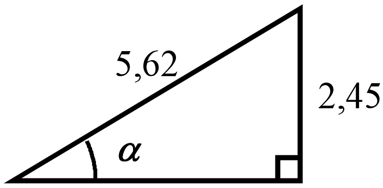
$\tan 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \overset{(\sqrt{3}}{=} \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



Esim. 2 Laske kulma α seuraavassa kuvassa.

$$\sin\alpha = \frac{2{,}45}{5{,}62} = 0{,}4359...$$

$$\therefore \quad \alpha = 25{,}84° \approx 25{,}8°.$$



Varo: Et saa merkitä seuraavasti:

$$\sin\alpha = 04359... \approx 25{,}8°,$$

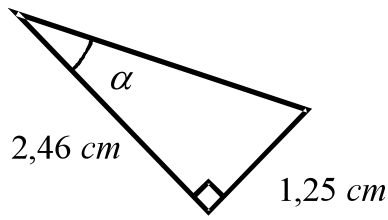
sillä jälkimmäinen arvo on kulman arvo ja edellinen on kulman sinin arvo. Ne eivät voi olla yhtä suuria.

Esim. 3 Laske α ja $\sin\alpha$ seuraavan kuvan mukaisessa tapauksessa.

$$\tan\alpha = \frac{1{,}25\ cm}{2{,}46\ cm} = 0{,}5081...$$

$$\therefore \quad \alpha = 26{,}93...° \approx \underline{\underline{26{,}9°}}.$$

$$\sin\alpha = \sin 26{,}93...° = 0{,}4530... \approx \underline{\underline{0{,}453}}.$$

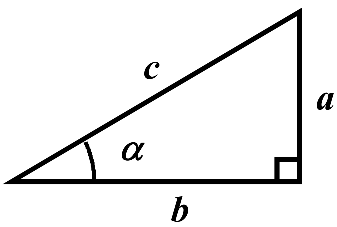


Toisin: Laske ensin hypotenuusa Pythagoraan lauseella.

2.2 Trigonometrisia peruskaavoja

(1) $$\boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

Tod. $$\text{op} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} = \text{vp}$$



(op = yhtälön oikea puoli, vp = vasen puoli).

Trigonometristen funktioiden potenssien yhteydessä eksponentti merkitään yleensä "keskelle" seuraavaan tapaan:

$$\boxed{\sin^2\alpha \text{ tarkoittaa samaa kuin } (\sin\alpha)^2}$$

Toinen tärkeä peruskaava on seuraava:

(2) $$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

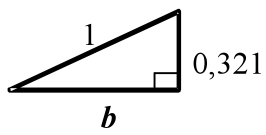
Tod. $\text{vp} = \left(\dfrac{a}{c}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{c}\right)^2 = \dfrac{a^2+b^2}{c^2} = \dfrac{c^2}{c^2} = 1.$

Esim. 4 Laske $\tan\alpha$, kun $\sin\alpha = 0{,}321$ (ja α on terävä kulma).

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-0{,}32^2} = 0{,}9470...$$

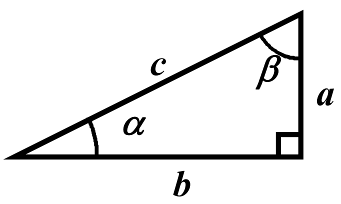
$$\tan\alpha = \frac{0{,}321}{0{,}9470...} = 0{,}3389 \approx \underline{\underline{0{,}339}}.$$

*Toinen laskutapa:



Valitse kolmion hypotenuusa c pituusyksiköksi (c = 1). Silloin a = 0,321 (koska a/c = sin α = 0,321). Pythagoraan lauseen mukaan b = 0,9470... ja tan $\alpha = a/b \approx \underline{\underline{0{,}339.}}$

2.3 Komplementtikulmat



Kahta kulmaa, joiden summa on 90°, sanotaan toistensa ***komplementtikulmiksi***. Esimerkiksi suorakulmaisen kolmion terävät kulmat α ja β ovat toistensa komplementtikulmia.

Koska $\boldsymbol{\sin\alpha = \cos\beta}$ (sillä kumpikin on = a/c), niin

kulman sini = komplementtikulman kosini.

Kaavana:

$$\boldsymbol{\sin\alpha = \cos(90°-\alpha)} \quad \text{ja} \quad \boldsymbol{\cos\alpha = \sin(90°-\alpha)}$$

Esim. 5 a) $\sin 72° = \cos 18° \approx 0{,}951$.

b) Jos $\cos\alpha = 0{,}3$, niin $\sin(90°-\alpha) = 0{,}3$.

Harjoituksia

A

2.1 Täydennä seuraavat rivit paperille (ei tähän monisteeseen):

$\sin 30° = \cos \quad =$

$\sin 30° = \cos \quad =$

$\sin 60° = \cos \quad =$

$\sin 0° = \cos \quad =$

$\sin 90° = \cos \quad =$

$\tan 30° = \cot \quad =$

$\tan 45° = \cot \quad =$

$\tan 60° = \cot \quad =$

$\tan 0° = \cot \quad =$

2.2 Laske laskimella terävä kulma α, β, δ tai φ, kun

a) $\sin \alpha = 0,5932$, b) $\tan \beta = 1{,}222$, c) $\cot \delta = 2{,}55$

d) $\sin 3\alpha = 0{,}222$, e) $\sin 5\alpha = 1{,}222$, f) $1 + 2 \sin \varphi = 2{,}413$.

2.3 Ympyrän jänne AB = 23,1 *mm* ja säde r = 34,6 *mm*. Laske jännettä AB vastaava keskuskulma $\angle AOB$, missä O = ympyrän keskipiste.

2.4 Tasakylkisen kolmion kyljet ovat 87,6 *mm* ja huippukulma on 68,2 *gon*. Laske kolmion kanta, korkeus ja ala. (Huomaa harjoituksen 1.1 edellä olleet likiarvojen laskentaohjeet.)

B

2.5 Suunnikkaan $ABCD$ A-kulma α = 69,2°, AB = 3,58 ja AD = 5,46. Piirretään B:stä kohtisuora BE sivulle AD ja pisteestä E kohtisuora EF lävistäjälle BD. Laske EF (3 numeron tarkkuudella).

2.6 Suorakulmaisen kolmion LMN terävä kulma on λ = 25,6° ja sen viereinen kateetti 6,54. Suoran kulman kärjestä M piirretään hypotenuusalle korkeusjana MP. Missä suhteessa P jakaa hypotenuusan LN ?

2.7 Todista, että a) $\cot \alpha = \dfrac{1}{\tan \alpha}$, b) $1 + \tan^2 \alpha = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha}$.

2.8 Kolmion yksi kulma $\alpha = 35{,}5°$, sen viereinen sivu $AC = 46{,}5$ ja vastainen sivu $CB = 29{,}2$. Laske sivu AB. Ohje: Laske ensin C:stä piirretty korkeusjana. Kolmioita on 2 kpl (B-kulma voi olla terävä tai tylppä), joten vastauskin käsittää kaksi lukua.

2.9 Maastokohtien A ja B välissä on talo ja joki. Matkan AB mittaamiseksi A:n puoleiselta rannalta valittiin jokin sellainen kohta C, josta AB näkyy suorassa kulmassa (ts. $\angle ACB = 100$ *gon*) ja sellainen kohta D, että A on CD:n keskipiste. Matka $AC = 352$ *m* ja $\angle ADB = 75{,}3$ *gon*. Laske AB.

2.10 Kulma α on terävä kulma. Laske sin α, kun a) $\cos\alpha = 0{,}413$, b) $\tan\alpha = 2{,}56$. Mieti erilaisia laskutapoja (vrt. Esim. 3 ja 4 sekä *Harj. 2.7*). Niitä on useita (ja kaikki ovat tärkeitä osata).

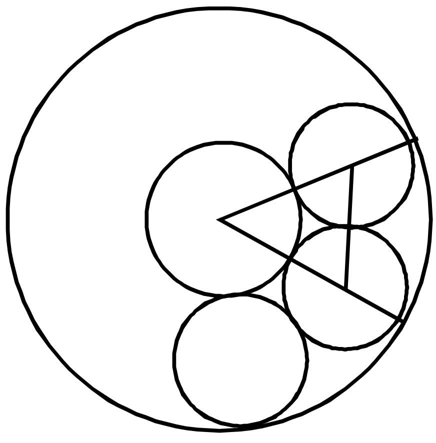
2.11 Osoita esimerkkien avulla, että seuraavat tulokset ovat ***virheellisiä***:

$$\sin 2a = 2\sin\alpha, \quad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha + \sin\beta, \quad \frac{\tan 3\alpha}{3s} = \frac{\tan\alpha}{s}$$

ja varo tarkoin, että et tee tämäntapaisia virheitä.

C

2.12 Viereisessä kuvassa seitsemän pikkuympyrää (joista kuvaan on piirretty kolme) sivuavat toisiaan ja kahta samankeskistä ympyrää. Sisemmän ympyrän halkaisija on 50,0 *mm*. Laske pikkuympyrän ja suurimman ympyrän halkaisijat (vrt. "kuulalaakeripesä").



2.13 Edellinen tehtävä yksinkertaistuu, jos pikkuympyröitä on 6 kpl. Suorita laskut.

3 VEKTORIT

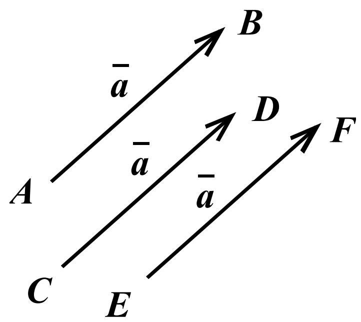
3.1 Peruskäsitteitä

Tekniikassa vektoreita käytetään mm. esittämään suureita, joilla on paitsi suuruus myös suunta. Tällaisia ovat voima, nopeus, kulmanopeus jne.

Euklidisessa tasossa tai avaruudessa kaksi pistettä A ja B määräävät vektorin

(1) $$\bar{a} = \vec{a} = \overrightarrow{AB},$$

jonka alkupiste on A ja loppupiste on B. Tätä vektoria kuvataan pisteestä A pisteeseen B suunnatulla nuolella.



Yhtä pitkiä ja samansuuntaisia vektoreita pidetään niiden alkupisteestä riippumatta samoina (yhtä suurina). Tämä ilmaistaan tavallisesti seuraavassa muodossa:

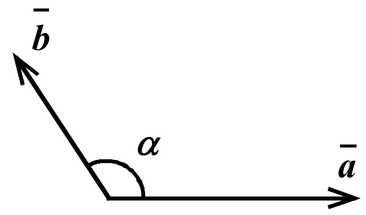
Vektori voidaan siirtää paikasta toiseen, jos sen suunta ja suuruus (pituus) säilytetään.

Yhtälöissä (1) on esitetty kolme tavallisinta vektorin esitystapaa: pieni kirjain, jonka päällä on viiva ($\bar{a}$) tai nuoli ($\vec{a}$), tai kaksi isoa kirjainta, joiden päällä on *nuoli* ($\overrightarrow{AB}$). Painetussa tekstissä vektorit esitetään usein lihavoiduilla kirjaimilla: ***a*, *b***,... ilman yläviivaa tai nuolta. Sen sijaan $\overline{AB}$ *ei esitä vektoria vaan janaa*.

Merkintöjä

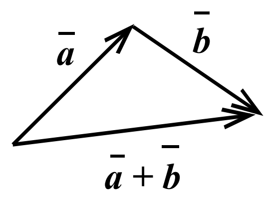
$|\bar{\boldsymbol{a}}|$ = vektorin $\bar{a}$ ***pituus***. Pituus on euklidisessa geometriassa ei-negatiivinen reaaliluku, esim. 2,35 tai $\sqrt{3}$, mutta tekniikassa yleensä jonkin suureen arvo (skalaari), esim. 5,23 N, 3,49 m, 7,0 m/s^2.

$\alpha = \angle(\bar{a}, \bar{b})$ = vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ välinen ***kulma***. Kulman suuruus on välillä 0°...180°.

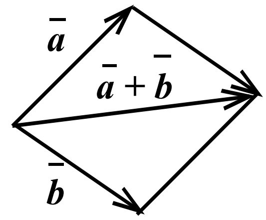


$\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$	vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ovat *samansuuntaiset* ($\alpha = 0°$)
$\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$	vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ovat *vastakkaissuuntaiset* ($\alpha = 180°$)
$\bar{a} \parallel \bar{b}$	$\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ovat *yhdensuuntaiset* ($\alpha = 0°$ tai $180°$)
$\bar{a} \perp \bar{b}$	$\bar{a}$ on *kohtisuorassa* $\bar{b}$:tä vastaan ($\alpha = 90°$)
$\bar{a}°$	$\bar{a}$:n suuntainen ***yksikkövektori*** (pituus = 1).

3.2 Vektorien laskutoimitukset

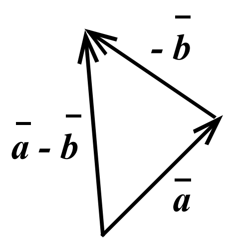


$\bar{a} + \bar{b}$ on $\bar{a}$:n ja $\bar{b}$:n ***summa***. Vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ asetetaan peräkkäin tai alkamaan samasta pisteestä (*suunnikassääntö*).



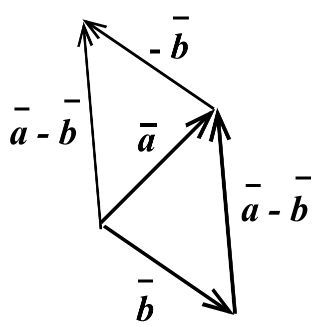
Tekniikassa summavektoria $\bar{a} + \bar{b}$ sanotaan usein $\bar{a}$:n ja $\bar{b}$:n ***resultantiksi*** ja vektoreita $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ sanotaan summavektorin $\bar{a} + \bar{b}$ ***komponenteiksi***.

$-\bar{a}$ on $\bar{a}$:n ***vastavektori*** (yhtä pitkä kuin $\bar{a}$ mutta $\bar{a}$:lle vastakkaissuuntainen).



$\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b})$ Alemmasta kuvasta näkyy, että *erotusvektori* saadaan myös seuraavasti:

Jos $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ asetetaan alkamaan samasta pisteestä, niin $\bar{a} - \bar{b}$ *on yhtä suuri kuin vektori, jonka alkupiste on $\bar{b}$:n kärkipiste ja loppupiste on $\bar{a}$:n kärkipiste* (*näin päin!*).



Vektorin $\bar{a}$ ***kertominen luvulla*** *(skalaarilla) t.* Esim. $2\bar{a}$ tarkoittaa vektoria, joka on $\bar{a}$:n suuntainen ja 2 kertaa niin pitkä kuin $\bar{a}$. Vektori $(-3)\bar{a}$ taas on 3 kertaa niin pitkä kuin $\bar{a}$ mutta $\bar{a}$:lle vastakkaissuuntainen.

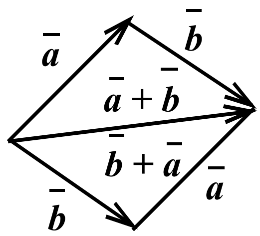
*Yleisesti $t\bar{a}$ on $\bar{a}$:n suuntainen tai $\bar{a}$:lle vastakkaissuuntainen sen mukaan, onko $t > 0$ vai $t < 0$. Vektorin $t\bar{a}$ pituus saadaan kun $\bar{a}$:n pituus kerrotaan luvun t itseisarvolla, siis

$$|t\bar{a}| = |t||\bar{a}|. \tag{2}$$

*Tässä yhtälössä pystyviivat esiintyvät kahdessa eri merkityksessä: luvun t itseisarvossa ja vektorien $t\bar{a}$ ja $\bar{a}$ pituuksissa. Vektorin $\bar{a}$ pituutta voidaan merkitä myös $\|\bar{a}\|$:lla ja sanoa $\bar{a}$:n ***normiksi***. Tällöin (2) saa muodon $\|t\bar{a}\| = |t|\|\bar{a}\|$.

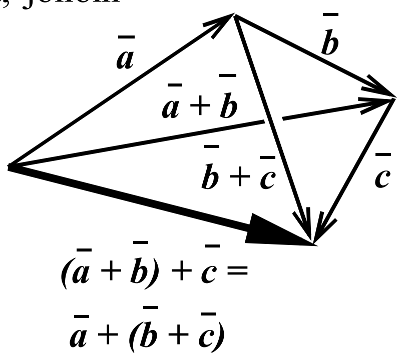
Laskulakeja

1. $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ (vaihdantalaki)
2. $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$ (liitäntälaki)
3. $t(\bar{a} + \bar{b}) = t\bar{a} + t\bar{b}$ (osittelulaki)
4. $t(u\bar{a}) = (tu)\bar{a}$ (t ja u reaalilukuja, *skalaareja*)
5. $(t + u)\bar{a} = t\bar{a} + u\bar{a}$.



*Perustellaan näitä laskulakeja geometristen kuvien avulla. *Laeissa 1 ja 2* on kysymys viereisten kuvien mukaisesta tilanteesta.

*Vektorit voivat olla avaruusvektoreita, jolloin oikeanpuoleisessa kuvassa voi olla kyseessä avaruuskuvio (tetraedri).



**Laki 3*. Jos muutat ylemmän kuvan mukaisessa suunnikkaassa *a*- ja *b*-sivut *t*-kertaisiksi (esim. 2-kertaisiksi), samoin käy lävistäjän. Toisin sanoen jos lasket yhteen vektorit $t\bar{a}$ ja $t\bar{b}$, tulos on sama kuin vektori $t(\bar{a} + \bar{b})$. Siis *laki 3* pitää paikkansa, jos $t > 0$. Mitä tapahtuu suunnikkaalle, jos t on negatiivinen, esimerkiksi -2 ?

**Lakien 4 ja 5* sisällöstä (ja voimassaolosta) saat konkreettisen kuvan, jos ajattelet esim. että $t = 3$ ja $u = 2$. Jos kerrot vektorin $\bar{a}$ ensin 2:lla ja sitten 3:lla, ts. muodostat vektorin $t(u\bar{a})$, saman tuloksen saat kun kerrot $\bar{a}$:n suoraan $2 \cdot 3$:lla, ts. muodostat vektorin $(tu)\bar{a}$. Mieti lain 5 sisältöä vastaavasti.

Käytännössä lait 1...5 merkitsevät, että sellaisia vektorilausekkeita, jotka sisältävät vektorien yhteen- ja vähennyslaskua ja luvulla kertomista, voidaan käsitellä samalla tavoin kuin "tavallisia" kirjainlausekkeita, joissa kirjaimet merkitsevät lukuja.

Esim. 1 $5(2\overline{a}+3\overline{b})-(\overline{b}-3\overline{a})=10\overline{a}+15\overline{b}-\overline{b}+3\overline{a}=13\overline{a}+14\overline{b}$.

Esim. 2 Vektoriyhtälö:

$$\begin{aligned}2(\overline{x}+3\overline{u})&=5(\overline{x}-9\overline{v})\\2\overline{x}+6\overline{u}&=5\overline{x}-45\overline{v}\\3\overline{x}&=6\overline{u}+45\overline{v}\\\overline{x}&=2\overline{u}+15\overline{v}.\end{aligned}$$

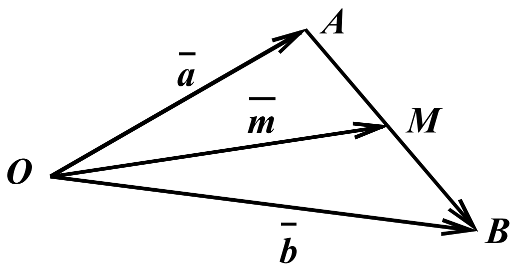
Esim. 3 $\dfrac{12\overline{a}^o+3\overline{b}}{4}=3\overline{a}^o+\dfrac{3}{4}\overline{b}$. Huomaa, että *vektoria ei voi jakaa vektorilla, mutta kylläkin luvulla.* Luvulla 4 jakaminen merkitsee samaa kuin luvulla $\dfrac{1}{4}$ kertominen.

Esim. 4 Jos vektorin $\overline{a}$ pituus on esim. 5 yksikköä, niin vektorin $\dfrac{1}{5}\overline{a}$ pituus on 1 ja tämä vektori on $\overline{a}$:n suuntainen.

Yleisesti *vektori* $\overline{a}$ *saadaan muutettua yksikkövektoriksi* $\overline{a}°$ *jakamalla se pituudellaan eli kertomalla se pituuden käänteisluvulla.* Siis

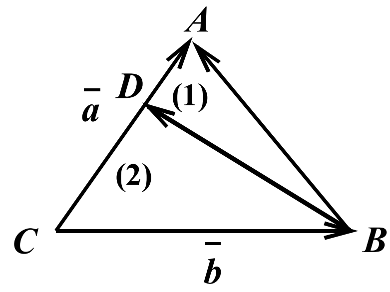
$$\boxed{\overline{\boldsymbol{a}}° = \frac{\overline{\boldsymbol{a}}}{|\overline{\boldsymbol{a}}|}}.$$

Esim. 5 Jos M on janan AB keskipiste ja $\overline{a}$, $\overline{b}$ ja $\overline{m}$ ovat jostakin kiinteästä pisteestä O pisteisiin A, B ja M piirretyt vektorit, niin



$$\overline{m}=\overline{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overline{a}+\frac{1}{2}(\overline{b}-\overline{a})=\frac{2\overline{a}+\overline{b}-\overline{a}}{2}=\frac{\overline{a}+\overline{b}}{2}.$$

Esim. 6 Piste D jakaa kolmion sivun AC suhteessa 1 : 2 (eli sivun CA suhteessa 2 : 1 , vrt. kuva). Esitä vektori $\overrightarrow{BD}$ pisteestä C lähtevien sivuvektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ avulla.

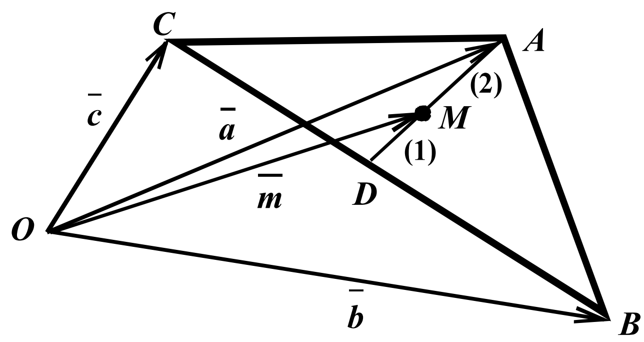


$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = -\overline{b} + \frac{2}{3}\overline{a} = \frac{2\overline{a} - 3\overline{b}}{3}.$$

Sama tulos saadaan myös toista tietä:

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overline{a} - \overline{b} + \frac{1}{3}(-\overline{a}) = \frac{3\overline{a} - 3\overline{b} - \overline{a}}{3} = \frac{2\overline{a} - 3\overline{b}}{3}.$$

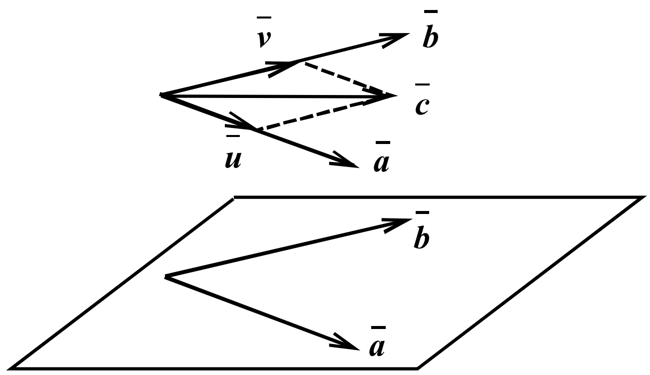
Esim. 7 Kiinteästä pisteestä O piirretään kolmion ABC kärkiin vektorit $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ ja kolmion (kolmiolevyn) painopisteeseen M vektori $\overline{m}$. Silloin



$$\overline{m} = \overline{a} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \overline{a} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{OD} - \overline{a}) = \overline{a} + \frac{2}{3}\left(\frac{\overline{b} + \overline{c}}{2} - \overline{a}\right) = \frac{1}{3}(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}).$$

3.3 Vektorin komponenttiesitys

Jos $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat kaksi erisuuntaista vektoria, ne määräävät erään tason. Jokainen tämän tason suuntainen vektori $\overline{c}$ voidaan esittää muodossa



(1) $\boxed{\overline{\boldsymbol{c}} = \overline{\boldsymbol{u}} + \overline{\boldsymbol{v}},}$

missä $\overline{u} \parallel \overline{a}$ ja $\overline{v} \parallel \overline{b}$. Näin vektori $\overline{c}$ on jaettu kahteen ***komponenttiin*** $\overline{u}$ ja $\overline{v}$, joista toinen on $\overline{a}$:n ja toinen $\overline{b}$:n suuntainen.

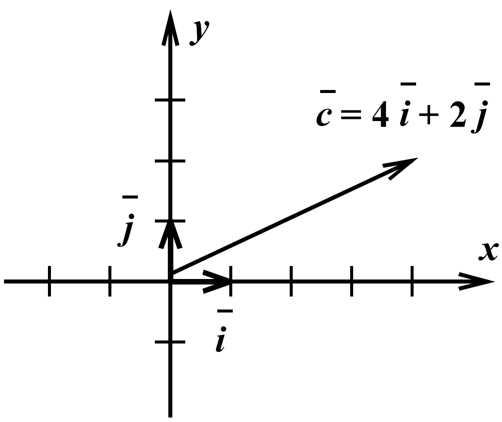
Koska $\bar{u}$ on $\bar{a}$:n ja $\bar{v}$ on $\bar{b}$:n suuntainen, ne voidaan esittää muodossa $\bar{u} = s\bar{a}$, $\bar{v} = t\bar{b}$, missä s ja t ovat joitakin reaalilukuja. Kun nämä sijoitetaan yhtälöön (1), komponenttiesitys saa muodon

(2) $$\boxed{\bar{c} = s\bar{a} + t\bar{b}}.$$

Esimerkiksi edellisessä kuvassa $\bar{c} \approx 0{,}5\bar{a} + 0{,}6\bar{b}$. Lukuja s ja t sanotaan vektorin ***(skalaari)komponenteiksi*** eli ***koordinaateiksi***, kun ***kantana*** ovat vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$. Vektorin $\bar{c}$ koordinaatit s ja t riippuvat valitusta kannasta. Jos kantavektoreita muutetaan, muuttuvat myös s ja t.

Geometriassa xy-tason vektori $\bar{c}$ jaetaan usein koordinaattiakselien x ja y suuntaisiin komponentteihin ja kantavektoreiksi valitaan akselien suuntaiset yksikkövektorit $\bar{i}$ *ja* $\bar{j}$. Tällöin (1) ja (2) esitetään yleensä seuraavalla tavalla, alaindeksejä käyttäen:

$$\boxed{\bar{c} = \bar{c}_x + \bar{c}_y = c_1\bar{i} + c_2\bar{j}}.$$



Huomaa, että viereisessä kuvassa, jossa $\bar{c}$ alkaa origosta, $\bar{c}$:n skalaarikomponentit 4 ja 2 ovat samat kuin $\bar{c}$:n kärjen koordinaatit (4, 2).

Mihin pisteeseen joutuu $\bar{c}$:n kärki, jos $\bar{c}$:n alkupisteenä on (2, 1) ?

Avaruudessa vastaavasti kantavektoreita tarvitaan kolme: $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ ja jokainen vektori $\bar{c}$ voidaan esittää komponenttimuodossa

(3) $$\boxed{\bar{c} = c_1\bar{i} + c_2\bar{j} + c_3\bar{k}},$$

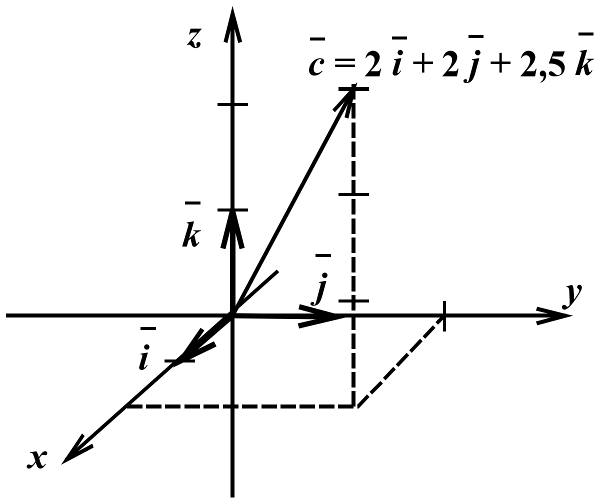
missä kertoimet ovat reaalilukuja.

Esimerkiksi origosta pisteeseen $P(2, 2, 2{,}5)$ piirretyn vektorin

$$\bar{c} = \overrightarrow{OP}$$

komponenttiesitys on

$$\bar{c} = 2\bar{i} + 2\bar{j} + 2{,}5\bar{k}\,.$$



Huomaa tarkoin, että vektorien $\bar{i}$, $\bar{j}$ ja $\bar{k}$ kertoimet eli vektorin $\bar{c}$ ***skalaarikomponentit esittävät koordinaattiakselien suuntaisia muutoksia, kun siirrytään vektorin alkupisteestä loppupisteeseen***.

Sama komponenttiesitys kuin edellisellä $\bar{c}$ -vektorilla, on esimerkiksi pisteestä $A(2,\ 1,\ 1)$ pisteeseen $B(4,\ 3,\ 3{,}5)$ piirretyllä vektorilla, koska tällä vektorilla akselien suuntaiset muutokset ovat 2, 2 ja 2,5 yksikköä. (Piirrä kuva!) Vektorit $\bar{c} = \overrightarrow{OP}$ ja $\overrightarrow{AB}$ ovat yhtä pitkiä ja samansuuntaisia ts. $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$.

Mikä on saman vektorin loppupiste, jos alkupiste on (–1, –2, 0) ?

Jatkossa kantavektoreiksi valitaan yleensä $\bar{i},\ \bar{j}\ ja\ \bar{k}$, ja vektorin komponenttiesitys

$$\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$$

lyhennetään muotoon

$$\bar{a} = \left[a_1, a_2, a_3\right],$$

ts. vektorista kirjoitetaan näkyviin vain (skalaari)komponentit. Vektorien laskulaeista seuraa, että ***laskutoimitukset voidaan suorittaa komponenteittain***:

$$\boxed{\boldsymbol{\bar{a} = \left[a_1, a_2, a_3\right],\ \bar{b} = \left[b_1, b_2, b_3\right] \Rightarrow \begin{cases} \bar{a} + \bar{b} = \left[a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\right] \\ \bar{a} - \bar{b} = \left[a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3\right] \\ t\bar{a} = \left[ta_1, ta_2, ta_3\right] \end{cases}}}$$

Esim. 8 Origosta O pisteisiin $A(2, -1, 3)$ ja $B(4, 3, -5)$ piirretyt vektorit ovat

$$\bar{a} = [2,-1,3] \text{ ja } \bar{b} = [4,3,-5].$$

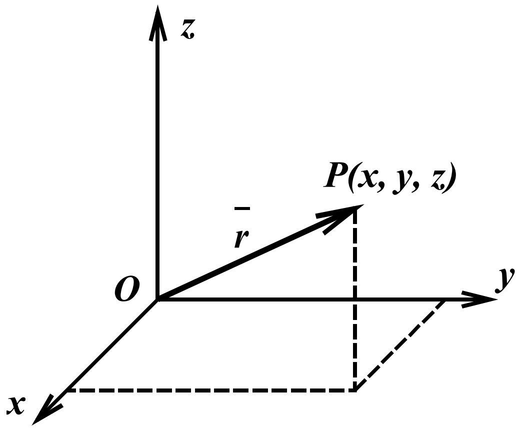
Täten

$$2\bar{a} - 3\bar{b} = [4-12, -2-9, 6+15] = [-8, -11, 21].$$

Vektori

$$\overrightarrow{AB} = [2, 4, -8],$$

sillä kun siirrytään A:sta B:hen, ensimmäinen koordinaatti kasvaa 2:lla, toinen kasvaa 4:llä ja kolmas pienenee 8:lla.



Origosta O johonkin pisteeseen $P(x, y, z)$ piirrettyä vektoria

$$\boxed{\bar{r} = \overrightarrow{OP} = [x, y, z]}$$

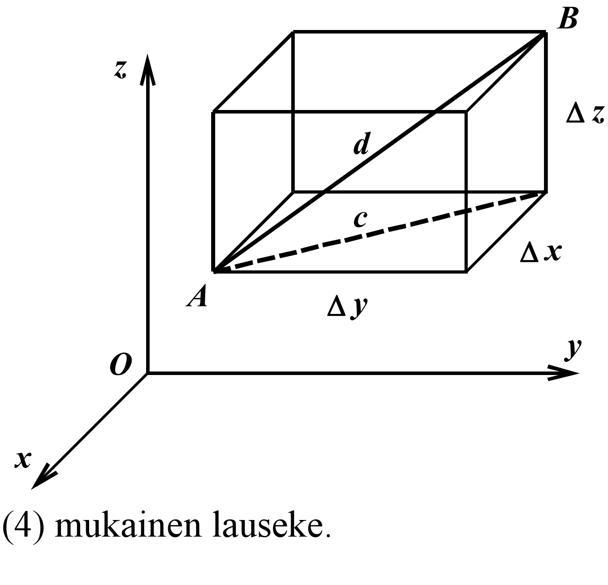
sanotaan ***pisteen P <u>paikkavektoriksi</u>***. ***Paikkavektorin komponentit ovat siis samat kuin vektorin kärjen koordinaatit***.

Lause. *Suorakulmaisessa xyz-koordinaatistossa kahden pisteen $A(a_1, a_2, a_3)$ ja $B = (b_1, b_2, b_3)$ välinen etäisyys (distanssi) on*

$$\boxed{d = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}}. \tag{4}$$

**Tod.* Kun sovelletaan Pythagoraan lausetta kahdesti viereiseen kuvaan, saadaan

$$d = \sqrt{c^2 + (\Delta z)^2}$$
$$= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}.$$



Koska Δx = pisteiden B ja A x-koordinaattien erotus jne., niin viimeinen neliöjuurilauseke on sama kuin väitteen (4) mukainen lauseke.

Seuraus: Origon etäisyys pisteestä $P(x, y, z)$ on

(5) $$\boldsymbol{d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,.$$

Kun tuloksia (4) ja (5) sovelletaan vektoreihin, saadaan seuraavat tulokset:

Jos $A(a_1, a_2, a_3)$ ja $B = (b_1, b_2, b_3)$, niin
$$\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right\| = \sqrt{(\boldsymbol{b_1 - a_1})^2 + (\boldsymbol{b_2 - a_2})^2 + (\boldsymbol{b_3 - a_3})^2}\,.$$
Vektorin $\boldsymbol{\bar{a} = [a_1, a_2, a_3]}$ ***pituus*** on $\boldsymbol{\|\bar{a}\| = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2}}}$.

Esim. 9 a) Määritä vektorin $\bar{a} = [4, 0, -3]$ suuntainen yksikkövektori.

b) Pisteestä $P(2, -1, 3)$ siirrytään 3 yksikköä edellisen vektorin $\bar{a}$ suuntaan. Mihin pisteeseen Q joudutaan ?

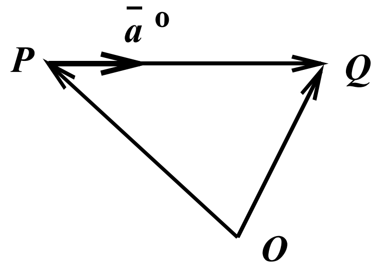
a) $$\bar{a}^{\circ} = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = \frac{[4, 0, -3]}{\sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2}} = \frac{[4, 0, -3]}{5} = \frac{1}{5}[4, 0, -3].$$

b) Käytetään paikkavektoreita seuraavasti (O = origo):

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + 3\bar{a}^{\circ} = [2, -1, 3] + \frac{3}{5}[4, 0, -3]$$

$$= \left[2 + \frac{12}{5}, -1, 3 - \frac{9}{5}\right] = \left[\frac{22}{5}, -1, \frac{6}{5}\right]$$

$$\therefore Q = \left(\frac{22}{5}, -1, \frac{6}{5}\right).$$



Opettele jo tässä alkuvaiheessa erottamaan tarkoin toisistaan *vektorimerkintä* (***hakasulut***) ja *pisteen merkintä* (***kaarisulut***). Piste esittää *paikkaa* tasossa tai avaruudessa, mutta vektori esittää x-, y- ja z-akselien suuntaisia *siirtymiä* siirryttäessä pisteestä toiseen. Pisteitä et voi esimerkiksi laskea yhteen.

Hakasulkeiden käyttäminen vektorien yhteydessä on pohjustusta myös ns. *matriisilaskentaan*. Vektorissa voi olla useampikin kuin kolme komponenttia, mutta tällaisilla vektoreilla

$$\bar{a} = [a_1, a_2, ..., a_n]$$

ei ole enää geometrista havainnollistusta. Monikomponenttisia vektoreita käytetään matematiikan lisäksi monilla matematiikkaa soveltavilla aloilla. Esimerkiksi tietoliikennetekniikassa tiedon siirtoa esittävä vektorissa voi olla hyvin monta komponenttia, koska sen tulee sisältää tiedon lähtö- ja tulopaikkojen tiedot, tiedon määrää, luonnetta yms. koskevat tiedot jne.

*Pidemmälle menevässä matematiikassa usein piste ja sen paikkavektori samaistetaan ja kummankin yhteydessä käytetään kaarisulkeita.

Määritelmä*:** Vektorin (skalaari)komponenttien suhdetta, millä tahansa <u>*positiivisella*</u> luvulla lavennettuna tai supistettuna, sanotaan tämän vektorin ***suunnaksi.

Esim. 10 Vektorin $\bar{a} = \left[-\frac{2}{3}, 1, -\frac{1}{3}\right]$ suunta on

$$\left(-\frac{2}{3}\right) : 1 : \left(-\frac{1}{3}\right) = (-2) : 3 : (-1).$$

Suunta $2 : (-3) : 1$ taas on $\bar{a}$:n vastavektorin $-\bar{a}$ suunta.

Harjoituksia
A

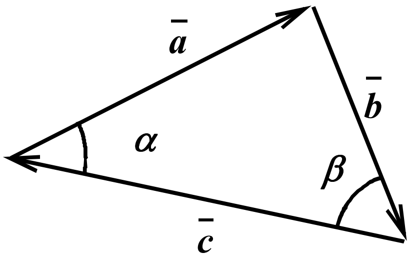
3.1 Suunnikkaan $ABCD$ kaksi A-kärjestä lähtevää sivuvektoria ovat $\overrightarrow{AB} = \bar{u}$ *ja* $\overrightarrow{AD} = \bar{v}$. Esitä seuraavat vektorit $\bar{u}$:n ja $\bar{v}$:n avulla:

$$\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{BD}.$$

3.2 Sievennä vektorilauseke $2(\bar{x} - 3\bar{y} + \bar{z}) - \frac{2}{3}(\bar{x} - 6\bar{y}) + \frac{1}{2}(\bar{z} - \bar{x})$.

3.3 Ratkaise vektoriyhtälö $\frac{2\bar{x}-3(\bar{a}+\bar{x})}{2}=\frac{4(\bar{x}-2\bar{a})}{3}$.

3.4 Määritä viereisessä kuvassa kulmat $\angle(\bar{a},\bar{b})$, $\angle(\bar{b},\bar{c})$, $\angle(\bar{c},\bar{a})$, kun $\alpha = 35{,}2^{\circ}$ ja $\beta = 58{,}3^{\circ}$.



3.5 Piste C jakaa janan AB suhteessa 3 : 5. Pisteestä O (joka ei ole suoralla AB) piirretään vektorit pisteisiin A, B ja C. Esitä C:hen piirretty vektori pisteisiin A ja B piirrettyjen vektorien lausekkeena.

3.6 Piirrä avaruuskoordinaatisto ja merkitse siihen kolme pistettä $A(4, –2, 3)$, $B(–2, 3, –1)$ ja $C(–5, –2, 4)$.

Huom. Yleensä tehtävissä, joissa on laskettava jotakin avaruuspisteiden koordinaattien avulla, ei kannata piirtää "todellista" kuvaa ts. sijoittaa pisteitä oikeille paikoilleen koordinaatistoon, vaan havainnollisemman kuvan saat kun piirrät tilanteesta tasogeometrisen ***mallikuvan****. Esimerkiksi kolmiotehtävässä piirrät kolmion "paperin tasoon" jonkin muotoisena etkä yritä sijoittaa kolmiota avaruuskoordinaatistoon.*

3.7 a) Määritä pisteestä (5, –1, 2) pisteeseen (3, 3, 2) piirretyn vektorin komponenttiesitys (käytä "hakasulkuesitystä").

b) Mitkä ovat vektoreiden $\bar{i}, \bar{j}$ ja $\bar{k}$ komponenttiesitykset $[x, y, z]$?

3.8 Laske kolmion $A(2, 4, 5)$ $B(4, –1, 2)$ $C(3, 2, –2)$ C-pisteestä lähtevät sivuvektorit ja niiden pituudet. Piirrä havainnollistava kuva (vrt. edellinen huomautus).

3.9 Vektorin $\bar{a} = [5, 13, -17]$ loppupiste on (2, –9, 6). Määritä alkupiste.

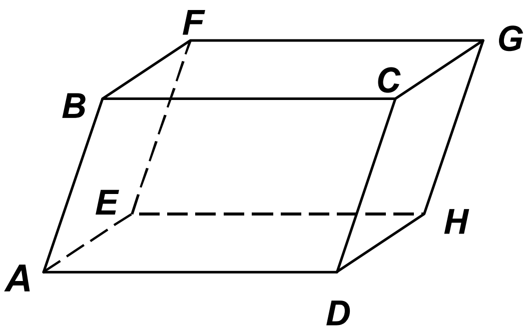
3.10 Pisteiden $A(2, –3, 5)$ ja $B(4, 5, 8)$ paikkavektorit ovat $\bar{r}_1$ *ja* $\bar{r}_2$. Mitkä ovat paikkavektorin $2\bar{r}_1 - 3\bar{r}_2$ kärjen koordinaatit ?

3.11 Pisteestä $A(2, –1, 3)$ siirrytään 5 yksikköä vektorille $\overrightarrow{BC}$ vastakkaiseen suuntaan. Mihin pisteeseen joudutaan, jos $B = (2, 5, 6)$ ja $C = (4, –1, 9)$? Piirrä havainnollistava kuva.

B

3.12 Suunnikkaan $ABCD$ kaksi A-kärjestä lähtevää sivuvektoria ovat $\overrightarrow{AB} = \overline{u}$ ja $\overrightarrow{AD} = \overline{v}$. Piste E jakaa sivun BC suhteessa 3 : 1 ja F puolittaa sivun AD. Esitä vektori $\overrightarrow{EF}$ vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ lausekkeena.

3.13 Viereisen ***suuntaissärmiön*** A-kärjestä pisteisiin B, D ja E piirretyt vektorit ovat $\overline{a}, \overline{b}, ja\, \overline{c}$. Esitä lävistäjävektorit $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{EC}$ ja $\overrightarrow{DF}$ näiden vektorien lausekkeina. (Ohje: siirry lävistäjävektorin alkupisteestä särmiön reunoja pitkin loppupisteeseen.)



3.14 Suunnikkaan $ABCD$ kolme kärkeä ovat $A(2, 1, 3)$, $B(0, 1, -1)$ ja $D(0, 0, 2)$. Laske C:n koordinaatit. Kärjet A, B, C ja D ovat peräkkäisiä kuten edellisen suuntaissärmiön etuosassa.

3.15 Määritä kolmiolevyn $A(1, 0, 1)$ $B(2, 2, 1)$ $C(-1, -1, 0)$ painopiste. (Ohje: käytä apuna kärkien paikkavektoreita ja esimerkin 7 tulosta.)

3.16 Piste C jakaa janan $A(2, 3, 1)$ $B(1, -2, 3)$ suhteessa 2 : 3. Laske C:n koordinaatit (käytä apuna paikkavektoreita).

3.17 Laske $|\overline{a}+\overline{b}|$, kun $|\overline{a}| = 3, |\overline{b}| = 4$ ja $\angle(\overline{a}, \overline{b}) = 60°$. Ohje: Piirrä vektorin $\overline{a}+\overline{b}$ kärjestä kohtisuora $\overline{a}$:lle ja laske ensin sen pituus. (Myöhemmin sama tehtävä ratkeaa luonnollisemmin ns. kosinilauseella.)

3.18 Pisteestä O kolmion kärkiin A, B ja C piirretyt vektorit ovat $\overline{a}, \overline{b}$, ja $\overline{c}$. Piste D on sivun BC keskipiste ja E jakaa sivun AB suhteessa 2 : 1. Laske vektorin $\overrightarrow{DE}$ lauseke.

C

3.19 Ovatko pisteet $A(-5, 6, -3)$, $B(1, -2, -1)$ ja $C(4, -6, 0)$ samalla suoralla (ts. saadaanko AB- ja AC-vektorit toisistaan vakiolla kertomalla) ?

3.20 Mistä pisteestä $X(x, y, z)$ pisteisiin $A(2, 3, 1)$, $B(4, 4, -3)$, $C(2, 3, 0)$, D(1, 0, 2) ja E(0, 2, 0) piirrettyjen vektorien summa on $\overline{0}$?

3.21 Kappale, johon vaikuttaa 700 N suuruinen painovoima (ts. $|\overrightarrow{F}| = 700\ N$), riippuu kahden köyden varassa. Köysien suunnat ovat vaaka- ja pystyakseliin nähden 4 : 3 ja (–12) : 5. Laske köysiin vaikuttavien voimien suuruudet. Ohje: voimat ovat muotoa

$$\overrightarrow{F_1} = t[4, 3],\ \overrightarrow{F_2} = u[-12, 5]\ \ ja\ \ \overrightarrow{F} = -700\bar{j} = [0, -700].$$

Ehdosta $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{F}$ saat t:lle ja u:lle yhtälöparin.

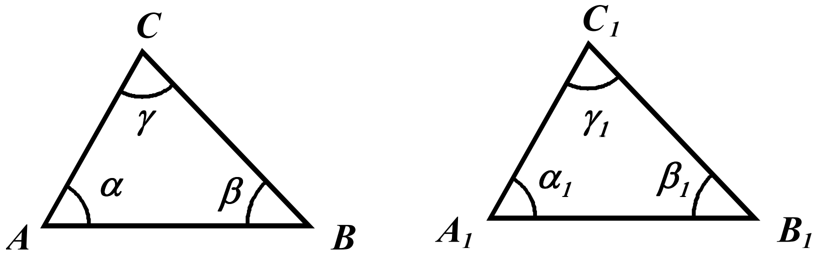
3.22 Kappale, jonka massa on 90,0 kg, riippuu katosta kolmen köyden varassa, joiden suunnat huoneen pääsuuntiin nähden ovat

1 : 1 : 1, (–2) : 1 : 1 ja 1 : (–2) : 1. Laske köysiin vaikuttavat voimat. Käytä g:n arvona 10,0 m/s^2, joten $|\overrightarrow{F}| = 900\ N$ (vrt. edellinen tehtävä).

4 KOLMIOIDEN YHTENEVYYS JA YHDENMUOTOISUUS

4.1 Yhtenevyys

Havainnollisesti voidaan sanoa, että kolmiot ABC ja $A_1B_1C_1$ ovat ***yhteneviä***, jos ne päällekkäin siirrettyinä yhtyvät täysin. Näin käy, jos kaikki kolme kulmaa ja kolme sivua ovat pareittain yhtä suuria.



Yhtenevyyden merkki on $\cong$. Siis se, että kolmio ABC on yhtenevä kolmion $A_1B_1C_1$ kanssa, merkitään $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$.

Kolmioiden ***yhtenevyyslauseet*** vähentävät tarvittavien yhtä suurien osien lukumäärän kuudesta kolmeen:

Lause 1. *Jos kahdessa kolmiossa jotkin seuraavista osista ovat pareittain yhtä suuret, kolmiot ovat yhtenevät:*

*1) kaksi kulmaa ja niiden välinen sivu (**ksk**-lause),*

*2) kaikki sivuparit (**sss**-lause),*

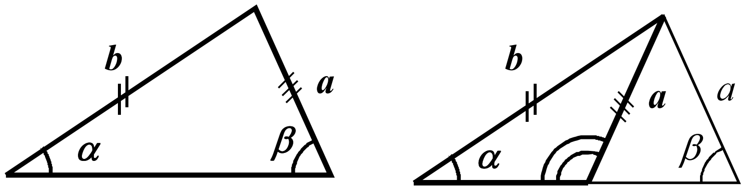
*3) kaksi sivua ja niiden välinen kulma (**sks**-lause),*

*4) kaksi kulmaa ja toisen vastainen sivu (**kks**-lause),*

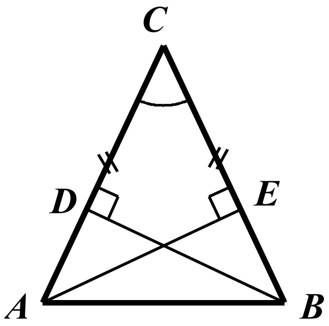
*5) kaksi sivua ja toisen vastainen kulma, edellyttäen että toisten yhtä suurien sivujen vastaiset kulmat ovat samaa tyyppiä: molemmat teräviä, molemmat suoria tai molemmat tylppiä (**ssk**-lause, **edellytys**).*

Kohdista 1) – 3) voit vakuuttua ajattelemalla kolmiot siirretyiksi päällekkäin. Kohta 4) palautuu kohtaan 1), sillä myös kolmas kulmapari on yhtä suuri.

Kohta 5) ei ole ilman "edellytystä" voimassa kuten seuraavasta kuvasta ilmenee: oikeanpuoleisessa kuvassa on kaksi kolmiota, joissa on samat a, b ja α kuin vasemmanpuoleisessa kolmiossa, mutta toisessa on β-kulma terävä ja toisessa tylppä.



Esim. 1 Todistetaan, että jos kolmiossa kaksi korkeusjanaa on yhtä pitkää, niin kolmio on tasakylkinen (vrt. symmetrinen tukirakennelma). Siis



Oletus: $AE = BD$ (korkeusjanoja, vrt. kuva).

Väitös: $AC = BC$.

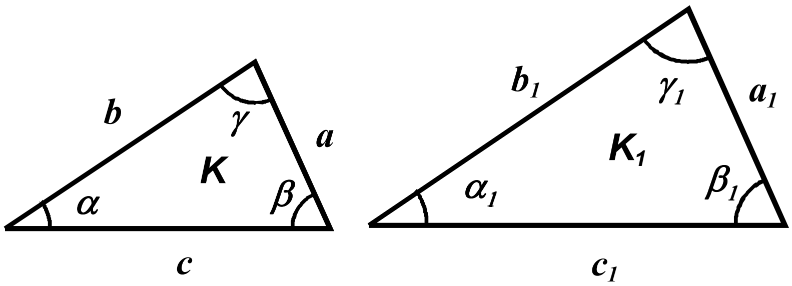
Tod.: $\Delta AEC \cong \Delta BDC$ $(\boldsymbol{kks})$, sillä $AE = BD$ (oletuksen mukaan), kulmat D ja E ovat suoria ja kulma C on yhteinen.

Yhtenevien kolmioiden vastinosina $AC = BC$.

4.2 Yhdenmuotoisuus

Havainnollisesti voidaan sanoa, että kolmiot ABC ja $A_1B_1C_1$ ovat ***yhdenmuotoiset***, jos ne eroavat vain korkeintaan kokonsa mutta eivät muotonsa puolesta toisistaan. Tällaisissa kolmioissa *vastinsivut ovat verrannolliset ja vastinkulmat yhtä suuret:*

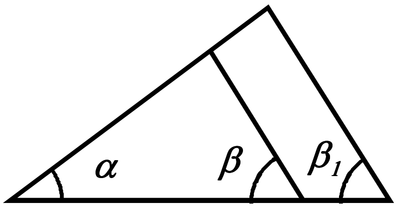
$$\boxed{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}_1} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b}_1} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{c}_1} \quad \text{ja} \quad \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_1, \ \ \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_1, \ \ \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_1.}$$



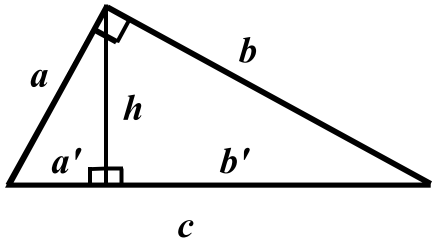
Yhdenmuotoisuuden merkki on ~. Yhdenmuotoisissa kolmioissa vastinsivujen suhdetta sanotaan ***mittakaavaksi***. Tarkemmin sanoen esim. yllä olevassa kuvassa *kuvio* $\boldsymbol{K_1}$ *on yhdenmuotoinen kuvion* $\boldsymbol{K}$ *kanssa mittakaavassa* $k = \frac{a_1}{a}$ *eli mittakaavassa* $a_1 : a$ (kuvassa suunnilleen 4 : 3).

Kolmioiden yhdenmuotoisuuden todistaminen perustuu usein seuraavaan ns. [***kk***]-lauseeseen (joka on eräs yhdenmuotoisuuslause).

Lause 2. *Jos kahdessa kolmiossa kaksi kulmaparia on yhtä suurta, kolmiot ovat yhdenmuotoiset* (tämä on ns. [***kk***]-lause).

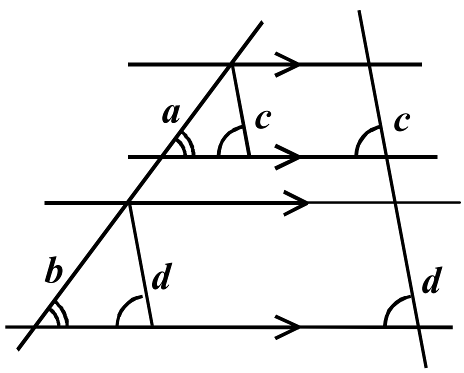


Perustelu: Jos esim. $\alpha = \alpha_1$ ja $\beta = \beta_1$ ja ajatellaan kolmiot asetetuiksi päällekkäin siten että α-kulmat yhtyvät, niin a- ja a_1-sivut tulevat yhdensuuntaisiksi (vrt. kuva). Tästä näkee, että kolmiot ovat samanmuotoisia.



Esim. 2 Suorakulmaiseen kolmioon piirretään korkeusjana h suoran kulman kärjestä. Kolmio jakautuu kahdeksi kolmioksi. Ne ovat kumpikin yhdenmuotoisia alkuperäisen kolmion kanssa edellisen lauseen [***kk***] mukaan, sillä kummassakin on suora kulma ja lisäksi yksi yhteinen kulma alkuperäisen kolmion kanssa.

Näiden kolmen yhdenmuotoisen kolmion vastinosista saadaan nyt erilaisia verrantoja. Piirrä kolmiot samaan asentoon, pitkä kateetti vaakasuoraan. Esimerkiksi osakolmioiden kateeteista saadaan verranto $a' : h = h : b'$. Täten h on a':n ja b':n *keskiverto*.



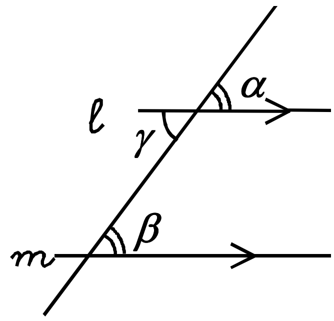
Esim. 3 Jos yhdensuuntaiset suorat leikkaavat kahta suoraa, niin vastinosat ovat verrannollisia (vrt. kuva):

(1) $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Perustelu: Siirrä c- ja d-janat janojen a ja b viereen yhdensuuntaissiirrolla. Muodostuvat kolmiot ovat yhdenmuotoisia [***kk***], mistä seuraa verranto (1).

Huom. Edellisessä perustelussa käytettiin apuna itse asiassa seuraavaa tulosta: *Jos suora leikkaa kahta yhdensuuntaista suoraa, niin* ***samankohtaiset kulmat*** *ovat yhtä suuret*, ts. seuraavan kuvan merkinnöin

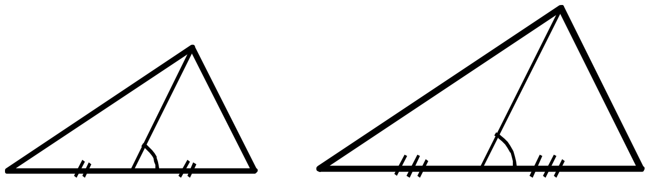
$$\ell \parallel m \;\Rightarrow\; \alpha = \beta.$$



Myös kääntäen: $\alpha = \beta \Rightarrow \ell \parallel m$. Tätä tulosta käytettiin oikeastaan *Lauseen 2* perusteluissa.

Viereisessä kuvassa α ja γ ovat ns. ***ristikulmia***. Ne ovat myös keskenään yhtä suuria (180° kierto). Siten myös $\beta = \gamma$.

Jos kaksi kolmiota ovat yhdenmuotoista mittakaavassa ***k*** ja niihin piirretään keskijanat, korkeusjanat, kulman puolittajat tms., niin myös tällaisten ***vastinviivojen pituuksien suhde = k*** (koska muodostuvat osakolmiot ovat yhdenmuotoiset).

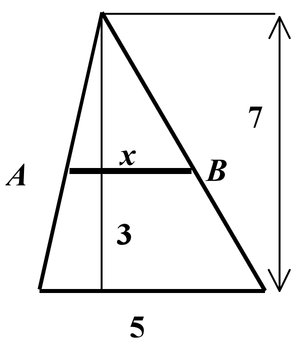


Kolmioiden *pinta-alojen* suhde on k^2, sillä jos kolmion kanta ja korkeus tulevat k-kertaisiksi, niin niiden tulo tulee k^2-kertaiseksi. Siis

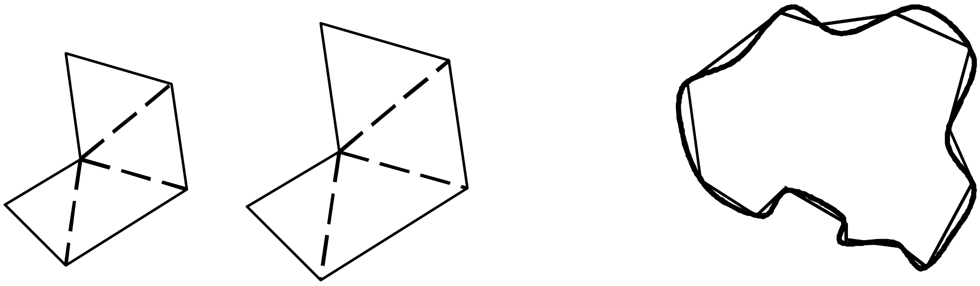
Lause 3. Yhdenmuotoisissa kolmioissa

1) vastinkulmat ovat yhtä suuret,
2) vastinviivojen suhde on = mittakaava,
3) vastinalojen suhde on = mittakaavan neliö.

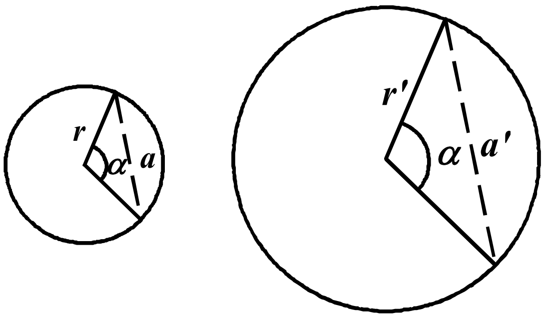
Esim. viereisessä kuvassa $\frac{x}{5} = \frac{7-3}{7}$, mistä saadaan janalle $x = AB$ pituus $2\frac{6}{7}$ (laske).



Vastaava tulos käy muillekin yhdenmuotoisille kuvioille, sillä yhdenmuotoiset *monikulmiot* voidaan hajottaa pareittain yhdenmuotoisiksi kolmioiksi ja *yleisemmät kuviot* saadaan monikulmioiden rajatapauksina, kun monikulmion sivujen lukumäärän annetaan lähestyä ääretöntä (vrt. seuraavat kuvat).



Esim. 4 Kaikki ympyrät ovat yhdenmuotoisia. Jos ympyrän säde r 1,5-kertaistetaan, niin samoin käy ympyrän *kehän* $(=2\pi r)$, halkaisijan d, α-asteisen kaaren pituuden jne. Sen sijaan *ympyrän ala* $(=\pi r^2)$ muuttuu $1{,}5^2 = 2{,}25$-kertaiseksi, samoin α-asteisen *sektorin ala* ja vastaavan *segmentin ala*.



Luku $\boldsymbol{\pi}$ tulee matematiikkaan siitä, että yhdenmuotoisuuden nojalla kaikissa ympyröissä *kehän* (ympyräviivan) ja halkaisijan suhde on sama, ja tätä suhdetta on alettu merkitä π:llä. Siis $\dfrac{\text{kehä}}{d} = \pi$, mistä seuraa, että *ympyrän* $\boxed{\textbf{kehä} = \pi \boldsymbol{d} = 2\pi \boldsymbol{r}}$.

Ympyrän pinta-alan kaava $\boxed{\boldsymbol{A} = \dfrac{\pi \boldsymbol{d}^2}{4} = \pi \boldsymbol{r}^2}$ johdetaan nykyään helpoimmin integroimalla.

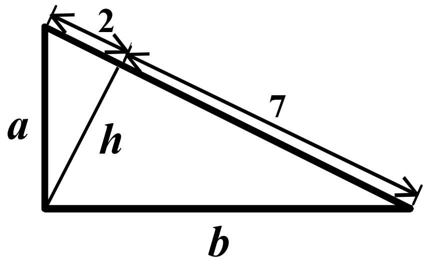
Yleisten tasokuvioiden ja kappaleiden yhdenmuotoisuutta käsitellään tarkemmin myöhemmin.

Harjoituksia

A

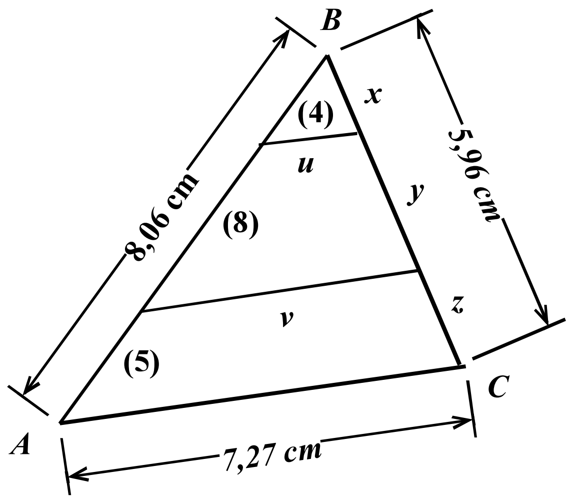
4.1 Todista yhtenevyyslauseita käyttäen, että pisteestä P ympyrälle piirretyt tangentit ovat yhtä pitkät.

4.2 Laske viereisen suorakulmaisen kolmion kateetit ja korkeusjana h.

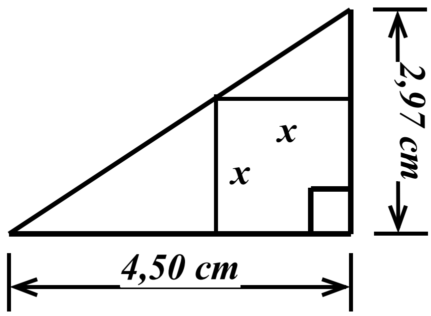


4.3 Suoran *l* pisteet *A*, *B* ja *C* projisioidaan yhdensuuntaisesti suoralle *m* pisteiksi *A′*, *B′* ja *C′*. Laske *A′C′*, kun *AB* = 5, *BC* = 4 ja *B′C′* = 3.

4.4 Kolmion kannan suuntaiset suorat jakavat kolmion sivun *AB* suhteessa 5 : 8 : 4 (kuva). Laske osien *x*, *y*, *z*, *u* ja *v* pituudet (mitat seuraavassa kuvassa).



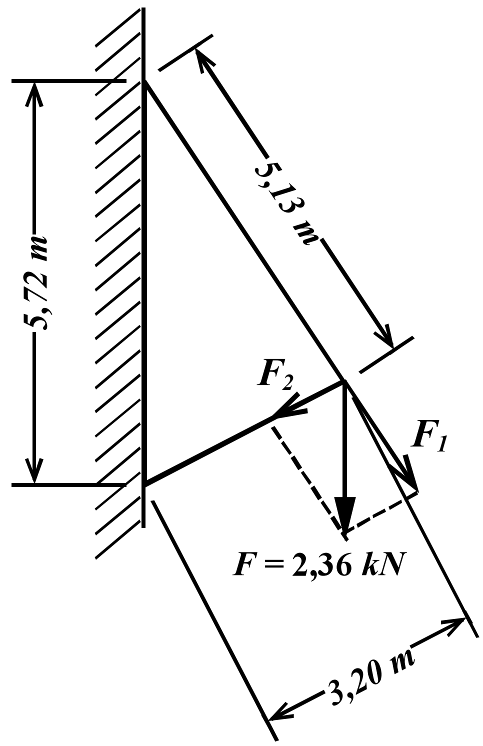
4.5 Laske neliön sivu *x* alla olevassa kuvassa.



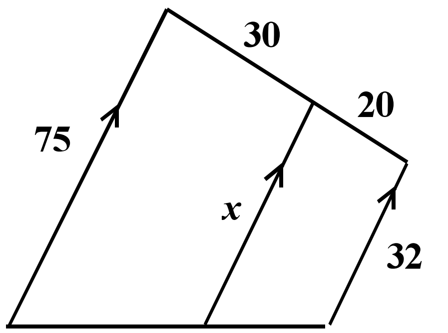
B

4.6 Suunnikkaassa vastakkaiset sivuparit ovat yhdensuuntaiset ja siten myös yhtä suuret. Todista yhtenevyyslauseita käyttäen, että a) kolmion ala on puolet samakantaisen ja korkuisen suunnikkaan alasta, b) suunnikkaan ala on yhtä suuri kuin yhtä pitkäkantaisen ja samankorkuisen suorakulmion ala.

4.7 Kuinka suuret ovat ylä- ja alatukivarsiin kohdistuvat voimat F_1 ja F_2 viereisen kuvan mukaisessa tilanteessa (tukivarsissa on nivelkiinnitykset)?



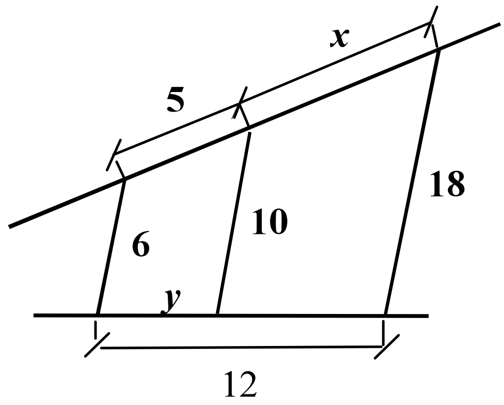
4.8 Laske x alla olevassa kuvassa.



4.9 Tasakylkisen kolmion kanta $AB = 6$ ja kylki $BC = 7$. Laske pisteestä A kylkeä BC vastaan piirretty korkeusjana. (Ohje: mitkä kolmiot ovat yhdenmuotoiset ja miksi?)

4.10. Piste E jakaa suunnikkaan $ABCD$ sivun BC suhteessa 2 : 1. Missä suhteessa janojen AE ja DB leikkauspiste jakaa lävistäjän DB ?

4.11 Viereisessä kuvassa kolme tukea (pituudet 6, 10 ja 18) ovat yhdensuuntaiset. Laske x ja y.

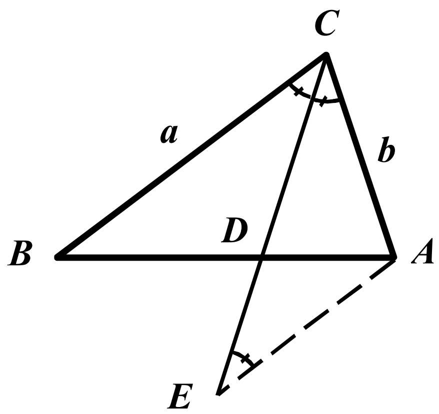


C

4.12 Pallo, jonka säde on 3, on vaakasuoralla tasolla. Pallon keskipisteen yläpuolella on pistemäinen valolähde. Kuinka korkealla valolähteen on oltava tasosta, jotta pallon varjon pinta-ala olisi sama kuin pallon ala ? (Pallon ala $A = 4\pi r^2$.)

4.13 Todista, että *kolmion kulman puolittaja jakaa vastaisen sivun viereisten sivujen suhteessa*, ts. seuraavassa kuvassa

$BD : DA = a : b.$

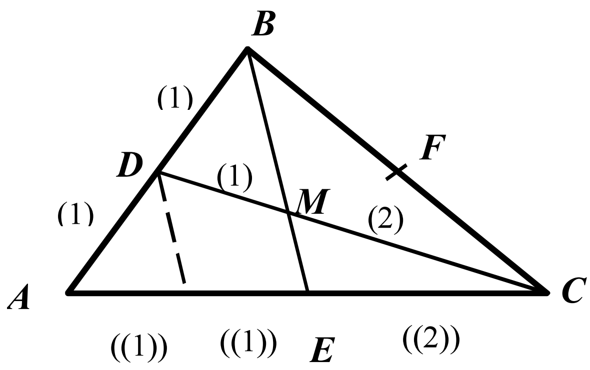


Ohje: Piirrä A:n kautta jana $AE \parallel CB$. Kolmio CAE on tasakylkinen (miksi), joten $AE = b$. Väite seuraa nyt yhdenmuotoisista kolmioista (mistä ja miten?)

4.14 Kolmion sivut ovat $a = 5$, $b = 7$ ja $c = 9$. Kuinka pitkiin osiin B-kulman puolittaja jakaa b-sivun ? (Ohje: edellinen tehtävä.)

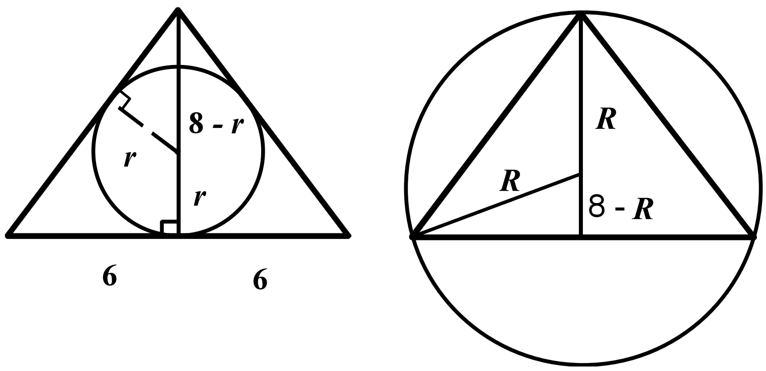
4.15 Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat 3 ja 4 (yksikköä). Laske pienimmän kulman puolittajan pituus.

4.16 Todista, että *kolmion keskijanojen leikkauspiste M jakaa jokaisen keskijanan kärjestä lukien suhteessa 2 : 1.*



Ohje: Piirrä D:n kautta keskijanan BE suuntainen jana (kuva). Perustele seuraavat vaiheet: Koska AB jakautuu suhteessa 1 : 1, samoin käy janan AE. Siten CE on kaksi jako-osaa ja CD jakautuu suhteessa 2 : 1.

4.17 Tasakylkisen kolmion kanta on 12 ja kylki 10. Laske *kolmion sisään ja ympäri piirrettyjen ympyröiden* säteet r ja R (kuva alla).



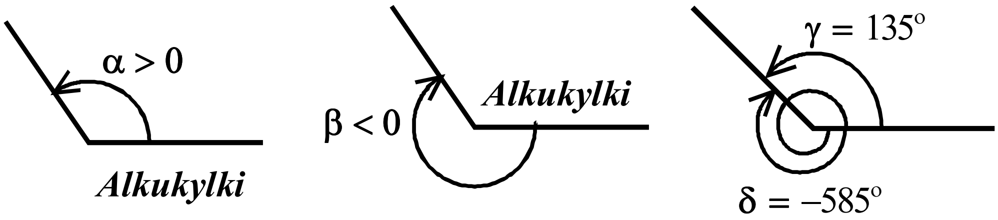
(Käytä säteen r laskemisessa yhdenmuotoisia kolmioita ja säteen R laskemisessa Pythagoraan lausetta.)

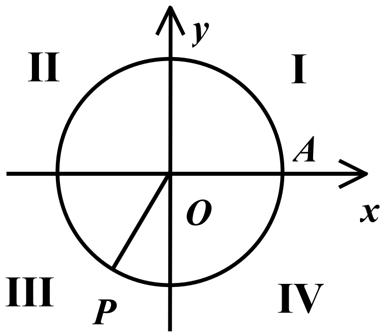
5 TRIGONOMETRISET FUNKTIOT

5.1 Suunnattu kulma

Trigonometriset funktiot $\sin\alpha, \cos\alpha$ ja $\tan\alpha$ ovat edellä määritellyt vain kun α on terävä kulma eli välillä $0 < \alpha < 90^{\circ}$. Pyrkimyksenä on yleistää määritelmä koskemaan kaikenkokoisia kulmia. Jotta mukaan saadaan myös yli 360° kulmat ja negatiiviset kulmat, kulmakäsite täytyy liittää kiertoliikkeeseen seuraavasti.

Ajatellaan kulman syntyvän niin, että kulman alkukylki kiertyy loppukyljeksi. Kulma on ***positiivinen*** *tai* ***negatiivinen*** sen mukaan, onko kiertosuunta positiivinen eli vastapäivään vai negatiivinen eli myötäpäivään.





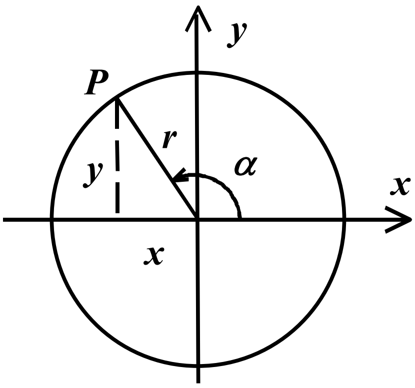
Trigonometriassa kulma ajatellaan asetetuksi *xy*-koordinaatistoon niin että sen kärki on origossa ja alkukylki positiivisella x-akselilla. *Sen mukaan, mihin neljännekseen loppukylki joutuu, sanotaan että kulma on tässä neljänneksessä*. Esim. kaikki ne kulmat, joiden loppukylki on oheisen kuvan mukaisessa asemassa *OP*, ovat eräitä *kolmannen neljänneksen kulmia*.

Kulmia *AOP* (edellinen kuva) on äärettömän paljon. Eräs niistä on suunnilleen $180^{\circ} + 60^{\circ} = 240^{\circ}$ ja kaikki muut saadaan tekemällä tähän kulmaan 360° suuruisia muutoksia (lisäyksiä tai vähennyksiä). Nämä kaikki kulmat voidaan esittää muodossa

$$240^{\circ} + n\cdot 360^{\circ} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Mieti, mikä kulma saadaan, kun $n = -1$. Entä kun $n = 1$.

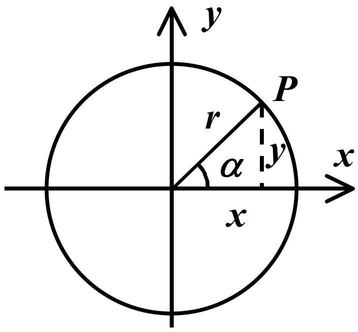
5.2 Trigonometristen funktioiden yleiset määritelmät



Olkoon kulman α loppukyljen ja ***r***-säteisen ympyrän leikkauspiste $P(x, y)$.

Määritelmä:

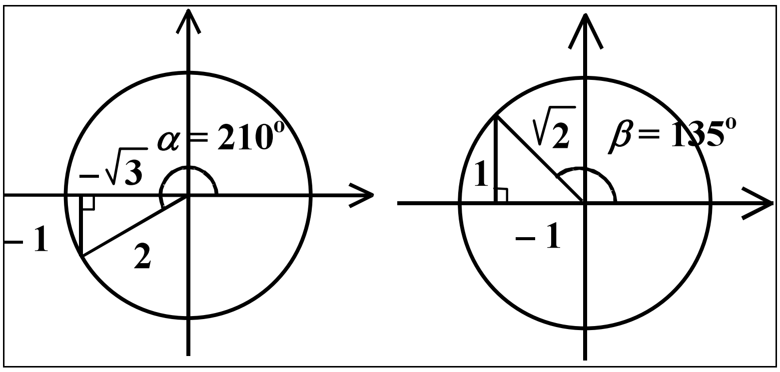
$$\boxed{\begin{aligned}&\mathbf{sin}\,\alpha = \frac{y}{r}, \quad \mathbf{cos}\,\alpha = \frac{x}{r}\\ &\mathbf{tan}\,\alpha = \frac{y}{x}, \text{ kun } x \neq 0.\end{aligned}}$$



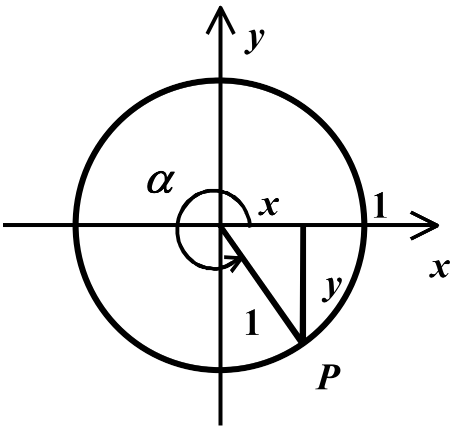
Jos α on terävä kulma, määritelmä yhtyy aikaisempaan "alkeismääritelmään" (kuva vieressä). Muissakin neljänneksissä voidaan ajatella käytetyksi kulmaan α liittyvää ***"koordinaattikolmiota"***, jonka muodostavat r sekä pisteen P y- ja x-koordinaatit (vrt. viereiset kuvat).

Säde r on aina > 0, kun sen sijaan x ja y voivat olla negatiivisiakin. Säteen r suuruus ei vaikuta trigonometristen funktioiden arvoihin, koska r:n muuttaminen muuttaa vain kolmion kokoa yhdenmuotoisesti.

Niillä kulmilla, joihin liittyy 30-, 45- tai 60 asteen koordinaattikolmio, kannattaa säteeksi valita 2 tai $\sqrt{2}$***, jotta x- ja y- koordinaatit ja säde muodostaisivat "tavallisen kokoisen" erikoiskolmion***, esim.



$$\boxed{\sin\alpha = \frac{-1}{2}, \ \cos\alpha = \frac{-\sqrt{3}}{2}, \ \tan\beta = \frac{1}{-1} = -1}.$$



Esimerkiksi *trigonometrisia kaavoja johdettaessa on usein hyödyllistä valita trigonometrisen ympyrän säteeksi 1.* Tällöin

(1) $\sin\alpha = \dfrac{y}{1} = y,\ \cos\alpha = \dfrac{x}{1} = x$

ja $\tan\alpha = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Edelleen tässä tapauksessa Pythagoraan lauseen mukaan $y^2 + x^2 = 1$, joten (1):n nojalla $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$. Näin on johdettu (todistettu) seuraavat yleiset tulokset:

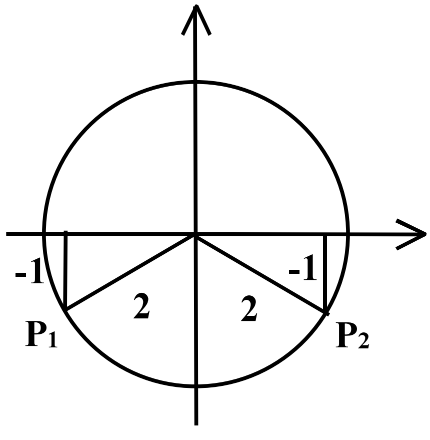
$$\boxed{\mathbf{\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} \quad \text{ja} \quad \mathbf{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}}.$$

Esim. 1 Laske $\cos\alpha$, kun $\sin\alpha = -0{,}368$ ja α on 4. neljänneksessä.

Edellisen tuloksen mukaan $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$, *missä* ***etumerkki on valittava neljänneksen mukaan***. Neljännessä neljänneksessä kosini on positiivinen, joten tässä esimerkissä oikea etumerkki on +. Siis

$$\cos\alpha = +\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-(-0{,}368)^2} = \sqrt{1-0{,}368^2} \approx 0{,}030\,.$$

Esim. 2 Määritä kaikki ne kulmat, joiden sini on –0,5 ts. ratkaise trigonometrinen yhtälö $\sin x = -½$.



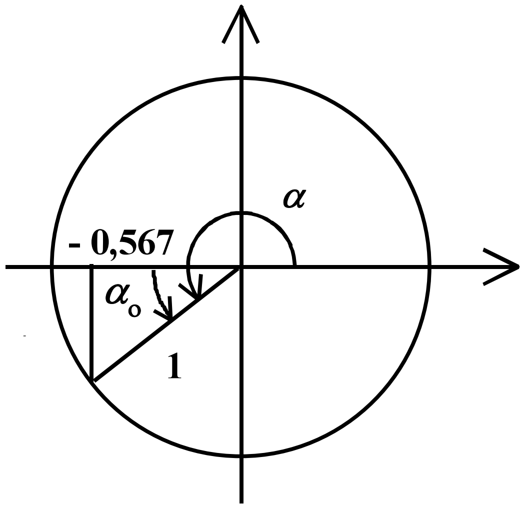
Tällaisia ovat 3. ja 4. neljänneksen kulmat

$$x_1 = 180°+30°$$
$$x_2 = 360°-30°$$

ja näistä täysiä kierroksia lisäämällä tai vähentämällä saadut kulmat, siis

$$\begin{cases} x_1 = 210°+n\cdot 360° \\ x_2 = 330°+n\cdot 360° \end{cases}.$$

Esim. 3 Laske sellainen välillä 180° < α < 360° oleva kulma, että $\cos\alpha = -0{,}567$.



Laskin antaisi 2. neljänneksen kulman 124,5…°, mutta oikea kulma on 3. neljänneksessä. Etsitään ensin vastaava ***koordinaattikolmion*** kulma, ts. sellainen terävä kulma α_o, että

$$\cos\alpha_o = +0{,}567.$$

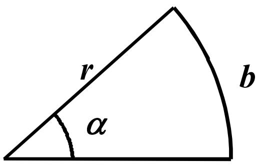
Tällainen *"peruskulma"* on α_o = 55,45...°. Oikea α:n arvo on siten $\alpha = 180° + 55{,}45...° \approx 235{,}5°$.

5.3 Radiaani

Kulman suuruus voidaan ilmaista paitsi asteissa tai gooneissa, myös mm. ***radiaaneissa*** (lat. *radius* = säde).

Määritelmä. *Kulman suuruus* ***radiaaneissa*** *on kulmaa vastaavan ympyränkaaren suhde säteeseen:*

$$\boxed{\alpha = \frac{b}{r}}.$$



Tämä suhde ei riipu säteen suuruudesta, sillä sektorit, joilla on sama keskuskulma, ovat yhdenmuotoiset.

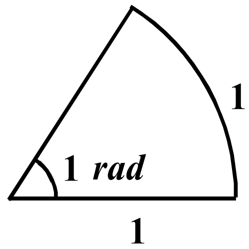
Esim. yllä olevan kulman suuruus on radiaaneissa (mittaa itse)

$$\alpha \approx \frac{\quad mm}{\quad mm} \approx 0{,}7\,rad.$$

Kulman suuruus radiaaneissa on reaaliluku (pituusyksiköt supistuvat pois). Joskus kuitenkin radiaaneihin on syytä liittää mm. selvyyden vuoksi "mittayksikkö" *rad*.

Huom. Asteiden ja goonien yhteydessä mittayksikköä ° tai *gon* ei saa koskaan jättää merkitsemättä.

Määritelmästä seuraa, että *kulman, jota vastaava kaari on säteen suuruinen, suuruus on* 1 *rad.*



Radiaani on suuri kulmanyksikkö asteisiin verrattuna:

$$1\,rad \approx 57{,}2958° \;(\approx 57°17'45'').$$

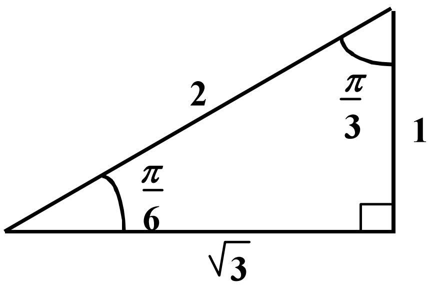
Koska koko ympyrän kehän pituus on $2\pi r$, niin täysi kulma eli $360° = \dfrac{2\pi r}{r} = 2\pi$ radiaania. Siis radiaaneissa

***täysi kulma* = 2π, *oikokulma* = π, *suora kulma* = π/2**

ja yleisemmin (***opettele hyvin***):

1°	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**	**120°**	**150°**	**180°**	**270°**	**360°**
$\dfrac{\pi}{180}$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{2\pi}{3}$	$\dfrac{5\pi}{6}$	π	$\dfrac{3\pi}{2}$	2π

Esim. 4 Erikoiskolmion, jonka kulmat ovat $\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}$, sivut suhtautuvat kuten $\mathbf{1 : \sqrt{3} : 2}$.

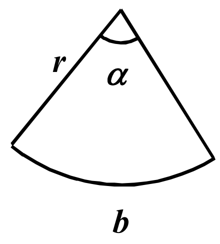


Esim. 5 Koska $1° = \dfrac{\pi}{180}$ radiaania, niin $k° = k \cdot \dfrac{\pi}{180}$ radiaania. Siis ***asteet muutetaan radiaaneiksi kertomalla astemäärä luvulla*** $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{180}}$. Tätä sääntöä käytetään mm. tietojenkäsittelyssä. Esim.

$$40°15'27'' = 40° + \frac{15°}{60} + \frac{27°}{3600} \approx 40{,}2575°$$

$$= \frac{\pi}{180} \cdot 40{,}2575\,(rad) \approx 0{,}7026\;(rad).$$

Esim. 6 Jos ympyrän sektorin keskuskulma on $\alpha = \dfrac{b}{r}$ radiaania, niin sektorin ala on α/2π:s osa koko ympyrän alasta. Siis



$$A = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot \pi r^2 = \frac{\alpha r^2}{2} = \frac{\frac{b}{r} \cdot r^2}{2} = \frac{br}{2}.$$

Sektorin ala on näin ollen sama kuin b-kantaisen ja r:n korkuisen kolmion ala.

Huomaa myös tulos $\boxed{\boldsymbol{b = r\alpha}}$, missä α on radiaaneissa.

Harjoituksia

A

5.1 Laske 120° kulman sini, kosini ja tangentti (sopivasäteisen ympyrän ja koordinaattikolmion avulla).

5.2 Kulman α *kotangentti, sekantti ja kosekantti* määritellään (niillä α:n arvoilla, joilla nimittäjä ei ole 0) seuraavasti

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}, \quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \quad \text{ja} \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

Laske 150° kulmalle näiden trigonometristen funktioiden arvot.

5.3 Laske $\tan\alpha$, kun $\sin\alpha = -\dfrac{2}{3}$ ja α on 3. neljänneksessä (käytä trigonometrista ympyrää).

5.4 Määritä kaikki sellaiset välillä 0...360° olevat kulmat α, että

a) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, b) $\cos\alpha = -0{,}5$, c) $\tan\alpha = -\sqrt{3}$.

5.5 Muuta radiaaneiksi (harjoittele nopeutta; käytä laskemisessa jotakin seuraavantapaista menetelmää: $330° = 2\pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{11\pi}{6}$):

a) 45° 135° 210° 315° 120° 150° 60° 420°,

b) 240° 105° 330° 75° 300° 270° 90° 720°,

c) $-22{,}5^{\circ}$ -30° 105° 450° -15° 150 *gon* 350 *gon*.

5.6 Piirrä funktioiden $y = \sin x$ ja $y = \cos x$ kuvaajat, antamalla x:lle "erikoiskulma-arvoja" 0, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/2$, $2\pi/3$, $3\pi/4$, ... ja vastaavia negatiivisia arvoja.

5.7 Paljonko on 27° radiaaneissa (tarkka, supistettu arvo)?

5.8 Ympyrän keskuskulma on $\pi/10$ ja säde 5. Laske vastaavan kaaren pituus ja sektorin ala (tarkat arvot) sekä vastaavan segmentin alan likiarvo.

B

5.9 Perustele yksikköympyrän avulla seuraavat väitteet: *Terävän kulman α ja sen vieruskulman $\pi - \alpha$ sinit ovat yhtä suuret ja kosinit vastalukuja.*

5.10 Täydennä (perustele trigonometrisen ympyrän avulla):

a) $\alpha = \dfrac{5\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \\ \tan\alpha = \end{cases}$

b) $\cos\varphi = -\dfrac{4}{5},\ \pi < \varphi < 2\pi \Rightarrow \sin\varphi =$

c) $\cos\varphi = -\dfrac{1}{2},\ \pi < \varphi < 2\pi \Rightarrow \varphi =$

d) $\sin\theta = -\dfrac{5}{13}$, θ on 4. neljänneksessä $\Rightarrow \tan\theta =$

5.11 Todista, että a) $\sin^2\alpha = \dfrac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$, b) $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}$
(*ohje*: lähde liikkeelle yhtälön oikeasta puolesta (op) ja käytä *Esimerkin 1* edellä olleita trigonometrisia kaavoja).

c) Laske sovelluksena $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$, kun $\tan\alpha = 5$ ja α on 3. neljänneksessä.

5.12 Laske ilman laskinta $\sin\dfrac{\pi}{3} + \cos\dfrac{2\pi}{3} + \sin\dfrac{5\pi}{6}$.

5.13 Laske kaikki sellaiset kulmat, jotka toteuttavat seuraavan yhtälön (vastaukset radiaaneissa ja tarkkoina arvoina jos mahdollista):

a) $\sin x = 1$, b) $\cos x = -1$, c) $\sin x = 2$, d) $\tan x = 2$,

e) $\cot x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, f) $\sec x = 2{,}845$.

5.14 Laske $\sin x$ ja $\cos x$, kun $\tan x = -3/4$ ja $\sin x < 0$.

C

5.15 Sievennä seuraavat lausekkeet:

$$a)\,(\tan\omega)(\sin\omega + \frac{\cos^2\omega}{\sin\omega}) \qquad (\text{kun} \quad \sin\omega \neq 0),$$

$$b)\,\sin^4 t - \cos^4 t - 2\frac{\tan^2 t}{1+\tan^2 t}. \qquad \text{Ohje: } a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2).$$

5.16 Laske $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$, kun $\tan\alpha = \dfrac{1-a^2}{2a}$, $a < 0$ ja α on 3. neljänneksessä. (Ohje: koska kyseessä on 3. neljännes ja $a < 0$, niin koordinaattikolmiossa voidaan x-koordinaatiksi ottaa $2a$).

5.17 Kuten edellinen, mutta $a > 0$.

5.18 Ratkaise trigonometrinen yhtälö (vastaus radiaaneissa, tarkkoina arvoina)

$2\cos 3x = -1$. (Ohje: merkitse $3x = \alpha$)

5.19 $\arcsin x$ (lue: ***"arkussini x"***) ***on sellainen välillä $-\pi/2 \ldots \pi/2$ oleva kulma, että sen sini on x***. Esimerkiksi $\arcsin 0{,}5 = \pi/6$ ja $\arcsin(-1) = -\pi/2$. Suorakulmaisen kolmion trigonometriassa ("alkeistrigonometriassa") voidaan kirjoittaa

$$\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2\alpha = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = 60^\circ \ (= \frac{\pi}{3}) \Leftrightarrow \alpha = 30^\circ \ (= \frac{\pi}{6}).$$

Ratkaise tämä yhtälö yleisesti *arkussini*-merkintää käyttäen.

6 KOLMION RATKAISEMINEN

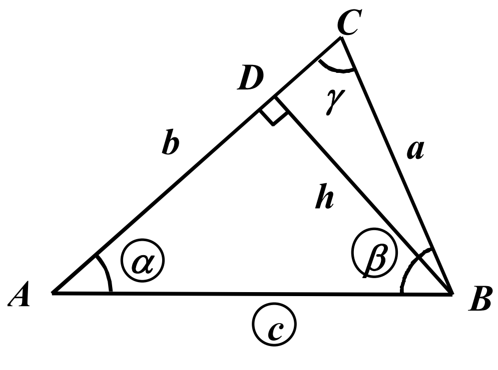
6.1 Yleistä

Jos kolmion sivuista ja kulmista tunnetaan kolme ja niistä ainakin yksi on sivu, voidaan kolmion muut sivut ja kulmat määrittää. Tällaista tehtävää sanotaan perinteisesti ***kolmion ratkaisemiseksi***.

Ratkaisemiseen voitaisiin katsoa kuuluvaksi myös muita tehtäviä, esim. kolmion alan määrittäminen, sisään- tai ympäri piirrettyjen ympyröiden säteiden laskeminen, keski- tai korkeusjanojen pituuksien laskeminen tms.

Ratkaistaan ensin yksi tehtävä alkeistrigonometrialla:

Esim. 1 Kolmion kaksi kulmaa ovat $\alpha = 42{,}0°$, $\beta = 67{,}2°$ ja näiden välinen sivu on c = 5,62. Laske muut sivut, kolmas kulma ja ala kolmen numeron tarkkuudella.



$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = \underline{\underline{70{,}8°}}$.

$h = c \sin \alpha = 3{,}760...$

$AD = c \cos \alpha = 4{,}1764...$

$a = \dfrac{h}{\sin \gamma} = 3{,}982... \approx \underline{\underline{3{,}98}}.$

$DC = a \cos \gamma = 1{,}309...$

$b = AD + DC = 5{,}486... \approx \underline{\underline{5{,}49}}$.

Pinta-ala $\boldsymbol{A} = \dfrac{hb}{2} = 10{,}31... \approx \underline{\underline{10{,}3.}}$

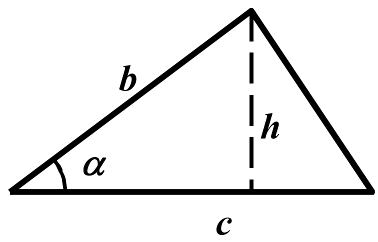
Välitulokset on tallennettu laskimeen ja niistä on merkitty näkyviin yksi ylimääräinen numero (ja kolme pistettä).

Seuraavissa kohdissa otetaan käyttöön tehokkaampia menetelmiä, lähinnä *sini*- ja *kosinilauseet*. Ensin kuitenkin johdetaan kolmion alalle laskukaava.

6.2 Kolmion ala ja sinilause

Lause 1 *Jos tunnetaan kolmion <u>kaksi sivua ja niiden välinen kulma</u>, esim. b, c ja α, niin kolmion ala on*

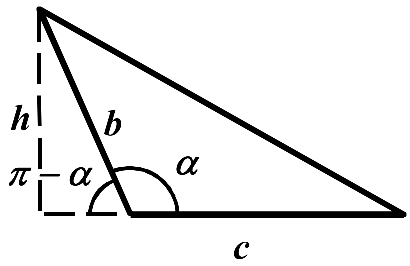
$$\boxed{A = \frac{1}{2} b c \sin \alpha}$$



Tod. Jos α on terävä kulma, niin

$$h = b \sin \alpha.$$

Jos taas α on tylppä kulma, niin



$$h = b \sin (\pi - \alpha) = b \sin \alpha,$$

sillä kulman ja sen vieruskulman sinit ovat yhtä suuret.

Kummassakin tapauksessa ala

$$A = \frac{hc}{2} = \frac{bc \sin \alpha}{2}.$$

Jos $\alpha = \pi/2$, niin $\sin \alpha = 1$ ja silloinkin $h = b = b \sin \alpha$)

<u>Sinilause</u>: ***Kolmiossa jokaisen sivun suhde vastakkaisen kulman siniin on yhtä suuri, ts.***

(1)
$$\boxed{\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}}$$

Tod. Lauseen 1 mukaan

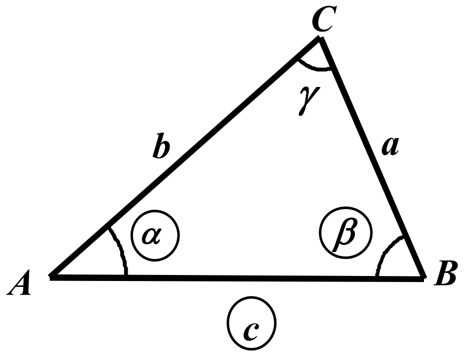
$$\frac{1}{2} bc \sin \alpha = \frac{1}{2} ac \sin \beta = \frac{1}{2} ab \sin \gamma,$$

sillä nämä kolme lauseketta ovat jokainen = kolmion ala. Kun tämä kaksoisyhtälö kerrotaan 2:lla ja jaetaan sitten tulolla *abc*, saadaan

$$\frac{bc \sin \alpha}{abc} = \frac{ac \sin \beta}{abc} = \frac{ab \sin \gamma}{abc} \quad \text{eli} \quad \frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}.$$

Tästä seuraa tulos (1) (kääntämällä suhteet).

Esim. 2 Sama kolmio kuin edellä esimerkissä 1: Tunnetaan sivu $c = 5{,}62$ sekä kaksi kulmaa $\alpha = 42{,}0^{\circ}$, $\beta = 67{,}2^{\circ}$ ja siten kolmaskin kulma $\gamma = 70{,}8^{\circ}$.



Koska tunnetaan *yksi kulma-sivu-pari*, nimittäin c ja γ sekä muutkin kulmat, voidaan loput sivut a ja b laskea sinilauseella:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \quad \therefore a = \frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

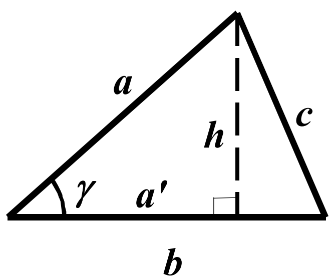
$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \quad \therefore b = \frac{c\sin\beta}{\sin\gamma}, \quad \boldsymbol{A} = \frac{bc\sin\alpha}{2}.$$ Suorita laskut.

Yleisesti *sinilause sopii hyvin* ***sivujen*** *laskemiseen, jos kolmiosta tunnetaan yksi* ***kulma-sivu-pari*** *(esim. a ja α tai b ja β)* ***ja toinenkin kulma***. Muissa tapauksissa ns. *kosinilause* on yleensä sinilausetta käyttökelpoisempi.

6.3 Kosinilause

Kosinilause: ***Kolmiossa yhden sivun neliö on kahden muun sivun neliöiden summa miinus kaksi kertaa tulo, jossa tekijöinä ovat kaksi viimeksi mainittua sivua ja näiden välisen kulman kosini:***

$$\boxed{\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}}.$$



Tod. Olkoon a' sivun a projektio b-sivulla (viereinen kuva). Silloin

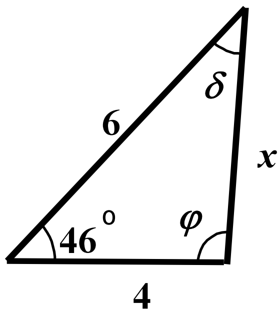
$$c^2 = h^2 + (b - a')^2 \quad \left|\begin{array}{l} h = a\sin\gamma \\ a' = a\cos\gamma \end{array}\right.$$

$$= (a\sin\gamma)^2 + (b - a\cos\gamma)^2$$

$$= a^2\underbrace{(\sin^2\gamma + \cos^2\gamma)}_{=1} + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Jos γ on tylppä kulma, todistus käy samantapaisesti, vrt. myös Lauseen 1 todistuksen vastaava kohta. Jos γ on suora kulma, niin $\cos\gamma = 1$ ja kosinilauseen tulos on sama kuin Pythagoraan lause.

Esim.3. Laske viereisessä kolmiossa kulma φ ja sivu x kolmen numeron tarkkuudella.



Koska tunnetaan _kaksi sivua ja niiden välinen kulma_, kosinilause sopii hyvin tämän kulman vastaisen sivun x laskemiseen:

$x^2 = 6^2 + 4^2 - 2{\cdot}6{\cdot}4{\cdot}\cos 46^\circ = 18{,}65...$

$\therefore\ x = 4{,}319... \approx 4{,}32.$

Tämän jälkeen esim. kulma φ voidaan laskea kosinilauseella:

$$6^2 = 4^2 + x^2 - 2\cdot 4\cdot x\cdot\cos\varphi$$

$$\therefore \cos\varphi = \frac{36-16-x^2}{-8x} = -0{,}03888...\ \therefore \varphi \approx 92{,}2^\circ.$$

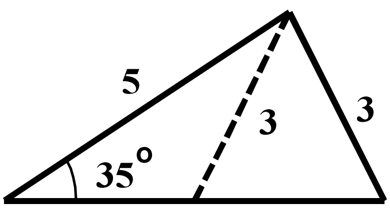
Huom. Jos kulma φ laskettaisiin sinilauseella, olisi valittavana kaksi kulmaa:

$$\frac{\sin\varphi}{6} = \frac{\sin 46^\circ}{x} \quad \therefore \sin\varphi = \frac{6\sin 46^\circ}{x} = 0{,}9992...$$

$$\therefore \varphi = 87{,}77...^\circ \quad \text{tai} \quad 180^\circ - 87{,}77...^\circ = 92{,}22...^\circ.$$

Näistä olisi vaikea päätellä, kumpi on tässä esimerkissä oikea kulma, terävä vai tylppä (vai molemmat). _*Siksi sinilause sopii huonosti kulman laskemiseen*_.

Jos φ:n sijaan laskisit kulman δ sinilauseella, ei tätä vaikeutta esiintyisi, sillä δ on terävä.



Jos kolmiosta tunnetaan kaksi sivua ja toisen sivun vastainen kulma, voi ratkaisuja tulla 2 kappaletta (terävä- ja tylppäkulmainen kolmio). Tämä näkyy kosinilausetta käytettäessä siten, että kolmannelle sivulle x saadaan toisen asteen yhtälö, jolla voi olla kaksi, yksi tai ei yhtään positiivista ratkaisua. Esim. edellisen kuvan tapauksessa

Harjoituksia

A

6.1 Kolmiossa on $\alpha = 27{,}5°$, $\gamma = 90{,}0°$ ja $c = 5{,}86$. Laske muut sivut, kulmat ja ala. (Laskuissa et tarvitse sini- tai kosinilausetta, vaikka niitäkin voisit käyttää.)

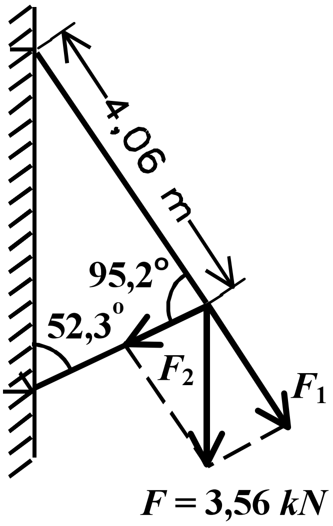
6.2 Kolmion kaksi sivua ovat $a = 5{,}76\ m$ ja $c = 7{,}55\ m$ sekä ala $15{,}3\ m^2$. Laske näiden sivujen välinen kulma (kaksi ratkaisua).

6.3 Voimat F ja G muodostavat resultanttinsa $R = 5{,}68$ (N) kanssa kulmat 32,9° ja 49,5°. Laske voimien F ja G suuruudet.

6.4 Kolmion sivut ovat 3,123, 4,021 ja 6,987. Laske kolmion kulmat.

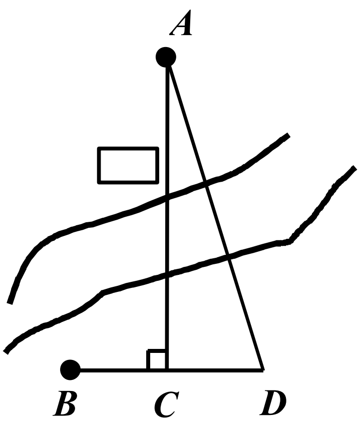
B

6.5 Laske komponenttivoimat viereisessä kuvassa. (Laske ensin alatukivarren pituus ja tukivarsien kiinnityspisteiden välimatka.)



6.6 Laske voimien 18,4 N ja 27,4 N välinen kulma, kun niiden resultantti on 26,1 N.

6.7 Maastokohtien A ja B välissä on talo ja joki. Välimatkan AB mittaamiseksi B:n puoleiselta rannalta etsittiin sellainen kohta C, josta AB näkyy suorassa kulmassa ja sellainen kohta D, että C on BD:n keskipiste. Laske AB, kun



$$\angle ADB = 67{,}8°\ ja\ BC = 352\ m.$$

6.8 Kuten edellinen, mutta $\angle ACB = 75{,}3°$ (eikä suora kulma).

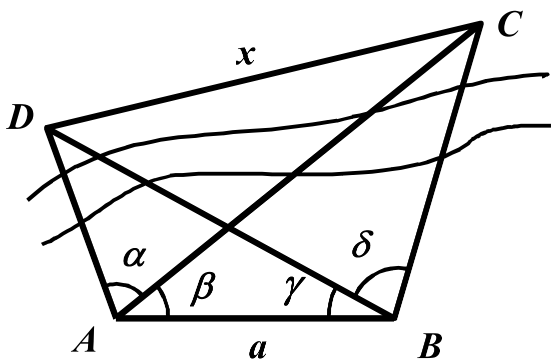
6.9 Vektorit $\bar{a} = [2, 1, -1]$, $\bar{b} = [-1, 1, 3]$ ja $\bar{a} + \bar{b}$ alkavat samasta pisteestä. Laske vektorin $\bar{b}$ kärjen etäisyys vektorista $\bar{a} + \bar{b}$. Laske tarkka arvo, jos pystyt.

6.10 Kolmion kaksi sivua ovat pituudeltaan 4 ja 8 sekä edellisen vastainen kulma on a) 20°, b) 30°, c) 40°. Laske kolmas sivu. Piirrä jokaisesta tapauksesta kuva. Montako ratkaisua kussakin tapauksessa on ?

6.11 Kolmion kaksi sivua ovat pituudeltaan 6 ja 4 sekä edellisen vastainen kulma on 70°. Laske kolmas sivu. Piirrä kuva. Montako ratkaisua tässä tapauksessa on ?

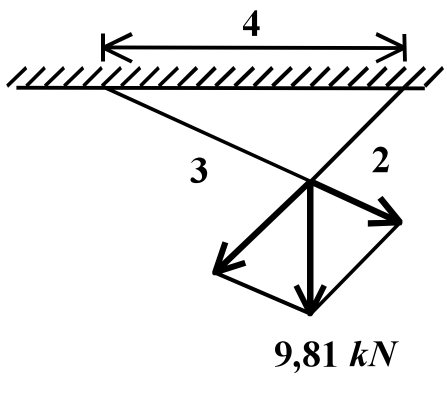
C

6.12 Välimatkan $x = CD$ määrittämiseksi mitattiin matka $a = AB$ ja viereisen kuvan mukaiset kulmat. Esitä laskukaavat, jotka tarvitaan x:n laskemiseen. Sovellus (piirrä kuva):



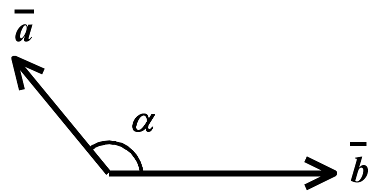
$\alpha = 47{,}0°$, $\beta = 35{,}0°$
$\gamma = 40{,}0°$, $\delta = 42{,}0°$, $a = 10{,}0$

6.13 Kappale, jonka massa on 1,00 tonnia, riippuu kahden köyden varassa, joiden pituudet ovat 3,00 m ja 2,00 m ja kiinnityspisteiden väli on 4,00 m. Laske köysiin kohdistuvat voimat, kun $g = 9{,}81 \ m/s^2$.



7 VEKTORIEN PISTETULO

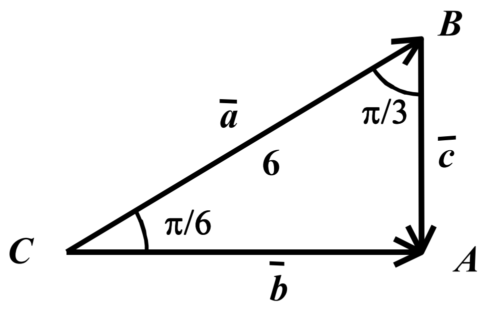
7.1 Pistetulo (skalaaritulo)



Määritelmä. Vektorien $\bar{a}$ *ja* $\bar{b}$ ***pistetulo*** on

(1) $$\boxed{\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\alpha},$$

missä α on vektorien $\bar{a}$ *ja* $\bar{b}$ välinen kulma.



Esim. 1 Viereisessä kuvassa

$$|\bar{a}| = 6 \therefore |\bar{c}| = 3, |\bar{b}| = 3\sqrt{3}$$

ja siten

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = 6\cdot 3\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}$$

$$= 18\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 27,$$

$$\bar{b}\cdot\bar{c} = 0 \quad (\textit{koska}\ \cos\frac{\pi}{2} = 0),$$

$$\bar{a}\cdot\bar{c} = 6\cdot 3\cdot\cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = -18\cos\frac{\pi}{3} = -9\,.$$

Pistetulolla ei ole vastaavantapaista havainnollista merkitystä kuin esim. vektorien summalla tai erotuksella. Pistetulo ei oikeastaan ole edes mikään vektorien laskutoimitus, koska *pistetulon arvo ei ole vektori vaan luku* (skalaari). Pistetulo on vain eräs apukäsite, joka on osoittautunut hyvin käyttökelpoiseksi vektorilaskennassa.

Määritelmästä (1) seuraa, että

(2) $$\bar{a}\cdot\bar{a} = |\bar{a}||\bar{a}|\cos 0 = |\bar{a}|^2\,.$$

Tulos (2) esitetään joskus muodossa

(3) $$|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}\cdot\bar{a}}\,.$$

Vektorit $\bar{a}$ *ja* $\bar{b}$ ovat ***kohtisuorassa toisiaan vastaan*** mikäli $\cos\alpha = 0$. Tällöin (1):n mukaan myös niiden pistetulo on 0.

Täsmällisemmin sanottuna: Jos $\bar{a}$ *ja* $\bar{b}$ eivät kumpikaan ole nollavektoreita, niin

(4) $$\boxed{\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = 0}$$ (***kohtisuoruusehto***).

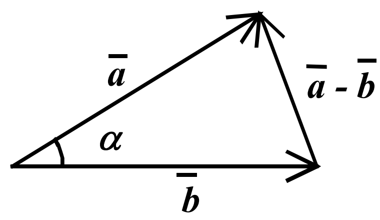
Esim. 2 $$\begin{cases} \bar{i} \cdot \bar{j} = 0, \textit{ sillä } \bar{i} \perp \bar{j}. \textit{ Samoin } \bar{j} \cdot \bar{k} = \bar{k} \cdot \bar{i} = 0 \\ \bar{i} \cdot \bar{i} = |\bar{i}|^2 = 1. \textit{ Samoin } \bar{j} \cdot \bar{j} = \bar{k} \cdot \bar{k} = 1. \end{cases}$$

Jos vektorit ovat komponenttimuodossa, pistetulon laskusääntö on hyvin luonnollinen: vastinkomponentit kerrotaan keskenään ja saadut tulot lasketaan yhteen, kuten seuraava tulos osoittaa.

Lause 1 *Vektorien* $\bar{a} = [a_1, a_2, a_3]$ *ja* $\bar{b} = [b_1, b_2, b_3]$ *pistetulo on*

(5) $$\boxed{\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}.$$

**Tod.* Vektoreista $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{a} - \bar{b}$ muodostuu kolmio (kuva). Kosinilauseen mukaan



$$|\bar{a} - \bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 - 2|\bar{a}||\bar{b}|\cos\alpha$$

eli

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 = a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + a_3^{\ 2} + b_1^{\ 2} + b_2^{\ 2} + b_3^{\ 2} - 2(\bar{a} \cdot \bar{b})$$

Kun tässä suoritetaan neliöön korotukset, osa termeistä kumoutuu ja jäljelle jää yhtälö

$$-2a_1b_1 - 2a_2b_2 - 2a_3b_3 = -2(\bar{a} \cdot \bar{b}),$$

mikä sievenee muotoon (5).

Esim. 3 Vektorien $\bar{r} = [2, -3, 5]$ ja $\bar{s} = [4, 6, 2]$ pistetulo on

$$\bar{r} \cdot \bar{s} = 8 - 18 + 10 = 0.$$

Koska pistetulo on 0, niin $\bar{r} \perp \bar{s}$.

***Laskulakejа*:**

(6) $$\begin{cases} \overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{a} \\ \overline{a}\cdot(\overline{b}+\overline{c})=\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot\overline{c} \\ t(\overline{a}\cdot\overline{b})=(t\overline{a})\cdot\overline{b}=\overline{a}\cdot(t\overline{b}). \end{cases}$$

**Tod.* Nämä tulokset seuraavat periaatteessa siitä, että pistetulo, yhteenlasku ja skalaarilla kertominen voidaan suorittaa "komponenteittain" ja reaaliluvuilla ovat voimassa samat laskulait. Esimerkiksi keskimmäinen laki voidaan perustella seuraavasti:

$$\begin{aligned}\overline{a}\cdot(\overline{b}+\overline{c}) &= \overline{a}\cdot\left[b_1+c_1, b_2+c_2, b_3+c_3\right] \\ &= a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)+a_3(b_3+c_3) \\ &= a_1b_1+a_1c_1+a_2b_2+a_2c_2+a_3b_3+a_3c_3 \\ &= \overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot\overline{c}.\end{aligned}$$

Käytännössä nämä lait merkitsevät, että ***pistetulolausekkeilla voidaan laskea tavallisten kirjainlausekkeiden tapaan***. Huomaa tarkoin, että kahden vektorin pistetuloon täytyy merkitä aina piste "pistetulomerkiksi".

Esim. 4 $$\begin{aligned}(2\overline{a}+3\overline{b})\cdot(\overline{a}-2\overline{b}) &= 2\overline{a}\cdot\overline{a}-4\overline{a}\cdot\overline{b}+3\overline{b}\cdot\overline{a}-6\overline{b}\cdot\overline{b} \\ &= 2a\cdot\overline{a}-\overline{a}\cdot\overline{b}-6\overline{b}\cdot\overline{b}\end{aligned}$$

Viimeinen lauseke voidaan kirjoittaa myös seuraavaan muotoon (koska $\overline{a}\cdot\overline{a}=|\overline{a}|^2$):

$$2|\overline{a}|^2-\overline{a}\cdot\overline{b}-6|\overline{b}|^2.$$

7.2 Kahden vektorin välinen kulma

Kahden vektorin välinen kulma α on aina välillä 0 ... 180° eli välillä 0 ... π.

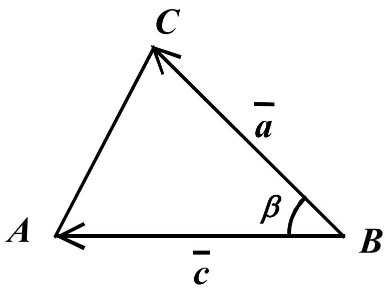
Kun pistetulon määritelmästä (1) ratkaistaan $\cos\alpha$, saadaan seuraava tulos, josta kulma α voidaan laskea.

Lause 2 *Kahden vektorin välinen kulma toteuttaa ehdon*

(7) $$\boxed{\cos\alpha = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}}.$$

Tätä tulosta käytetään yleensä yhdessä *Lauseen 1* kanssa.

Esim. 5 Kolmion kärjet ovat $A(3,\ 0,\ 1)$, $B(1,\ 1,\ 2)$ ja $C(1,\ 4,\ 1)$. Laske kolmion β-kulma 3 numeron tarkkuudella.



Valitaan sivuvektoreiden suunnat viereisen kuvan mukaisesti. Silloin

$$\bar{a} = \overrightarrow{BC} = [0, 3, -1],\quad \bar{c} = \overrightarrow{BA} = [2, -1, -1]$$

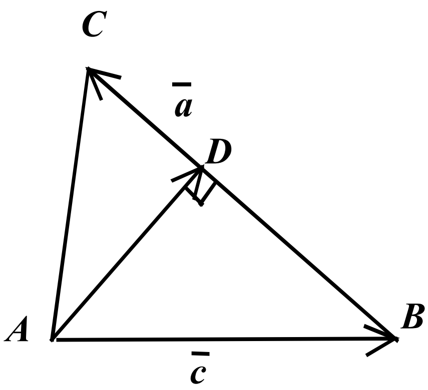
$$\cos\beta = \frac{\bar{a}\cdot\bar{c}}{|\bar{a}||\bar{c}|} = \frac{0-3+1}{\sqrt{0+9+1}\sqrt{4+1+1}} = \frac{-2}{\sqrt{60}} = \frac{-1}{\sqrt{15}}\quad \therefore \beta \approx 105^o.$$

Esim. 6 Kolmiolle $A(1,\ 0,\ 2)$ $B(4,\ 2,\ 4)$ $C(1,\ -1,\ -5)$ piirretään korkeusjana AD. Laske D:n koordinaatit.

$$\bar{a} = \overrightarrow{BC} = [-3,-3,-9],$$

$$\bar{c} = \overrightarrow{AB} = [3, 2, 2]$$

$$\overrightarrow{AD} = \bar{c} + \overrightarrow{BD} = \bar{c} + t\,\bar{a},$$



sillä vektori $\overrightarrow{BD}$ saadaan, kun vektori $\bar{a}$ kerrotaan sopivalla luvulla t. Luvulle t täytyy valita sellainen arvo, että

$$\overrightarrow{AD} \perp \bar{a} \text{ eli } \overrightarrow{AD}\cdot\bar{a} = 0 \text{ eli } (\bar{c} + t\,\bar{a})\cdot\bar{a} = 0.$$

Ratkaistaan tästä vektoriyhtälöstä t:

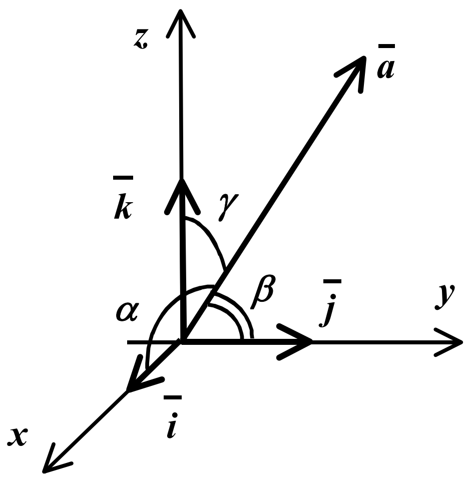
$$\bar{c}\cdot\bar{a} + t\,\bar{a}\cdot\bar{a} = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{\bar{c}\cdot\bar{a}}{\bar{a}\cdot\bar{a}} = -\frac{-9-6-18}{9+9+81} = -\frac{-33}{99} = \frac{1}{3}.$$

Täten

$$\overrightarrow{AD} = \bar{c} + t\,\bar{a} = [3, 2, 2] + \frac{1}{3}[-3, -3, -9] = [3, 2, 2] + [-1, -1, -3] = [2, 1, -1]$$

Koska $A = (1, 0, 2)$ ja yllä olevan mukaan A:sta D:hen siirryttäessä koordinaattimuutokset ovat 2, 1 ja –1, niin D:n koordinaatit ovat $D = (3, 1, 1)$.

7.3 Vektorin suuntakosinit



Vektorin $\bar{a} = [a_1, a_2, a_3]$ ja positiivisten koordinaattiakselien välisiä kulmia α, β ja γ sanotaan $\bar{a}$:n ***suuntakulmiksi*** ja näiden kosineita $\bar{a}$:n ***suuntakosineiksi***. Lauseen 2 mukaan

$$\cos\alpha = \frac{\bar{a} \cdot \bar{i}}{|\bar{a}||\bar{i}|} = \frac{a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0}{|\bar{a}|}$$

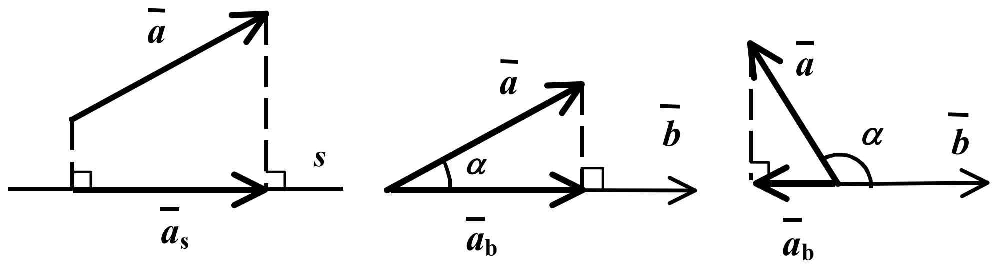
Tällä tavoin suuntakosineille saadaan lausekkeet

(8) $$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\bar{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_2}{|\bar{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_3}{|\bar{a}|}.$$

Suuntakosineita käytetään myöhemmin mm. avaruuskoordinaatiston kierron yhteydessä.

7.4 Vektorin ortogonaaliprojektio

Kun vektori $\bar{a}$ projisioidaan *kohtisuorasti eli* ***ortogonaalisesti*** joko jollekin suoralle s tai toiselle vektorille $\bar{b}$, saadaan $\bar{a}$:n ***projektiovektori***. Sitä merkitään $\bar{a}_s$:llä tai $\bar{a}_b$:llä (vrt. seuraava kuva). Projektiovektori $\bar{a}_b$ ei muutu vaikka $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ siirretään alkamaan samasta pisteestä.



1) Jos α on terävä kulma (tai suora kulma), niin projektiovektorin pituus on $|\bar{a}_b| = |\bar{a}|\cos\alpha$ ja itse projektiovektori saadaan kun $\bar{b}$:n suuntainen yksikkövektori $\bar{b}°$ kerrotaan tällä luvulla:

(9) $$\bar{a}_b = (|\bar{a}|\cos\alpha)\bar{b}°$$

2) Jos α on tylppä kulma, niin projektiovektorin pituus on

$$|\bar{a}_b| = |\bar{a}|\cos(\pi - \alpha) = -|\bar{a}|\cos\alpha \qquad \text{(vrt. } \textit{Harj}. \text{ 5.9)}$$

Itse projektiovektori on nyt $\bar{b}$:lle vastakkaissuuntainen:

$$\bar{a}_b = (-|\bar{a}|\cos\alpha)(-\bar{b}°) = (|\bar{a}|\cos\alpha)\bar{b}° .$$

Tulos (9) pitää siis paikkansa tässäkin tapauksessa. Vektorin $\bar{b}°$ kerrointa

(10) $$\boxed{a_b = |\bar{a}|\cos\alpha}$$

sanotaan vektorin $\bar{a}$ ***skalaariprojektioksi*** $\bar{b}$:llä. ***Varo:*** skalaariprojektion a_b ja projektiovektorin $\bar{a}_b$ merkinnät ovat vektoriviivaa vaille samanlaiset.

Edellisen tarkastelun mukaan ***skalaariprojektio tai sen vastaluku antaa projektiovektorin pituuden***. Yhtälö (9) on lyhemmin kirjoitettuna

(9') $$\bar{a}_b = a_b\,\bar{b}° .$$

Sijoitetaan yhtälöihin (10) ja (9') tiedot $\cos\alpha = \dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$ ja $\bar{b}° = \dfrac{\bar{b}}{|\bar{b}|}$,

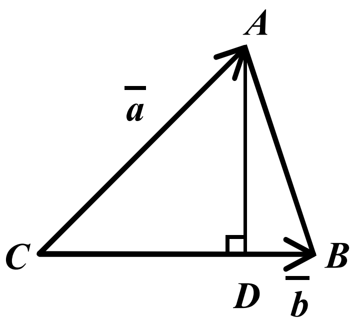
jolloin saadaan

$$a_b = |\bar{a}|\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|}, \quad \bar{a}_b = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|}\,\frac{\bar{b}}{|\bar{b}|} = \left(\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|^2}\right)\bar{b} .$$

Näin on johdettu seuraavat kaksi käyttökelpoista tulosta:

(11) $$\boxed{a_b = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|} \quad ja \quad \bar{a}_b = \left(\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|^2}\right)\bar{b}}$$

Esim. 7 Ratkaistaan sama tehtävä kuin edellä (*Esim*. 6), mutta nyt projektioiden avulla. Piirretään kolmiolle $A(1, 0, 2)$ $B(4, 2, 4)$ $C(1,–1, –5)$ korkeusjana AD. Laske D:n koordinaatit. Piirretään kolmio havainnollisempaan asentoon kuin edellä:



$$\bar{a} = \overrightarrow{CA} = [0, 1, 7]$$

$$\bar{b} = \overrightarrow{CB} = [3, 3, 9]$$

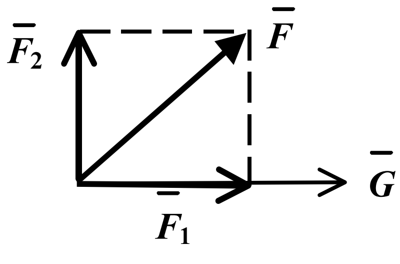
$$\overrightarrow{CD} = \bar{a}_b = \left(\frac{\bar{a}\cdot b}{|\bar{b}|^2}\right)\bar{b} = \frac{3+63}{9+9+81}\bar{b}$$

$$= \frac{2}{3}\bar{b} = [2,2,6] \qquad | \, O = origo$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} = [1,–1,–5] + [2, 2, 6] = [3, 1, 1]$$

$$\therefore \underline{\underline{D = (3, 1, 1)}}.$$

Esim. 8 Voima $\bar{F} = [3,–1, 4]$ on jaettava kahteen komponenttiin, joista toinen on vektorin $\bar{G} = [1, 1, 1]$ suuntainen ja toinen sitä vastaan kohtisuora.

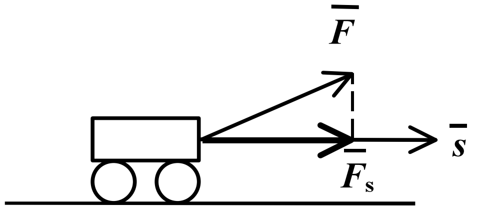


$$\bar{F}_1 = \bar{F}_G = \left(\frac{\bar{F}\cdot\bar{G}}{|\bar{G}|^2}\right)\bar{G}$$

$$= \frac{3-1+4}{1+1+1}\bar{G} = 2\bar{G} = [2, 2, 2]$$

$$\bar{F}_1 + \bar{F}_2 = \bar{F} \;\; \therefore \bar{F}_2 = \bar{F} - \bar{F}_1 = [1,–3, 2].$$

Esim. 9 Jos suuntaansa ja suuruuttaan muuttamaton voima $\overline{F}$ kuljettaa kappaletta vektorin $\overline{s}$ ilmoittaman matkan, niin se tekee työn $W = \overline{F} \cdot \overline{s}$, sillä



$$W = |\overline{F}_s|\,|\overline{s}| = (|\overline{F}|\cos\alpha)\,|\overline{s}|$$
$$= |\overline{F}|\,|\overline{s}|\cos\alpha = \overline{\boldsymbol{F}} \cdot \overline{\boldsymbol{s}}.$$

Harjoituksia

A

7.1 Vektorien $\overline{a}$ *ja* $\overline{b}$ pituudet ovat 2 ja 3 sekä niiden välinen kulma on a) $\pi/4$, b) $2\pi/3$, c)$5\pi/6$. Laske niiden pistetulo (tarkat arvot).

7.2 Laske vektorien $\overline{a} = [3,-2,5]$ ja $\overline{b} = [1,2,-2]$ pistetulo. Onko siis vektorien välinen kulma terävä vai tylppä?

7.3 Laske kolmion $A(1,0,1)$ $B(2,2,1)$ $C(-1,-1,0)$ sivujen pituudet, kulmat ja ala. Käytä laskuissa vektoreita (eikä kosinilausetta). Vastaukset 3 numeron tarkkuudella.

7.4 Osoita kohtisuoruusehtoa käyttäen, että kolmio $A(1,-1,1)$ $B(3,0,2)$ $C(2,1,3)$ on suorakulmainen.

7.5 Vektoreiden $\overline{a}$ *ja* $\overline{b}$ pituudet ovat 5 ja 4 ja niiden välinen kulma on $3\pi/4$. Laske (skalaariprojektiot) a_b *ja* b_a.

7.6 Laske a_b ja $\overline{a}_b$, kun $\overline{a} = \overline{i} + 2\overline{j} - \overline{k}$ ja $\overline{b} = [2,-3,1]$.

7.7 Piste $P(2, 1, 0)$ projisioidaan kohtisuorasti suoralle $A(3, 0, 1)$ $B(5, 0, 1)$ pisteeksi Q. Laske Q:n koordinaatit.

7.8 Vektori $\overline{i} - \overline{j} + 3\overline{k}$ jaetaan kahteen komponenttiin, joista toinen on vektorin $2\overline{i} - 4\overline{j} + 4\overline{k}$ suuntainen ja toinen sitä vastaan kohtisuora. Määritä nämä komponenttivektorit.

B

7.9 Laske

a) vektorin $\bar{c} = 4\bar{a} + 2\bar{b}$ pituus, kun $\bar{a} = [1, 0, 1]$ ja $\bar{b} = [3, -2, 2]$,

b) vektorin $\bar{c} = 2\bar{a} - 3\bar{b}$ pituus, kun $\bar{a}$ *ja* $\bar{b}$ ovat yksikkövektoreita ja niiden välinen kulma on π/4. Ohje: $|\bar{c}|^2 = \bar{c} \cdot \bar{c}$ ts. $|\bar{c}| = \sqrt{\bar{c} \cdot \bar{c}}$.

7.10 Laske $\bar{a} \cdot \bar{b} - (2\bar{a} + 3\bar{b}) \cdot (\bar{a} - 2\bar{b}) + |\bar{a} - 3\bar{b}|$, kun $\bar{a} = [1, 0, 3]$ ja $\bar{b} = [-2, 1, 2]$.

7.11 Laske vektorin $[3, -1, 1]$ ja koordinaattiakselien väliset kulmat.

7.12 Mitkä ovat vektorin $[a_1, a_2, a_3]$ skalaariprojektiot koordinaattiakseleilla? Entä vektoriprojektiot (eli projektiovektorit) ?

7.13 Vektorien $\bar{a}$ *ja* $\bar{b}$ pituudet ovat 12,3 ja 15,1 ja niiden välinen kulma on 108°. Esitä a) projektiovektori $\bar{a}_b$ vektorin $\bar{b}$ lausekkeena, b) projektiovektori $\bar{b}_a$ vektorin $\bar{a}$ lausekkeena.

7.14 Vektorien $\bar{a}$ *ja* $\bar{b}$ pituudet ovat 2 ja 3 ja välinen kulma on $5\pi/6$. Määritä sellainen *t*:n arvo, että $\bar{a} + t\,\bar{b} \perp 2\bar{a} + \bar{b}$.

C

7.15 Laske pisteen *P*(0, 1, 1) etäisyys suorasta *A*(1, 2, 3) *B*(3, 0, 2). Ohje: projektiovektori ja Pythagoraan lause.

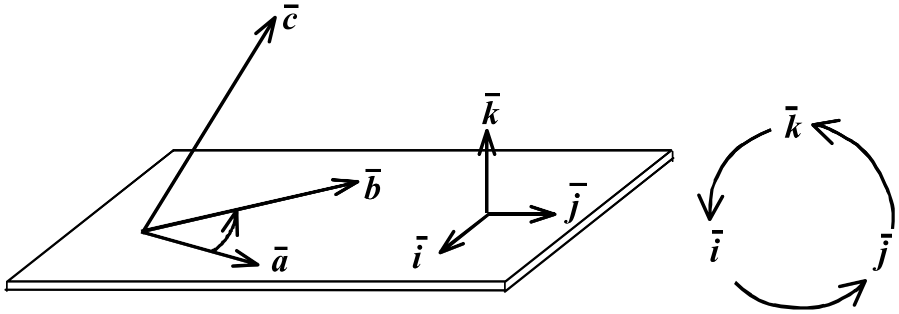
7.16 Laske pisteen *P*(0, 0, 1) peilikuvapiste *P′* suoran *A*(3, 5, 0) *B*(0, 3½, 1½) suhteen.

7.17 Todista, että suuntakosinien neliöiden summa on 1.

8 RISTITULO JA KOLMOISTULOT

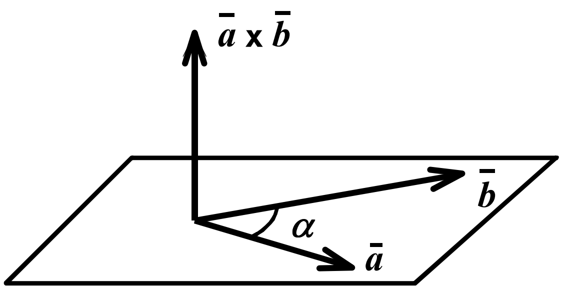
8.1 Ristitulo (vektoritulo)

Käsitettä vektorikolmikko $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ on ***oikeakätinen*** voidaan kuvata esim. ns. oikeankäden säännöllä (oikean käden peukalo, etusormi, keskisormi), uimasäännöllä (oikea käsi, vasen käsi, pää), istumasäännöllä (oikea jalka, vasen jalka, pää), tai oikeakätisen ruuvin avulla.



Esim. vektorikolmikko $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ sekä tästä *kiertovaihtelulla* (eli *syklisesti*) saadut kolmikot $\bar{j}, \bar{k}, \bar{i}$ *ja* $\bar{k}, i, \bar{j}$ ovat oikeakätisiä, kun taas esim. kolmikko $\bar{j}, \bar{i}, \bar{k}$ on vasenkätinen. Entä $\bar{j}, \bar{i}, -\bar{k}$?

Määritelmä Vektorien $\bar{a}$ *ja* $\bar{b}$ ***ristitulo*** $\bar{a} \times \bar{b}$ ("a risti b") on vektori, joka täyttää seuraavat ehdot:



1°. $\bar{a} \times \bar{b} \perp \bar{a}, \bar{b}$.

2°. Kolmikko $\bar{a}, \bar{b}$ *ja* $a \times \bar{b}$ on oikeakätinen.

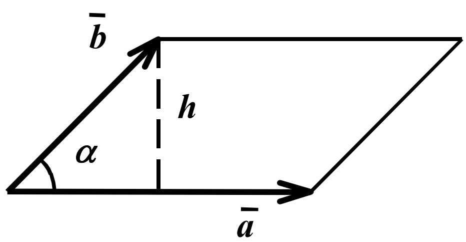
3°. Ristitulovektorin *pituus* on

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}||\bar{b}| \sin \alpha$$

Huom. Geometrisesti *vektorin* $\bar{a} \times \bar{b}$ *pituus* = *vektorien* $\bar{a}$ *ja* $\bar{b}$ *määräämän suunnikkaan ala*, sillä tämän suunnikkaan

$kanta = |\bar{a}|,\ korkeus = |\bar{b}| \sin \alpha$

(vrt. viereinen kuva).



Huomaa, että ***kolmion ala*** on suunnikkaan alan puolikas:

$$\boldsymbol{A_{kolmio} = \tfrac{1}{2}\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|}.$$

Esim. 1 $\bar{i}\times\bar{j}=\bar{k}$, sillä $\bar{k}$ täyttää ehdot 1°, 2°, 3°. Sen sijaan $\bar{j}\times\bar{i}=-\bar{k}$ (kolmikko $\bar{j},\ \bar{i},-\bar{k}$ on oikeakätinen).

Laskulakeja:

1) $\boldsymbol{\bar{a}\times\bar{a}=\bar{0}}$ (*vektorin ristitulo itsensä kanssa on nollavektori*),

2) $\boldsymbol{\bar{b}\times\bar{a}=-\bar{a}\times\bar{b}}$ (***antisymmetrisyys***),

3) $\bar{a}\times(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\times\bar{b}+\bar{a}\times\bar{c}$ (osittelulaki),

4) $(t\bar{a})\times\bar{b}=t(\bar{a}\times\bar{b})=\bar{a}\times(t\bar{b})$ (skalaarin siirto).

5) Liitäntälaki $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})=(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}$ *ei pidä paikkaansa* kaikille vektoreille.

Lait 1, 2 ja 4 voitaisiin perustella ristitulon määritelmän avulla. Lain 3 perustelu on syvällisempi. Lain 5) perusteluksi riittää yksi esimerkki:

$$\bar{i}\times(\bar{j}\times\bar{j})=\bar{i}\times\bar{0}=\bar{0},\text{ mutta }(\bar{i}\times\bar{j})\times\bar{j}=\bar{k}\times\bar{j}=-\bar{i}\,.$$

Esim. 2

$$\begin{aligned}(2\bar{a}-3\bar{b})\times(2\bar{a}+3\bar{b})&=4(\bar{a}\times\bar{a})+6(\bar{a}\times\bar{b})-6(\bar{b}\times\bar{a})-9(\bar{b}\times\bar{b})\\&=\bar{0}+6(\bar{a}\times\bar{b})+6(\bar{a}\times\bar{b})+\bar{0}=12(\bar{a}\times\bar{b}).\end{aligned}$$

Sovelletaan nyt edellisiä lakeja komponenttimuotoisten vektorien ristituloon:

$$\begin{aligned}\bar{a}\times\bar{b}&=(a_1\bar{i}+a_2\bar{j}+a_3\bar{k})\times(b_1\bar{i}+b_2\bar{j}+b_3\bar{k})\\&=a_1b_1\underbrace{(\bar{i}\times\bar{i})}_{\bar{0}}+a_1b_2\underbrace{(\bar{i}\times\bar{j})}_{\bar{k}}+a_1b_3\underbrace{(\bar{i}\times\bar{k})}_{-\bar{j}}+a_2b_1\underbrace{(\bar{j}\times\bar{i})}_{-\bar{i}}+\ldots\end{aligned}$$

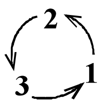
Kun laskut suoritetaan, saatu tulos voidaan esittää seuraavasti:

Lause 1 *Vektorien* $\bar{a}=[a_1,a_2,a_3]$ *ja* $\bar{b}=[b_1,b_2,b_3]$ *ristitulo on*

$$\boxed{\boldsymbol{\bar{a}\times\bar{b}=[a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1]}}.$$

Esim. 3 Jos vektorien perään kirjoitetaan avuksi 1. komponentit, ristitulon laskutapa saadaan havainnolliseksi:

$$\left.\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{a}} &= [2,3,5]\ 2\\ \bar{\boldsymbol{b}} &= [4,8,7]\ 4\end{aligned}\right\} \Rightarrow \bar{\boldsymbol{a}} \times \bar{\boldsymbol{b}} = [\mathbf{3\cdot 7-5\cdot 8,\ 5\cdot 4-2\cdot 7,\ 2\cdot 8-3\cdot 4}] = [\mathbf{-19,\ 6,\ 4}]$$



Tässä kerrottiin ensin 2- ja 3-komponentit "ristiin", sitten 3- ja 1-komponentit ja viimeksi 1- ja 2-komponentit (kiertovaihtelu):

$$\begin{vmatrix}3 & 5\\ 8 & 7\end{vmatrix} = 3\cdot 7 - 5\cdot 8, \quad \begin{vmatrix}5 & 2\\ 7 & 4\end{vmatrix} = 5\cdot 4 - 2\cdot 7, \quad \begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 8\end{vmatrix} = 2\cdot 8 - 3\cdot 4.$$

Tällaiset neljän luvun yhdelmät ovat ns. *2-rivisiä* ***determinantteja***. Ristitulo voidaan esittää myös yhtenä kolmirivisenä determinanttina (determinantteja harjoitellaan Algebrassa).

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & 3 & 5\\ 4 & 8 & 7\end{vmatrix} = (3\cdot 7 - 5\cdot 8)\bar{i} - (2\cdot 7 - 5\cdot 4)\bar{j} + (2\cdot 8 - 3\cdot 4)\bar{k}.$$

Tästä tulee sama tulos kuin edellä.

8.2 Skalaari- ja vektorikolmitulot

Koska $\bar{a} \times \bar{b}$ on vektori, on mahdollista muodostaa sen ja kolmannen vektorin $\bar{c}$ pistetulo ja ristitulo. Edellisessä tapauksessa tuloksena on luku (skalaari)

$$\bar{\boldsymbol{a}} \times \bar{\boldsymbol{b}} \cdot \bar{\boldsymbol{c}} \qquad (\textit{skalaarikolmitulo})$$

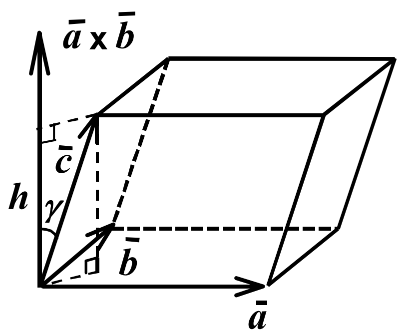
ja jälkimmäisessä tapauksessa vektori

$$\bar{\boldsymbol{a}} \times \bar{\boldsymbol{b}} \times \bar{\boldsymbol{c}} \qquad (\textit{vektorikolmitulo}).$$

Esim. 4 Lasketaan seuraavan kolmen vektorin skalaarikolmitulo:

$$\begin{cases}\bar{a} = [3,-2,\ 5]\ 3\\ \bar{b} = [4,\ 3,-1]\ 4\\ \bar{c} = [8,2,-7]\end{cases} \qquad \begin{aligned}\bar{a} \times \bar{b} &= [2-15, 20+3, 9+8] = [-13, 23, 17]\\ \therefore \bar{a} \times \bar{b} \cdot \bar{c} &= -13\cdot 8 + 23\cdot 2 + 17\cdot(-7) = -177.\end{aligned}$$

Laske myös (*Harj*. 8.5.) vektorikolmitulo (kirjoita ensin vektorit $\bar{a} \times \bar{b}$ ja $\bar{c}$ tarkoin allekkain).



Huom. *Skalaarikolmitulon* $\bar{a} \times \bar{b} \cdot \bar{c}$ *arvo on sama kuin vektorien* $\bar{a}, \bar{b}$ *ja* $\bar{c}$ *määräämän* ***suuntaissärmiön tilavuus*** *tai sen vastaluku sen mukaan, onko kolmikko* $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ *oikea- vai vasenkätinen.*

**Perustelu:* Pohjan ala = $|\bar{a} \times \bar{b}|$ ja korkeus on joko $h = |\bar{c}|\cos\gamma$ (vrt. kuva) tai $h = |\bar{c}|\cos(\pi - \gamma) = -|\bar{c}|\cos\gamma$, jos kolmikko $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ on vasenkätinen (ts. $\bar{c}$ on kuvassa alaviistoon suuntautuva). Tilavuus on siten

$$V = \pm|\bar{a} \times \bar{b}| \cdot |\bar{c}|\cos\gamma = \pm(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}\,.$$

Esim. 5 Esimerkin 4 mukaisten vektorien määräämän suuntaissärmiön tilavuus on 177 ja kyseinen kolmikko $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ on vasenkätinen (koska skalaarikolmitulo on negatiivinen).

*8.3 Laskulakeja

Koska kolmikosta $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ kiertovaihtelulla saadut kolmikot ovat samankätisiä ja määräävät saman suuntaissärmiön, niin

(1) $$\bar{a} \times \bar{b} \cdot \bar{c} = \bar{b} \times \bar{c} \cdot \bar{a} = \bar{c} \times \bar{a} \cdot \bar{b}$$ (***kiertosääntö***).

Vaihtamalla keskimmäisessä pistetulossa tekijöiden järjestys saadaan seuraava tulos:

(2) $$\bar{a} \times \bar{b} \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{b} \times \bar{c}$$ (ristin ja pisteen ***vaihtosääntö***).

Oikeanpuoleisessa lausekkeessa ei tarvita sulkeita sen osoittamiseksi, että ristitulo on laskettava ensin, sillä jos pistetulo laskettaisiin ensin, sen tulos olisi luku (skalaari) ja luvun ja vektorin ristituloa ei voi laskea.

Esim. 6 $\bar{a} \times \bar{b} \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot \bar{b} \times \bar{b} = \bar{a} \cdot \bar{0} = 0$. Mainitaan pari muutakin mm. sähkötekniikan käyttämää laskulakia (perustelu esim. komponenttiesitysten avulla):

$$\bar{a} \times \bar{b} \cdot \bar{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad \bar{a} \times \bar{b} \times \bar{c} = (\bar{a} \cdot \bar{c})\bar{b} - (\bar{b} \cdot \bar{c})\bar{a}\,.$$

Harjoituksia

A

8.1 Laske $\bar{a} \times \bar{b}$, kun $\bar{a} = [2,-3,1], \bar{b} = [5,1,0]$. Kuinka suuri on näiden vektorien määräämän suunnikkaan ala?

8.2 Laske kolmion $A(0, 1, 3)$ $B(4, 1, 1)$ $C(1, 2, 1)$ alan tarkka arvo.

8.3 Sievennä: a) $(\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{a} - \bar{b})$, b) $(\bar{a} - \bar{b}) \times (\bar{a} - \bar{b})$.

8.4 *Tetraedrin* tilavuus on kuudesosa vastaavan suuntaissärmiön tilavuudesta. Laske tämän tiedon avulla tetraedrin $A(1, 1, 1)$ $B(0, 0, 2)$ $C(0, 3, 0)$ $D(4, 0, 0)$ tilavuus.

8.5 Laske yhtälön $\bar{a} \times \bar{b} \times \bar{c} = (\bar{a} \cdot \bar{c})\,\bar{b} - (\bar{b} \cdot \bar{c})\,\bar{a}$ kumpikin puoli esimerkin 4 vektoreita käyttäen. Kummastakin pitäisi tulla sama tulos.

B

8.6 Olkoon $\bar{a} = [3,1,0]$ ja $\bar{b} = [1,-1,t]$. Määritä sellainen t:n arvo, että $\bar{a} \times \bar{b}$ on kohtisuorassa vektoria vastaan.

8.7 Laske pisteen $P(0, 1, 1)$ etäisyys d pisteiden $A(1, 2, 3)$ $B(3, 0, 2)$ määräämästä suorasta. Ohje:

Jos $\bar{a} = \overrightarrow{AP},\ \bar{b} = \overrightarrow{AB}$, niin $d = \dfrac{|\bar{a} \times \bar{b}|}{|\bar{b}|}$. Perustele!

8.8 Ovatko pisteet (1, 0, 0), (3, 2, 0), (2, 0, –1) ja (1, 1, 1) samassa tasossa? (Vihje: onko suuntaissärmiön tilavuus = 0 ?)

C

8.9 Olkoon $\vec{F}_1 = 2\bar{i} - 3\bar{j},\ \vec{F}_2 = \bar{i} - 2\bar{j} - 3\bar{k}$ ja $\vec{F} = 10\bar{i} + 6\bar{j} + 8\bar{k}$. Määritä sellaiset luvut x, y ja z, että $\vec{F} = x\vec{F}_1 + y\vec{F}_2 + z(\vec{F}_1 \times \vec{F}_2)$, ts. hajota $\vec{F}$ voimien $\vec{F}_1$ ja $\vec{F}_2$ suuntaisiin ja niitä vastaan kohtisuoraan komponenttiin.

8.10 Vektorit $\bar{a} = [1,0,2]$, $\bar{b} = [2,1,1]$ ja $\bar{c} = [0,-2,3]$ alkavat samasta pisteestä. Laske $\bar{c}$:n kärjen etäisyys vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ määräämästä tasosta.

8.11 Miten harjoituksen 8.4 alussa mainittu tulos seuraa siitä, että *pyramidin* tilavuus on 1/3 vastaavan särmiön tilavuudesta?

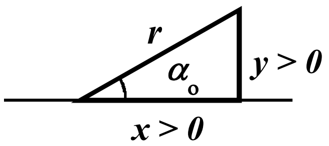
9 TRIGONOMETRISET LAUSEKKET

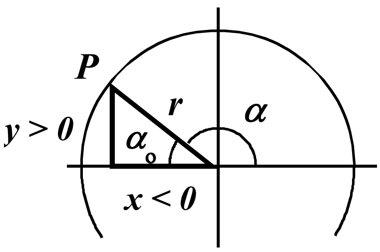
9.1 Peruskulma α_0

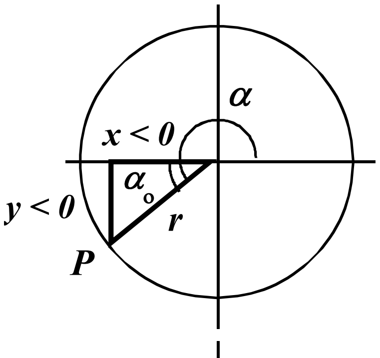
1) Jos on laskettava jonkin trigonometrisen funktion $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ jne. arvo, kulmaa voidaan tarvittaessa muuttaa sopivan 2π:n monikerran verran. Näin kulma saadaan välille 0 ... 2π. Esim.

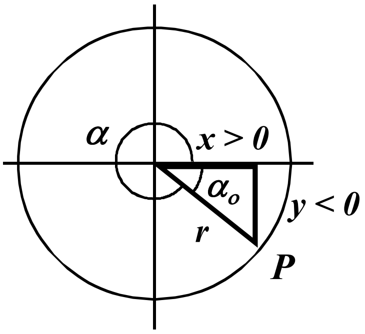
$$\sin\frac{11\pi}{3} = \sin\frac{6\pi + 5\pi}{3} = \sin(2\pi + \frac{5\pi}{3}) = \sin\frac{5\pi}{3},$$

$$\tan(2x - 7\pi) = \tan(2x - (\pi + 3\cdot 2\pi)) = \tan(2x - \pi).$$









2) Kun kulma α on välillä $0...2\pi$, se voidaan kirjoittaa johonkin seuraavista muodoista:

$\alpha = \alpha_0$ (1. neljännes),

$\alpha = \pi - \alpha_0$ (2. neljännes),

$\alpha = \pi + \alpha_0$ (3. neljännes),

$\alpha = 2\pi - \alpha_0$ (4. neljännes).

Tässä α_0 on kulmaa α vastaavan ***koordinaattikolmion*** kulma eli ns. ***peruskulma***. *Kulma α_0 on siis aina terävä kulma, joten α_0:n sini, kosini ja tangentti ovat aina positiivisia*. Kuvista nähdään, että ***kulmien α ja α_0 trigonometristen funktioiden arvot ovat mahdollista etumerkkiä vaille samat***.

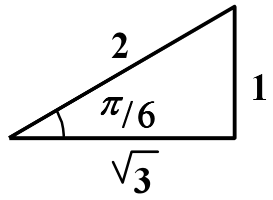
Jos α on esimerkiksi 2. neljänneksessä (ylin ympyrä), niin

$\sin\alpha = \sin\alpha_0$, sillä $\sin\alpha = \frac{y}{r}$ ja $y > 0$,

$\cos\alpha = -\cos\alpha_0$, sillä $\cos\alpha = \frac{x}{r}$ ja $x < 0$,

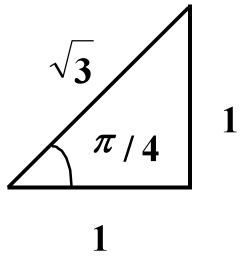
$\tan\alpha = -\tan\alpha_0$, sillä $\tan\alpha = \frac{y}{x}$ ja y ja x ovat erimerkkisiä.

Esim. 1 $\sin\frac{5\pi}{6} = \overbrace{\sin(\pi - \frac{\pi}{6})}^{>0\text{, koska 2. nelj., jossa sini on }>0} = +\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$



$$\cos\frac{7\pi}{6} = \cos(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin\frac{7\pi}{4} = \sin(2\pi - \frac{\pi}{4}) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$



Peruskulman avulla kulman α trigonometrisen funktion arvon laskeminen palautuu siis terävän kulman α_0 vastaavan arvon laskemiseen *ts. alkeistrigonometriaan*. Ainoastaan trigonometristen funktioiden etumerkit eri neljänneksissä täytyy lisäksi osata (piirrä funktioiden merkkitaulut).

Esim. 2 $\tan\frac{17\pi}{3}$ | $6\pi/3 = 2\pi$ on täysi kierros. Poistetaan 2 kierrosta eli $\frac{12\pi}{3}$, jolloin jää $\frac{5\pi}{3}$

$$= \tan\frac{5\pi}{3} = \tan(2\pi - \frac{\pi}{3}) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}.$$

Aikaisemmin esimerkkien 1 ja 2 tapaisia tehtäviä ratkaistiin piirtämällä sopivasäteinen ympyrä ja siihen koordinaattikolmio. Nyt tarvitaan vain peruskulmaa vastaava suorakulmainen kolmio.

Peruskulma α_0 on erityisen käyttökelpoinen ***trigonometristen perusyhtälöiden*** ratkaisemisessa. Nämä yhtälöt ovat muotoa

$$\sin x = vakio,\ \cos x = vakio,\ \tan x = vakio.$$

Tehtävä on edelliselle käänteinen: etsitään kulman α arvoja, kun trigonometrisen funktion arvo a tunnetaan.

Esim. 3 $\sin 2x = -½$. Merkitään $2x = \alpha$, jolloin yhtälö saa muodon

$$\sin\alpha = -½.$$

Etsitään ensin α:aa vastaava peruskulma, ts. sellainen terävä kulma α_0, että $\sin\alpha_0 = +½$. Tämä peruskulma on $\alpha_0 = \frac{\pi}{6}$.

Oikeat α:n arvot ovat vastaavat 3. ja 4. neljänneksen kulmat (koska niissä sini on negatiivinen) ja näiden 2π-monikerrat.

Muotoillaan nyt koko tehtävä ja sen ratkaisu alusta alkaen lyhemmin seuraavalla tavalla:

$$\sin 2x = -\tfrac{1}{2} \qquad \Big| \quad \text{Merkitään: } 2x = \alpha \;\therefore \sin\alpha = -\tfrac{1}{2}, \quad \alpha_o = \pi/6, \text{ 3. tai 4. nelj.}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \pi + \dfrac{\pi}{6} + n\cdot 2\pi \\ \alpha_2 = 2\pi - \dfrac{\pi}{6} + n\cdot 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = \dfrac{7\pi}{6} + n\cdot 2\pi \\ 2x_2 = \dfrac{11\pi}{6} + n\cdot 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{7\pi}{12} + n\cdot\pi \\ x_2 = \dfrac{11\pi}{12} + n\cdot\pi \end{cases}$$

Esim. 4 $\cos x = -0{,}38445 \quad \big| \quad x_o = 67{,}390°$ 2. tai 3. neljännes

$$x = 180° \pm x_o + n\cdot 360° \quad \therefore \begin{cases} x_1 = 112{,}61° + n\cdot 360°, \\ x_2 = 247{,}39° + n\cdot 360°. \end{cases}$$

Esim. 5 $\tan(x - \pi/4) = -1$. Merkitään $x - \pi/4 = \alpha$. Silloin yhtälö saa muodon

$$\tan\alpha = -1.$$

Tässä tapauksessa $\alpha_o = \pi/4$ ja oikeat α:n arvot ovat 2. tai 4. neljänneksessä:

$$\alpha_1 = \pi - \pi/4 + n\cdot 2\pi, \quad \alpha_2 = 2\pi - \pi/4 + n\cdot 2\pi.$$

Näistä saadaan x:lle ($x = \pi/4 + \alpha$) arvot

$$x_1 = \pi + n\cdot 2\pi, \quad x_2 = (n+1)\cdot 2\pi = m\cdot 2\pi.$$

Tulokset voidaan yhdistää muotoon: $\underline{\underline{x = n\cdot\pi}}$.

9.2 Trigonometrisia muunnoskaavoja

Aikaisemmin on jo ollut esillä kaksi peruskaavaa

(1) $$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

Näitä tuloksia käytettäessä α:n paikalla voi olla jokin mutkikkaampikin lauseke, esim. 5α, $3x$, $5x - 1$ tms., vrt. seuraava esimerkki.

Esim. 6 $\sin^2 3x + \cos^2 3x = 1,$

$\cos(5x-1)\cdot\tan(5x-1) = \sin(5x-1).$

Harjoituksissa mainittiin myös harvinaisemmat kaavat

$$\sin^2\alpha = \frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}, \quad \cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha}.$$

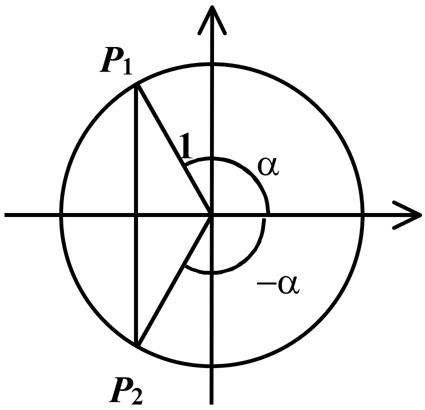
Näistä seuraa, että

$$\mathbf{\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}}},$$

missä etumerkit on valittava kulman neljänneksen mukaan.

Lause 1 ***Sini on pariton funktio ja kosini parillinen funktio****, ts. kaikilla α:n arvoilla*

(2) $$\boxed{\begin{aligned}\sin(-\alpha) &= -\sin\alpha\\ \cos(-\alpha) &= \cos\alpha\end{aligned}}.$$



Tod. Kun kulmat α ja $-\alpha$ sijoitetaan trigonometriseen 1-ympyrään, niin niiden loppukylkien pisteillä P_1 ja P_2 y-koordinaatit eli sinin arvot ovat vastalukuja ja x-koordinaatit eli kosinin arvot samoja.

Esim. 7 a) Jos $f(x) = \cos 2x - \sin 3x$, niin

$$f(-x) = \cos(-2x) - \sin(-3x) = \cos 2x + \sin 3x,$$

b) $\sin(-\frac{10\pi}{3}) = -\sin\frac{10\pi}{3}$ | poistetaan täysi kierros $\frac{6\pi}{3}$

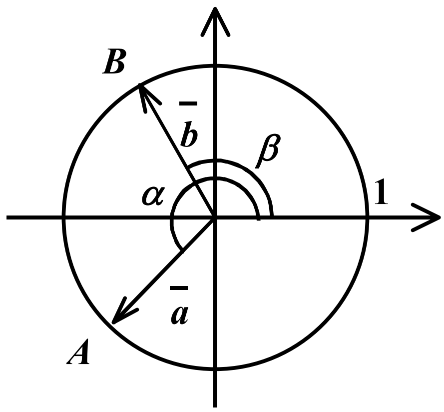
$$= -\sin\frac{4\pi}{3} = -\sin(\pi + \frac{\pi}{3}) = -(-\sin\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

c) Koska $\beta - \alpha = -(\alpha - \beta)$, niin $\mathbf{\cos(\beta-\alpha) = \cos(\alpha-\beta)}$.

Lause 2 (*Kosinin vähennyslaskukaava*)

(3) $$\mathbf{cos}\,(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha}\;\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\beta}+\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\alpha}\;\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\beta}\,.$$

**Tod.* Poistetaan kulmista α ja β mahdolliset täydet kierrokset ja käytetään tarvittaessa edellisen esimerkin tulosta c), jolloin voidaan olettaa, että $0 < \beta < \alpha < 2\pi$. Sijoitetaan α ja β trigonometriselle 1-ympyrälle ($r = 1$) ja merkitään loppukylkien muodostamia yksikkövektoreita $\bar{a}$:lla ja $\bar{b}$:llä.



Koska $r = 1$, pisteiden A ja B koordinaatit ovat

$$A=(\cos\alpha,\sin\alpha),\quad B=(\cos\beta,\sin\beta).$$

Näiden pisteiden paikkavektorit ovat

$$\bar{a}=[\cos\alpha,\sin\alpha],\quad \bar{b}=[\cos\beta,\sin\beta].$$

Vektorien välisen kulman kosini antaa väitetyn tuloksen:

$$\cos(\alpha-\beta)=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}=\frac{\cos\alpha\,\cos\beta+\sin\alpha\,\sin\beta}{1\cdot 1}.$$

(Vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ välinen kulma ei aina ole $\alpha - \beta$ kuten kuvassa vaan se voi olla myös $2\pi - (\alpha - \beta)$ (jos $\alpha - \beta > \pi$). Tällä on kuitenkin sama kosini kuin kulmalla $\alpha - \beta$.)

Seuraus 1 (*Kosinin yhteenlaskukaava*)

(4) $$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\,\cos\beta-\sin\alpha\,\sin\beta\,.$$

Tod. $$vp=\cos(\alpha-(-\beta))\overset{(3)}{=}\cos\alpha\,\cos(-\beta)+\sin\alpha\,\sin(-\beta)\overset{(2)}{=}op\,.$$

Seuraus 2 (***Komplementtikaavat***)

(5) $$\boxed{\mathbf{cos}\,(\tfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\alpha},\;\;\mathbf{sin}\,(\tfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha}}\,.$$

Tod. $$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha=0\cdot\cos\alpha+1\cdot\sin\alpha=\sin\alpha\,.$$

*Käytetään tätä tulosta (takaperin) toisen väitteen todistamiseen:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)=\cos\alpha\,.$$

Seuraus 3 (*Sinin yhteen- ja vähennyslaskukaavat*)

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\,\cos\beta\pm\cos\alpha\,\sin\beta,$$

missä ylemmät merkit vastaavat toisiaan, samoin alemmat.

**Tod.* $\sin(\alpha+\beta)\overset{(5)}{=}\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]\overset{(3)}{=}$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\alpha\overset{(5)}{=}\sin\alpha\,\cos\beta+\cos\alpha\,\sin\beta\,.$$

Toisen kaavan todistus käy samaan tapaan tai kuten seuraus 1.

Kootaan ***yhteen- ja vähennyslaskukaavat*** vielä yhteen:

(6)
$$\boxed{\begin{aligned}&\mathbf{\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\,\cos\beta\pm\cos\alpha\,\sin\beta}\\&\mathbf{\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\,\cos\beta\mp\sin\alpha\,\sin\beta.}\end{aligned}}$$

Tässä *ylemmät merkit vastaavat toisiaan, samoin alemmat*.

Kun nämä yhteen- ja vastaavasti vähennyslaskukaavat jaetaan keskenään ja osamäärä supistetaan tulolla $\cos\alpha\cos\beta$, saadaan tangentin yhteen- ja vähennyslaskukaavat (tarkemmin harj.):

(7)
$$\mathbf{\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\,\tan\beta}}\,.$$

Valitaan yhteenlaskukaavoissa (6) ja (7) $\beta=\alpha$. Näin saadaan tärkeät ***kaksinkertaisen kulman kaavat***:

(8)
$$\boxed{\begin{aligned}&\mathbf{\sin 2\alpha=2\sin\alpha\,\cos\alpha}\\&\mathbf{\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\overset{(1)}{=}1-2\sin^2\alpha\overset{(1)}{=}2\cos^2\alpha-1}\\&\mathbf{\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\,.}\end{aligned}}$$

Huomaa, että kaikissa edellä olleissa kaavoissa α:n paikalla voi olla jokin mutkikkaampikin lauseke, esim. 2*x*, 3*x*, 2*x* + 3 jne.

Esim. 8 a) Esitä $\sin 4x$ funktioiden $\sin x$ ja $\cos x$ lausekkeena.

$$\sin 4x \overset{(8)}{=} 2\sin 2x \cos 2x \overset{(8)}{=} 2\cdot 2\sin x \cos x\,(1-2\sin^2 x)$$
$$= 4\sin x \cos x - 8\sin^3 x \cos x.$$

b) Sievennä lauseke $(\sin 3x - \cos 3x)^2$.

$$(\sin 3x - \cos 3x)^2 = \sin^2 3x - 2\sin 3x \cos 3x + \cos^2 3x$$
$$= 1 - \sin 6x \quad \text{(kaavojen (1) ja (8) nojalla).}$$

*c) Sievennä lauseke $\dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$. Yritetään saada lausekkeen osoittaja ja nimittäjä tulomuotoon (supistamista varten). Osoittajan saa tulomuotoon sinin kaksinkertaisen kulman kaavalla. Nimittäjässä $\cos 2x$:lle on valittavina kolmekin kaavaa (vrt. (8)). Näistä sopii tällä kertaa muoto $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, sillä tällöin ykköset kumoutuvat:

$$\underline{\underline{\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}}} = \frac{2\sin x \cos x}{1+(2\cos^2 x - 1)} = \frac{2\sin x \cos x}{2\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \underline{\underline{\tan x}}.$$

d) $\sin\alpha = -0{,}345$ ja α on 4. neljänneksessä. Laske $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ ja $\sin 3\alpha$.

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} \overset{4.nelj.}{=} +\sqrt{1-0{,}345^2} = 0{,}9386... \approx 0{,}939.$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot(-0{,}345)\cdot 0{,}9386... = -0{,}6476,$$

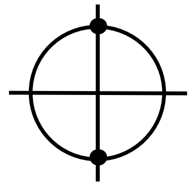
$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2\cdot 0{,}345^2 = 0{,}7619... \approx 0{,}762.$$

$$\sin 3\alpha = \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin\alpha\cos 2\alpha + \cos\alpha \sin 2\alpha$$
$$= -0{,}3449... \approx -0{,}345.$$

Kaksinkertaisen kulman kaavoja käytetään joskus *"takaperin"*:

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha, \quad \sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha), \quad \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha).$$

Esim. 9 Ratkaise yhtälö $2\sin^2 x + 4\cos^2 x = 3$.



kosinin 0-kohdat

Käytetään juuri mainittuja kaavoja. Niiden avulla yhtälö saa muodon

$1 - \cos 2x + 2(1 + \cos 2x) = 3 \Leftrightarrow \cos 2x = 0$.

Sen ratkaisut ovat $2x = \dfrac{\pi}{2} + n \cdot \pi$ eli $x = \dfrac{\pi}{4} + n \cdot \dfrac{\pi}{2}$.

Toinen ratkaisutapa: käytä kaavaa (1).

*Kaksinkertaisen kulman kaavoja voi käyttää myös esim. puolille kulmille seuraavasti:

Esim. 10 a) $2\sin\dfrac{(\pi - \alpha)}{2}\cos\dfrac{(\pi - \alpha)}{2}$

$= \sin(\pi - \alpha) = \sin\pi\cos\alpha - \cos\pi\sin\alpha = \sin\alpha.$

b) Todista, että $\dfrac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha} = \tan^2\dfrac{\alpha}{2}$.

$$vp = \frac{1 - (1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2})}{1 + (2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1)} = \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = op.$$

*9.3 Tulot summiksi ja summat tuloiksi

(9)
$$\boxed{\begin{aligned}\sin\alpha\sin\beta &= -\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)\right] \\ \cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\right] \\ \sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\right]\end{aligned}}$$
"Tulot summiksi".

Perustelu: op saadaan yhteen- ja vähennyslaskukaavoilla sievenemään vp:n mukaiseksi.

Tulot summiksi -kaavat ovat aikaisempia harvinaisempia. Niitä käytetään myöhemmin mm. integraalilaskennassa (vaihtovirran teho tms.).

Esim. 11 $\cos 3x \sin 2x = \sin 2x \cos 3x$

$$= \frac{1}{2}[\sin 5x + \sin(-x)] = \frac{1}{2}[\sin 5x - \sin x].$$

(*Täten vp pystytään integroimaan.)

(10)
$$\boxed{\begin{aligned} \sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\ \sin\alpha - \sin\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\ \cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\ \cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \end{aligned}}$$

"***Summat tuloiksi***"

**Perustelu*: op saadaan sievenemään vp:n mukaiseksi, kun käytetään "tulot summiksi"-kaavoja.

Näillä kaavoilla on käyttöä mm. silloin kun lausekkeita muutetaan tekijämuotoon:

Esim. 12 Seuraavassa nimittäjään käytetään edellisiä kaavoja:

$$\frac{\sin 3u \sin 4u}{\cos 5u - \cos u} = \frac{\sin 3u \sin 4u}{-2\sin 3u \sin 2u}$$

$$= \frac{\sin 4u}{-2\sin 2u} = \frac{2\sin 2u \cos 2u}{-2\sin 2u} = -\cos 2u.$$

Seuraavia kaavoja käytetään mm. aaltoliikkeitten yhdistämisessä:

(11)
$$\boxed{\sin\alpha \pm \cos\alpha = \sqrt{2}\sin(\alpha \pm \frac{\pi}{4})}.$$

**Perustelu*: op sievenee yhteen- ja vähennyslaskukaavoilla vp:ksi.

Esim. 13 $y = 3\sin\omega t - 3\cos\omega t = 3\sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{\pi}{4})$.

Harjoituksia

A

9.1 Laske peruskulman avulla

a) $\cos\frac{11\pi}{6}$, b) $\sin\frac{11\pi}{6}$, c) $\sin\frac{5\pi}{3}$, d) $\tan\frac{10\pi}{3}$.

Tarkista tulokset laskimella.

9.2 Merkitään $\cos\frac{\pi}{7} = a$. Esitä $\cos\frac{6\pi}{7} - 2\cos\frac{8\pi}{7} + 3\cos\frac{13\pi}{7}$ a:n lausekkeena. (Käytä jokaiseen osaan peruskulma-ajattelua.)

9.3 Ratkaise peruskulman avulla

a) $\sin x = ½$, b) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, c) $\tan x = 2{,}345$.

9.4 Ratkaise (peruskulman avulla)

a) $\cos 2x = 0{,}321$, b) $\sin(3x - 15{,}0°) = -0{,}222$, c) $\sin(3x - 1) = -0{,}222$.

9.5 $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$ ja α on 4. neljänneksessä. Laske $\tan\alpha$ a) trigonometrisen ympyrän avulla, b) sopivalla laskukaavalla.

9.6 $\cos\alpha = -0{,}111$. Laske $\tan\alpha$ a) trigonometrisen <u>*yksikkö*</u>ympyrän avulla, b) sopivalla laskukaavalla.

9.7 Sievennä a) $\cos(\frac{\pi}{2} - \omega t)$, b) $\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$, c) $\cos(\pi - \omega t)$.

9.8 Laske yhteen- ja vähennyslaskukaavoilla

$\sin(\pi - \alpha)$, $\sin(\pi + \alpha)$ ja $\sin(2\pi - \alpha)$.

Tässä α voi olla minkä kokoinen kulma tahansa. Samat lausekkeet saisit tulokseksi ajattelemalla, että α on peruskulma. (Vastaava muistisääntö käy myös kosinille ja tangentille.)

9.9 Sievennä a) $\frac{\sin 2x}{\sin x}$ b) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2$ c) $\tan(3\pi - \beta)$.

9.10 Tylpän kulman α tangentti on –5. Laske tarkat arvot seuraaville trigonometrisille lausekkeille:

a) $\sin\alpha + \cos\alpha$ (ohje: trig. ympyrä), b) $\sin 2\alpha$, c) $\tan 2\alpha$.

9.11 Sievennä $\cos^2 x + \cos^2 2x - \sin^2 x - \sin^2 2x$ (Ohje: ryhmittele termit.)

9.12 Tasakylkisen kolmion kantakulman sini on 12/13. Laske a) kantakulman kosini, b) huippukulman sini.

9.13 Sievennä:

a) $\dfrac{\sin t \sin(\frac{\pi}{2} - t)}{\sin 2t}$, b) $\dfrac{\sin 5\varphi \sin(\frac{\pi}{2} - 5\varphi)}{\sin 10\varphi}$, c) $\dfrac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$.

B

9.14 Merkitään $\cos\frac{\pi}{7} = a$. Esitä a:n lausekkeena

$\cos\dfrac{27\pi}{7} - \sin\dfrac{23\pi}{14}$ (*ohje*: peruskulma ja komplementtikaava).

9.15 Ratkaise yhtälö a) $\tan 2x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, b) $\sin\alpha = 0{,}322\cos\alpha$.

9.16 Kulma α on 3. neljänneksessä ja $\sin\alpha = -3/5$. Laske

a) $\cos\alpha$, b) $\cos 2\alpha$, c) $\cos(\dfrac{4\pi}{3} + \alpha)$, d) $\sin(\pi + 2\alpha)$.

9.17 Todista, että tangentti on pariton funktio, ja käytä sitä apuna seuraavan yhtälön ratkaisemisessa (vrt. Esim.7, c)-kohta):

$$1 - \tan(1 - \frac{x}{2}) = 0.$$

9.18 Sievennä a) $\dfrac{\sin\omega t \sin(\frac{\pi}{2} - \omega t)}{\sin 2\omega t}$, b) $\dfrac{1-\cos 4\mu}{\sin 4\mu}$.

*9.19 a) Esitä summa- tai erotusmuodossa tulo $\sin 3x \sin 5x$. b) Esitä tulomuodossa erotus $\sin 3x - \sin 5x$.

*9.20 Sievennä a) $\dfrac{\cos\alpha - \cos 3\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$, b) $\dfrac{\sin 6x + \sin 2x}{\cos 4x + 1}$.

C

9.21 Laske kulmien 15° ja 75° sinin, kosinin ja tangentin tarkat arvot. Tarkista laskimella.

9.22 Laske lausekkeen $\sin(\alpha + \beta)$ tarkka arvo, kun $\sin \alpha = 1/3$, $\cos \beta = -2/5$ ja α ja β ovat samassa neljänneksessä.

9.23 Osoita, että jos α, β ja γ ovat kolmion kulmat, niin

$$\text{a) } \sin\gamma = \sin(\alpha+\beta), \quad \text{b) } \sin\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

9.24 Osoita, että kolmion sivujen ja kulmien välillä on yhteys

$\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}$. Ohje: $vp = \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c}$. Käytä tähän sinilausetta ja sitten summat tuloiksi -kaavoja. (Tämä on hyvä kolmion ratkaisemisen tarkistuskaava, sillä siinä esiintyvät kaikki sivut ja kulmat.)

9.25 Sievennä lauseke $\dfrac{\cos 3x + \cos x}{\sin x \sin 2x - \cos x}$.

9.26 Määritä sellaiset terävät kulmat x ja y, että $\begin{cases} \sin x = \sqrt{2}\sin y \\ \cos x = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\cos y \end{cases}$.

9.27 Viereisessä yhtälöryhmässä L ja β ovat tunnettuja suureita, A mitataan ja kulmat α_0 ja γ ovat apusuureita, jotka pitäisi eliminoida yhtälöryhmästä. Johda näin α:lle alla oleva laskukaava.

$$\begin{cases} \alpha_o = \dfrac{\alpha}{2} + \gamma \\ A = L\sin\alpha_o \\ \sin\gamma = \dfrac{\sin(\alpha/2)}{\sin(\beta/2)} \end{cases}$$

Ohje: sijoita ylimmästä yhtälöstä γ viimeiseen, käytä sinin vähennyslaskukaavaa sekä jaa sitten yhtälö $\cos(\alpha/2)$:lla, jolloin pääset tangenttiin.

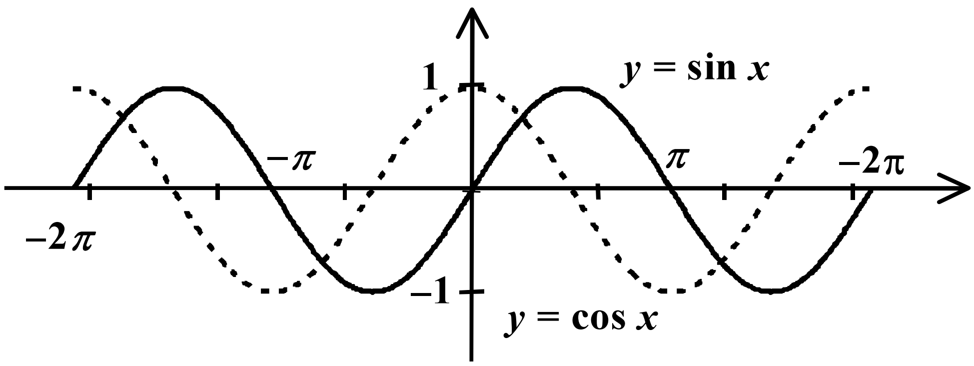
$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{A}{L}\sin\frac{\beta}{2}}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{A}{L}\right)^2}\sin\frac{\beta}{2}}$$

10 TRIGONOMETRISET KÄYRÄT JA YHTÄLÖT

10.1 Sini- ja kosinikäyriä

1 Käyrät $y = \sin x$, $y = \cos x$

Antamalla x:lle arvoja (*rad*), saadaan piirrettyä sini- ja kosinikäyrät. Alla olevaan kuvaan on piirretty näkyviin näistä käyristä väliä $-2\pi ... 2\pi$ vastaavat osat.



Kuvaajat havainnollistavat mm. seuraavia sinin (edellisessä kuvassa yhtenäinen viiva) ja kosinin (katkoviiva) ominaisuuksia:

1) $\sin x$ kasvaa ja $\cos x$ vähenee välillä $0 \ldots \pi/2$.

2) kumpikin saa vain välillä $-1 \ldots 1$ olevia arvoja,

3) kumpikin on jaksollinen funktio, ***alkujaksona*** 2π,

4) $\sin x$ on pariton funktio ja $\cos x$ parillinen funktio.

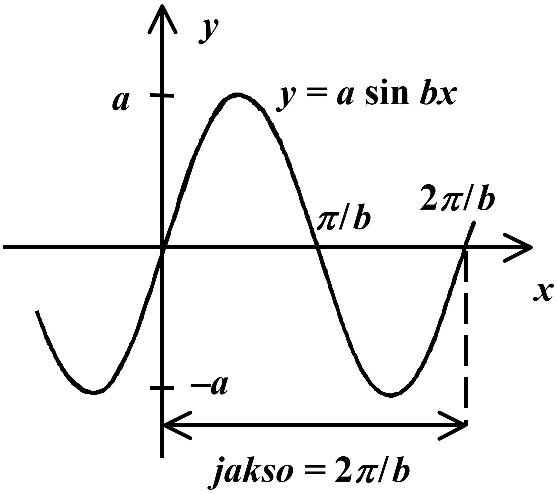
5) sinin ja kosinin välillä on $\pi/2$:n suuruinen vaihe-ero:

$$\sin x = \cos(x - \pi/2).$$

*Täten esim. $\sin(\pi/2) = \cos 0$, ts. sen arvon, jonka kosini saa kohdassa 0, sini saa vasta kohdassa $\pi/2$. Tämän perusteella sanotaan, että sinifunktio on $\pi/2$:n verran kosinin *jäljessä* tai että sinissä on $\pi/2$:n suuruinen ***viive*** kosiniin verrattuna. (Geometrisesti näyttäisi, että sinikäyrä olisi kosinikäyrän edellä.)

Joissakin yhteyksissä on luonnollista käyttää sanontaa "sini- ja kosinikäyrien *aallonpituus* tai ***jakso*** on $\lambda = 2\pi$ ja laajuus eli ***amplitudi*** = 1".

$\boxed{\textbf{2 Käyrä } y = a\sin bx}$ $(a,\ b > 0)$



Koska sinin arvot ovat välillä $-1\ldots1$, niin y saa arvoja väliltä $-a\ldots a$. Siten käyrän ***amplitudi* = *a***.

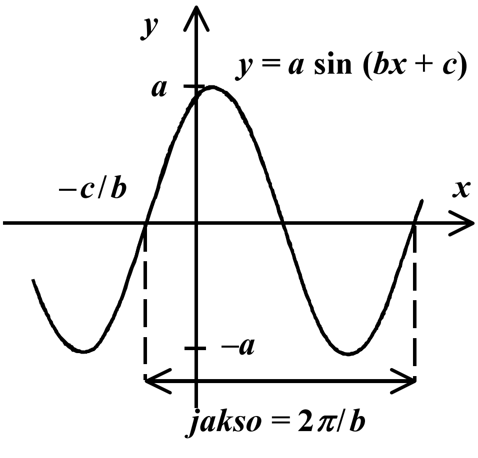
Jakso saadaan, kun tutkitaan, milloin $y = 0$:

$$\begin{aligned} y = 0 &\Leftrightarrow \sin bx = 0 \\ &\Leftrightarrow bx = n\cdot\pi \\ &\Leftrightarrow x = \frac{n\cdot\pi}{b}. \end{aligned}$$

Tästä saadaan peräkkäisiksi nollakohdiksi $x = 0, \dfrac{\pi}{b}, \dfrac{2\pi}{b}, \ldots$. Siten $\boxed{\textit{\textbf{jakso}} = \dfrac{2\pi}{b}}$ (vrt. kuva).

Käyrä $\boxed{y = a\cos bx}$ on muuten samanlainen, mutta sen yksi huippu on y-akselilla ja seuraava on kohdassa $x = 2\pi/b$. Piirrä kuva !

$\boxed{\textbf{3 Käyrä } y = a\sin(bx + c)}$ $(a,\ b > 0,\ |c| < 2\pi)$



Vaihesiirto c aiheuttaa edelliseen käyrään verrattuna ***siirtymän*** $-c/b$, sillä

$$\begin{aligned} y = 0 &\Leftrightarrow \sin(bx + c) = 0 \\ &\Leftrightarrow bx + c = n\cdot\pi \\ &\Leftrightarrow x = \frac{n\cdot\pi}{b} - \frac{c}{b}. \end{aligned}$$

Tekniikassa tämä käyrä esiintyy usein muodossa

$$s = A\sin(\omega t + \varphi), \qquad (\textit{\textbf{harmoninen liike}})$$

missä s = matka (paikkakoordinaatti), t = aika, ω = ***kulmanopeus*** ja φ = ***vaihesiirto***. Edellisen mukaan tämän liikkeen *amplitudi* = A, ***jakso*** (jaksonaika) on $T = 2\pi/\omega$, ***taajuus*** (***frekvenssi***) on $f = 1/T = \omega/2\pi$ ja vaihesiirron φ aiheuttama "*aika-poikkeama*" on $-\varphi/\omega$.

Esim. 1 Värähdysliikkeessä

$$s = 2 \sin (0{,}7\, t) - 2 \cos (0{,}7\, t)$$

on mukana sinikomponentti ja kosinikomponentti. Kummallakin on paitsi sama jakso $T = 2\pi/0{,}7 = 20\pi/7$ myös sama amplitudi 2. Tällaiset komponentit voidaan yhdistää yhdeksi sinimuotoiseksi värähtelyksi aikaisemmin mainituilla kaavoilla

$$\sin\alpha \pm \cos\alpha = \sqrt{2}\sin(\alpha \pm \pi/4).$$

Siten $s = 2(\sin 0{,}7t - \cos 0{,}7t) = 2\sqrt{2}\sin(0{,}7t - \pi/4)$. Piirrä kuva.

10.2 Aaltoliikkeiden yhdistäminen

Sini- ja kosinikäyrillä

(1) $\qquad$ $\boldsymbol{y = a \sin kx}$ ja $\boldsymbol{y = b \cos kx}$

on <u>sama jakso</u> $2\pi/k$, mutta mahdollisesti eri suuret amplitudit a ja b. Tällaisten aaltoliikkeiden summa ja samoin erotus voidaan esittää yhtenä sinimuotoisena aaltoliikkeenä

(2) $\qquad$ $\boldsymbol{y = A \sin (kx + c)}$.

Tämän resultanttiaaltoliikkeen amplitudi A ja vaihesiirto c saadaan tietyllä trigonometrisella laskutavalla, jolla on käyttöä muissakin yhteyksissä. Seuraavasta esimerkistä selviää tämä laskutapa. Huomaa, että resultantilla (2) on sama x:n kerroin k ja siten sama jakso $2\pi/k$ kuin kummallakin komponentilla.

Esim. 2 Esitä erotus $y = \sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x$ yhtenä sinikäyränä ja hahmottele sen kuvaaja välillä 0...2π.

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x &\equiv A\sin(2x + c) \qquad |\text{sinin yhteenlaskukaava}\\ &\equiv A\sin 2x\cos c + A\cos 2x\sin c\\ &\equiv A\cos c\sin 2x + A\sin c\cos 2x\end{aligned}$$

Jotta vp ja op olisivat identtisesti (≡) eli kaikilla x:n arvoilla samat, täytyy kosinikomponenttien (cos 2x) kertoimien olla kummallakin puolella yhtä suuret, samoin sinikomponenttien (sin 2x) kertoimien. Näin saadaan A:lle ja c:lle yhtälöpari

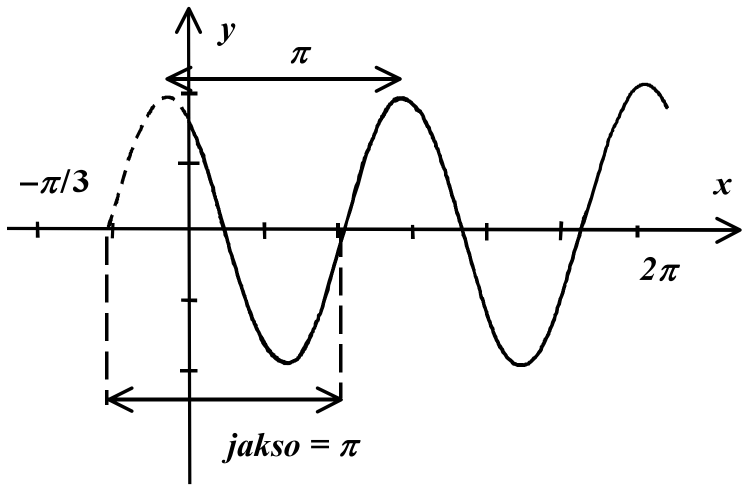
$$\begin{cases} A\sin c = \sqrt{3} \\ A\cos c = -1 \end{cases} \Bigg| \, (\,)^2, + \, \Bigg| \, : \qquad A > 0 \therefore \sin c > 0, \cos c < 0 \therefore 2.\ \text{nelj.}$$

$$A^2(\sin^2 c + \cos^2 c) = (\sqrt{3})^2 + (-1)^2 \quad \therefore A^2 = 4 \therefore A = (\pm)2$$

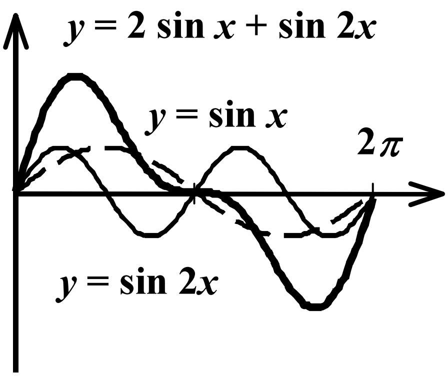
$$\frac{A\sin c}{A\cos c} = \frac{\sqrt{3}}{-1} \quad \therefore \tan c = -\sqrt{3},\ 2.\,\text{nelj.} \quad \therefore c = 2\pi/3.$$

$$\therefore \underline{\underline{y = 2\sin(2x + 2\pi/3)}}.$$

Tämän käyrän amplitudi = 2, jakso = $2\pi/2 = \pi$ ja "siirtymä" on $(-2\pi/3) : 2 = -\pi/3$. Kuvaaja on siten suunnilleen seuraava:



Esim. 3 Sinikäyrien $y = 2\sin x$ ja $y = \sin 2x$, joiden *jaksot ovat eri suuret* (2π ja π), summakäyrä $y = 2\sin x + \sin 2x$ ei ole enää sinimuotoinen vaan mutkikkaampi, vrt. viereinen kuva.

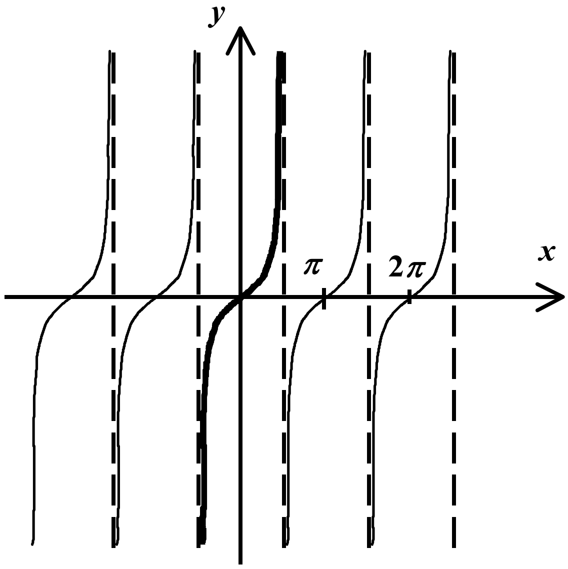


Käyrien jaksojen pienin yhteinen monikerta on 2π, joka on resultanttikäyrän alkujakso.

Käyrä voidaan piirtää esimerkiksi laskemalla komponenttikäyrien y-koordinaatteja yhteen. Edellisessä kuvassa käyrän $\sin x$ y-arvot on kerrottava 2:lla ja lisättävä käyrän $\sin 2x$ y-arvoihin.

10.3 Tangenttikäyrä

Käyrä $\boldsymbol{y = \tan x}$ poikkeaa monessa suhteessa sini- ja kosinikäyristä. Kun x lähtee kasvamaan 0:sta ja lähestyy arvoa $\pi/2$, niin tangentti kasvaa ja lähestyy ääretöntä. *Tangentti on pariton funktio*, joten välillä 0 ... $-\pi/2$ tangentti muuttuu 0:sta $-\infty$:ään. *Tangentti on jaksollinen, alkujaksona* π (sillä $\tan(x + \pi) = \tan x$). Tämä merkitsee, että tangentilla on ns. ***päähaara*** välillä



$$-\pi/2 < x < \pi/2$$

ja äärettömän monta sen kanssa yhtenevää haaraa aina π:n suuruisin välein, vrt. viereinen kuva. Funktio $\tan x$ ei ole määritelty x:n arvoilla

$$\pm\pi/2,\ \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2, ...$$

Näissä kohdissa käyrillä ovat pystyasymptootit.

10.4 Trigonometrisia yhtälöitä

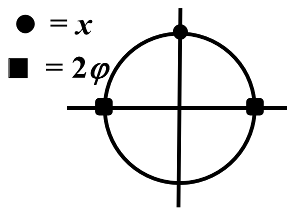
Edellä on jo käsitelty trigonometrisia ***perusyhtälöitä***, jotka ovat muotoa $\boldsymbol{\sin x = a}$, $\boldsymbol{\cos x = a}$, $\boldsymbol{\tan x = a}$, sekä joitakin niihin palautuvia yhtälöitä, kuten $\sin(2x + \pi/2) = -1/2$. Palauttaminen perusyhtälöksi tapahtui merkitsemällä $2x + \pi/2 = \alpha$.

Yleensä ratkaisemisessa käytettiin apuna ***peruskulmaa***. Jos kuitenkin kyseessä on sellainen yhtälö, että ratkaisukulma on jokin neljänneksien rajakohdassa oleva kulma 0, $\pi/2$, π, $3\pi/2$ tai 2π, ratkaisu löytyy trigonometrisen 1-ympyrän avulla, esim.

1) $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \pi/2 + n \cdot 2\pi$

2) $\sin 2\varphi = 0 \Leftrightarrow 2\varphi = n \cdot \pi \Leftrightarrow \varphi = n \cdot \pi/2$

3) $\cos t = 1 \Leftrightarrow t = n \cdot 2\pi$,



4) $\cos 3t = 0 \Leftrightarrow 3t = \pi/2 + n\cdot\pi \Leftrightarrow t = \pi/6 + n\cdot\pi/3$.

Mutkikkaammat trigonometriset yhtälöt pystytään usein palauttamaan perusyhtälöiden tyyppisiksi, kun apuna käytetään sopivia trigonometrisia kaavoja.

Esim. 4 $\sin 2x + \sin 4x = 0$

$\sin 2x + 2\sin 2x \cos 2x = 0$

$\sin 2x\,(1 + 2\cos 2x) = 0$ | *tulo on = 0 ⇔ jompikumpi tekijä on = 0*

$\sin 2x = 0$ tai $\cos 2x = -1/2$.

Näistä saadaan ratkaisuiksi (suorita laskut)

$x_1 = n\cdot\pi/2$, $x_2 = \pi/3 + n\cdot\pi$, $x_3 = 2\pi/3 + n\cdot\pi$.

Esim. 5 $\cos x - \cos 3x = 0$ | *summat tuloiksi*

$-2\sin 2x\,\sin(-x) = 0$

$2\sin 2x\,\sin x = 0$

$\sin 2x = 0 \vee \sin x = 0$ ($\vee$ on "tai"-merkki)

$x_1 = n\cdot\pi/2$, $x_2 = n\cdot\pi$. Nämä voidaan yhdistää: $\underline{\underline{x = n\cdot\pi/2}}$.

Esim. 6 $\sin x - \cos 2x = 1$

$\sin x - (1 - 2\sin^2 x) = 1$

$2\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$ | *sin x:lle 2. asteen yhtälö*

$$\sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+16}}{4} = \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \approx 0{,}7808$$

(miinusmerkki ei käy, koska $\sin x$ ei voi olla < -1)

$\therefore\ x_1 \approx 51{,}3^\circ + n\cdot 360^\circ$, $x_2 \approx 128{,}7^\circ + n\cdot 360^\circ$.

Esim. 7 $\sin 2t = \tan t$

$$2\sin t\cos t = \frac{\sin t}{\cos t} \qquad (\cos t \neq 0)$$

$2\sin t\cos^2 t = \sin t$

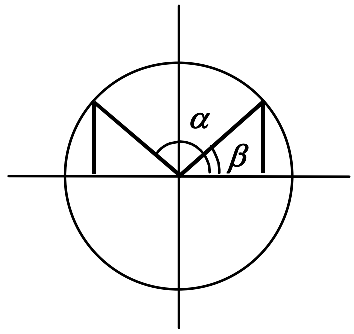
$\sin t\,(2\cos^2 t - 1) = 0$

$\sin t = 0 \vee \cos^2 t = ½$ (toisin: $\sin t \cos 2t = 0$ jne.)

$t = n \cdot \pi \vee \cos t = \pm 1/\sqrt{2}$ (piirrä kulmat ympyrään)

$\therefore\ t_1 = n \cdot \pi,\ t_2 = \pi/4 + n \cdot \pi/2.$

***Esim. 8** $\sin 3x = \sin x$.



Käytetään apuna trigonometrista yksikköympyrää. Jotta kahden kulman α ja β sinit olisivat yhtä suuret, kulmien kehäpisteillä täytyy olla sama y-koordinaatti, ts.

$\alpha = \beta + n \cdot 2\pi$ tai $\alpha = \pi - \beta + n \cdot 2\pi$.

Tässä esimerkissä

$3x = x + n \cdot 2\pi$ tai $3x = \pi - x + n \cdot 2\pi$

$\therefore\ x_1 = n \cdot \pi,\ x_2 = \pi/4 + n \cdot \pi/2$.

*Esimerkissä 8 käytetty ajattelutapa on syytä kirjata ylös yleisemminkin seuraavasti (piirrä kosinia ja tangenttia vastaavat ympyrät):

***Lause 1** 1) $\sin \alpha = \sin \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta + n \cdot 2\pi$ tai $\alpha = \pi - \beta + n \cdot 2\pi$,

2) $\cos \alpha = \cos \beta \Leftrightarrow \alpha = \pm\beta + n \cdot 2\pi$,

3) $\tan \alpha = \tan \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta + n \cdot \pi$.

*Kokeile esimerkin 5 ratkaisemista tämän lauseen avulla!

***Esim. 9** $\sin x - 2\cos x = 1 \,\big|$ *Yhdistetään vp yhdeksi siniaalloksi*

$$\text{vp} = \sin x - 2\cos x \equiv a \sin(x + b)$$

$$= a \sin x \cos b + a \cos x \sin b$$

$$\therefore \begin{cases} a \sin b = -2 \\ a \cos b = 1 \end{cases} \Bigg| \, ()^2, + \, \Bigg| \, :$$

$a^2 = 5$, $\tan b = -2$, 4. nelj. $\therefore a = \sqrt{5}$, $b \approx -63{,}43^\circ$.

Täten yhtälö saa muodon

$\sqrt{5}\,\sin(x - 63{,}43^\circ) = 1$ eli $\sin(x - 63{,}43^\circ) = 1/\sqrt{5}$.

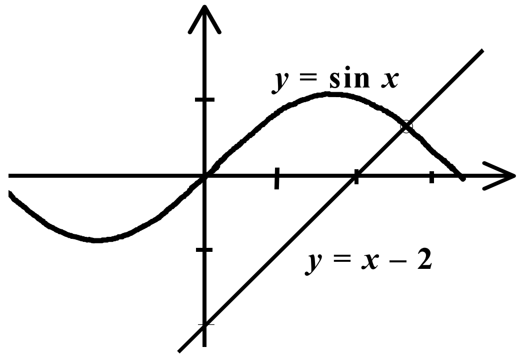
Tästä saadaan (peruskulman avulla) ratkaisuiksi

$x_1 \approx 90{,}0^\circ + n \cdot 360^\circ$, $x_2 \approx 216{,}9^\circ + n \cdot 360^\circ$.

(Itse asiassa x_1 on tarkalleen $90^\circ + n \cdot 360^\circ$, sillä 90° toteuttaa alkuperäisen yhtälön.)

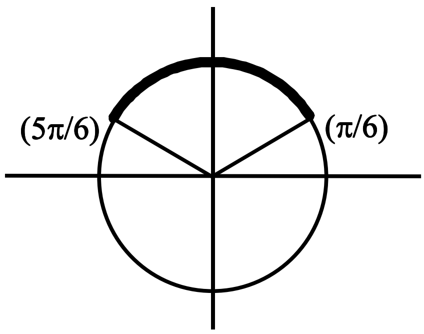
Esim. 10 Yhtälössä sin $x - x + 2 = 0$ muuttuja x esiintyy paitsi "sinin alla" myös polynomifunktiossa ($-x + 2$). Tämän tyyppiset yhtälöt joudutaan yleensä ratkaisemaan jollakin likiarvomenetelmällä, esim. haarukoimalla.

Kirjoitetaan yhtälö muotoon sin $x = x - 2$ ja piirretään erikseen käyrät $y = \sin x$ ja $y = x - 2$. Käyrillä on tarkalleen yksi leikkauskohta $x \approx 2{,}6$. Esim. haarukoimalla voit tarkentaa tätä likiarvoa. Tulos on $x \approx 2{,}554$. (Laskin RAD-näytölle!)



*Ratkaistaan tässä yhteydessä näytteenä myös yksi trigonometrinen ***epäyhtälö***.

Esim. 11 Ratkaise epäyhtälö sin $2x > ½$.

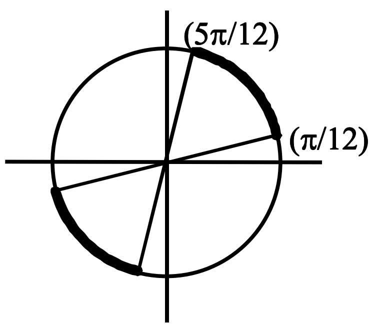


Millä x:n arvoilla sin $2x$ on $> ½$?

Käytetään apuna trigonometristä ympyrää. Siitä nähdään, että kulman $2x$ loppukyljen piste on vahvennetussa osassa ylempää ympyrää. Siis

$$\frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi < 2x < \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$$

$$\therefore \quad \frac{\pi}{12} + n \cdot \pi < x < \frac{5\pi}{12} + n \cdot \pi .$$



Nämä ratkaisut on merkitty alempaan ympyrään.

Harjoituksia

A

10.1 Määritä seuraavien käyrien amplitudit ja perusjaksot sekä hahmottele kuvaajat:

a) $y = 3 \sin 2x$, b) $y = 3 \cos 2x$, c) $y = 3 \sin (2x - \frac{\pi}{3})$.

10.2 Funktion $y = 3 \cos (x/2 + \pi/6)$ maksimiarvo (suurin y:n arvo) on 3. Millä x:n arvoilla se saadaan? Hahmottele näiden huippupisteiden (x, y) avulla funktion kuvaaja.

10.3 Eräässä vaihtovirtapiirissä jännite u vaihtelee yhtälön $u = 311 \cdot \sin(100\pi t + \pi)$ mukaisesti. Määritä tässä piirissä u:n maksimiarvo u_m, keskimääräinen arvo $u_m/\sqrt{2}$, jaksonaika T, taajuus (eli frekvenssi) f, kulmanopeus $\omega = 2\pi f$, vaihesiirto φ ja aikapoikkeama.

10.4 Yhdistä yhdeksi siniaalloksi ja hahmottele kuvaaja:

a) $y = \sqrt{3} \sin 3x + \sqrt{3} \cos 3x$ b) $y = \sqrt{3} \sin 3x - \cos 3x$.

10.5 Ratkaise: a) $\cos 5x = 0$, b) $\cos^2 2x = 1$, c) $2 \sin^2 t = 1$.

10.6 Ratkaise: a) $\sin 2x = 2 \cos x$, b) $\sin^2 x - \cos^2 x = 1$,

c) $\sin x + \cos x = 0$, d) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$.

10.7 Missä kohdissa ovat käyrän $y = \tan 2x$ asymptootit ? Hahmottele tämän tiedon avulla kyseisen funktion kuvaaja.

B

10.8 Piirrä samaan koordinaatistoon (ilman laskinta) käyrät

$y = 3 \sin (2x - \pi/2)$ ja $y = -3 \sin (2x - \pi/2)$ välillä $0 \ldots \pi$.

10.9 Määritä sellainen ω:n arvo, että seuraavan jaksollisen funktion $s = s(t)$ alkujakson pituus on 1: $s = 2{,}35 \sin (\omega t + 0{,}567)$.

10.10 Esitä $s = \sqrt{3} \sin 3t - \cos 3t$ yhtenä *kosinikäyränä* ja hahmottele sen kuvaaja.

*10.11 Tutki graafisesti (ilman laskimen apua), montako ratkaisua yhtälöllä $2 \sin(2x + \pi/3) + x - 2 = 0$ on.

*10.12 Ratkaise: $\cos 2x + 1 = 2 \cos x + \sin 2x$.

10.13 Ratkaise: a) $\sin 2x = 2 \cos^2 x$, *b) $\sqrt{3} \cos 2x = 1 + \sin 2x$.

*10.14 Ratkaise: a) $\sin 2x = \sin(x - \pi/3)$, b) $2 \sin x = x - 2$.

C

10.15 Määritä sellaiset vakiot $\xi > 0$ ja η, että seuraava yhtälö on voimassa kaikilla λ:n arvoilla: $2 \cos 2\lambda = \xi \sin(2\lambda - \eta)$.

10.16 Osoita, että käyrä $y = \sin(2x + \pi/4) - \cos(2x - \pi/6)$ voidaan esittää yhtenä sinikäyränä. Kuinka suuret ovat tämän amplitudi ja vaihesiirto 3 numeron tarkkuudella ?

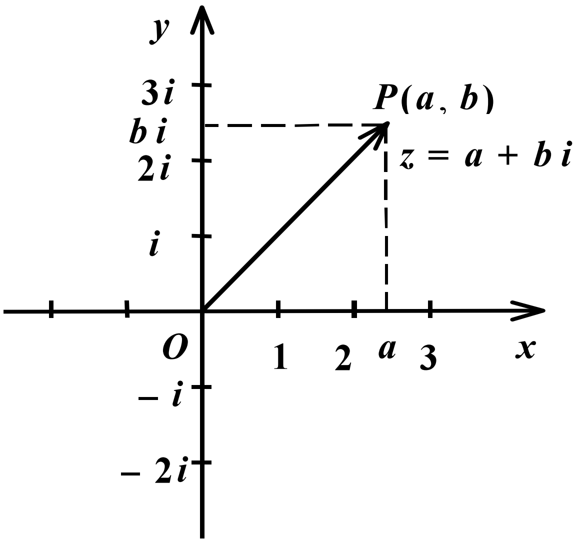
10.17 Ratkaise: a) $\dfrac{\sin 5x + \sin 3x}{2 \sin x - 4 \sin^3 x} = 2$,

b) $\sin 7x + \sin 5x + \sin 3x = 0$,

c) $\cos 3x > -\frac{1}{2}$ (epäyhtälö).

11 KOMPLEKSILUKUJEN ESITYSTAPOJA

11.1 Peruskäsitteitä



Kompleksiluku $\boldsymbol{z = a + b\,i}$ (a, $b \in \mathbf{R}$, i = imaginaariyksikkö, $i^2 = -1$) voidaan geometrisesti esittää mm. xy-tason pisteenä $P(a,\ b)$ tai origosta O pisteeseen P piirrettynä vektorina. Tässä yhteydessä xy-tasoa sanotaan ***kompleksitasoksi***, x-akselia ***reaaliakseliksi*** ja y-akselia ***imaginaariakseliksi***. Reaaliluvut a ja b ovat z:n ***reaaliosa*** ja ***imagimaariosa*** ja niistä voidaan käyttää merkintöjä $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$.

Vektoriesitys sopii hyvin kompleksilukujen yhteen- ja vähennys-laskun yhteyteen, sillä kahden kompleksiluvun

$$z_1 = a + bi \text{ ja } z_2 = c + di$$

summa saadaan vastaavien vektorien summana. Piirrä kuva!

Vektorin $\overrightarrow{\boldsymbol{OP}}$ pituutta sanotaan kompleksiluvun z ***itseisarvoksi*** tai ***moduuliksi***. Siis

(1) $$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Luvun $z = a + b\,i$ ***liittoluku*** eli *kompleksikonjugaatti* on luku $\bar{z} = a - b\,i$. Miten z ja $\bar{z}$ sijaitsevat toisiinsa nähden kompleksi-tasossa?

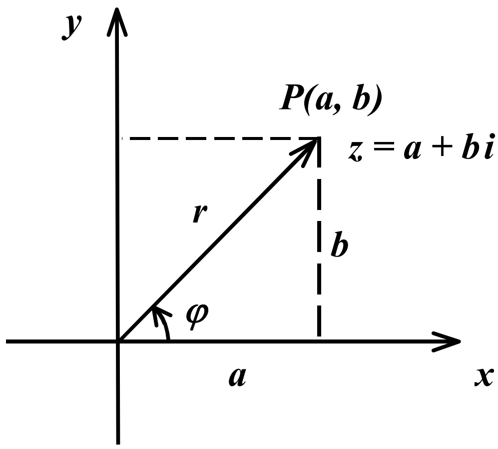
Liittoluvun ja itseisarvon seuraavilla ominaisuuksilla on käyttöä mm. sähkötekniikassa:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2,\quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2,\quad \overline{(1/z)} = 1/\bar{z},\quad \overline{z_1/z_2} = \bar{z}_1/\bar{z}_2,$$

$$z\bar{z} = |z|^2,\quad |z_1 z_2| = |z_1||z_2|,\quad |z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|.$$

(*Tod.* esim. "algebrallisen esityksen" $z = a + b\,i$ avulla.)

11.2 Polaarinen ja osoitinesitys



Jos r ja φ ovat kompleksilukua $z = a + bi$ esittävän pisteen P napakoordinaatit (ts. r on P:n etäisyys origosta ja φ on P:n vaihekulma), niin

$a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$.

Kun nämä sijoitetaan luvun z esitykseen $a + bi$, saadaan kompleksiluvulle z ns. ***polaarinen eli trigonometrinen esitys***

$$z = a + bi = r\cos\varphi + (r\sin\varphi)\, i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

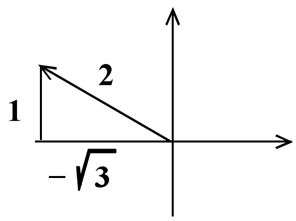
(2) $$\therefore\quad \boxed{z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)}.$$

Esim. 1 Esitä $z = -\sqrt{3} + i$ polaarisessa muodossa.

$$r = |z| = \sqrt{3+1} = 2,\ \tan\varphi = \frac{1}{-\sqrt{3}},\ 2.\ \text{nelj.}\,(\text{koska } a < 0, b > 0)$$

$$\varphi_0 = \pi/6,\quad \varphi = \pi - \pi/6 = 5\pi/6$$

$$\therefore\ \underline{\underline{z = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})}}.$$



Sähkötekniikassa polaarinen esitys (2) lyhennetään muotoon

(3) $$\boxed{z = r\angle\varphi}$$ (lue: "***r kulma φ***")

ja kompleksilukua (tai vastaavaa vektoria) sanotaan ***osoittimeksi***. Siten esimerkissä 1 kyseessä oli osoitin

$$z = 2\angle\frac{5\pi}{6}.$$

Muita esimerkkejä:

$$3i = 3\angle\frac{\pi}{2},\quad -5 = 5\angle\pi.$$

(sillä $3i$ on y-akselilla etäisyydellä 3 origosta ja -5 on negatiivisella x-akselilla etäisyydellä 5 origosta).

Osoitinesitys sopii hyvin kompleksilukujen tulon, osamäärän ja potenssin (sekä juuren) yhteyteen. Peruslaskusäännöt ovat seuraavat:

(3) $$r_1\underline{/\varphi_1}\cdot r_2\underline{/\varphi_2} = r_1 r_2\underline{/\varphi_1+\varphi_2}$$

(4) $$\frac{r_1\underline{/\varphi_1}}{r_2\underline{/\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}\underline{/\varphi_1-\varphi_2}$$

(5) $$(r\underline{/\varphi})^n = r^n\underline{/n\varphi} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

**Tod.* (3): $\text{vp} = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

$$= r_1r_2\left[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\right]$$

$$= r_1r_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right] = op.$$

(4) todistetaan vastaavasti, (5) seuraa (3):sta, kun tulon tekijät ovat kaikki yhtä suuria.

Esim. 2 Jos $z_1 = 2\underline{/5\pi/6}$ *ja* $z_2 = 3\underline{/\pi/6}$, niin

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}\underline{/\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}} = \frac{2}{3}\underline{/\frac{2\pi}{3}}$$

$$z_1^3 = 2^3\underline{/3\cdot 5\pi/6} = 8\underline{/5\pi/2} = 8\underline{/\pi/2}\ \ (= 8i) \quad \text{(täysi kierros pois).}$$

11.3 Eksponenttiesitys

Laajennetaan reaalisen eksponenttifunktion e^x määritelmää siten, että eksponenttina voi olla myös imaginaariluku:

Määritelmä: $\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}$ ***(Eulerin kaava)***.

Esim. 3 $$e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Eulerin kaavan avulla polaarinen esitys $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ (eli vastaava osoitinesitys) muuttuu eksponenttiesitykseksi:

(6) $$\boxed{z = re^{i\varphi}}$$

ja säännöt (3), (4) ja (5) saavat seuraavat muodot:

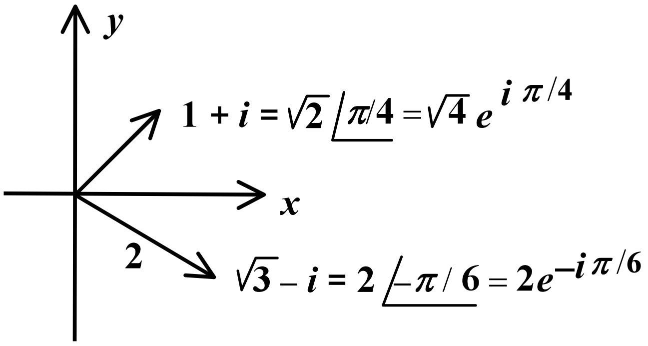
$$r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \quad \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - i\varphi_2)},$$

ja $\quad (re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}$.

Nämä säännöt merkitsevät sitä, että ***eksponenttiesitystä käytettäessä kertominen, jakaminen ja potenssiin korotus noudattavat "tavallisia" reaalisen eksponenttifunktion laskusääntöjä*** (ts. tavallisia potenssiopin sääntöjä).

Esim. 4 $\quad 2e^{3i} \cdot 5e^{4i} = 10e^{7i}, \ (2e^{3i})^4 = 16e^{12i}$.

Esim. 5 $\quad$ Laske eksponenttiesitystä apuna käyttäen $(\sqrt{3} - i)^5 (1+i)^3$. Vastaus on yleensä pyrittävä esittämään samantyyppisessä muodossa kuin esimerkki on annettu, siis tässä tapauksessa algebrallisessa muodossa.



Koordinaatiston ja erikoiskolmioiden avulla (vrt. kuva) tai esimerkin 1 tapaan saadaan aluksi selville tulontekijöiden itseisarvot (2 ja $\sqrt{2}$) ja vaihekulmat ($-\pi/6$) ja $\pi/4$. Täten

$$z = (2e^{-i\pi/6})^5 (\sqrt{2}\, e^{i\pi/4})^3 = 2^5 e^{-i5\pi/6} \cdot 2\sqrt{2}\, e^{i3\pi/4}$$

$$= 64\sqrt{2}\, e^{i(-10\pi/12 + 9\pi/12)} = 64\sqrt{2}\, e^{-i\pi/12}$$

$$= 64\sqrt{2}\,(\cos\frac{-\pi}{12} + i \sin\frac{-\pi}{12}) \approx 87{,}4 - 23{,}4\, i.$$

Huom. *Osoittimien ja eksponenttiesitysten laskulait koskevat kerto- ja jakolaskua*, mutta eivät yhteen- ja vähennyslaskua. Jos siis joudut *laskemaan yhteen tai vähentämään* osoittimia tai eksponenttiesityksiä, ne täytyy ensin muuttaa algebralliseen muotoon (samaan tapaan kuin edellisen esimerkin lopussa).

*11.4 Kompleksiluvun juuri ja logaritmi

Kompleksiluvun $z = r\underline{/\varphi}$ ***n:nnellä juurella*** $\sqrt[n]{z}$ tarkoitetaan (mitä tahansa) sellaista kompleksilukua, jonka n:s potenssi on z. Voidaan todistaa, että tällaisia lukuja on n kpl, nimittäin luvut

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\,\underline{/\varphi/n + k\cdot 2\pi/n}} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

(*Perustelu:* Laske op^n. Tulos on $r\underline{/\varphi}$ eli z.) Nämä arvot sijaitsevat kompleksitasossa $\sqrt[n]{r}$ -säteisellä ympyrällä "tasavälein", yhdellä on vaihekulma φ/n ja muiden vaihekulmat saadaan tästä $2\pi/n$:n suuruisilla lisäyksillä. Mitkä ovat esim. (reaalisen) kompleksiluvun $\sqrt[3]{1}$ kolme arvoa? Näistä yksi on 1 ja kaksi muuta ovat imaginaarisia.

Kompleksiluvun ***logaritmilla*** taas on ∞ monta arvoa:

$$\boxed{\log z = \ln r + i(\varphi + k\cdot 2\pi)} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Näistä k:n arvoa 0 vastaava arvo $\ln r + i\varphi$ on ns. ***pääarvo***.

Harjoituksia

A

11.1 Esitä kompleksiluku $1 + \dfrac{2+3i}{3-4i}$ algebrallisessa muodossa $a + bi$ ja kompleksitason vektorina. Määritä tämän kompleksiluvun z itseisarvo (eli moduuli) ja vaihekulma. Vaihekulmaa lisättynä täysillä kierroksilla sanotaan z:n ***argumentiksi*** ja merkitään arg z:lla. Mikä on siis tässä tehtävässä arg z?

11.2 Olkoon $z_1 = 1 + i$ ja $z_2 = 1 - i$. Esitä z_1, z_2, z_1/z_2 ja $z_1^4 z_2^6$ a) polaarisessa -, b) osoitin-, c) eksponenttimuodossa.

11.3 Mitä merkitsee geometrisesti luvun $r\underline{/\varphi}$ kertominen luvulla $z = 2\underline{/\pi/4}$? Entä luvulla i?

11.4 Laske a) $\left(1-\sqrt{3}\,i\right)^8$, b) $\left(0{,}222-0{,}333\,i\right)^{12}$.

B

11.5 Laske (tulokset osoittimina):

a) $2\,\underline{/45°} : 4\,\underline{/135°}$, b) $2\,\underline{/45°} + 4\,\underline{/135°}$,

c) $(-1)\cdot 3\,\underline{/25°}\cdot 2\,\underline{/40°}$.

11.6 $2\,e^{i\pi/4} + 2e^{i\cdot 3\pi/4}$.

11.7 Laske kompleksialueella

a) $\sqrt[3]{1}$, b) $\sqrt[3]{1-\sqrt{3}\,i}$, *c) $\log e$, *d) $\log(2-\sqrt{12}\,i)$.

11.8 Laske a) $\dfrac{1}{2}(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})$, b) $\dfrac{1}{2i}(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi})$. Näistä saatavien tulosten nojalla trigonometriset lausekkeet voidaan esittää kompleksisen eksponenttifunktion avulla, esim.

$$\cos 3\varphi = \tfrac{1}{2}(e^{3i\varphi}+e^{-3i\varphi}).$$

C

11.9 Ratkaise seuraava yhtälö kompleksilukualueella:

a) $z^3 - 8i = 0$, b) $e^{2z} = -4$.

11.10 Täydennä:

$$\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha = (\cos \quad + i \quad)^3 = \cos^3\alpha + 3i\cos^2\alpha\sin\alpha +$$

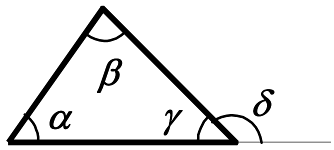
$$\therefore \begin{cases} \cos 3\alpha = \\ \sin 3\alpha = \end{cases}$$

12 YMPYRÄN GEOMETRIAA

12.1 Kehä- ja keskuskulma

Kolmiossa kahden kulman summa on = kolmannen vieruskulma, sillä

$$\alpha + \beta = 180° - \gamma = \delta \text{ (vrt. kuva).}$$

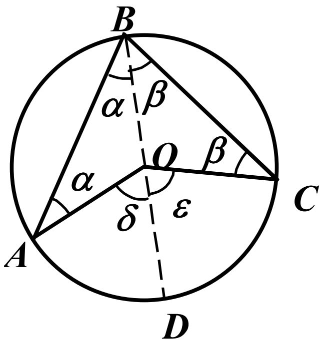


Käytetään tätä tulosta apuna seuraavan lauseen todistamisessa. Käytetyt sanonnat selvinnevät asiayhteydestä.

Lause 1 *Kehäkulma on puolet vastaavasta keskuskulmasta.*

Tod. Kuvan merkinnöin

$$\delta = \alpha + \alpha, \ \varepsilon = \beta + \beta,$$

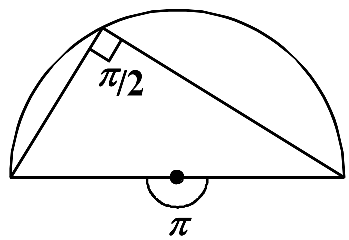


joten keskuskulma $\delta + \varepsilon$ on kaksi kertaa kehäkulman $\alpha + \beta$ suuruinen.

Yhtä keskuskulmaa A*OC* (tai myös yhtä kaarta *ADC*) vastaa äärettömän monta kehäkulmaa *ABC*, sillä kehäkulman kärki *B* voi olla missä kohtaa tahansa kaarella *ABC*. Kaikki tällaiset *samaa kaarta ADC vastaavat kehäkulmat ovat yhtä suuria* (jokainen on puolet kulmasta *AOC*).

Seuraus *Puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suora kulma.*

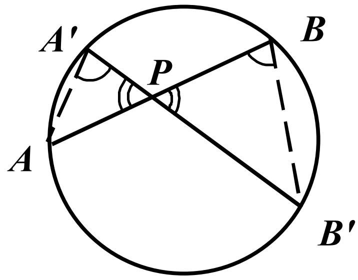
Tod. Vastaava keskuskulma on 180° (eli π rad).



12.2 Pisteen potenssi ja sekanttilause

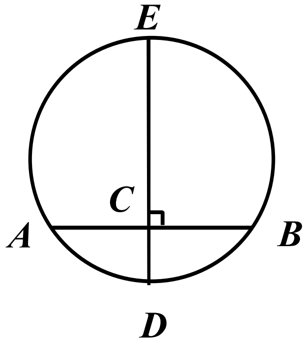
Piirretään pisteen *P* kautta ympyrälle ***sekantti*** eli *leikkaaja AB* (seuraava kuva). Janojen pituuksien tuloa ***PA·PB*** sanotaan ***pisteen P potenssiksi*** *kyseisen ympyrän suhteen.* Todistetaan ns. ***sekanttilause***. Sen mukaan *tämä tulo on sama kaikille pisteen P kautta piirretyille sekanteille AB*, ts. jos *P*:n kautta piirretään kaksi sekanttia *AB* ja *A'B'*, niin

(1) $\boldsymbol{PA \cdot PB = PA' \cdot PB'}$.



Tod. Piirretään kuvan mukaiset katkoviivat. Kulmat A' ja B ovat yhtä suuria, sillä ne ovat samaa kaarta AB' vastaavia kehäkulmia. Kolmioissa $PA'A$ ja PBB' on toinenkin yhtä suuri kulmapari, nimittäin P-kulmat. Kolmiot ovat siis yhdenmuotoiset. Yhdenmuotoisissa kolmioissa vastinsivut ovat verrannolliset, joten $PA : PA' = PB' : PB$. Tästä seuraa ristiin kertomalla tulos (1).

Esim. 1 Laske halkaisija DE, kun jänne $AB = 6$ ja $CD = 2$ (vrt. kuva).



Sekanttilauseen mukaan

$CE \cdot 2 = 3 \cdot 3 \;\therefore\; CE = 4\tfrac{1}{2} \;\therefore DE = 6\tfrac{1}{2}$.

Tulos saataisiin myös Pythagoraan lauseella.

Sekanttilauseessa piste P voi olla myös ympyrän ulkopuolella (tarkemmin harj.).

12.3 Heronin kaava

Jos tunnetaan kolmion sivut a, b ja c, niin kolmion ala

(2) $$\boxed{\boldsymbol{A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},}}$$ (***Heronin kaava***)

missä p = *kolmion piirin puolikas*: $\boldsymbol{p = \dfrac{a+b+c}{2}}$.

**Tod.* Käytetään apuna kolmion alan lauseketta ja kosinilausetta. Näin saadaan alan neliölle muoto

$$A^2 = (\frac{1}{2}ab\sin\gamma)^2 = \frac{1}{4}a^2b^2(1-\cos^2\gamma) \quad \Big| \quad \cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

= eräs sivujen a, b ja c lauseke.

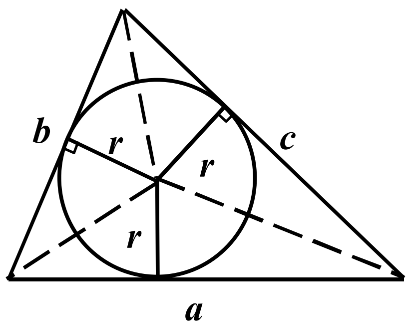
Kun tuloon $p(p-a)(p-b)(p-c)$ sijoitetaan p:n paikalle sen lauseke $(a+b+c)/2$, niin sievennysten jälkeen tästä tulee sama tulos kuin edellisestä pinta-alan neliön lausekkeesta.

12.4 Kolmion sisään ja ympäri piirretty ympyrä

1) *Kolmion* <u>*sisään*</u> *piirretyn ympyrän* keskipiste on kulmanpuolittajien leikkauspisteessä, koska keskipiste on yhtä kaukana (etäisyydellä r) kolmion jokaisesta sivusta. Kuvan mukaan kolmion ala

$$A = \frac{ra}{2} + \frac{rb}{2} + \frac{rc}{2} = r\frac{a+b+c}{2}.$$

$$\therefore\ A = rp \quad \boxed{\therefore\ \boldsymbol{r = \frac{A}{p}}}.$$

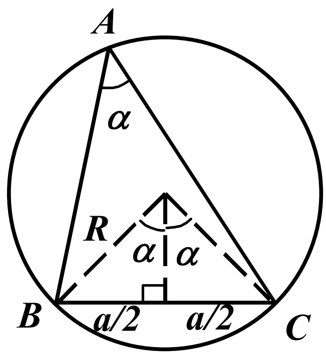


Tässä esiintyvä kolmion ala A voidaan usein laskea *Heronin* kaavalla.

2) *Kolmion* <u>*ympäri*</u> *piirretyn ympyrän* keskipiste on kolmion sivujen keskinormaalien leikkauspiste, koska keskipiste on yhtä kaukana (etäisyydellä R) kolmion jokaisesta kärjestä.

Jos a, α on jokin sivu-kulma-pari, niin vastaava keskuskulma on 2α ja keskuskolmion puolikkaasta saadaan

$$\sin\alpha = \frac{a/2}{R} = \frac{a}{2R} \therefore \quad \boxed{\boldsymbol{R = \frac{a}{2\sin\alpha}}}.$$



$\therefore\ a = 2R\sin\alpha$ ja vastaavasti

$$b = 2R\sin\beta,$$

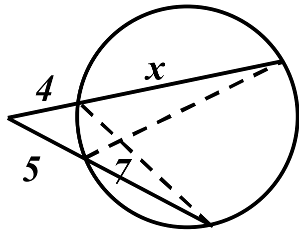
$$c = 2R\sin\gamma.$$

Harjoituksia

A

12.1 Ympyrän ulkopuolella olevasta pisteestä P piirretään ympyrälle kaksi tangenttia PA ja PB (A, B sivuamispisteitä). Isommalta kaarista AB valitaan jokin piste D ja pienemmältä E. Ympyrän keskipiste on O. Tangenttien välinen kulma APB on $52{,}1^{\mathrm{o}}$. Laske kulmat AOB, ADB ja AEB.

12.2 Laske (sekantin osa) x viereisessä kuvassa (osat ovat 4, x, 5 ja 7). Ohje: yhdenmuotoiset kolmiot.

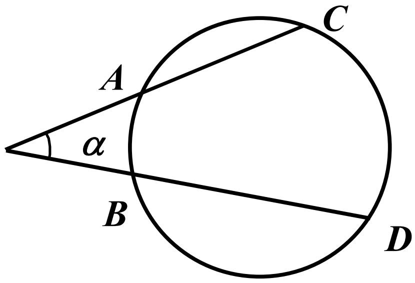


12.3 Kolmion sivut ovat 40,0 mm, 50,0 mm ja 60,0 mm. Laske kolmion ala sekä kolmion sisään piirretyn ympyrän säde r.

B

12.4 Todista sekanttilause siinä tapauksessa, että piste P on ympyrän ulkopuolella (vrt. teht. 12.2).

12.5 Viereisessä kuvassa kaarien AB ja CD asteluvut ovat $37{,}4^{\circ}$ ja $93{,}2^{\circ}$. (Ne ovat samalla vastaavien keskuskulmien asteluvut.) Laske kulma α.



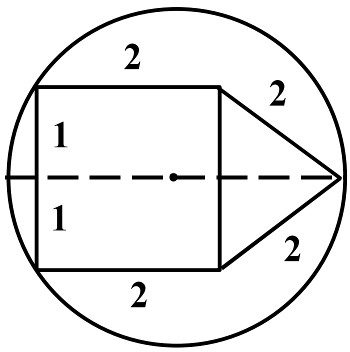
12.6 Ympyrän kehällä oleva piste P on etäisyydellä 5 halkaisijasta AB ja etäisyydellä 7 pisteestä A. Laske ympyrän halkaisija (tarkka arvo ja 3-numeroinen likiarvo).

12.7 Laske tehtävän 12.3 mukaisen kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde R.

12.8 Johda (todistettujen tulosten avulla) kaavat

$$a)\ R = \frac{abc}{4A},\quad b)\ A = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma\ .$$

12.9 Ympyrän sisään on piirretty viereisen kuvan mukaisesti neliö ja tasasivuinen kolmio. Laske ympyrän halkaisija. Ohje: pisteen potenssi.



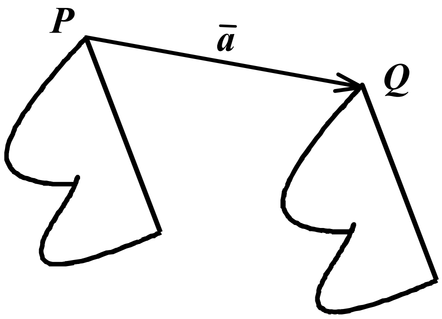
13 Yleinen yhtenevyys ja yhdenmuotoisuus

13.1 Tasokuvioiden perusliikkeet ja yhtenevyys

Perusliikkeet ovat

1) siirto *(yhdensuuntaissiirto, translaatio),*
2) kierto *(rotaatio),*
3) peilaus *(engl. mirror = peili, peilata).*

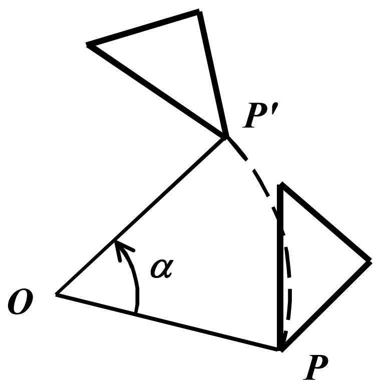
1) ***Siirrossa*** tason jokainen piste siirtyy yhtä pitkän matkan samaan suuntaan. Jos tunnetaan yhden pisteen P kuvapiste Q ts. jos tunnetaan ***siirtovektori***



$$\bar{a} = \overrightarrow{PQ},$$

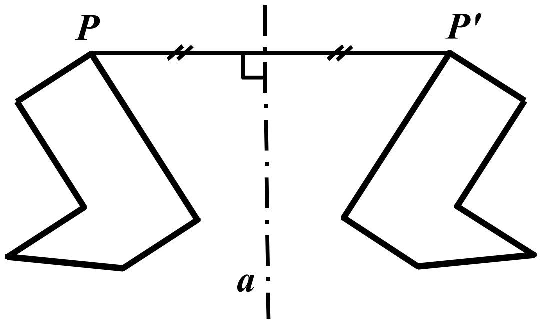
niin siirto on täysin määrätty.

2) ***Kierto*** on täysin määrätty jos tunnetaan ***kiertokeskus*** O ja ***kiertokulma*** α. Yleisen pisteen P kuva P' sijaitsee O-keskisellä ja OP-säteisellä ympyrällä. Jos kierto tapahtuu myötäpäivään, kiertokulma on negatiivinen.



3) ***Peilaus*** voi tapahtua joko suoran tai pisteen suhteen.

a) ***Suorapeilauksen*** määrää ***peilausakseli*** a. Jos tunnetaan yhden pisteen P kuvapiste P', on myös peilausakseli määrätty, sillä se on janan PP' keskinormaali. Suorapeilauksessa alkuperäinen kuva ja *peilikuva* ovat ***symmetriset akselin a suhteen***.

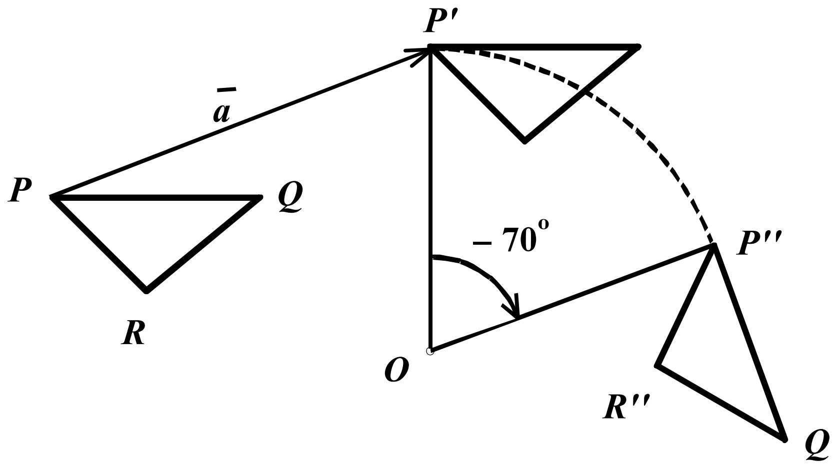


Avaruudessa peilausakselin tilalla on ***peilaustaso***.

b) *Peilaus pisteen O suhteen on itse asiassa sama kuin 180º kierto pisteen O suhteen*. Tässä kuvauksessa alkuperäinen alue ja kuva-alue ovat ***symmetriset pisteen O suhteen*** (piirrä kuva).

Kaikissa näissä liikkeissä tasokuviot säilyttävät kokonsa ja muotonsa ts. alkuperäinen kuvio ***K*** ja sen kuva ***K'*** ovat ***yhtenevät.*** Suorapeilauksessa kuitenkin kuvioita ***K*** ja ***K*** ei saa siirretyiksi päällekkäin pysymällä kuvioiden tasossa vaan kuvio täytyy kääntää "kolmannen ulottuvuuden" kautta. Tällaisia kuvioita sanotaan joskus ***kääntäen yhteneviksi***. (Avaruudessa esim. vasemman ja oikean jalan kenkä ovat toistensa peilikuvia. Tarvittaisiin neljäs ulottuvuus, jotta ne siirtyisivät päällekkäin.)

Esim. 1 Seuraavassa kuvassa kolmioon on tehty ensin vektorin $\bar{a}$ määräämä siirto ja sitten kulman -70° mukainen kierto pisteen O ympäri.



Kolmio PQR saataisiin siirretyksi suoraan kolmioksi $P''Q''R''$ yhdellä kierrolla. Jotta P kiertyisi P'':ksi, kiertokeskuksen täytyy olla janan PP'' keskinormaalilla. Jotta myös Q siirtyisi Q'':ksi, kiertokeskuksen täytyy olla QQ'':n keskinormaalilla. Suorittamalla kierto näiden kahden keskinormaalin leikkauspisteen O_1 suhteen, saadaan sekä P että Q paikalleen.

*Se, että P:n ja Q:n kiertämiseen tarvittavat kiertokulmat ovat yhtä suuret, seuraa kolmioiden O_1PQ ja $O_1P''Q''$ yhtenevyydestä. Kun jana PQ kiertyy $P''Q''$:ksi, niin samalla R kiertyy niiden mukana R'':ksi.

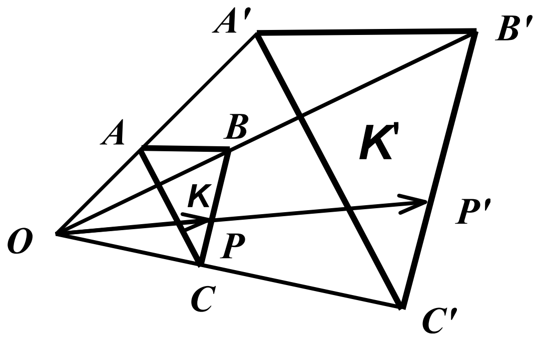
Liikettä, joka saadaan suorittamalla peräkkäin yksi tai useampi siirto tai kierto, sanotaan ***jäykäksi liikkeeksi***. Edellinen tarkastelu voidaan yleistää seuraavaksi tulokseksi (jolla saattaisi olla käyttöä esim. kappaleiden siirtelemisessä):

Lause 1 *Jokainen tason jäykkä liike saadaan suorittamalla yksi kierto tai erikoistapauksessa yksi siirto.*

13.2 Homotetia ja yhdenmuotoisuus

Valitaan kuvion **K** ulkopuolelta tai sisältä jokin piste O. Olkoon k jokin positiiviluku. Ajatellaan piirretyksi toinen kuvio **K'** siten että kuvioiden **K** ja **K'** vastinpisteiden P ja P' välillä on yhteys

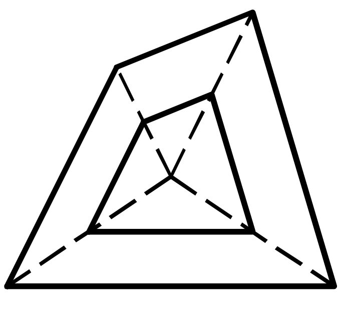
(1) $\boxed{\overrightarrow{OP'} = k\cdot\overrightarrow{OP}}$.



Tällöin sanotaan, että kuvio **K'** on ***homoteettinen*** kuvion **K** kanssa ***mittakaavassa k***. Jos esimerkiksi $k > 1$, kyseessä on *homoteettinen laajennus* (*venytys*).

Homoteettiset kuviot ovat keskenään ***yhdenmuotoisia***, mutta ne ovat erikoisasemassa toisiinsa nähden. Jos esim. **K'**-kuvion paikkaa muutetaan (jollakin jäykällä liikkeellä), on **K'** edelleenkin yhdenmuotoinen **K**:n kanssa mittakaavassa k.

Homotetiaa voidaan käyttää kuvion suurentamiseen tai pienentämiseen halutussa suhteessa. ***Homotetiakeskus*** O voi olla myös kuvion sisäpiste. Esim. viereisessä kuvassa suurempi nelikulmio on saatu venyttämällä pienempää nelikulmiota mittakaavassa 2 (eli mittakaavassa 2 : 1).



*Ei ole aivan itsestään selvää, että homotetiakuvauksessa ja yleisemmin yhdenmuotoisuuskuvauksessa esim. kolmio kuvautuisi kolmioksi, vaan voisi ajatella että kolmion sivut kaareutuvat kuten huonossa suurennuslasissa. Voidaan kuitenkin todistaa seuraava tulos:

Lause 2 ***Homotetiakuvauksessa***

1) suorat kuvautuvat suoriksi,

2) kulmat säilyttävät suuruutensa,

3) suora ja sen kuvasuora ovat yhdensuuntaiset,

4) jokaisen viivan pituus tulee kerrottua k:lla,

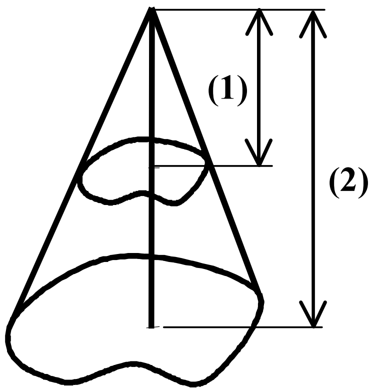
5) kuvion osien pinta-alat tulevat kerrotuiksi k^2***:lla***.

Avaruuskuvioilla tulee vielä lisäkohta:

6) kappaleen osien tilavuudet tulevat kerrotuiksi k^3***:lla***.

Lauseen muut kohdat paitsi kohta 3) ovat yleisesti voimassa kaikilla yhdenmuotoisuuskuvauksilla.

Esim. 2 Leikataan kartio pohjan suuntaisella tasolla kahteen osaan siten että *kartion korkeus jakautuu suhteessa 1 : 1*. Huippuosa on silloin yhdenmuotoinen koko kartion kanssa mittakaavassa 1 : 2 eli mittakaavassa $k = 1/2$. Huipun vaippa ja koko kartion vaippa ovat vastinpintoja, joten niiden suhde on = $k^2 = 1/4$. Täten huipun vaippa on neljännes koko kartion vaipasta ja alaosa on loput eli kolme neljännestä. *Siis kartion vaippa jakautuu suhteessa 1 : 3*. Vastaavan tapaisella päättelyllä voit todeta, että *kartion tilavuus jakautuu suhteessa 1 : 7* (mieti!).



Harjoituksia

A

13.1 Piirrä paperille Esimerkin 1 kuvan tapainen kuva. Konstruoi kiertokeskus, kun kuvasi mukainen siirto ja kierto korvataan yhdellä kierrolla.

13.2 Saimaan pinta-ala on n. 1500 km^2. Kuinka suuri se on kartalla, jonka mittakaava on 1 : 200 000 ?

13.3 Kolmion kannan suuntainen suora erottaa kyljestä 20 % kannan puolelle. Laske a) uuden ja vanhan kolmion, b) kolmion osien pinta-alojen suhde.

13.4 Pyramidin pohja on säännöllinen 6-kulmio, jonka sivun pituus on a. Pohjan suuntainen taso leikkaa pyramidista pois huipun, jonka pohjasivun pituus on $3a/5$. Kuinka monta prosenttia pyramidin tilavuudesta jää jäljelle ?

B

13.5 Konstruoi annettuun kolmioon ABC neliö, jonka kaksi kärkeä on kantasivulla AB ja muut kahdella muulla sivulla. Ohje: Piirrä ensin jokin neliö, jonka kaksi kärkeä on AB:llä ja kolmas AC:llä. Muuta tätä homoteettisesti (A:n suhteen) niin, että neljäskin kärki osuu kolmion sivulle.

13.6 Kartiosta leikataan pohjan suuntaisella tasolla puolet pois (ts. tilavuus pienenee puoleen). Laske syntyneen katkaistun kartion ylä- ja alapohjan pinta-alojen suhde.

13.7 Suoran ympyräpohjaisen kartion ja puolipallon pohjien säteet ovat 35,5 *mm* ja kartion korkeus on 72,3 *mm*. Kumpikin leikataan korkeudelta 15,0 *mm* poikki. Laske poikkileikkausten pinta-alat. Varo: puolipallo ja sen "huippu" <u>eivät ole</u> yhdenmuotoisia.

C

13.8 Alue peilataan kahden suoran suhteen, jotka leikkaavat toisensa kulmassa α. Millaisella kierrolla sama liike saadaan aikaan?

13.9 Ympyrä, jonka säde on 3 *cm*, vierii sellaisen ympyrän sisällä, jonka säde on 6 *cm*. Millaista rataa näyttävät pyörivän ympyrän halkaisijan AB päätepisteet kulkevan? Entä halkaisijan jatkeella, etäisyydellä 2 *cm* pyörivästä ympyrästä oleva piste ?

13.10 Kartio jaetaan pohjan suuntaisilla tasoilla kolmeen osaan niin, että osien vaipat huipusta alkaen suhtautuvat kuten 2 : 3 : 1. a) Montako % keskimmäisen osan pohjan ala on kartion pohjan alasta ? b) Montako % keskimmäisen osan tilavuus on pienempi tai suurempi kuin kahden muun osan tilavuuksien summa?

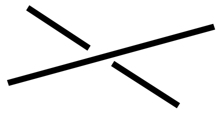
13.11 Konstruoi annetun sektorin sisään suorakulmio, jonka sivujen pituuksien suhde on 1 : 2, toisen pitkän sivun päätepisteet ovat sektorin kaarella ja toisen säteellä. (Vrt. 13.5)

14 AVARUUSGEOMETRIAA

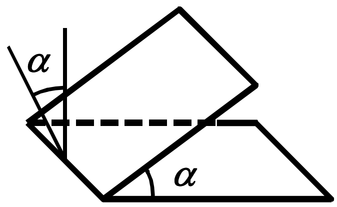
14.1 Yleistä

1) Suoran määrää avaruudessa (kuten tasogeometriassakin) kaksi pistettä. Tason määrää kolme pistettä, jotka eivät ole samalla suoralla.

2) Avaruudessa kaksi suoraa voivat paitsi leikata toisensa tai olla yhdensuuntaisia, myös kulkea ***ristikkäin***.

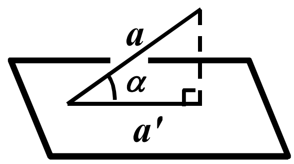


3) Jos kaksi tasoa leikkaavat toisensa, leikkausviiva on suora. Tasojen välistä kulmaa sanotaan myös ***diedrikulmaksi***. Se on yhtä suuri kuin tasojen normaalien välinen kulma.



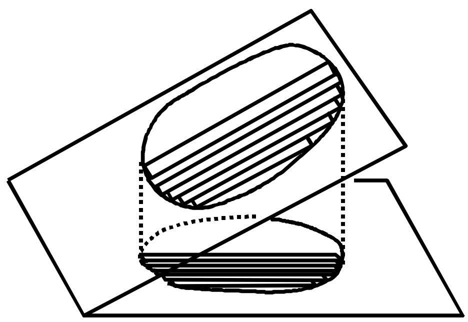
4) Tasoa, joka on kohtisuorassa annettua suoraa vastaan, sanotaan suoran ***normaalitasoksi***.

5) Jos a' on janan a ***ortogonaaliprojektio*** (eli kohtisuora projektio) jollakin tasolla, niin projektion a' pituus = a:n pituus kerrottuna kaltevuuskulman kosinilla:



$$a' = a \cos \alpha.$$

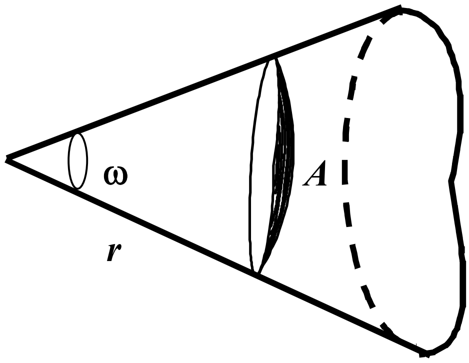
6) Jos tasolla T oleva alue projisioidaan kohtisuorasti toiselle tasolle T', niin alueiden pinta-alojen välillä on yhteys



(1) $\quad A' = A \cos \alpha.$

Perustelu: Jaetaan alue A suorakulmion muotoisiin kapeisiin liuskoihin, joiden pitkät sivut ovat kohtisuorassa tasojen leikkaussuoraa vastaan. Liuskojen lyhyet sivut säilyttävät projisioitaessa pituutensa ja pitkät sivut tulevat kerrotuiksi kaltevuuskulman kosinilla. Siten jokaisen liuskan pituus tulee kerrotuksi cos α:lla. Kun liuskojen lukumäärä lähenee ääretöntä ja samalla lyhyiden sivujen pituudet lähenevät nollaa, seuraa tulos (1).

7) Suljettu kartiopinta rajoittaa ***avaruuskulman*** ω. Jos sitä leikataan pallolla, jonka keskipiste on kartion kärjessä ja säde on r, niin kulman ω suuruus ***steradiaaneissa*** (lyh. *sr*) on leikkauspinnan alan *A* suhde säteen neliöön r^2, ts.



$$\boxed{\omega = \frac{A}{r^2}}.$$

Koska koko pallon ala on $4\pi r^2$, niin ***täysi avaruuskulma* = 4*π*** *steradiaania*. Jos kartiopinta muodostuu tasopinnoista (jolloin kartiota sanotaan yleensä pyramidiksi), niin avaruuskulmaa sanotaan *sopeksi*. Esimerkiksi huoneessa kahden seinän ja katon rajaama soppi on suuruudeltaan $\pi/2$ *sr*, sillä 8:sta tällaisesta sopesta muodostuu täysi kulma.

8) Kappaletta, jonka pinta muodostuu monikulmioista, sanotaan *monitahokkaaksi* ja näitä monikulmioita sen *tahoiksi* (tai tahkoiksi). Monitahokas on *säännöllinen*, jos sen tahot ovat yhteneviä, säännöllisiä monikulmioita ja sopet ovat yhteneviä. Säännöllisiä monitahokkaita on vain viittä eri lajia:

- ***tetraedri***

(4-tahokas)

- ***kuutio***

(6-tahokas)

- ***oktaedri***

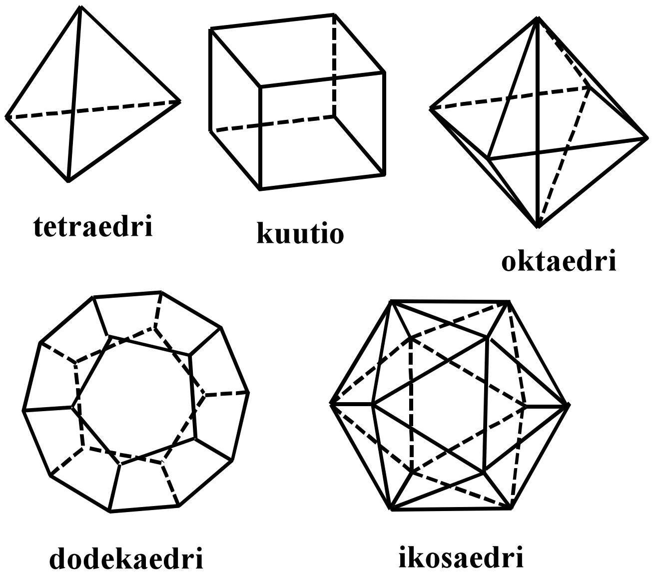
(8-tahokas)

- ***dodekaedri***

(*12-tahokas*)

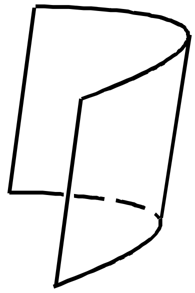
-***ikosaedri***

(*20-tahokas*)

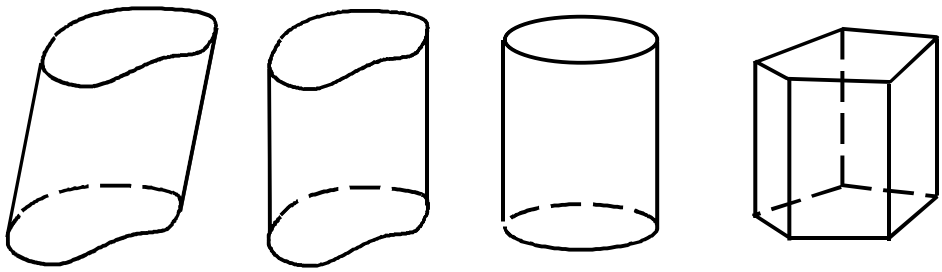


14.2 Lieriö ja kartio

Kun suora liikkuu avaruudessa suuntaansa muuttamatta, se muodostaa ***lieriöpinnan*** (vrt. seuraava kuva).

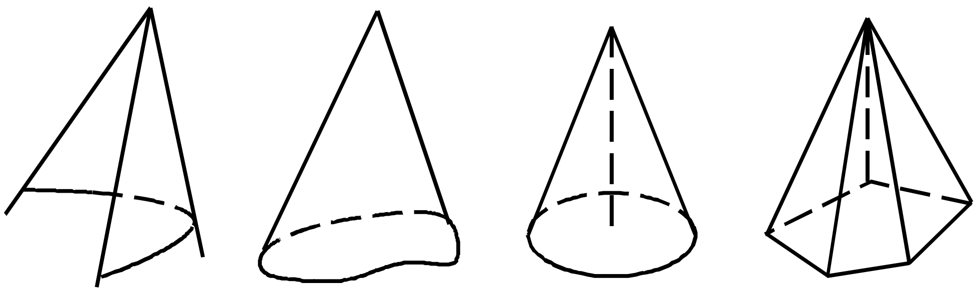


Jos muodostajasuora palaa takaisin alkuperäiseen asemaansa, lieriöpinta on ***suljettu***. Kun tällaista pintaa leikataan kahdella yhdensuuntaisella tasolla, saadaan kappale, jota sanotaan ***lieriöksi***. Lieriö, jonka sivuviivat ovat kohtisuorassa "pohjaa" vastaan, on ***suora lieriö***. Jos pohjakuvio on monikulmio, lieriötä sanotaan ***särmiöksi*** *(prismaksi)*.



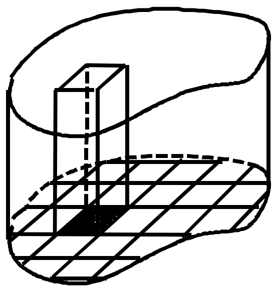
vino lieriö **suora lieriö** **suora ympyrälieriö** **5-särmäinen suora särmiö**

Kartiolla ja ***pyramidilla*** taas muodostajasuora kulkee koko ajan kiinteän pisteen (kartion kärjen) kautta.

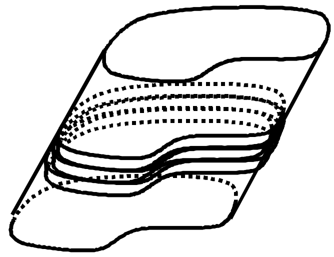


kartiopinta **kartio** **suora ympyräkartio** **5-särmäinen pyramidi**

Lause 1 *Lieriön tilavuus* $\boxed{V = A\,h}$, *missä A = pohjan ala ja h = korkeus.*



Perustelu: 1) ***Suora lieriö***. Jaetaan lieriö ohuisiin pystysuoriin suorakulmaisiin särmiöihin. Jokaisen tällaisen särmiön tilavuus on = pohjan ala kertaa korkeus. Särmiöiden yhteistilavuus on = pohjien alojen summa kertaa h. Kun särmiöiden lukumäärää lisätään (niin että pohjasärmien pituudet lähenevät nollaa), särmiöistä muodostuu yhä tarkemmin koko lieriö. Siten koko lieriön tilavuus saadaan, kun h kerrotaan särmiöiden pohjien alojen summan raja-arvolla eli koko lieriön pohjan alalla.



2) ***Vino lieriö***. Jaetaan lieriö pohjan suuntaisiin ohuisiin levyihin ja korvataan niiden reunat pystysuorilla pinnoilla. Täten levyistä tulee *suoria* lieriöitä, joiden pohjien alat ovat = A ja korkeuksien summa = h. Niiden yhteistilavuus on siis Ah. Kun levyjen lukumäärä kasvaa, niistä muodostuu yhä tarkemmin koko lieriö. Täsmällisempi käsittely käy integraaleilla. Samoin tapahtuu seuraavan lauseen todistus:

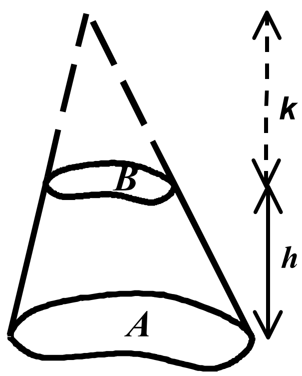
Lause 2 *Kartion tilavuus* $\boxed{\boldsymbol{V = \frac{1}{3} A\, h}}$ *, missä* A *= pohjan ala ja* h *= korkeus.*

Seuraus ***Ympyrälieriön*** *ja* ***ympyräkartion*** *tilavuudet ovat*

$$\boxed{\boldsymbol{V = \pi r^2 h}}, \quad \boxed{\boldsymbol{V = \frac{1}{3}\pi r^2 h}} \quad (r = \text{pohjan säde})$$

Lause 3 ***Katkaistun kartion*** *tilavuus*

(3) $$\boxed{\boldsymbol{V = \frac{h}{3}(A + \sqrt{AB} + B)}},$$



missä h *on katkaistun kartion korkeus ja* A *ja* B *ovat ala- ja yläpohjien alat.*

**Perustelu*: Integroidaan tai käytetään yhdenmuotoisuutta seuraavasti. Vähennetään koko kartion tilavuudesta huipun tilavuus:

$$V = \frac{1}{3}A(h+k) - \frac{1}{3}Bk = \frac{1}{3}\left[Ah + (A-B)k\right].$$

Koko kartio ja huippu ovat yhdenmuotoiset, joten

$$\frac{A}{B}=\left(\frac{h+k}{k}\right)^2 \qquad \text{(mittakaavan neliö).}$$

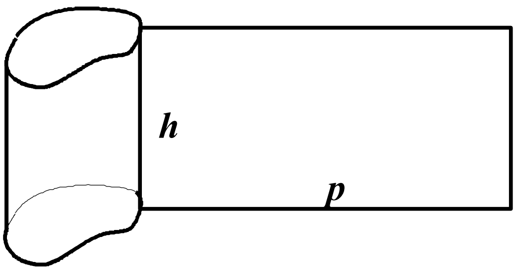
Kun tästä ratkaistaan k ja sijoitetaan edelliseen, niin sievennysten jälkeen saadaan tulos (3).

Seuraus ***Katkaistun ympyräkartion*** *tilavuus on*

$$\boldsymbol{V=\frac{\pi h}{3}(R^2+Rr+r^2)},$$

missä R ja r ovat pohjien säteet ja h on <u>*katkaistun kartion*</u> *korkeus.*

Jos ***suoran lieriön*** *vaippa* leikataan auki lieriön jotain sivuviivaa pitkin, saadaan suorakulmio, jonka kanta = lieriön pohjan piiri. Siten lieriön *vaipan ala on* $A_V = ph$. Erityisesti ***suoran ympyrälieriön vaipan ala***



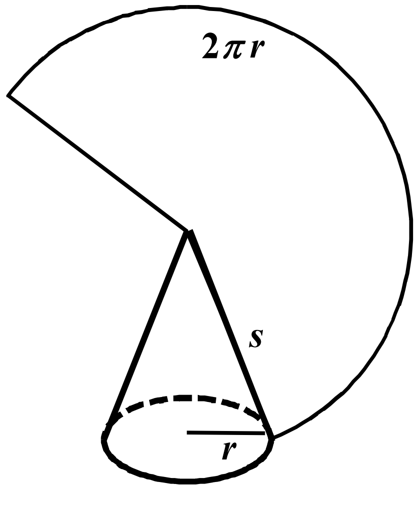
$$\boxed{A_v = 2\pi r h}$$

(Vinon lieriön vaipan ala on $A_V = p_n \cdot s$, missä p_n on normaalileikkauksen piiri ja s on sivuviivan pituus.)

Suoran ympyräkartion vaipasta tulee levitettynä ympyränsektori, jonka säde = kartion sivuviiva s ja kaari = $2\pi r$. Siten vaipan ala on

$$A_v = \frac{2\pi r \cdot s}{2}$$

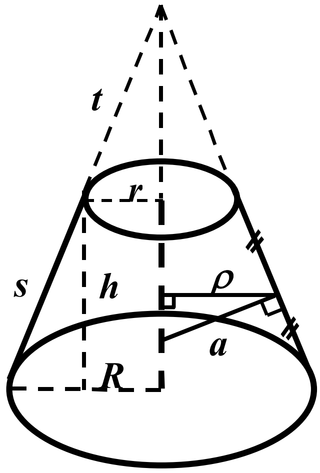
$$\therefore \boxed{A_v = \pi r s}$$



Katkaistun suoran ympyräkartion vaipan alalle voidaan johtaa useitakin laskukaavoja:

$$A_v = \pi(R + r)s = 2\pi\rho s = 2\pi a h,$$

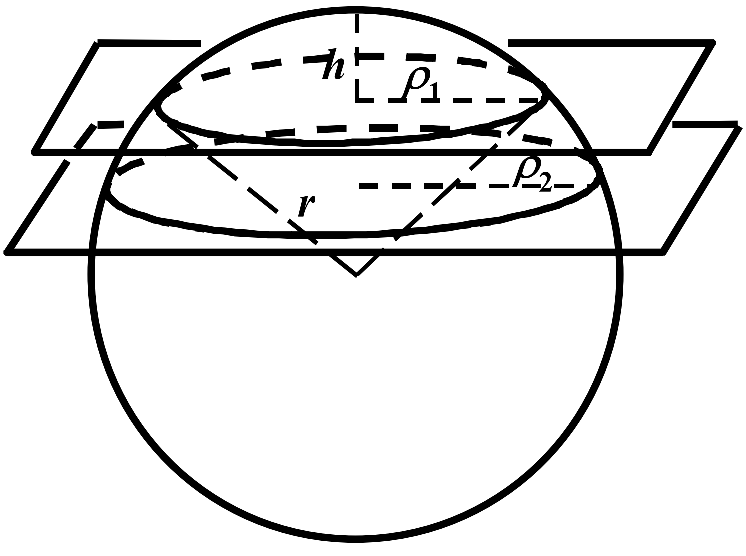
missä $\rho = \dfrac{R + r}{2}$ (= "roo" = keskisäde) ja a on sivun keskinormaalista se osa, joka jää sivuviivan ja kartion akselin väliin.



**Perustelu*: Vähennä koko kartion vaipan alasta huipun vaipan ala ja poista t verrannon $t / r = s / (R - r)$ avulla. Näin saat 1. kaavan. Toinen kaava seuraa siitä, koska $R + r = 2\rho$. Kolmas seuraa toisesta verrannon $\rho / a = h / s$ avulla.

14.3 Pallon osat

Palloon (umpinaisena kappaleena) ja sen pintaan liittyy useita käsitteitä ***sektori***, ***segmentti***, ***kalotti*** jne.



Palloa leikkaava taso jakaa pallon kahteen kappaleeseen, ns. ***segmenttiin***. Segmentin vaippa on ***kalotti***. Segmentin ja keskuskartion yhdessä muodostama kappale on ***sektori***. (Jos keskuskartion huippukulma on yli 180°, sektori on segmentin ja keskuskartion erotus.).

Kahden yhdensuuntaisen tason väliin jäävä segmentin osa on ***katkaistu segmentti***. Sen vaippa on ***vyöhyke***.

Näiden osien tilavuuksien tai alojen laskukaavat voidaan johtaa esim. integroimalla (pyöräyskappaleen tilavuutena tai pyöräyspinnan alana). Seuraavassa esitetään tulokset luettelomaisesti rinnakkain.

Kappale

1) ***Pallon tilavuus***

$$\boxed{\boldsymbol{V = \frac{4}{3}\pi r^3}}.$$

2) *Pallonsegmentti*:

$$\boxed{V = \pi h^2 (r - \frac{h}{3})},$$

missä r = pallon säde ja h = segmentin korkeus.

3) *Katkaistu pallonsegmentti:*

$$V = \frac{\pi}{2}(\rho_1^{\ 2} + \rho_2^{\ 2})h + \frac{1}{6}\pi h^3,$$

missä ρ_1 ja ρ_2 ovat katkaisuympyröiden säteet ja h on *katkaistun* segmentin korkeus.

4) ***Pallonsektori***:

$$\boxed{\boldsymbol{V = \frac{2}{3}\pi r^2 h}},$$

missä h on segmentin korkeus.

Pinta

1) ***Pallon ala***

$$\boxed{\boldsymbol{A = 4\pi r^2}}.$$

2) ***Kalotti*** eli segmentin vaippa:

$$\boxed{A = 2\pi r h},$$

missä r = pallon säde ja h = segmentin korkeus.

3) ***Vyöhyke*** eli katkaistun pallonsegmentin vaippa:

$$A = 2\pi r h,$$

missä r = pallon säde ja h = katkaistun segmentin korkeus.

4) Pallonsektorin pinnan ala = kalotin ala + keskuskartion vaipan ala.

Harjoituksia

A

14.1 Säännöllinen oktaedri muodostuu itse asiassa kahdesta vastakkain asetetusta neliöpohjaisesta pyramidista. Pyramidien kärjiksi voit valita mitkä tahansa kaksi vastakkaista kärkeä. Olkoon sivun pituus = s. a) Mikä on kummankin tällaisen pyramidin korkeus? b) Laske oktaedrin pinta-ala ja tilavuus. c) Laske kahden sivutahon välisen diedrikulman suuruus.

14.2 Suoran ympyräkartion korkeus on 3 ja akselin ja sivuviivan välinen *akselikulma* on $\pi / 6$. Laske kartion tilavuus ja vaipan ala.

14.3 Desilitranmitta on katkaistun kartion muotoinen. Sen pohjan halkaisija on 35,0 *mm* ja reunaympyrän halkaisija on 65,0 *mm*. Laske korkeus sekä pohjan ja vaipan yhteisala.

14.4 Paljonko painaa rautapallo, jonka halkaisija on 1,0 *dm* ?

B

14.5 Ympyränsektorin muotoinen pelti taivutetaan suppiloksi (kartioksi). Mikä on tämän suppilon tilavuus, kun sektorin säde on 10,0 *cm* ja keskuskulma $100{,}0^{\circ}$?

14.6 Juomalasin suun halkaisija on 7,0 *cm* ja pohjan halkaisija on 5,0 *cm* sekä korkeus 10,0 *cm*. Lasissa on vettä 3,0 *cm*:n korkeudella (pohjasta lukien). Laske vesimäärä.

14.7 Kuinka suuri on leveyspiiriä 60° vastaavan keskuskulman suuruus *steradiaaneissa*?

14.8 Pallon halkaisijan normaalitasot jakavat halkaisijan kolmeen yhtä suureen osaan. Missä suhteessa jakautuu a) pallon tilavuus, b) pallon pinnan ala?

14.9 Puolipallon sisään on piirretty suora ympyrälieriö, jonka korkeus on kaksi kertaa niin suuri kuin pohjan säde ja jonka pohjan keskipiste on puolipallon pohjaympyrän keskipisteessä. Kuinka monta % lieriön tilavuus on puolipallon tilavuutta pienempi?

C

14.10 Paljonko puolipallon tilavuus pienenee, jos sen läpi porataan edellisen tehtävän mukainen reikä?

14.11 Johda katkaistun kartion a) tilavuuden kaava, b) vaipan alan kolme kaavaa.

15 MUUTAMA VANHA KOETEHTÄVÄ

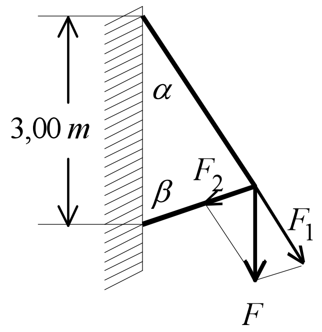
Tehtäviä ei ole järjestetty monisteen eikä vaikeustason mukaan.

1 a) $A=(2,-1,9), B=(4,5,2), C=(5,2,-4),\ D=(8,-2,-4)$. Merkitään $\bar{a}=\overrightarrow{AB}$ ja $\bar{b}=\overrightarrow{CD}$. Esitä $2\bar{a}-5\bar{b}°$ komponenttimuodossa.

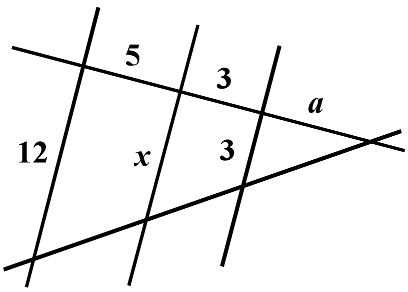
b) $\cos\alpha=-\dfrac{2\sqrt{3}}{4}$ ja α on 2. neljänneksessä. Laske $\sin\alpha$ ja $\tan\alpha$ (tarkat arvot).

2 Joko (3 pist.) Tasakylkisen kolmion kanta on 22,0 *cm* ja kylkeä vastaan piirretty korkeusjana 20,0 *cm*. Laske kolmion ala. **Tai** (4 pist.) Suorakulmaiselle kolmiolle piirretään suoran kulman kärjestä alkava korkeusjana. Se jakaa hypotenuusan osiin, joiden likiarvot ovat 2,00 ja 8,00. Laske kateettien ja korkeusjanan pituudet.

3 a) Laske viereisen kannattimen tankoihin vaikuttavat voimat F_1 ja F_2, kun $F=27{,}6\,kN$, $\alpha=35{,}0°, \beta=72{,}0°$ ja kiinnityspisteiden väli on 3,00 *m*.



b) Laske *a* ja *x* viereisessä kuvassa.



4 Kolmiossa ABC on $a=5{,}11\,cm$, $b=3{,}55\,cm$ ja $\beta=33{,}1°$. Laske α.

5 Joko (2 pist.) Tetraedrin huipusta piirretyt sivuvektorit ovat $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$. Laske huipusta pohjan painopisteeseen piirretty vektori näiden avulla. **Tai:** (4 pist.) Tetraedrin painopiste jakaa huipusta pohjan painopisteeseen piirretyn "keskijanan" suhteessa 3 : 1. Laske jostakin (ulkopuolisesta) pisteestä O tetraedrin painopisteeseen piirretty vektori kärkiin piirrettyjen vektorien (sievennettynä) lausekkeena.

6 a) Laske $\sin 2\alpha$, kun $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$ ja α on 3. neljänneksessä.

b) Eräässä suorakulmaisessa kolmiossa sivut suhtautuvat kuten luvut 1, $\sqrt{8}$ ja 3. Tällaisen kolmion pisin sivu on $\approx 9{,}72$ *cm*. Laske muut sivut.

c) Olkoon $\overline{a} = [2,-1,3]$ ja $B = (1,3,5)$ ja $C = (4,7,1)$. Laske $\overline{b} = \overrightarrow{BC}$, tulo $\overline{a} \cdot \overline{b}$ sekä tulo $(\overline{a} + \overline{b}) \cdot (\overline{a} + \overline{b})$.

7 Suunnikkaan $ABCD$ sivuvektorit ovat $\overline{a} = \overrightarrow{AB}$ ja $\overline{b} = \overrightarrow{AD}$. Piste E jakaa sivun BC suhteessa 1 : 2 ja piste F jakaa sivun DC suhteessa 1 : 3. a) Esitä pisteestä A pisteeseen F piirretty vektori vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ avulla. b) Esitä vektori $\overrightarrow{EF}$ vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ avulla.

8 Kolmiossa ABC on AB = 9,00 *cm*, kulma $\beta = 36{,}0^{\circ}$ ja sivu AC = 6,00 *cm*. Piirrä aika tarkka kuva ja laske kolmion γ -kulma (= C-pisteeseen liittyvä kulma). Ohje: piirrä sopiva apuviiva.

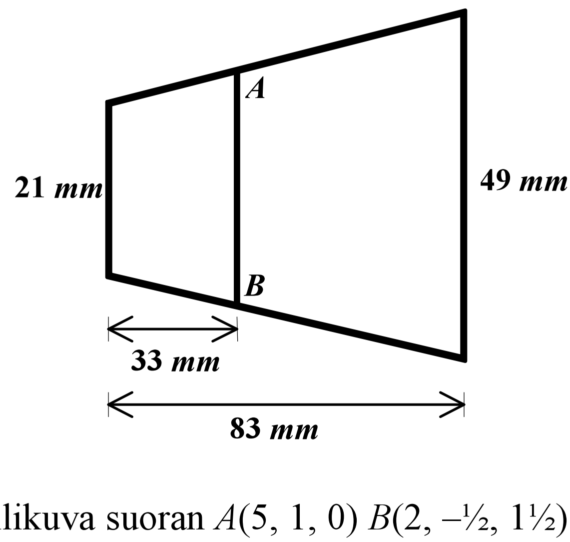
9 Laske kolmion A(2,3,1) B(1,1,0) C(0,2,3) B-kärjestä sivulle AC piirretyn korkeusjanan BD a) pituus, b) kantapiste D.

10 a) Ratkaise <u>peruskulmaa apuna käyttäen</u> yhtälöt $\sin x = -1/2$ ja $3{,}45 \sin 2x = -2{,}22$. b) Laske <u>ristitulon</u> avulla kolmion A(2, 1, –1) B(4, 0, 1) C(2, –2, 3) tarkka pinta-ala. c) Laske lausekkeen $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha}$ tarkka arvo, kun $\tan \alpha = -4/3$ ja α on 2. neljänneksessä.

11 Vektori $\overline{v} = [2,-3,-5]$ projisioidaan vektorille $\overline{u} = [3,-4,1]$. Laske ensimmäisen vektorin ja projektiovektorin määräämän kolmion ala.

12 Erään tasakylkisen kolmion huippukulman sini on neljännes kanta-kulman tangentista. Laske kolmion kulmat.

13 Akselissa on katkaistun kartion muotoinen osa. Laske poikkipinta-ala leikkauksessa A–B, kun halkaisijat päissä ovat 21 *mm* ja 49 *mm*.



14 Yhdistä yhdeksi siniaalloksi $y = 3\sqrt{3}\sin 2x - 3\cos 2x$ ja hahmottele tulosta apuna käyttäen kuvaaja 2 jakson pituisella välillä.

15 Laske pisteen P(2, –4, 1) peilikuva suoran A(5, 1, 0) B(2, –½, 1½) suhteen.

16 Sievennä: a) $\dfrac{\sin 3u \cdot \cos(\frac{\pi}{2} - 3u)}{\sin 6u}$, b) $\dfrac{\cos 6t - \cos 2t}{\cos 4t - 1}$.

HARJOITUSTEHTÄVIEN VASTAUKSIA
(voivat sisältää virheitä)

1.3 71,9° **1.4** 7,04 *m*, 6,10 *m*, 27, $27\sqrt{3}$, 3,14 *cm*, 6,28 *cm* **1.5** 4,86 *cm*, 10 **1.6** 7,18 **1.7** 100,0 *cm* **1.8** 81,7 *gon*, 73,53° **1.9** $\sqrt{672} \approx 25{,}9$ **1.10** b) sivut = säde **1.11** 45,11° **1.12** 97,8 *mm* **1.13** piirrä lävistäjä **1.16** $h = s\sqrt{6}/3$ **2.2** 36,38°, 50,71°, 21,4°, 4,28°, ei, 44,95° **2.3** 39,0° **2.4** 89,4 *mm*, 75,3 *mm*, 33,7 cm^2 **2.5** 2,61 **2.6** 4,36 ($\approx$ 5,90:1,35) **2.8** 49,0 tai 26,7 **2.9** 1,76 *km* **2.12** 38,3 *mm* ja 126,6 *mm* **2.13** 50,0 *mm* ja 150,0 *mm*. **3.1** $-\bar{u}-\bar{v}$, $-\bar{v}$, $\bar{u}-\bar{v}$, $\bar{v}-\bar{u}$ **3.2** $(5/6)\bar{x}-2\bar{y}+2{,}5\bar{z}$ **3.3** $\bar{x}=(7/11)\bar{a}$ **3.4** 93,5°, 121,7°, 144,8° **3.5** $\bar{c}=(5/8)\bar{a}+(3/8)\bar{b}$ **3.7** [–2,4,0], [1,0,0] [0,1,0] ja [0,0,1] **3.8** [–1,2,7], [1,–3,4], $\sqrt{54}$ $(=3\sqrt{6})$ $\sqrt{26}$ **3.9** (–3,–22,23) **3.10** (–8,–21,–14) **3.11** (4/7, 23/7,6/7) **3.12** $-\bar{u}-(1/4)\bar{v}$ (siirry *E*:stä *F*:ään <u>reunoja </u>pitkin) **3.13** $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$, $\bar{a}+\bar{b}-\bar{c}$, $\bar{a}-\bar{b}+\bar{c}$, **3.14** (–2,0,–2) **3.15** (2/3,1/3,2/3) **3.16** (8/5,1,9/5) **3.17** $\sqrt{37}$ **3.18** $\bar{a}/3+\bar{b}/6-\bar{c}/2$ **3.19** ovat **3.20** (9/5,12/5,0) **3.21** 750 *N*, 650 *N* **3.22** 520 *N*, 735 *N*, 735 *N*. **4.2** $3\sqrt{2}, 3\sqrt{7}, \sqrt{14}$ **4.3** 6,75 **4.4** 1,40 *cm*, 2,80 *cm*, 1,75 *cm*, 1,71 *cm*, 5,13 *cm* **4.5** 1,80 *cm* **4.7** 2,12 *kN* ja 1,32 *kN*, **4.8** 49,2 **4.9** $12\sqrt{10}/7$ **4.10** 3:2 **4.11** 10 ja 4 **4.12** 8 **4.14** 2,5 ja 4,5 **4.15** $4\sqrt{10}/3$ **4.17** 3 ja 6,25. **5.1** $\sqrt{3}/2, -1/2, -\sqrt{3}$ **5.2** $-\sqrt{3}, -2\sqrt{3}/3, 2$ **5.3** $2\sqrt{5}/5$ **5.4** a) 60° ja 120° (eli π/3 ja 2π/3), b) 120° ja 240°, c) 120° ja 300° **5.6** kuvat luvun 10 alussa **5.7** 3π/20 **5.8** π/2, 5π/4, 0,0643 **5.9** *y*-koordinaatit samoja, *x*-koord. vastalukuja **5.10** a) $-\sqrt{3}/2, -\sqrt{3}$, b) –3/5, c) 4π/3, d) –5/12 **5.11** $-5/\sqrt{26}, -1\sqrt{26}$ **5.12** $\sqrt{3}/2$ **5.13** a) π/2 + *n*·2π, b) π + *n*·2π, c) ei, d) 1,107 + *n*·π, e) 2π/3 + *n*·π, f) 1,212 + *n*·2π tai 5,072+*n*·2π (eli 1,212 + *n*·2π) **5.14** –3/5, 4/5 **5.15** 1/cos ω, –1 **5.16** $(1-a^2)/(1+a^2)$, $2a/(1+a^2)$ **5.17** $(a^2-1)/(a^2+1)$, $-2a/(a^2+1)$ **5.18** 2π/9+*n*·2π/3 tai 4π/9+*n*·2π/3 **5.19** 2α = arcsin($\sqrt{3}/2$)+*n*·2π tai 2α = π–arcsin($\sqrt{3}/2$)+*n*·2π ∴ α = π/6+ *n*·π tai α = π/3+*n*·π **6.1** 2,71; 5,20; 7,03 **6.2** 44,7° **6.3** 4,36 *N*, 3,11 *N* **6.4** 155,7°, 10,58°, 13,68° **6.5** 2830 *N*, 1920 *N* **6.6** 114° **6.7** 932 *m* **6.8** 2400 *m* (vain 2 num. tarkk.) **6.9** $5\sqrt{2}/3$ **6.10** a) n. 10,44 tai 4,60 b) $4\sqrt{3}$, c) ei ratk. **6.11** n. 6,04 **6.12** 8,13 **6.13** 8,86 *kN*, 6,96 *kN* **7.1** $3\sqrt{2}$**, –**3, $-3\sqrt{3}$ $3\sqrt{2}, -3, -3\sqrt{3}$ **7.2** –11, tylppä **7.3** $\sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{19}$, 137°, 22,6°, 20,5°, 1,87 **7.5** $-5\sqrt{2}/2$, $-4\sqrt{2}/2$ **7.6** $-5/\sqrt{14}$, $(-5/14)\bar{b}$ **7.7** (2,0,1) **7.8** $\bar{i}-2\bar{j}+2\bar{k}$, $\bar{j}+\bar{k}$

7.9 $6\sqrt{5}$, $\sqrt{13-6\sqrt{2}}$ **7.10** $42+\sqrt{67}$ **7.11** 25,2°, 107,5°, 72,5° **7.13** n. $-0{,}252\bar{b}$, $-0{,}379\bar{a}$ **7.14** $(-8+3\sqrt{3})/(9-6\sqrt{3})$ **7.15** $5\sqrt{2}/3$ **7.16** (–2,6,3) **8.1** $3\sqrt{35}$, [–1,5,17] **8.2** $\sqrt{14}$ **8.3** $2(\bar{b}\times\bar{a})$, $\bar{0}$ **8.4** 1/3 **8.5** [–195,45,–210] **8.6** 1 **8.7.** $5\sqrt{2}/3$ **8.8** ovat **8.9** 2, –3, 1 **8.10** $3/\sqrt{14}$ **9.2** $4a$ **9.3** a) $\pi/6+n\cdot 2\pi$, $5\pi/6+n\cdot 2\pi$, b) $5\pi/6+n\cdot 2\pi$, $7\pi/6+n\cdot 2\pi$, c) 66,90°+n·180° **9.4** a) 35,6°+n·180°, 144,4°+n·180°, b) 69,3°+n·120°, 120,7°+n·120° (eli 0,7°+ n·120°), c) 1,455+n·2π/3, 2,353 + n·2π/3 **9.5** –5/12 **9.6** ±8,95 (2.tai 3. nelj.) **9.7** sin ωt, sin ωt, –cos ωt **9.8** sin α, –sin α, –sin α **9.9** 2cos x, 1–sin 2α, –tan β **9.10** $4/\sqrt{26}$, –5/13, 5/12 **9.11** cos 2x + cos 4x **9.12** 5/13, 120/169 **9.14** a + a^3 **9.15** a) 5π/12+n·π/2 b) 17,8°+n·180° **9.16** –4/5 7/25 $(4-3\sqrt{3})/10$ –24/25 **9.17** (3π+4)/2+n·2π **9.18** a) 1/2, b) tan 2μ **9.19** a) 0,5 cos 2x–0,5 cos 8x, b) –2cos 4x sin x **9.20** a) 2 cos α, b) 2 sin 2x **9.22** –(2/15)(1 +$\sqrt{42}$) **9.25** –2 **9.26** x = π/4, y = π/6 **10.1** 3, π, c-kohdassa siirtymä = π/6 **10.2** –π/3+n·4π **10.4** $\sqrt{6}\sin(3x+\pi/4)$, 2sin(3x+11π/6) **10.5** a) π/10++n·π/5 b) n·π/2 c) π/4+n·π/2 **10.6** a) π/2+n·π b) π/2+n·π c) 3π/4+n·π d) π/4+n·2π **10.7** π/4+n·π/2 **10.9** 2π **10.10** 2cos(3t + 4π/3) **10.11** 3 **10.12** π/2+n·π, n·2π **10.13** a) π/4+n·π, π/2+n·π b) –π/4+n·π, π/12+n·π **10.14** a)–π/3+n·2π, 4π/9+n·2π/3 b) n. 2,75 **10.15** 2, 3π/2+n·2π **10.16** 0,261, –0,654 **10.17** a) ei ratk. (sillä π/4+n·π/2 ovat nim. 0-kohdat), b)π/3+n·π, 2π/3+n·π, n·π/5 c) $-2\pi/9 + n\cdot 2\pi/3 < x < 2\pi/9+n\cdot 2\pi/3$ **11.1** 19/25+(17/25)i, $\sqrt{26}/5$, 0,730+n2π **11.2** b) $\sqrt{2}\underline{/\pi/4}$, $\sqrt{2}\underline{/-\pi/4}$, $1\underline{/\pi/2}$, $32\underline{/-\pi/2}$ **11.3** vektori kaksinkertaistuu ja kiertyy 45°, kiertyy 90° **11.4** a) $-128-128\sqrt{3}i$ b) (121+118i)10^{-7} **11.5** a) $0{,}5\underline{/-90^\circ}$ b) $-\sqrt{2}+3\sqrt{2}i\approx 2\sqrt{5}\underline{/108{,}4^\circ}$ c) $6\underline{/245^o}$ **11.6** $2\sqrt{2}\,i=2\sqrt{2}e^{i\pi/2}$ **11.7** a) 1, $-1/2\pm\sqrt{3}/2$ b) –0,22 + 1,24i, –0,97–0,81i, 1,18-0,43i c) $\ln e+k2\pi i$ d) ln 4 + i(4π/3+k2π) **11.8** cos φ, sin φ **11.9** a) $\pm\sqrt{3}+i$, -2i, b) ln 2 +i(π/2+kπ) **12.1** 127,9°, 63,95°, 116,05° **12.2** 11 **12.3** 992 mm^2, 13,2 mm **12.5** 27,9° **12.6** $49/(2\sqrt{6})\approx 10{,}0$ **12.7** 30,2 mm **12.9** 4 **13.2** 3,75 dm^2 **13.3** 16:25, 16:9 **13.4** 78,4 % **13.6** $1:\sqrt[3]{4}$ **13.7** 24,9 cm^2, 32,5 cm^2 **13.8** kierto leikkauspisteen ympäri, kiertokulma = 2·akselien välinen kulma **13.9** akseleita pitkin, ellipsiä pitkin **13.10** 83,3 %, 31,6 suurempi **14.1.** a) $s\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{3}s^2$, $\sqrt{2}s^3/3$ c) 109,5° **14.2** 3π, 6π **14.3** 49,4 mm, 90,7 cm^2 **14.5.** 77,6 cm^3 **14.6** 66 cm^3 **14.7** $2\pi-\pi\sqrt{3}$ **14.8** 7:13:7, 1:1:1 **14.9** $100-12\sqrt{5}$ **14.10** (Puolipallosta poistuu lieriö ja segmentti.)