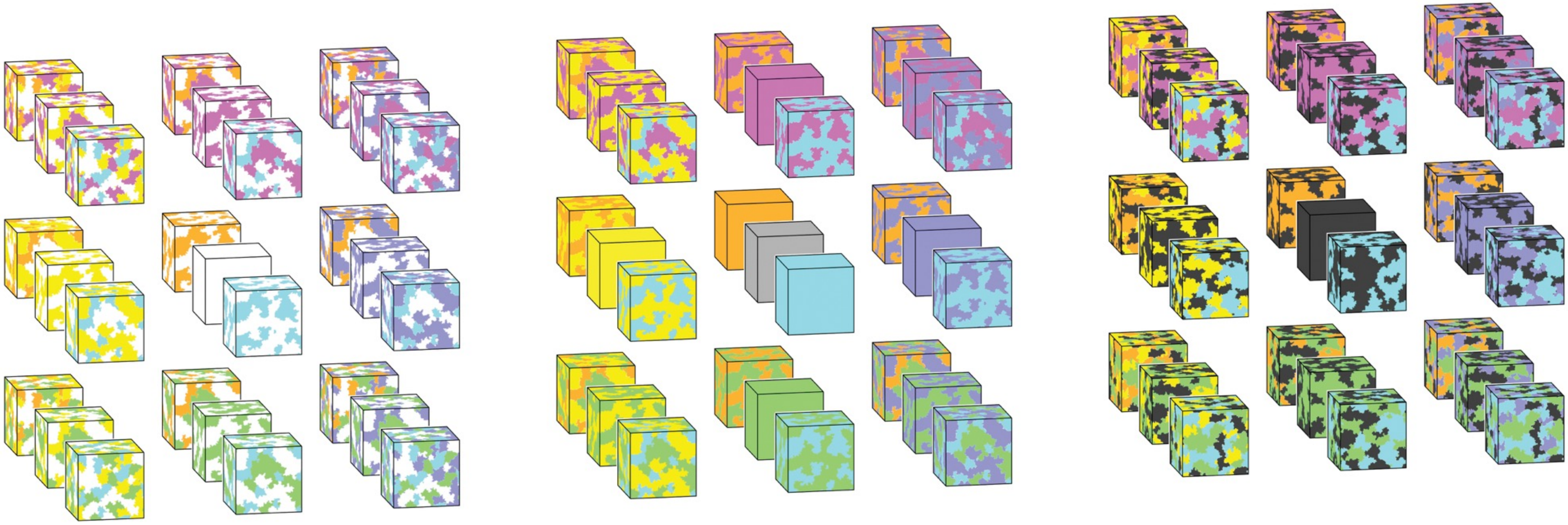
RAKENNETAAN
MATEMAATTISIA ESINEITÄ:

HINTONIN PALIKAT

LUMATIKKA 2019

Taneli Luotoniemi



UUSI TULKINTA CHARLES HOWARD HINTONIN TESSERAKTIN VISUALISOIMISEEN TARKOITETUISTA KUUTIOISTA

Charles Howard Hinton julkaisi vuosina 1884–1907 joukon matemaattis-filosofisia kirjoituksia, joiden tarkoitus oli neljännen tilaulottuvuuden popularisointi. Kirjoissaan *New Era of Thought* (1888) ja *The Fourth Dimension* (1901) Hinton kuvaili kuinka kuution neliulotteinen vastine – tesserakti, voidaan viipaloida osiin ja esittää kuutioista koottuina poikkileikkauksina meidän kolmiulotteisessa avaruudessamme.

Hintonin tekstit saivat laajaa vastakaikua 1900-luvun alkupuolella, erityisesti taiteilijoiden ja mystikkojen piireissä. Neliulotteisen ajattelun oli määrä edistää ihmiskunnan moraalista kehitystä kunkin oman näkökulman ulkopuolelle asettumisen kautta.

Tähän tarkoitukseen Hinton suunnitteli värillisten kuutiopalikoiden käsittelyyn perustuvan itseopiskelujärjestelmän, jonka lähtökohta oli 3x3x3x3 kokoinen tesserakti. Palikoista voitiin koota erilaisia poikkileikkauksia tesseraktista, sekä havainnollistaa mm. kuinka tesseraktin voi keikahtaa ympäri yhden tahkonsa varassa. Hinton opetti palikoiden käytön nuorelle kälyllensä Alicia Boole Stottille, joka saavutti kyvyn neliulotteisten rakenteiden kuvitteluun ja teki myöhemmin huomionarvoisia lisäyksiä tunnettujen neliulotteisten kappaleiden luetteloon. Jälkeenpäin palikoiden on huhuttu aiheuttavan jopa pakkomielteisiä piirteinä käyttäjissänsä.

UUSI TULKINTA CHARLES HOWARD HINTONIN TESSERAKTIN VISUALISOIMISEEN TARKOITETUISTA KUUTIOISTA

Vaikka Hintonin vaikutuksesta kulttuurihistoriaan on kirjoitettu paljon, ovat itse kuutiot ja niillä tehtävät harjoitukset jääneet vähemmälle huomiolle. Tässä materiaalissa esitellään Hintonin palikkasarjasta uusi versio joka koostuu 81 monivärisestä osasta, sekä käytetään sitä tesseraktin poikkileikkauksien visualisointiin.

Työskentele tehtävien parissa valitsemallasi laajuudella, ja dokumentoi työskentelysi valokuvin, videoin, skannatuin piirroksin, tms.

KÄSITTEISTÖÄ WIKIPEDIASSA (ENG):

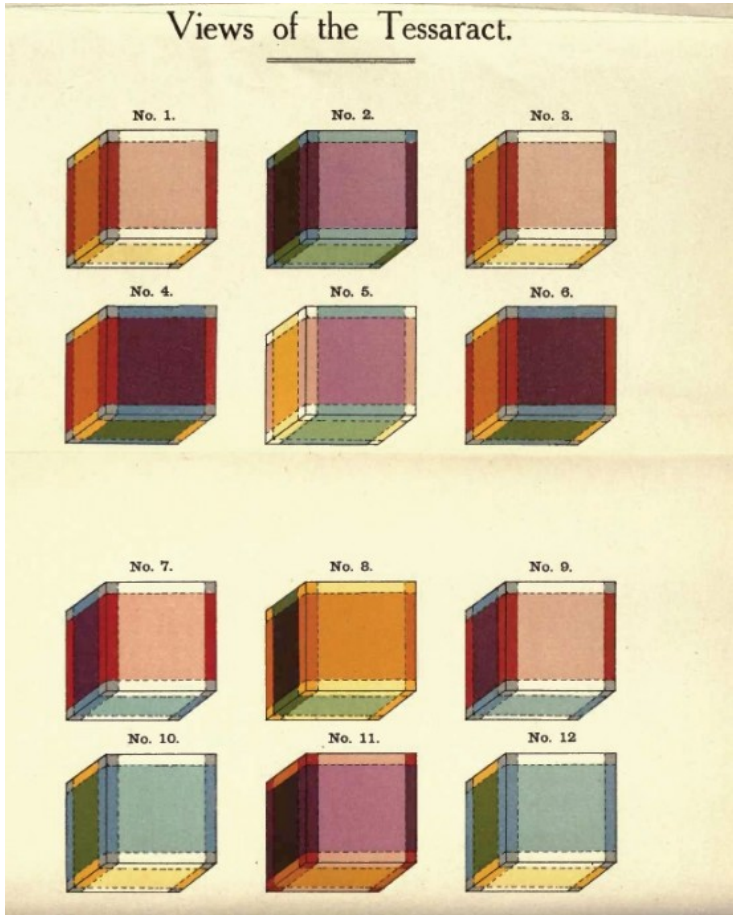
Neliulotteinen avaruus: https://en.wikipedia.org/wiki/Four-dimensional_space
Tesserakti: https://en.wikipedia.org/wiki/Tesseract
Charles Howard Hinton: https://en.wikipedia.org/wiki/Charles_Howard_Hinton
Alicia Boole Stott: https://en.wikipedia.org/wiki/Alicia_Boole_Stott

HYPERAVARUUDEN KANSANTAJUISTAJA

Charles Howard Hinton, (1853–1907)

Brittiläinen matemaatikko Charles Howard Hinton julkaisi vuosina 1884–1907 joukon geometris-filosofisia kirjoituksia, joiden tarkoitus oli neljännen tilaulottuvuuden popularisointi. Hintonin tekstit saivat laajaa vastakaikua 1900-luvun alkupuolella, erityisesti taiteilijoiden ja mystikkojen piireissä.

Hintonin ajattelun keskiössä oli kuutioista koostuva neliulotteisen geometrian itseopiskelujärjestelmä, johon kuuluvat värilliset palikat olivat tilattavissa hänen kustantajaltaan.



The Fourth Dimension -kirjan etusivu (1901)

ENSIMMÄINEN OPETUSLAPSI

Hinton oli säännöllinen vieras Mary Everest Boolen taloudessa (Maryn puoliso George oli kuuluisa Boolen algebrastaan), ja käytti tämän tytärtä Aliciaa koekaniinia palikkajärjestelmänstä opettamisessa.

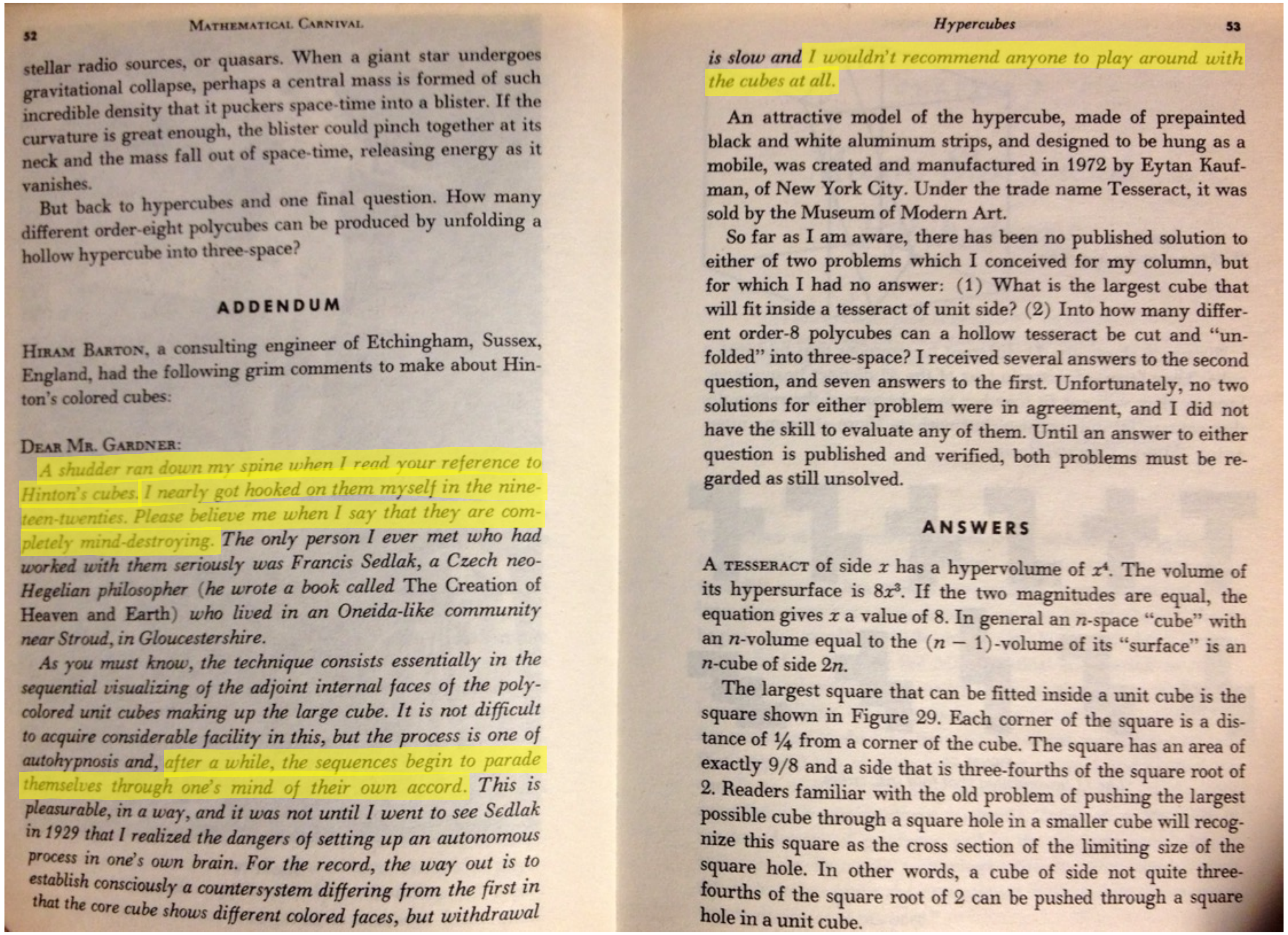
Alicia saavuttikin erinomaisen neliulotteisen kuvittelukyvyn, ja todisti myöhemmin itsenäisesti erilaisten hyperavaruuden säännöllisten kappaleiden matemaattisen olemassaolon sekä valmisti pahvimalleja niiden poikkileikkauksista.

Alicia Boole Stott, (1860–1940)

PALIKOIDEN 'VAARAT'

Algernon Blackwoodin scifi-tarina *A Victim of Higher Space* (1914) kertoo miehestä, joka Hintonin oppien mukaisia palikkaharjoituksia tehtyään luiskahtelee jatkuvasti tahtomattaan neljänteen ulottuvuuteen.

Kun Martin Gardner kirjoitti Hintonin palikoista *Scientific American* -artikkelissaan, hän sai lukijapostia jossa varoitettiin palikoiden 'mieltätuhoavasta' vaikutuksesta:



52 MATHEMATICAL CARNIVAL

stellar radio sources, or quasars. When a giant star undergoes gravitational collapse, perhaps a central mass is formed of such incredible density that it puckers space-time into a blister. If the curvature is great enough, the blister could pinch together at its neck and the mass fall out of space-time, releasing energy as it vanishes.

But back to hypercubes and one final question. How many different order-eight polycubes can be produced by unfolding a hollow hypercube into three-space?

ADDENDUM

HIRAM BARTON, a consulting engineer of Etchingham, Sussex, England, had the following grim comments to make about Hinton's colored cubes:

DEAR MR. GARDNER:

A shudder ran down my spine when I read your reference to Hinton's cubes. I nearly got hooked on them myself in the nineteen-twenties. Please believe me when I say that they are completely mind-destroying. The only person I ever met who had worked with them seriously was Francis Sedlak, a Czech neo-Hegelian philosopher (he wrote a book called The Creation of Heaven and Earth*) who lived in an Oneida-like community near Stroud, in Gloucestershire.*

As you must know, the technique consists essentially in the sequential visualizing of the adjoint internal faces of the poly-colored unit cubes making up the large cube. It is not difficult to acquire considerable facility in this, but the process is one of autohypnosis and, after a while, the sequences begin to parade themselves through one's mind of their own accord. This is pleasurable, in a way, and it was not until I went to see Sedlak in 1929 that I realized the dangers of setting up an autonomous process in one's own brain. For the record, the way out is to establish consciously a countersystem differing from the first in that the core cube shows different colored faces, but withdrawal

Hypercubes 53

is slow and I wouldn't recommend anyone to play around with the cubes at all.

An attractive model of the hypercube, made of prepainted black and white aluminum strips, and designed to be hung as a mobile, was created and manufactured in 1972 by Eytan Kaufman, of New York City. Under the trade name Tesseract, it was sold by the Museum of Modern Art.

So far as I am aware, there has been no published solution to either of two problems which I conceived for my column, but for which I had no answer: (1) What is the largest cube that will fit inside a tesseract of unit side? (2) Into how many different order-8 polycubes can a hollow tesseract be cut and "unfolded" into three-space? I received several answers to the second question, and seven answers to the first. Unfortunately, no two solutions for either problem were in agreement, and I did not have the skill to evaluate any of them. Until an answer to either question is published and verified, both problems must be regarded as still unsolved.

ANSWERS

A TESSERACT of side x has a hypervolume of x^4. The volume of its hypersurface is $8x^3$. If the two magnitudes are equal, the equation gives x a value of 8. In general an n-space "cube" with an n-volume equal to the $(n-1)$-volume of its "surface" is an n-cube of side $2n$.

The largest square that can be fitted inside a unit cube is the square shown in Figure 29. Each corner of the square is a distance of 1/4 from a corner of the cube. The square has an area of exactly 9/8 and a side that is three-fourths of the square root of 2. Readers familiar with the old problem of pushing the largest possible cube through a square hole in a smaller cube will recognize this square as the cross section of the limiting size of the square hole. In other words, a cube of side not quite three-fourths of the square root of 2 can be pushed through a square hole in a unit cube.

Martin Gardner: *Mathematical Carnival* (1965)

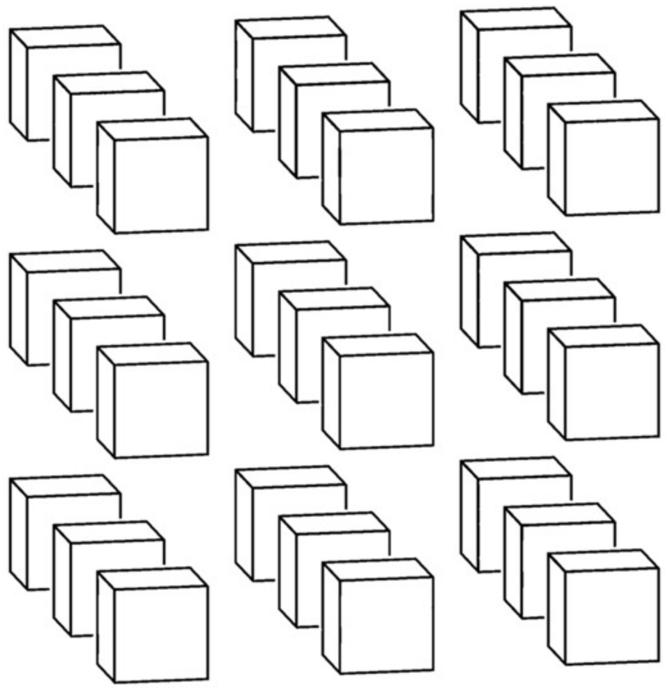
KUUTION POIKKILEIKKAUKSET TASOSSA

Ennen kuin siirrymme käsittelemään tesseraktia itseään, on hyödyllistä tarkastella ensin alempiulotteista tilannetta. Viipaloimme siis kuution 27 osaan, ja tarkastelemme niiden poikkileikkauksia kaksiulotteisessa kuvatasossa, kuvitteellisen kaksiulotteisen olennon näkökulmasta.

KUUTION JAKAMINEN OSIIN

Ensin leikkaamme kuution kolmeen viipaleeseen jokaisen kolmen pääsuunnan mukaisesti.

Näin saamme 3x3x3 rykelmän pieniä kuutioita, joista jokainen edustaa alkuperäisen kuution kärkipistettä, särmää, tahkoa, tai alkuperäistä kuutiota itseään.



KUUTIO

8 kärkipistettä
12 särmää
6 tahkoa (neliötä)

↓

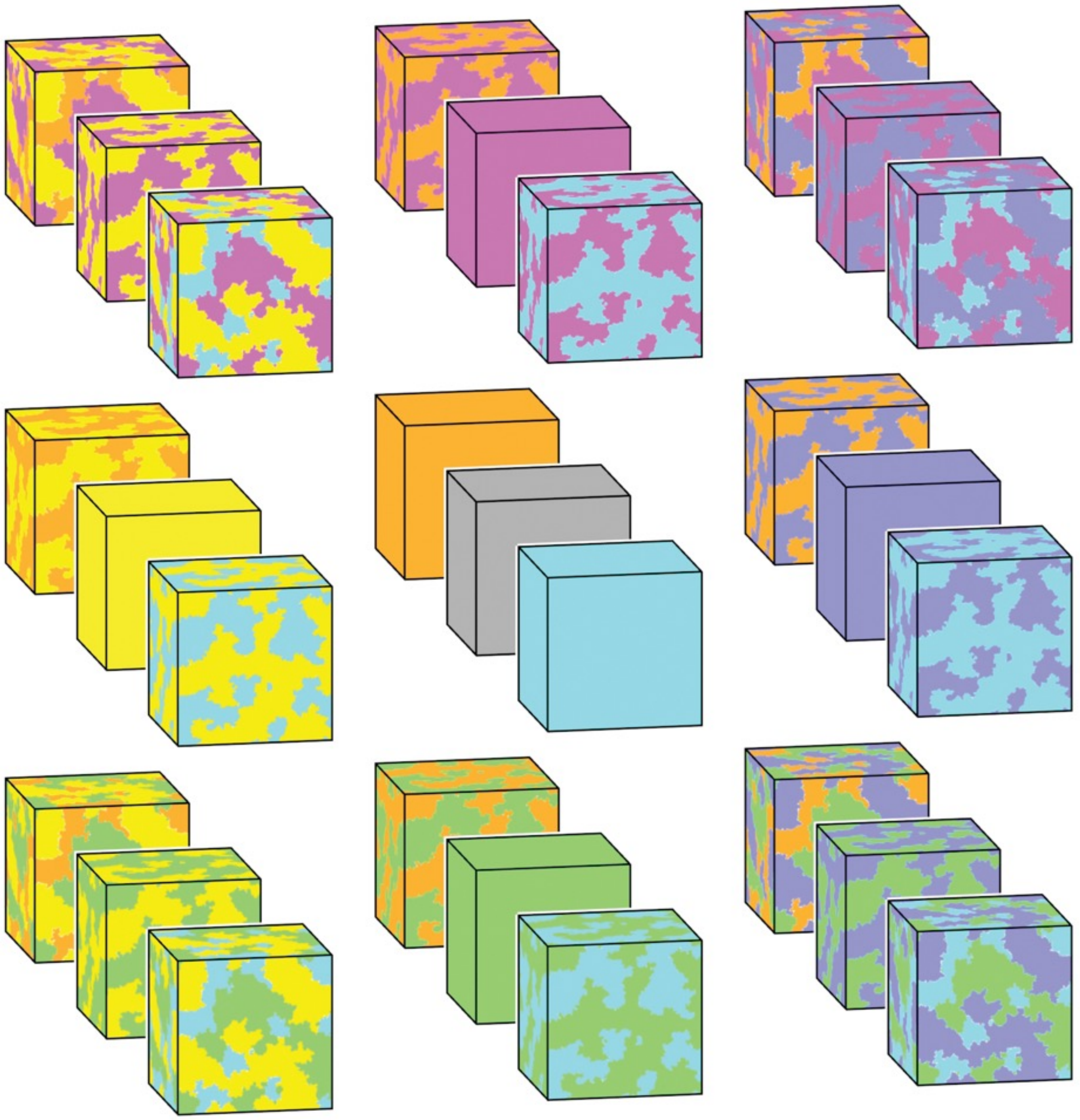
27 KUUTIOTA

8 kärkipalaa
12 särmäpalaa
6 tahkopalaa
1 ydinpala

KUUTION OSIEN VÄRITTÄMINEN

Kuution osat saavat uniikit värinsä kun ajatellaan kuutiota kohden osoitettavan valoa kolmesta eri suunnasta (keltainen, oranssi, punainen).

Varjopuolella ovat valon vastavärit (violetti, sininen, vihreä).



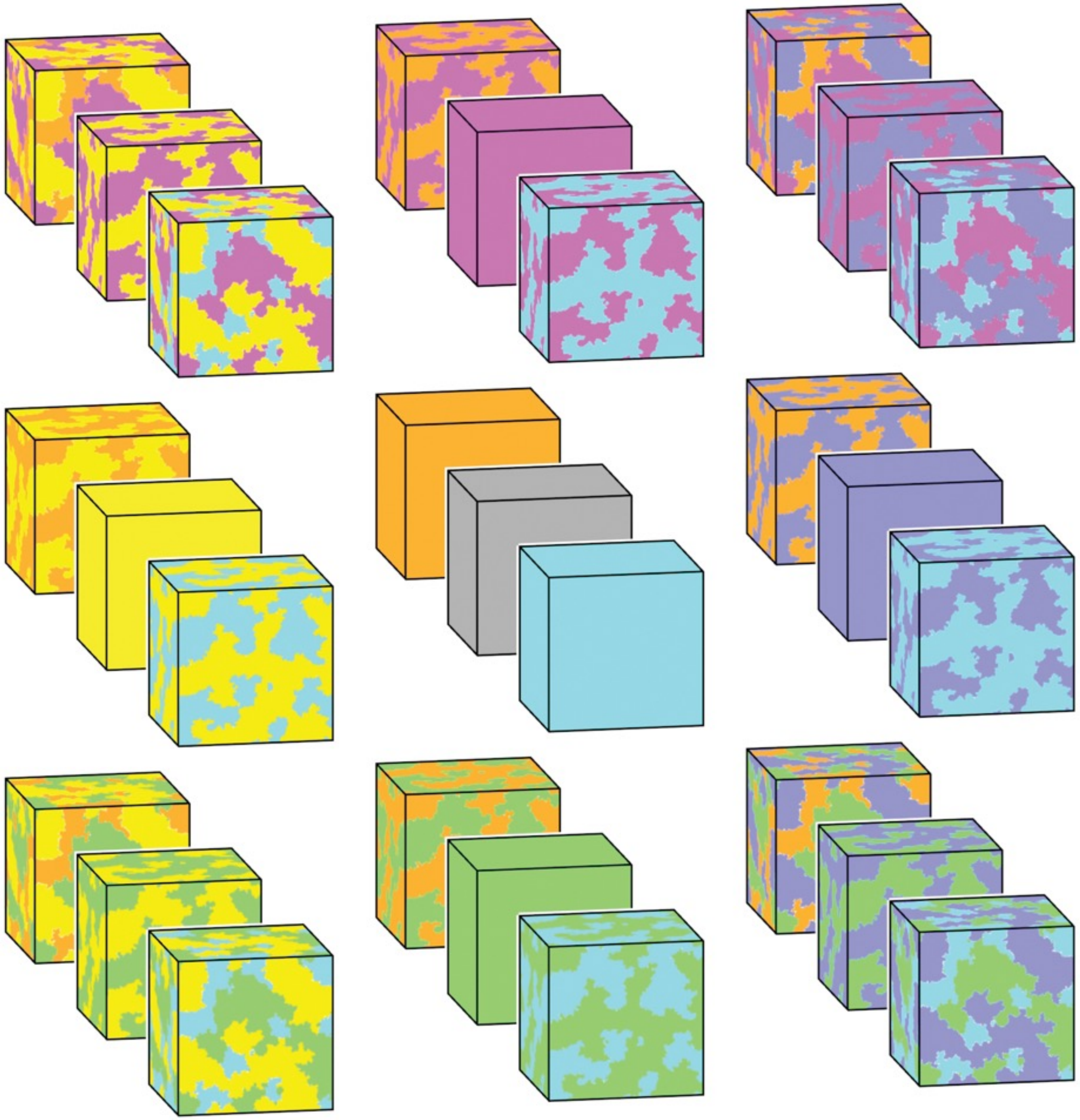
KUUTION OSIEN VÄRITTÄMINEN

Kärkipalat ovat kolmevärisiä sillä niihin vaikuttaa valo/varjo kolmesta suunnasta.

Särmäpalat ovat kaksivärisiä sillä niihin vaikuttaa valo/varjo kahdesta suunnasta.

Tahkopalat ovat yksivärisiä sillä niihin vaikuttaa valo/varjo vain yhdestä suunnasta.

Ydinpala on väritön (harmaa), sillä siihen ei vaikuta mikään valo/varjo.

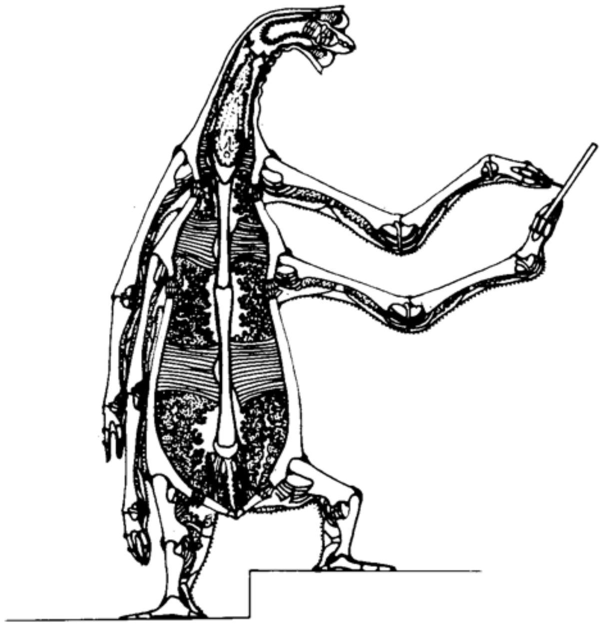


KUUTION POIKKILEIKKAUKSET TASOSSA

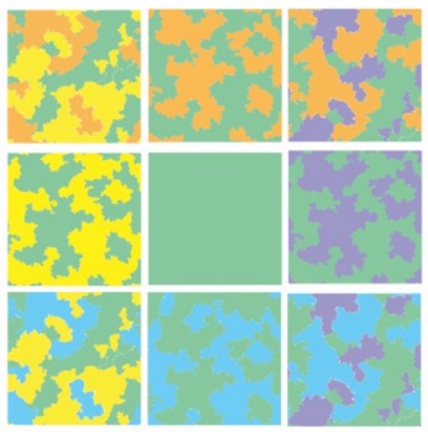
Nyt kaikkia kuution osia edustavat 27 palaa voidaan esittää laattoina, joista kootaan kuution poikkileikkaukset.
Koska tällaiset neliölaatat ovat täysin litteitä, voidaan niitä käyttää kuution rakenteen opettamiseen **kaksiulotteiselle** olennolle.

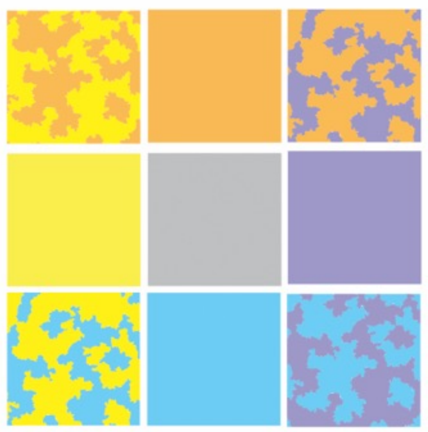
Kuvitteelliset kaksiulotteiset maailmat ovat tärkeitä neliulotteisen geometrian ymmärtämisen kannalta, sillä ne haasteet joita meillä on hyperkappaleiden kuvittelemisessa, ovat hyvin samankaltaisia kuin ongelmat joita ’2D-olento’ kohtaa yrittäessään kuvitella jotain kolmiulotteista kappaletta, kuten kuutiota.

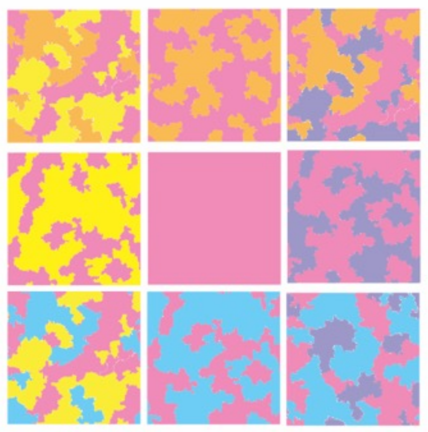
Kaunokirjallisuudessa luotuja kaksiulotteisia maailmoja ovat mm. A. K. Dewdneyn *Planiverse* (1984), ja Edwin A. Abbottin *Flatland* (1884).



Planiversen kaksiulotteinen päähenkilö

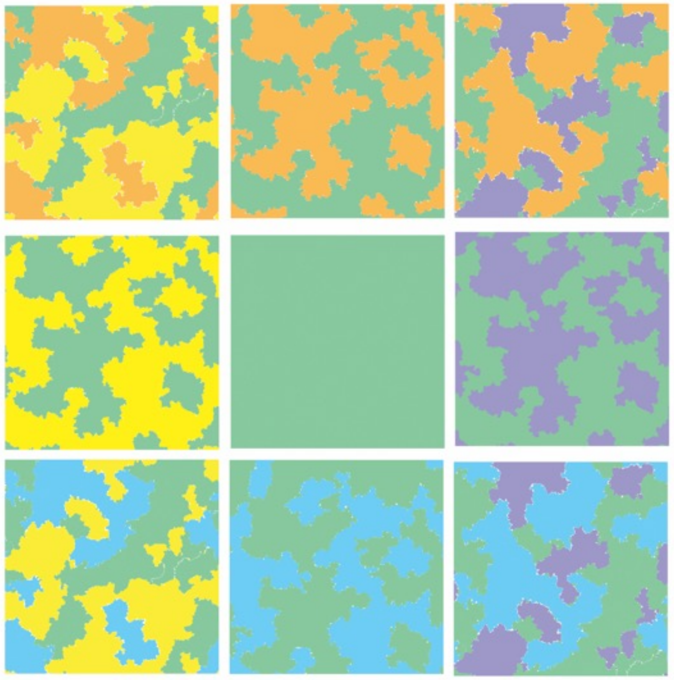




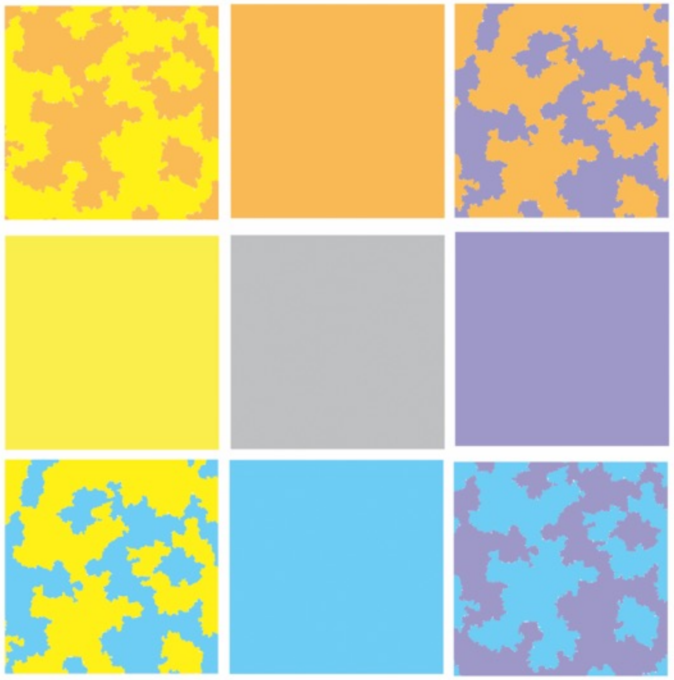


Alla oleva kolmen kuvan sarja esittää poikkileikkauksia jotka tulevat kaksiulotteisen olennon näkyviin,
kun kuutio työnnetään sen kaksiulotteisen maailman läpi vihreä tahko edellä:

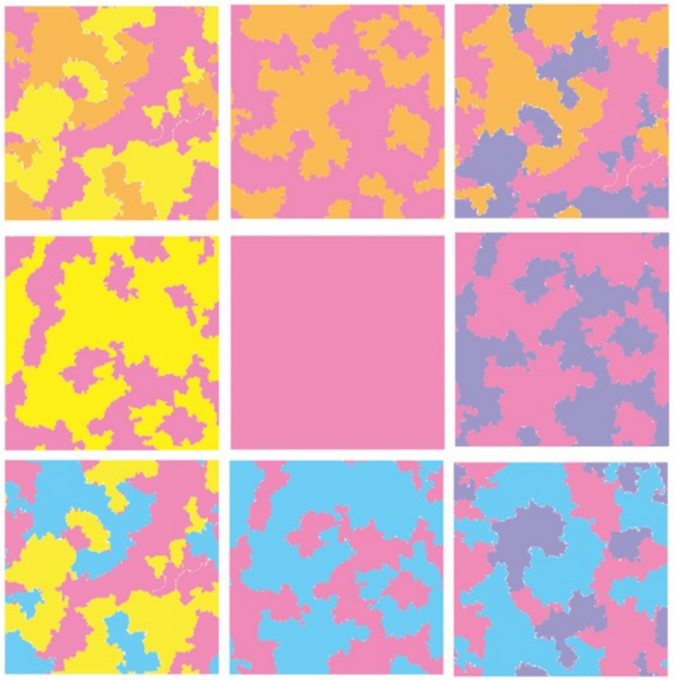
Ensiksi näkyviin tulee siis vihreä tahko, ja sitä ympäröivät särmät ja kärkipisteet (a).
Seuraavassa poikkileikkauksessa 2D-olento näkee kuution ytimen (harmaa), ja sitä ympäröivät tahkot ja särmät (b).
Viimeiseksi näkyviin tulee punainen tahko, ja sitä ympäröivät särmät ja kärkipisteet (c).



(a)



(b)

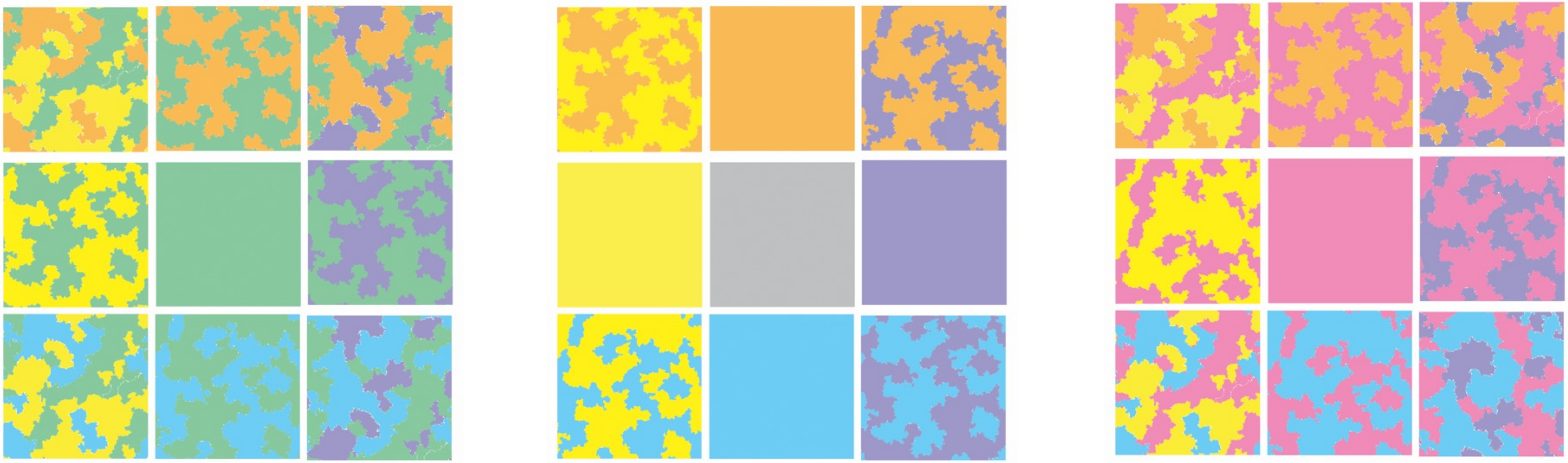


(c)

Tehtävä:

Tulosta kolmisivuinen pdf-tiedosto ” Kuution_poikkileikkauslaatat.pdf ” värillisenä, ja leikkaa laatat irti toisistaan.
Järjestä laatat uudelleen niin että ne kuvaavat kolmen poikkileikkauksen sarjan jostain toisesta suunnasta.
Toista niin kauan että hallitset poikkileikkaukset hyvin.

Minkälaisia säännönmukaisuuksia huomaat vierekkäisten laattojen värityksien suhteissa?
Milloin kaksi laattaa voivat olla naapureita? Milloin eivät?



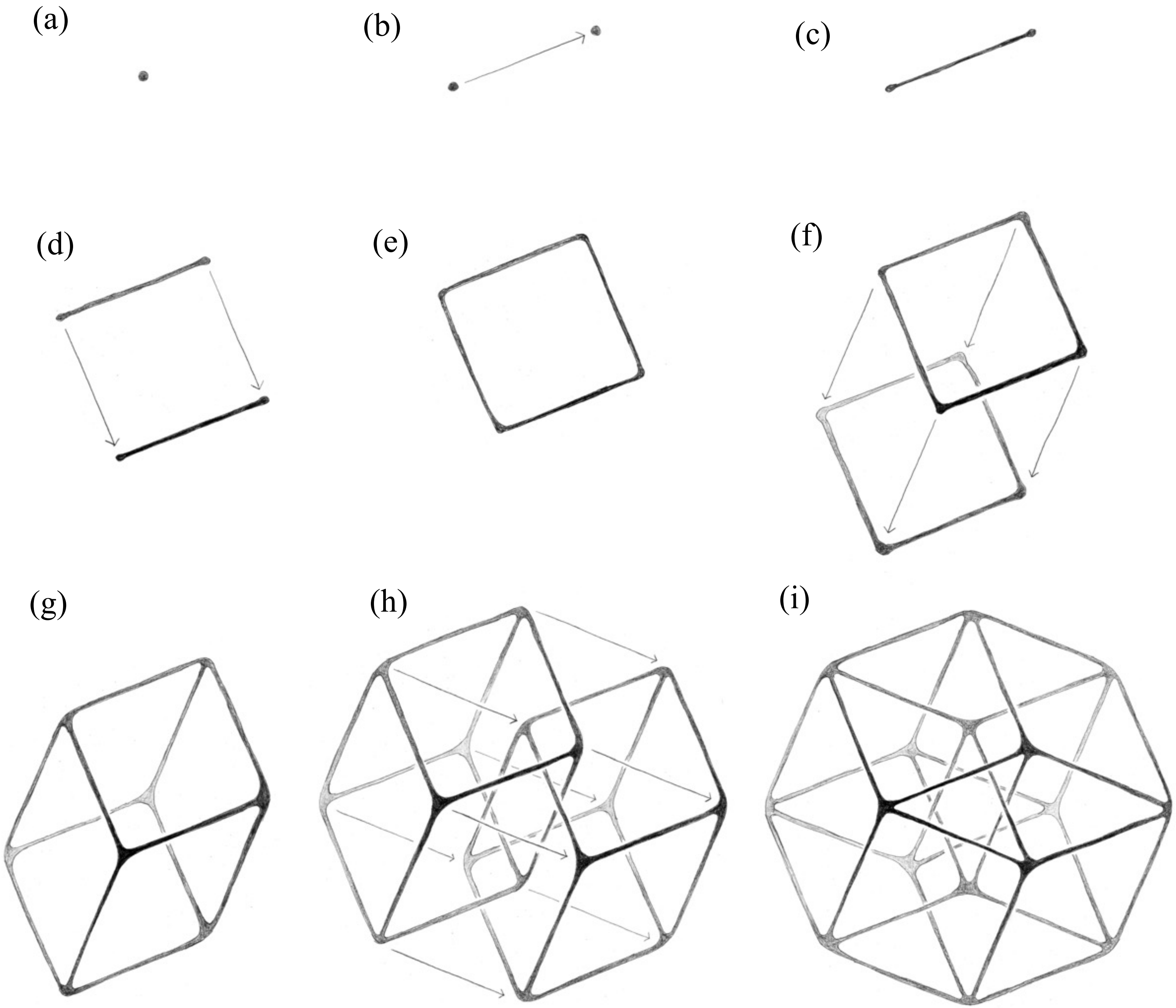
TESSERAKTIN POIKKILEIKKAUKSET KOLMIULOTTEISESSA AVARUUDESSA

Seuraavaksi siirrymme käsittelemään tesseraktia itseään.

Ensin tarkastelemme kuinka korkeampiulotteisia ’kuutioita’ voidaan luoda raahaamalla matalaulotteisempia elementtejä kohtisuoraan pois niiden avaruuksista.

TESSERAKTIN KONSTRUOINTI

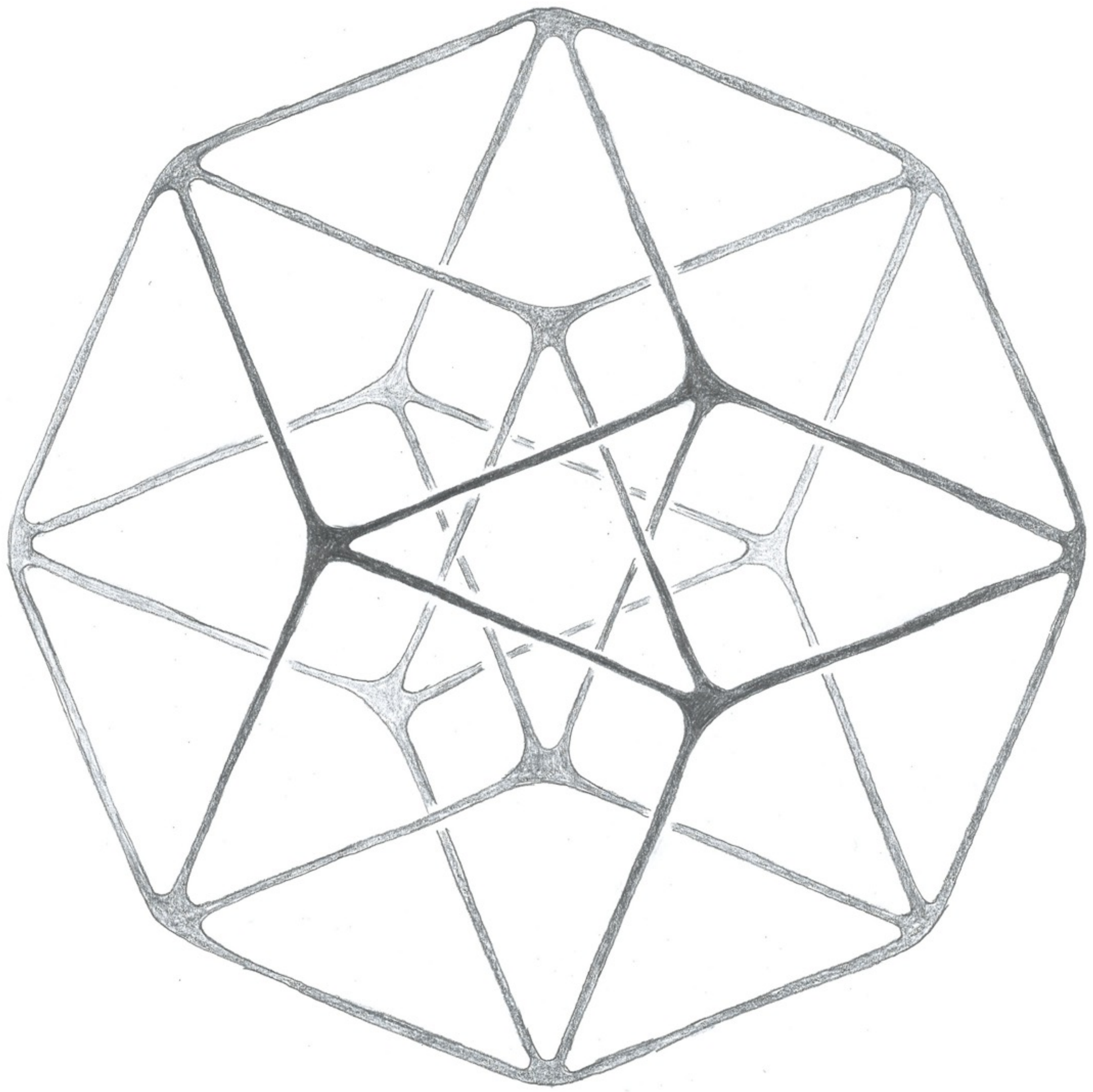
Jos pistettä (a) liikuttaa johonkin suuntaan (b), se jättää jälkeensä janan (c). Jos janaa taas liikuttaa kohtisuoraan pois sen suoralta sen pituuden verran (d), saadaan neliö (e). Samalla tavalla saamme kuution neliöstä (f–g), ja lopulta kun kuutiota vielä liikutetaan kohtisuoraan pois sen avaruudesta sen särmän pituuden verran (h), saadaan tesserakti (i).



TESSERAKTIN RAKENNE

Tesserakti on siis säännöllinen neliulotteinen kappale jossa on:

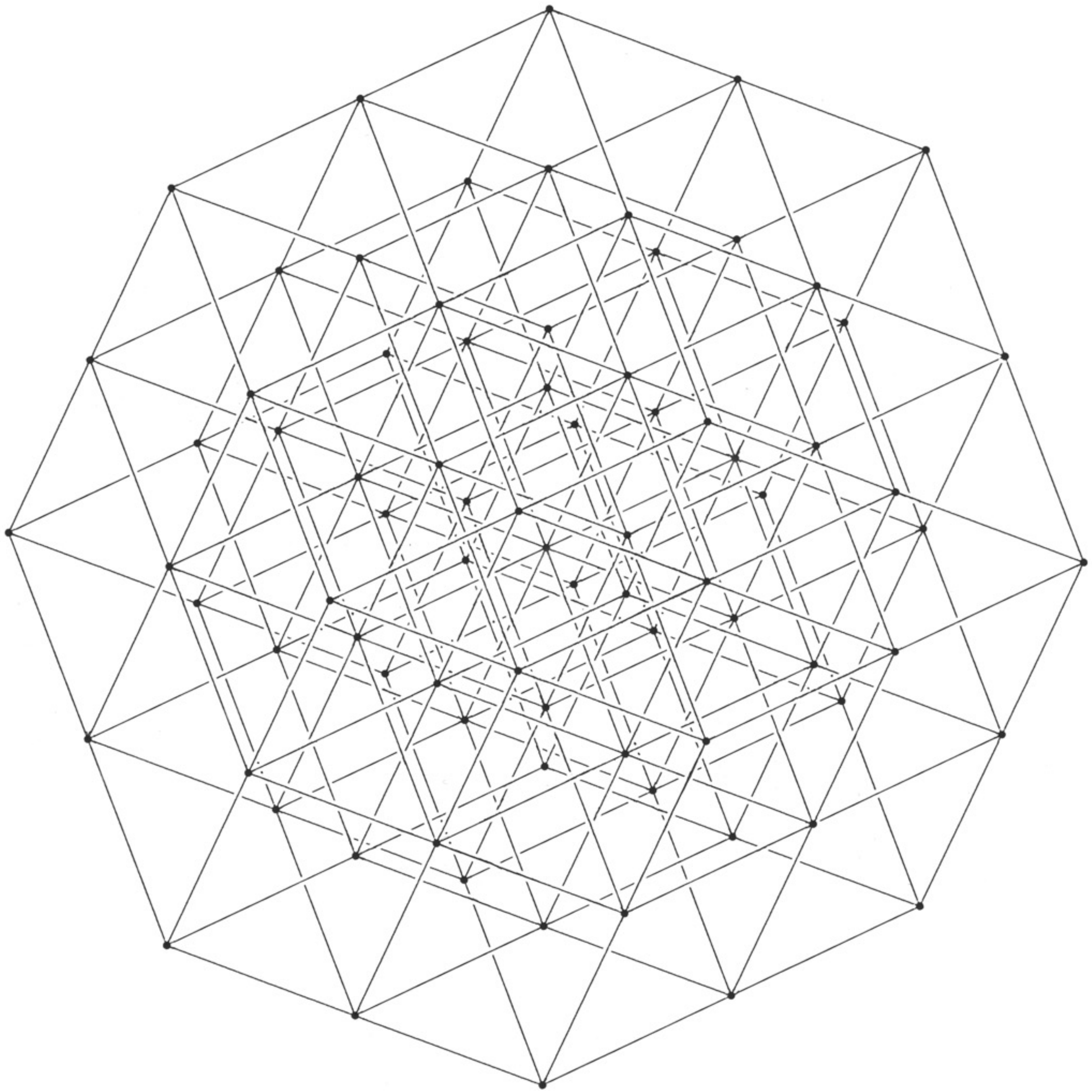
16 kärkipistettä
32 särmää
24 tahkoa (neliöitä)
8 solua (kuutioita)



TESSERAKTIN JAKAMINEN OSIIN

Leikkaamme tesseraktin kolmeen viipaleeseen jokaisen *neljän* pääsuunnan mukaisesti.

Näin saamme 3x3x3x3 rykelmän pieniä tesserakteja, joista jokainen edustaa alkuperäisen tesseraktin kärkipistettä, särmää, tahkoa, solua, tai alkuperäistä tesseraktia itseään.



TESSERAKTI

16 kärkipistettä
32 särmää
24 tahkoa (neliöitä)
8 solua (kuutioita)

↓

81 TESSERAKTIA

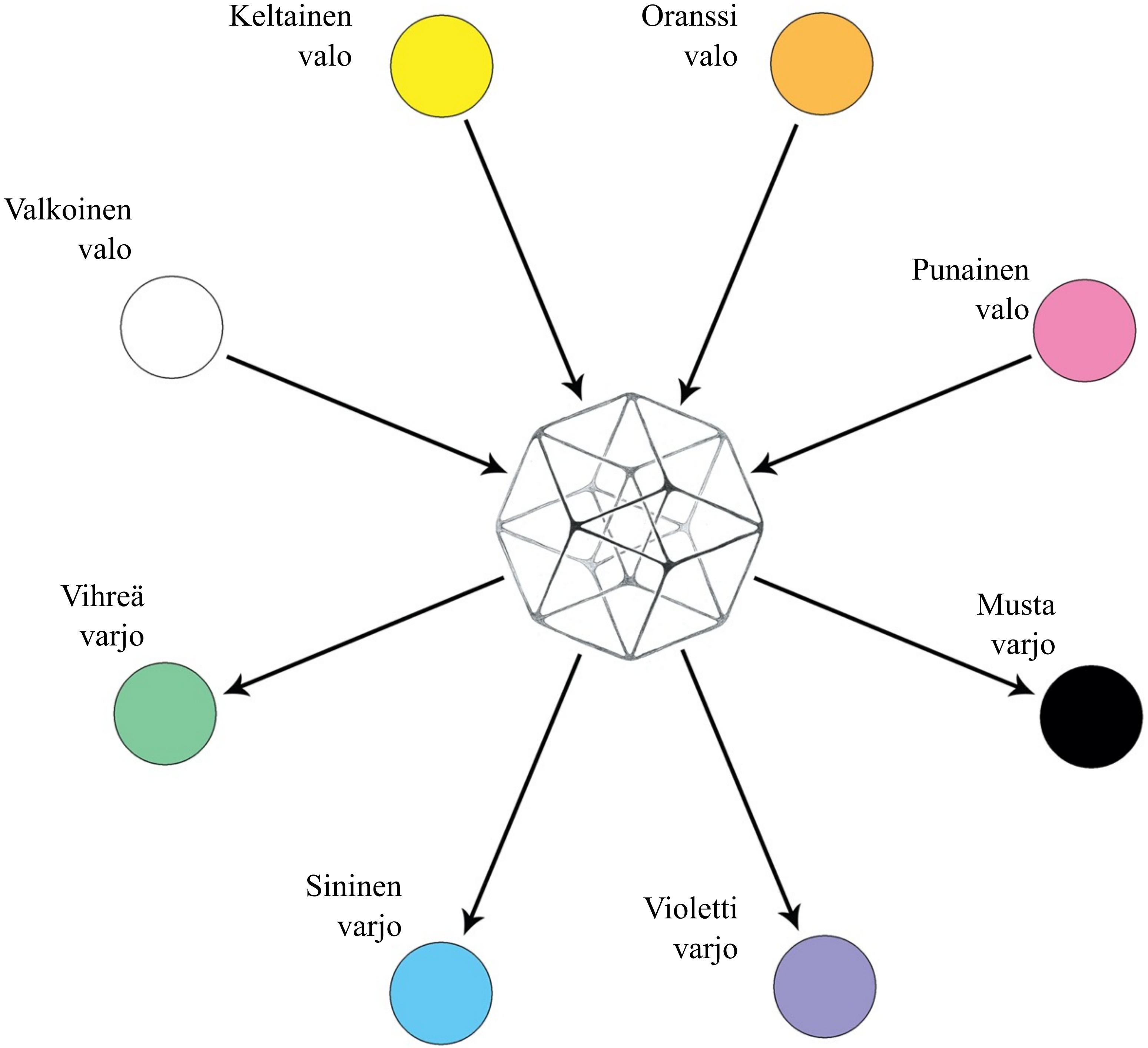
16 kärkipalaa
32 särmäpalaa
24 tahkopalaa
8 solupalaa
1 ydinpala

Kuvassa jokainen piste edustaa yhtä pientä tesseraktia, ja viivat kertovat miten ne ovat kiinni toisissaan.

TESSERAKTIN OSIEN VÄRITTÄMINEN

Tesseraktin osat saavat uniikit värinsä kun ajatellaan sitä kohden osoitettavan valoa neljästä eri suunnasta (valkoinen, keltainen, oranssi, punainen).

Varjopuolella ovat valon vastavärit (musta, violetti, sininen, vihreä).



TESSERAKTIN OSIEN VÄRITTÄMINEN

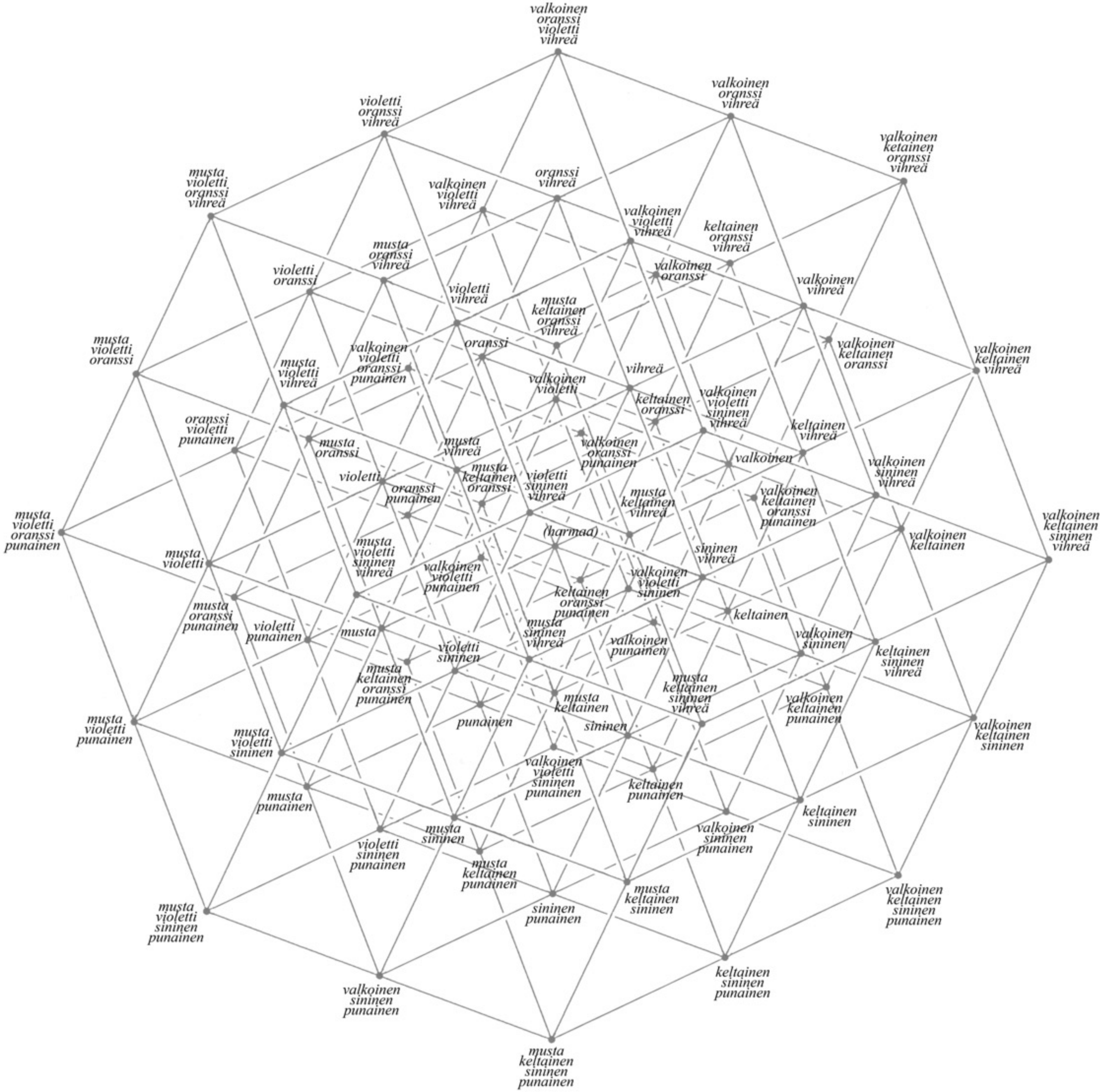
Kärkipalat ovat nelivärisiä sillä niihin vaikuttaa valo/varjo neljästä suunnasta.

Särmäpalat ovat kolmevärisiä sillä niihin vaikuttaa valo/varjo kolmesta suunnasta.

Tahkopalat ovat kaksivärisiä sillä niihin vaikuttaa valo/varjo kahdesta suunnasta.

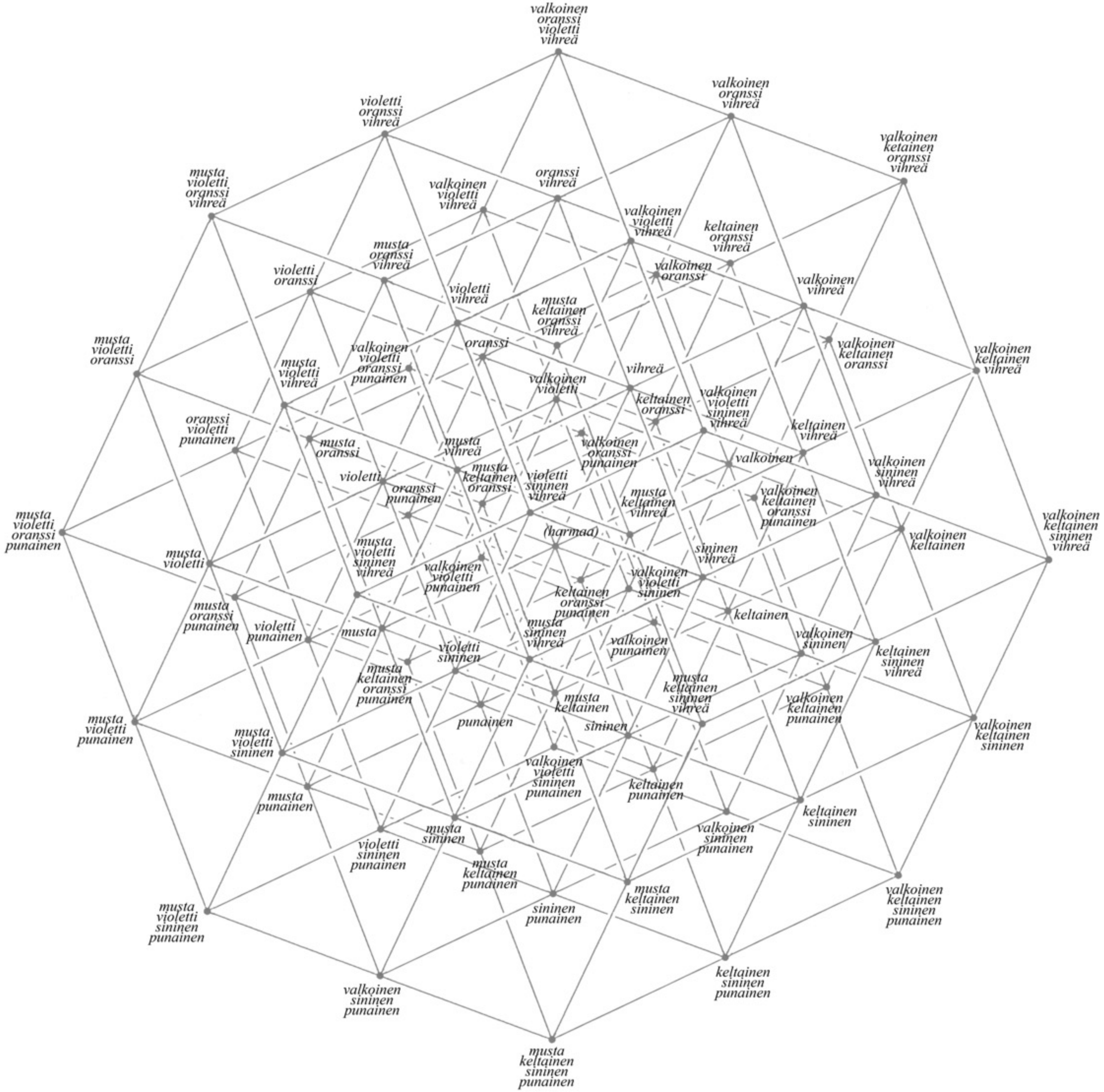
Solupalat ovat yksivärisiä sillä niihin vaikuttaa valo/varjo vain yhdestä suunnasta.

Ydinpala on väritön (harmaa), sillä siihen ei vaikuta mikään valo/varjo.



81 PALIKKAA

Viereinen kaavio listaa jokaisen 81 palikan värityksineen, sekä näyttää miten palikat liittyvät toisiinsa muodostaessaan suuremman tesseraktin.



PALIKKASETIN VALMISTAMINEN PAINETUISTA PAPERIARKEISTA

Tulosta 81-sivuinen pdf-tiedosto ” KuutiotA3.pdf” värillisenä A3- tai A4-kokoon, tukevalle paperille. Leikkaa/leikkauta jokainen arkki kuuteen ’korttiin’ leikkuumerkkien mukaisesti.

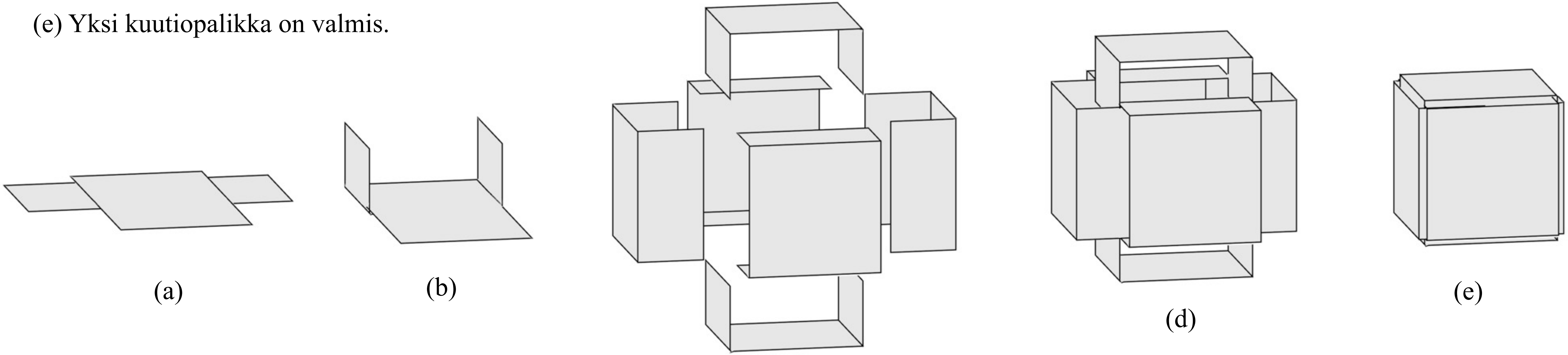
(a) Paina/viillä jokaiseen korttiin kaksi viivaa jollain terävähköllä esineellä. Käytä esim. toista korttia apuna niin että viivat rajaavat varmasti säännöllisen neliön kortista.

(b) Taita kortti näitä viivoja myöten niin että saat yhden neliötahkon, ja siihen suorakulmaisesti liittyvät läpät.

(c) Liitä kuusi samanväristä korttia toisiinsa pujottelemalla läpät neliötahkojen alle kuvan mukaisesti.

(d) Taputtele kokonaisuus varovasti kasaan.

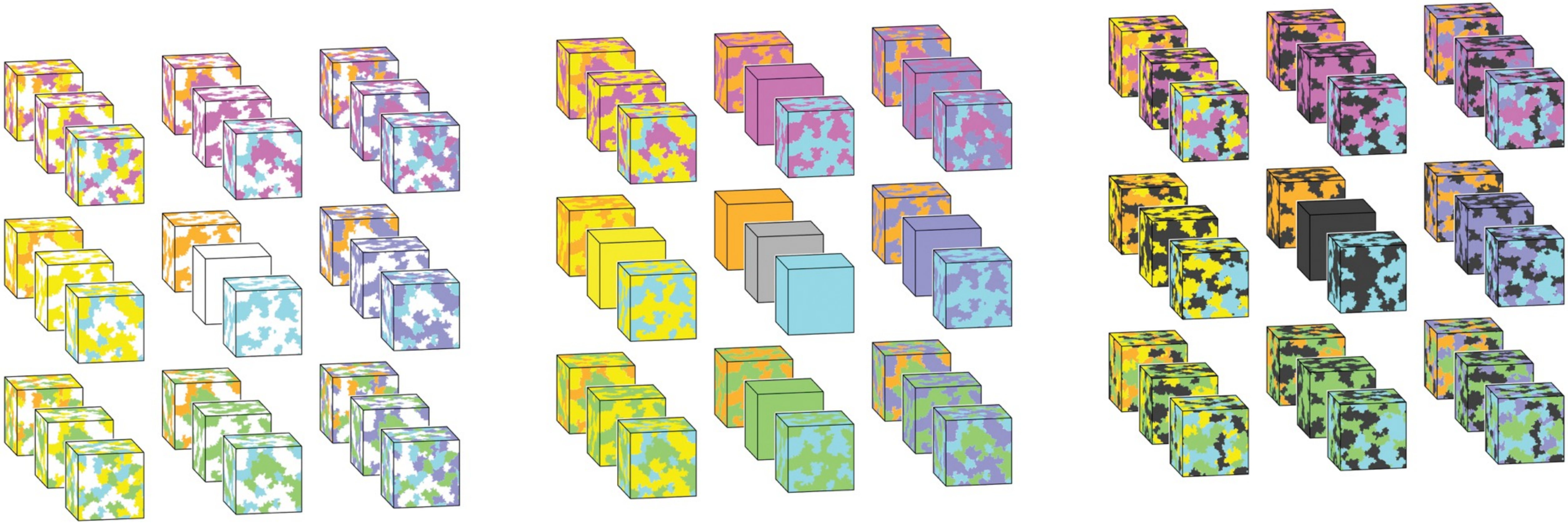
(e) Yksi kuutiopalikka on valmis.



(a) (b) (c) (d) (e)

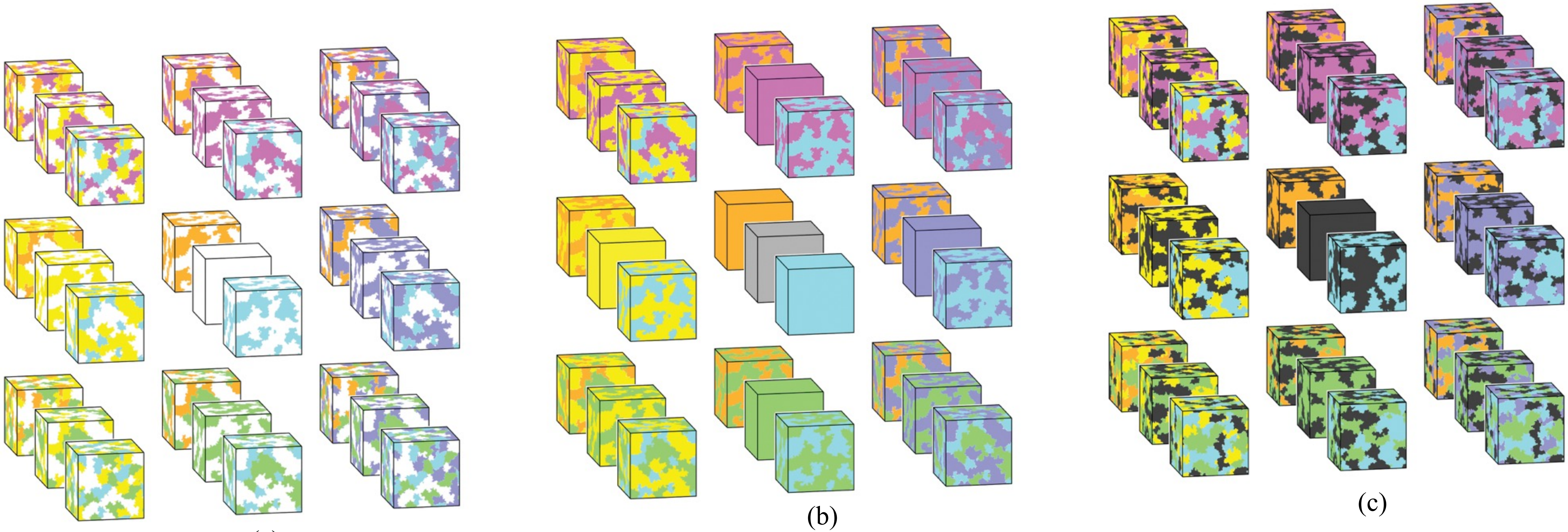
TESSERAKTIN POIKKILEIKKAUKSET KOLMIULOTTEISESSA AVARUUDESSA

Nyt tesseraktin 81 osaa voidaan esittää valmiilla palikkasetillä, ja palikoista voidaan koota tesseraktin poikkileikkaukset.



Alla olevan kolmen kuvan sarja esittää poikkileikkauksia jotka tulevat näkyviimme,
kun tesserakti työnnetään kolmiulotteisen maailmamme läpi valkoinen solu edellä:

Ensiksi näkyviin tulee siis valkoinen solu, ja sitä ympäröivät tahkot, särmät, ja kärkipisteet (a).
Seuraavassa poikkileikkauksessa näemme tesseraktin ytimen (harmaa), ja sitä ympäröivät solut, tahkot, ja särmät (b).
Viimeiseksi näkyviin tulee musta solu, ja sitä ympäröivät tahkot, särmät, ja kärkipisteet (c).



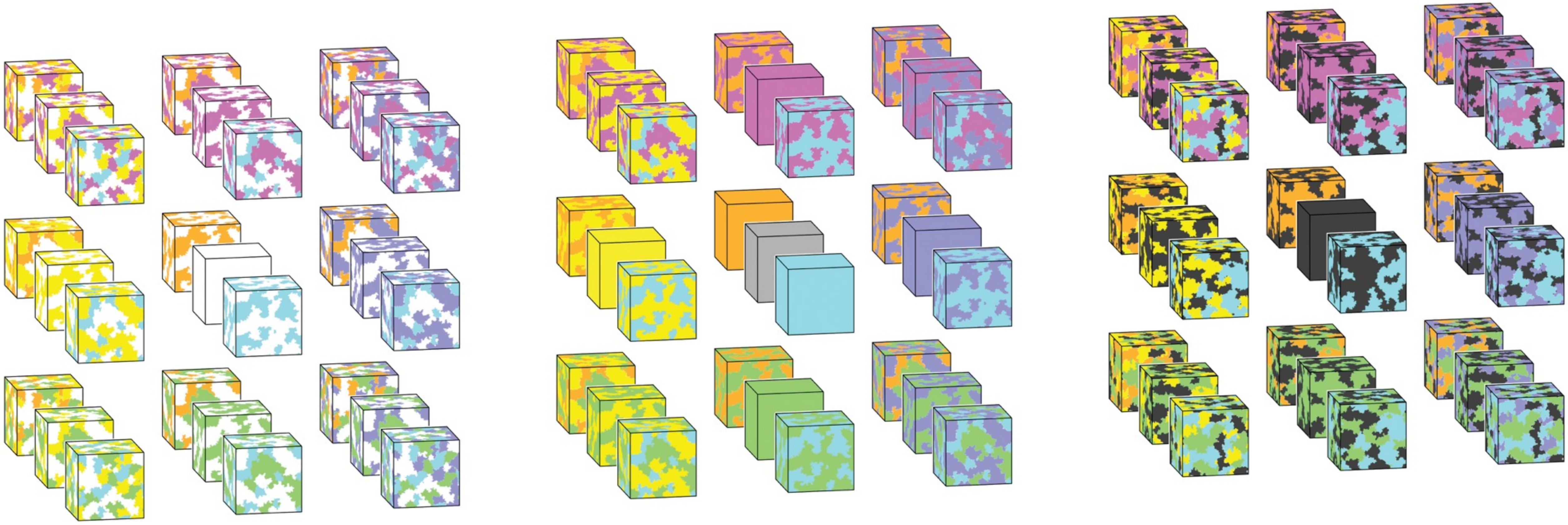
(a) (b) (c)

Tehtäviä:

Monellako muulla tavalla palikoista voi koota tesseraktin poikkileikkaukset?
Rakenna ne kaikki kolmen mallin sarjaksi palikkasetin osista.

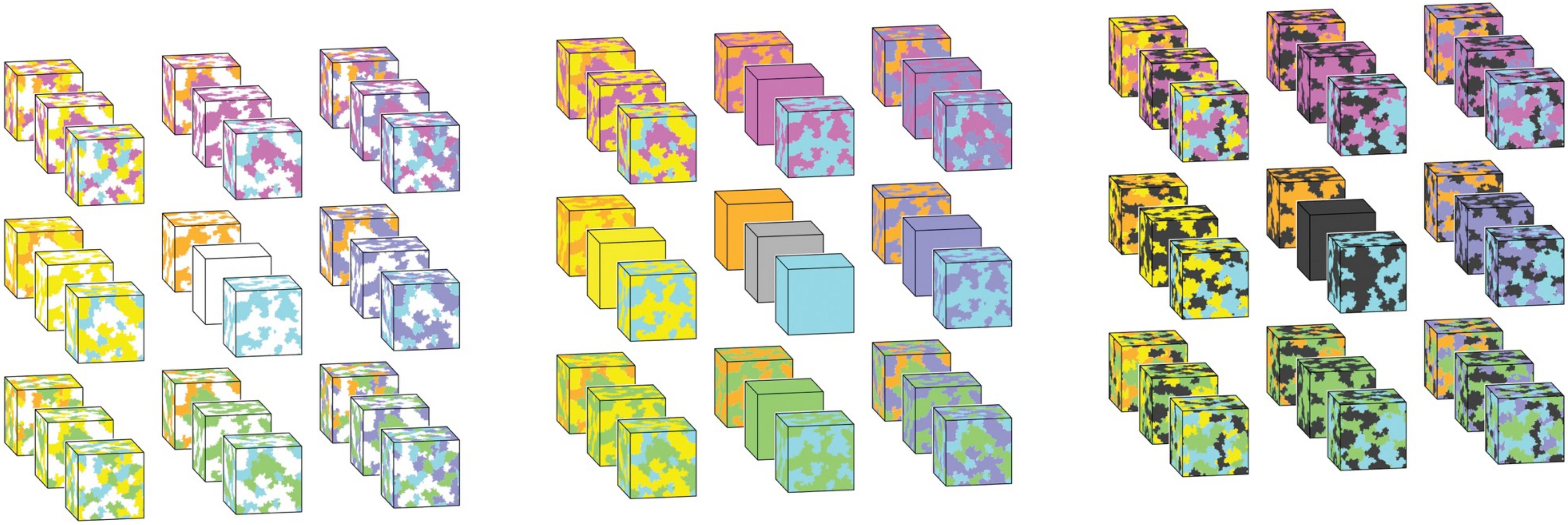
Toista niin kauan että hallitset tesseraktin rakenteen ja poikkileikkaukset hyvin.

Minkälaisia säännönmukaisuuksia huomaat vierekkäisten palikoiden värityksien suhteissa?
Milloin kaksi palikkaa voivat olla naapureita? Milloin eivät?



Tehtäviä:

Löytäisikö palikkasetille jonkin toisen, paremman värityksen? Millaista logiikkaa se noudattaisi?
Miten kehittäisit palikkasettiä esim. materiaalien, valmistustekniikoiden, tms. suhteen?
Suunnittele yllä kuvattua oppimateriaalia hyväksikäyttäen opetuskokeilu. Toteuta se ja raportoi tulokset.



KIRJALLISUUTTA:

Abbott, Edwin A. *Flatland: A Romance of Many Dimensions* [1884]. New York: Oxford University Press, 2006.

Blacklock, Mark. *The Emergence of the Fourth Dimension: Higher Spatial Thinking in the Fin De Siècle*. New York: Oxford University Press, 2018.

Blackwood, Algernon. "A Victim of Higher Space." *The Occult Review*, (William Rider and Son, Ltd) 20, no. 6 (December 1914): 318–335.

Dewdney, A. K. *The Planiverse: Computer Contact with a Two-dimensional World* [1984]. New York: Copernicus, 2000.

Gardner, Martin. "Hypercubes." In *Mathematical Carnival*, 41-54. London: Penguin Books, 1978.

Henderson, Linda Dalrymple. *The Fourth Dimension and Non-Euclidean Geometry in Modern Art* [1983]. Revised edition. Cambridge: MIT Press, 2013.

Hinton, Charles Howard. *A New Era of Thought*. London: Swann Sonnenschein & Co., 1888.

Hinton, Charles Howard. *The Fourth Dimension*. New York: Swann Sonnenschein & Co., 1901.

Rucker, Rudy. *The Fourth Dimension: Toward a Geometry of Higher Reality* [1984]. New York: Dover, 2014.

Volkert, Klaus. *In Höheren Räumen: Der Weg der Geometrie in Die Vierte Dimension*. Berlin: Springer Spektrum, 2018.

White, Cristopher G. *Other Worlds: Spirituality and the Search for Invisible Dimensions*. Cambridge: Harvard University Press, 2018.