Insinöörimatematiikka 1 & 3

Janne Kauhanen

Tampereen teknillinen yliopisto
Matematiikan laitos
2017

Alkusanat

Tämä moniste on laadittu TTY:n opintojaksoille Insinöörimatematiikka 1 ja 3. Moniste ei ole kattava itseopiskelupaketti, vaan se on tarkoitettu käytettäväksi luentojen seuraamisen ja harjoitustehtävien ratkomisen tukena.

Matematiikan oppiminen on valitettavasti työlästä. Pelkkä luentojen kuunteleminen ja luentomonisteen tai kurssikirjan toistuvakaan läpilukeminen ei johda oppimiseen. Oppimisen kannalta tärkeintä on itsenäinen työnteko: luentomuistiinpanojen ja monisteen päättelyiden, todistusten ja esimerkkien käyminen läpi kynää ja paperia käyttäen sekä harjoitustehtävien ratkominen. Itsenäisen työn suuri osuus kannattaa ottaa huomioon ajankäyttöä suunnitellessa. Omalla ajalla työskentelyyn saattaa kulua sama tuntimäärä mikä istumiseen luennoilla ja harjoituksissa.

Itsenäinen työnteko ei välttämättä tarkoita yksinäistä puurtamista. Harjoitustehtäviä on usein hedelmällistä pohtia pienessä ryhmässä. Jokaisen on kuitenkin pidettävä huoli omasta oppimisestaan, sillä tietyn kurssin osan hallitsee vasta, kun pystyy itsenäisesti käsittelemään siihen liittyviä tehtäviä.

Kurssikirjoina ovat Edwardsin ja Penneyn kirja [5] sekä Poolen kirja [13] (ks. lähdeluettelo sivulla 256). Kirjojen käytön helpottamiseksi otsikoissa viitataan kurssikirjojen vastaaviin kohtiin: esimerkiksi viittaus [5, 1.1] tarkoittaa Edwardsin ja Penneyn kirjan [5] lukua 1.1.

Kommentteja painovirheistä ja monisteesta yleisemminkin voi lähettää sähköpostitse kirjoittajalle: `janne.kauhanen@tuni.fi`.

Janne Kauhanen

Sisällys

1 Joukko-opin, logiikan ja todistamisen perusteita

Luvussa 1 kerrataan ja esitellään kaikilla matematiikan opintojaksoilla tarvittavia matemaattisia merkintöjä ja peruskäsitteitä sekä todistustekniikkaa. Keskeiset käsitteet:

- Implikaatio ja ekvivalenssi.
- Joukko, joukkojen yhdiste, leikkaus, erotus ja komplementti.
- Olemassaolo- ja kaikkikvanttorit.
- Suora ja epäsuora todistus, induktiotodistus.

Tavoitteena on oppia käyttämään em. merkintöjä oikein ja lukemaan ja kirjoittamaan yksinkertaisia todistuksia.

1.1 Lauselogiikan lause

Lauselogiikan peruskäsite on *lause*, jonka *totuusarvo* on joko tosi (merkitään 1 tai t) tai epätosi (merkitään 0 tai e). Lauseita merkitään $p, q, r, \ldots$ tai $A, B, C, \ldots$. Otetaan käyttöön seuraavat viisi *konnektiivia*:

$\neg$	*negaatio* (”ei”)
$\wedge$	*konjunktio* (”ja”)
$\vee$	*disjunktio* (”tai”)
$\rightarrow$	*implikaatio*
$\leftrightarrow$	*ekvivalenssi*

Lauseista voidaan muodostaa uusia lauseita konnektiivien avulla:

$\neg p$	”ei p”
$p \wedge q$	”p ja q”
$p \vee q$	”p tai q”
$p \rightarrow q$	”jos p niin q” ”p:stä seuraa q” ”p vain jos q” ”q aina kun p” ”p on riittävä ehto q:lle” ”q on välttämätön ehto p:lle” ”p implikoi q:n”

$p \leftrightarrow q$	"p jos ja vain jos q"
	"p ja q ovat yhtäpitäviä"
	"p ja q ovat ekvivalentteja"

Näitä lauseita voidaan yhdistää konnektiivien avulla esimerkiksi lauseiksi

$$(\neg p) \land (p \lor q) \qquad \text{ja} \qquad (p \leftrightarrow q) \lor (\neg q),$$

ja edelleen

$$((\neg p) \land (p \lor q)) \to ((p \leftrightarrow q) \lor (\neg q)) \tag{1.1}$$

jne. Sovitaan konnektiiveille vahvuusjärjestys

(1) $\neg$

(2) $\land$ ja $\lor$ (yhtä vahvoja)

(3) $\to$ ja $\leftrightarrow$ (yhtä vahvoja)

Tällöin esimerkiksi lauseesta (1.1) voidaan jättää sulkuja pois:

$$\neg p \land (p \lor q) \to (p \leftrightarrow q) \lor \neg q$$

Esimerkki 1.2. Jos $x \in \mathbb{R}$ ja $y \in \mathbb{R}$ (ts. x ja y ovat reaalilukuja), niin seuraavat ovat lauseita:

p : $x \in \mathbb{N}$ (ts. x on luonnollinen luku)

q : $y^2 = 2$

r : $x + y \geq 0$

Näistä voidaan muodostaa esimerkiksi lauseet

$p \lor q$: x on luonnollinen luku tai $y^2 = 2$.

$\neg r$: $x + y < 0$

$r \to p$: Jos $x + y \geq 0$, niin x on luonnollinen luku.

$p \land \neg q \to \neg r$: Jos x on luonnollinen luku ja $y^2 \neq 2$, niin $x + y < 0$.

Sen sijaan seuraavat eivät ole lauselogiikan lauseita, koska niillä ei ole totuusarvoja:

$$x^2 + y^2 + z^2, \quad \frac{a+b}{2}, \quad \pi + \sqrt{7}.$$

1.2 Totuusarvo ja totuustaulukko

Jos lauseiden $p, q, r, \ldots$ totuusarvot on kiinnitetty, niin niistä konnektiiveja käyttäen muodostettujen monimutkaisempien lauseiden totuusarvot määräytyvät seuraavasta *totuustaulukosta*:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Matematiikassa siis sovitaan, että $p \vee q$ on tosi myös silloin, kun molemmat lauseet p ja q ovat tosia. Luonnollisessa kielessä ”tai” tulkitaan milloin mitenkin, kuten esimerkeistä ”Liittymislahjaksi saat repun tai puseron” ja ”Opiskelemaan pääsee, jos kirjoittaa laudaturin matematiikasta tai saa yli kymmenen pistettä pääsykokeesta” voi havaita.

Implikaation määritelmää voidaan perustella seuraavalla esimerkillä:

$$
\begin{aligned}
p: &\quad x > 3 \\
q: &\quad x > 2
\end{aligned}
$$

On järkevää sopia, että lause $p \to q$ eli

$$x > 3 \to x > 2$$

on aina tosi, sijoitettiinpa luvun x paikalle mikä tahansa reaaliluku.

Esimerkki 1.3. Tutki totuustaulukon avulla, milloin lause $(p \to q) \wedge (q \to p)$ on tosi ja milloin epätosi.

Ratkaisu. Puretaan lause auki ja täytetään totuustaulukkoa sarake kerrallaan:

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Huomataan, että kysytty lause on tosi, kun p ja q ovat molemmat tosia tai kun p ja q ovat molemmat epätosia. Muulloin lause on epätosi.

Esimerkki 1.4. Osoita, että lauseella

Jos sataa, niin jään kotiin

on aina sama totuusarvo kuin lauseella

Ei sada tai jään kotiin.

Ratkaisu. Merkitään p : Sataa ja q : Jään kotiin. Rakennetaan totuustaulukko lauseille $A = (p \to q)$ ja $B = (\neg p \vee q)$:

p	q	$p \to q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$
1	1	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Lauseilla A ja B on siten jokaisella rivillä sama totuusarvo.

Esimerkin 1.4 tapauksessa sanotaan, että lauseet A ja B ovat loogisesti ekvivalentteja:

Määritelmä 1.5. Lausetta, joka on aina tosi riippumatta siinä esiintyvien lauseiden totuusarvoista, kutsutaan *tautologiaksi*.

Jos $A \leftrightarrow B$ on tautologia, niin sanotaan että A ja B ovat *loogisesti ekvivalentteja* ja merkitään $A \Leftrightarrow B$.

Vastaavasti jos $A \to B$ on tautologia, niin sanotaan että B on A:n *looginen seuraus* ja merkitään $A \Rightarrow B$.

Korostetaan vielä näiden merkintöjen eroa. Merkintä $A \to B$ tarkoittaa lauselogiikan lausetta, jonka totuusarvo voi A:sta ja B:stä riippuen olla joko tosi tai epätosi. Merkitsemällä $A \Rightarrow B$ tarkoitetaan sitä, että lause $A \to B$ on aina tosi, ts. B on tosi aina kun A on tosi. Merkintä on tärkeä matematiikassa, missä matemaattiset lauseet voidaan yleensä esittää implikaationa $A \Rightarrow B$, missä A:ta kutsutaan *oletukseksi* ja B:tä *väitteeksi*: jos oletus A on tosi, niin väite B on myös tosi.

Tautologiat ovat keskeinen työkalu matemaattisessa päättelyssä, kun todistetaan jotakin väitettä tai muokataan sitä muodosta toiseen.

Lause 1.6 (Päättelysääntöjä)**.**

- $\neg\neg p \Leftrightarrow p$ *(kaksoisnegaation poisto)*
- $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p \quad ja \quad p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ *(vaihdantalait)*
- $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r \quad ja$ *(liitäntälait)*
  $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
- $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \quad ja$ *(osittelulait)*
  $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q \quad ja$ *(de Morganin lait)*
  $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
- $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$ *(ekvivalenssilaki)*
- $p \wedge (p \to q) \Rightarrow q$ *(suora todistus)*
- $(p \to q) \Leftrightarrow (\neg q \to \neg p) \quad ja$ *(epäsuora todistus)*
  $[p \wedge ((p \wedge \neg q) \to (r \wedge \neg r))] \Rightarrow q$

Nämä säännöt voidaan todistaa suoraviivaisesti kirjoittamalla totuustaulukko. Käytännössä sääntöjä ei pidä eikä tarvitse opetella ulkoa, sillä ne ovat täysin arkiajattelun mukaisia.

Esimerkki 1.7. Olkoon

$$p : n \text{ on parillinen kokonaisluku} \quad \text{ja} \quad q : n < 0.$$

Tällöin väitteen

$$n \text{ on parillinen tai } n < 0$$

negaatio $\neg(p \vee q)$ on ensimmäisen de Morganin lain mukaan loogisesti ekvivalentti lauseen $\neg p \wedge \neg q$ kanssa, eli negaatio on

$$n \text{ on pariton ja } n \geq 0.$$

Huomautus 1.8. a) Liitäntälakien nojalla voidaan merkitä $p \vee q \vee r$ ja $p \wedge q \wedge r$.
b) Suora todistus luonnollisella kielellä: Jos p on tosi ja p:stä seuraa q, niin silloin q:n on oltava tosi.
c) Epäsuora todistus luonnollisella kielellä: Jos p on tosi ja $\neg q$ yhdessä oletuksen p kanssa johtaisi johonkin (mihin tahansa) ristiriitaan $r \wedge \neg r$, niin tällöin q:n on oltava tosi.

1.3 Boolen algebra ja loogiset virtapiirit

Määritellään alkioille p ja $q \in \{0, 1\}$ *komplementti* $\overline{p}$, *tulo* pq ja *summa* $p + q$ seuraavan taulukon mukaisesti:

p	q	$\overline{p}$	pq	$p+q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	0

Joukko $\{0, 1\}$ varustettuna näillä laskutoimituksilla on eräs esimerkki ns. *Boolen algebrasta*. Huomataan, että komplementointi vastaa negaatiota (ei), tulo konjunktiota (ja) ja summa disjunktiota (tai). Nämä laskutoimitukset on helppo muistaa, koska ainoana erona tavallisiin laskusääntöihin on $1 + 1 = 1$.

Lause 1.9. *Jokainen lauselogiikan lause voidaan esittää sellaisessa loogisesti ekvivalentissa muodossa, jossa esiintyy vain konnektiiveja* $\neg$, $\wedge$ *ja* $\vee$.

Todistus. (1) Kaikki implikaatiot voidaan esittää väitetyssä muodossa, sillä esimerkin 1.4 mukaan

$$(p \to q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q).$$

(2) Ekvivalenssilain ja kohdan (1) mukaan

$$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \to q) \wedge (q \to p)) \Leftrightarrow ((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)). \qquad \square$$

Lauseen 1.9 mukaan kaikki lauselogiikan lauseet voidaan esittää Boolen algebrassa ja siten lauseen totuusarvo voidaan selvittää totuustaulukon ohella myös em. laskusäännöillä.

Esimerkki 1.10. **a)** Selvitä lauseen $\neg(\neg(p \wedge q) \wedge (q \vee r))$ totuusarvo, kun q ja r ovat tosia ja p epätosi.
b) Todista lauseen 1.6 suoran todistuksen sääntö $p \wedge (p \to q) \Rightarrow q$ Boolen algebran avulla.
Ratkaisu. a) Nyt $q = r = 1$ ja $p = 0$, joten

$$\overline{\overline{pq}(q+r)} = \overline{\overline{0 \cdot 1} \cdot (1+1)} = \overline{\overline{0} \cdot 1} = \overline{1 \cdot 1} = \overline{1} = 0.$$

Lause on siis epätosi.
b) On osoitettava, että $p \wedge (p \to q) \to q$ on aina tosi. Muokataan lause muotoon, jossa ei esiinny implikaatioita:

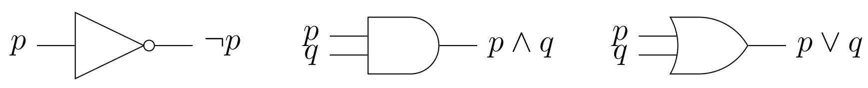
$$\begin{aligned}[p \wedge (p \to q) \to q] &\Leftrightarrow [p \wedge (\neg p \vee q) \to q] \\ &\Leftrightarrow [\neg(p \wedge (\neg p \vee q)) \vee q]\end{aligned}$$

eli Boolen algebrassa $\overline{p(\overline{p}+q)}+q$. Nyt

$$\overline{p(\overline{p}+q)}+q=\begin{cases}1, & \text{jos } q=1,\\ p\overline{p}=\overline{0}=1, & \text{jos } q=0\end{cases}$$

riippumatta p:n arvosta, ts. lause on aina tosi.

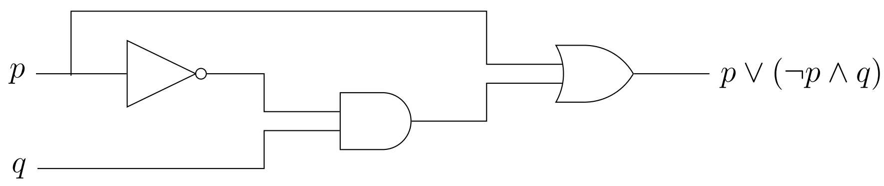
Boolen algebran lauseet voidaan esittää graafisesti *loogisena virtapiirinä*, joka koostuu seuraavista kolmesta *alkeisveräjästä*:



NOT AND OR

Tässä p ja q ovat *ottoja* ja $\neg p$, $p \wedge q$ ja $p \vee q$ *antoja*. Usein käytetään myös veräjiä XOR (jompi kumpi mutta ei molemmat) ja NAND (ei molemmat). Käytännössä veräjät voidaan toteuttaa käyttämällä esimerkiksi releitä ja transistoreja ja sopimalla, että jännite 0 V vastaa totuusarvoa 0 ja jännite 5 V totuusarvoa 1.

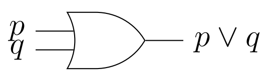
Esimerkki 1.11. Lause $p \vee (\neg p \wedge q)$ loogisena virtapiirinä:



Huomataan, että osittelulain mukaan

$$[p \vee (\neg p \wedge q)] \Leftrightarrow [(p \vee \neg p) \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow [p \vee q].$$

Sama toiminta saadaan siis aikaiseksi yhdellä veräjällä:



1.4 Joukko [13, Appendix A]

Määritelmä 1.12. *Joukko (set)* on kokoelma olioita (joita nimitetään joukon *alkioiksi* tai *jäseniksi* (*element, member*)) siten, että

- joukon alkioista voidaan sanoa, ovatko ne samoja vai eivät, ja
- mistä tahansa oliosta voidaan sanoa, onko se joukon alkio vai ei.

Joukkoja merkitään usein isoilla kirjaimilla $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$ ja alkioita pienillä kirjaimilla $a, b, c, \ldots, x, y, z$. Joukko voidaan ilmaista luettelemalla sen alkiot, esimerkiksi

$$\{2, 4, 6, 8\} \qquad \text{tai} \qquad \{2, 4, 6, \ldots\}$$

tai ilmaisemalla muutoin joukkoon kuulumisen välttämätön ja riittävä ehto, esimerkiksi

$$\{x : \ x \text{ on suomalaisen aakkoston vokaali}\}.$$

Merkintöjä:

$x = y$	alkiot x ja y ovat samoja,
$x \neq y$	alkiot x ja y eivät ole samoja,
$x \in A$	x *kuuluu joukkoon* A, eli x on A:n alkio,
$x \notin A$	x *ei kuulu joukkoon* A, eli x ei ole A:n alkio,
$A \subset B$	A on B:n *osajoukko*: $x \in A \Rightarrow x \in B$,
$A \not\subset B$	A ei ole B:n osajoukko,
$A = B$	joukot A ja B ovat *samoja*: $x \in A \Leftrightarrow x \in B$ (ts. $A \subset B$ ja $B \subset A$),
$\emptyset$	*tyhjä joukko* eli joukko, joka ei sisällä yhtään alkiota.

Joukkoa, joka ei ole tyhjä joukko, sanotaan *epätyhjäksi*. Lisäksi joukko on *äärellinen*, jos se on tyhjä joukko tai siinä on vain äärellisen monta alkiota, muutoin joukko on *ääretön*.

Huomautus 1.13. a) Aina $\emptyset \subset A$ ja $A \subset A$.
b) Väite $A = B$ on usein helpointa todistaa kahdessa osassa: osoitetaan, että $A \subset B$ ja $B \subset A$.
c) Osajoukolle voidaan käyttää myös merkintää $A \subseteq B$. Jos halutaan korostaa, että A on B:n *aito osajoukko*, niin voidaan merkitä $A \subsetneq B$.

Muistetaan tutut perusjoukot:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} && \text{luonnolliset luvut}\\
&\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} && \text{kokonaisluvut}\\
&\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : \ m \in \mathbb{Z}, \ n \in \mathbb{Z} \text{ ja } n \neq 0\right\} && \text{rationaaliluvut}\\
&\mathbb{R} = \ \text{reaaliluvut (määritelmä sivuutetaan)}
\end{aligned}$$

Näille joukoille pätee $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. On sopimuskysymys, kuuluuko 0 joukkoon $\mathbb{N}$ vai ei, minkä vuoksi käytäntö tulee kunkin tekstin yhteydessä tarvittaessa tarkastaa. Lisäksi positiivisille ja negatiivisille kokonaisluvuille käytetään yleisesti merkintöjä $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ja $\mathbb{Z}_- = \{-1, -2, -3, \ldots\}$.

Jos $a \in \mathbb{R}$ ja $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, niin määritellään *rajoitetut välit*

$$\begin{aligned}
(a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\} && \text{avoin väli} \\
[a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x \leq b\} && \text{suljettu väli} \\
(a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : \ a < x \leq b\} && \text{puoliavoin väli} \\
[a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x < b\} && \text{puoliavoin väli}
\end{aligned}$$

ja *rajoittamattomat välit*

$$\begin{aligned}
(a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : \ x > a\} && \text{avoin väli} \\
[a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq a\} && \text{suljettu väli} \\
(-\infty, b) &= \{x \in \mathbb{R} : \ x < b\} && \text{avoin väli} \\
(-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq b\} && \text{suljettu väli}
\end{aligned}$$

Edelleen voidaan kirjoittaa $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

Esimerkki 1.14. **a)** $\{n : \ n = 2k - 1, \ k \in \mathbb{N}\} = \{2k - 1 : \ k \in \mathbb{N}\} = \{1, 3, 5, \ldots\}$
b) $\{n : \ n = 2k - 1, \ k \in \mathbb{N}, \ k \leq 50\} = \{2k - 1 : \ k = 1, 2, 3, \ldots, 50\} = \{1, 3, 5, \ldots, 99\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} : \ x^2 - 8x + 15 = 0\} = \{3, 5\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} : \ x^2 - 8x + 15 < 0\} = (3, 5)$
e) $\{x \in \mathbb{R} : \ x^2 + x + 15 = 0\} = \emptyset$
f) $\{(x, y) : \ x \in \mathbb{R}, \ y \in \mathbb{R}, \ y = 2x\}$ on xy-tason suora

Esimerkki 1.15. Jos $A = \{1, 3, 5\}$, niin

$$\begin{aligned}
&1 \in A && \{1, 2, 3\} \not\subset A \\
&2 \notin A && \{1, 3, 5\} \subset A \\
&\{1\} \subset A && \{3, 1, 1, 5, 3\} = A \\
&\{1, 5\} \subset A && \{1, 2, 3\} \neq A
\end{aligned}$$

Esimerkki 1.16. Olkoon

$$\begin{aligned}
A &= \{n \in \mathbb{Z} : \ \text{luvun } n \text{ kaksi viimeistä numeroa ovat } 24\} \quad \text{ja} \\
B &= \{n \in \mathbb{Z} : \ n \text{ on jaollinen 4:llä}\}.
\end{aligned}$$

Osoita, että $A \subset B$.

Todistus. Olkoon $n \in A$. On osoitettava, että tällöin $n \in B$. Oletuksen mukaan

$$n = 100k + 24$$

jollakin $k = 0, 1, 2, \ldots$ tai

$$n = 100k - 24$$

jollakin $k = 0, -1, -2, \ldots$ (esimerkiksi $30\,124 = 301 \cdot 100 + 24$ tai $-30\,124 = (-301) \cdot 100 - 24$). Nyt

$$n = 4(25k \pm 6).$$

Koska $25k \pm 6 \in \mathbb{Z}$, niin n on jaollinen 4:llä ja siten $n \in B$. $\square$

Edellä asetettu joukon määritelmä on melko epätäsmällinen, mutta se riittää käytännön matemaatikolle ja soveltajalle. Yleensä käsittelemämme joukot ovat reaalilukujen osajoukkoja tai niistä johdettuja joukkoja, eikä joukon määritelmän kanssa tule ongelmia. Joukon määritelmän ongelmallisuutta havainnollistaa *Russellin paradoksi*: Onko niiden joukkojen kokoelma, jotka eivät ole itsensä alkioita, joukko? Ts. onko

$$E = \{A : \; A \notin A\}$$

joukko? Ei ole! Jos näet olisi $E \in E$, niin olisi $E \notin E$. Jos taas olisi $E \notin E$, niin olisi $E \in E$. Ei siis voida sanoa, kuuluuko E kokoelmaan E vai ei.

Kevyempi versio Russellin paradoksista: Eräässä kylässä asuva parturi väittää, että ”Leikkaan täsmälleen niiden kyläläisten hiukset, jotka eivät leikkaa omia hiuksiaan.” Leikkaako parturi omat hiuksensa?

1.5 Joukko-operaatiot [13, Appendix A]

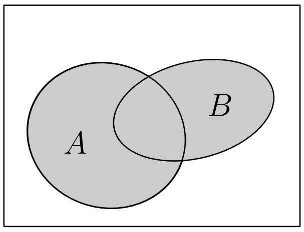
Määritelmä 1.17. Joukkojen A ja B *yhdiste (union)* $A \cup B$, *leikkaus (intersection)* $A \cap B$ ja *erotus* $A \setminus B$ määritellään asettamalla

$$A \cup B = \{x : \; x \in A \text{ tai } x \in B\},$$
$$A \cap B = \{x : \; x \in A \text{ ja } x \in B\},$$
$$A \setminus B = \{x : \; x \in A \text{ ja } x \notin B\}.$$

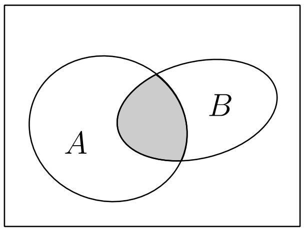
Joukot A ja B ovat *erillisiä* eli *pistevieraita (disjoint)*, jos joukoilla ei ole yhteisiä alkioita, ts. $A \cap B = \emptyset$. Jos $A \subset X$, niin joukon A *komplementti (complement)* A^c (tai $\overline{A}$) perusjoukon X suhteen on

$$A^c = X \setminus A = \{x \in X : \; x \notin A\}.$$

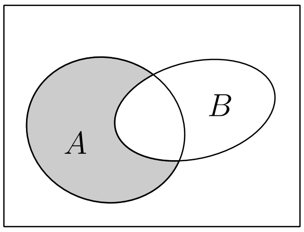
Joukko-operaatioita voidaan havainnollistaa seuraavien *Vennin kaavioiden* avulla:



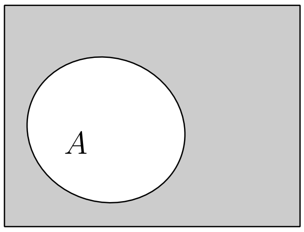
$A \cup B$



$A \cap B$



$A \setminus B$



A^c

Esimerkki 1.18. a) Jos $A = \{0, 2, 3, 4\}$ ja $B = \{1, 2\}$, niin

$$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\} \qquad A \setminus B = \{0, 3, 4\}$$
$$A \cap B = \{2\} \qquad A \setminus \mathbb{Z} = \emptyset$$

b) Jos $A = (1, 3]$ ja $B = (2, 5)$, niin

$$A \cup B = (1, 5) \qquad A \setminus B = (1, 2]$$
$$A \cap B = (2, 3] \qquad \mathbb{R} \setminus A = (-\infty, 1] \cup (3, \infty)$$

Piirrä kuvat!

Lause 1.19. $A \setminus B = A \cap B^c$.

Todistus. Vakuuttaudu ensin tuloksesta Vennin kaavion avulla. Määritelmiin perustuva todistus:

$$\begin{aligned} x \in A \setminus B &\Leftrightarrow x \in A \text{ ja } x \notin B && \text{(erotuksen määritelmä)} \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ ja } x \in B^c && \text{(komplementin määritelmä)} \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap B^c && \text{(leikkauksen määritelmä)} \end{aligned}$$

□

Listataan seuraavassa lauseen 1.6 päättelysääntöjä vastaavat joukko-opin tulokset, joissa yhdiste vastaa tai-konnektiivia ja leikkaus ja-konnektiivia:

Lause 1.20 (Joukko-operaatioiden laskulakeja)**.** *Olkoot A, B ja C joukkoja. Tällöin*

- $(A^c)^c = A$
- $A \cup B = B \cup A$ *ja* $A \cap B = B \cap A$ *(vaihdantalait)*
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *ja* *(liitäntälait)*
  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *ja* *(osittelulait)*
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ *ja* *(de Morganin lait)*
  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Todistus. Väitteiden todistukset palautuvat logiikan päättelysääntöihin. Todistetaan 1. osittelulaki. Missä kohti käytetään joukko-operaatioiden määritelmiä ja missä lauseen 1.6 osittelulakia?

$$
\begin{aligned}
x \in A \cap (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ ja } x \in (B \cup C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \text{ ja } (x \in B \text{ tai } x \in C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \text{ ja } x \in B) \text{ tai } (x \in A \text{ ja } x \in C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \cap B \text{ tai } x \in A \cap C \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)
\end{aligned}
$$

Todista myös piirtämällä Vennin kaavio! □

Liitäntälakien nojalla voidaan merkitä $A \cup B \cup C$ ja $A \cap B \cap C$.

Esimerkki 1.21. Sievennä **a)** $A \cup (A^c \cap B)$,
b) $(A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$.
Ratkaisu. Piirrä ensin Vennin kaaviot. Nähdään, että **a**-kohdassa yhdiste $A \cup B$ on jaettu kahteen erilliseen osaan A ja $A^c \cap B$, **b**-kohdassa yhdiste $A \cup B$ on jaettu kolmeen erilliseen osaan $A \setminus B$, $A \cap B$ ja $B \setminus A$.
a) Käytetään ensin osittelulakia ja huomataan, että $A \cup A^c$ on koko avaruus:

$$A \cup (A^c \cap B) = (A \cup A^c) \cap (A \cup B) = A \cup B.$$

b) Käytetään osittelulakia kahdesti:

$$\begin{aligned}(A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup (B \cap A^c) &= (A \cap (B^c \cup B)) \cup (B \cap A^c)\\ &= A \cup (B \cap A^c)\\ &= (A \cup B) \cap (A \cup A^c)\\ &= A \cup B.\end{aligned}$$

1.6 Avaruus $\mathbb{R}^n$

Alkioista $a_1, a_2, \ldots, a_n$ muodostetulle *järjestetylle joukolle* käytetään merkintää $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Tällöin

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

jos ja vain jos $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ..., $a_n = b_n$. Erona yleiseen joukkoon on se, että nyt järjestyksellä on väliä. Esimerkiksi

$$\{1, 2, c\} = \{2, c, 1, 2\},$$

mutta

$$(1, 2, c) \neq (2, c, 1).$$

Määritellään joukot

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 &= \{(x, y) : \ x \in \mathbb{R} \text{ ja } y \in \mathbb{R}\} && (xy\textit{-taso})\\ \mathbb{R}^3 &= \{(x, y, z) : \ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \text{ ja } z \in \mathbb{R}\} && (xyz\textit{-avaruus})\end{aligned}$$

ja yleisesti *n-ulotteinen avaruus*

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \ x_i \in \mathbb{R}\}.$$

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ alkiota $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kutsutaan *pisteeksi* ja alkioita x_i *koordinaateiksi.*

Esimerkki 1.22. Joukko

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4\}$$

on niiden xy-tason pisteiden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ muodostama joukko, jonka koordinaateille x ja y pätee $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$. A on siis $(1, -2)$-keskinen 2-säteinen ympyrä.

1.7 Predikaattilogiikkaa

Predikaattilogiikassa tutkitaan lauseiden lisäksi *lausumia* (*predikaatteja*) $p(x), q(x), p(x, y), \ldots$, joissa on yksi tai useampi *muuttuja* $x, y, z, \ldots$. Lausumalla sinänsä ei ole totuusarvoa, vaan sen totuusarvo riippuu muuttujien arvoista. Predikaattilogiikassa käytetään konnektiivien lisäksi *kvanttoreita*

$\forall$ *kaikkikvanttori*, "kaikilla", "for ∀ll" ja

$\exists$ *olemassaolokvanttori*, "on olemassa", "∃xists".

Lausumasta voidaan muodostaa lause sitomalla muuttujat kvanttoreilla. Esimerkiksi

$\forall x : \; p(x)$ "kaikilla x on ominaisuus $p(x)$"

$\exists x : \; p(x)$ "on olemassa x, jolla on ominaisuus $p(x)$"

Jos näissä halutaan rajata x johonkin joukkoon L, voidaan merkitä $\forall x \in L : p(x)$ ja $\exists x \in L : \; p(x)$.

Esimerkki 1.23. Tosi vai epätosi?

a) $\forall x \in \mathbb{R} : \; x < 3$ **b)** $\exists x \in \mathbb{R} : \; x < 3$ **c)** $\forall x \in \mathbb{N} : \; x \geq -7$

Samassa lauseessa voi esiintyä useampia kvanttoreita, esimerkiksi $\forall x \; \exists y : p(x, y)$ tai $\exists x \; \exists y : \; p(x, y)$.

Esimerkki 1.24. a) $\forall x \in \mathbb{R} \; \exists n \in \mathbb{N} : \; n > x$. "Jokaisella $x \in \mathbb{R}$ on olemassa $n \in \mathbb{N}$ siten, että $n > x$." Lause on tosi.
b) $\exists n \in \mathbb{N} \; \forall x \in \mathbb{R} : \; n > x$. "On olemassa $n \in \mathbb{N}$ siten, että jokaisella $x \in \mathbb{R}$ $n > x$." Lause on epätosi.

Esimerkin 1.24 mukaan kvanttorien järjestystä ei saa vaihtaa.

Lause 1.25 (Negaation ja kvanttorin vaihtosääntö)**.**

$$\begin{aligned} \neg(\forall x : \; p(x)) &\Leftrightarrow \exists x : \; \neg p(x) \quad \textit{ja} \\ \neg(\exists x : \; p(x)) &\Leftrightarrow \forall x : \; \neg p(x). \end{aligned}$$

Esimerkki 1.26. a) Tarkastellaan lausetta $\exists x \in \mathbb{R} : \; x^2 < 0$, joka on epätosi. Muodostetaan lauseen negaatio vaihtosäännön avulla:

$$\begin{aligned} \neg(\exists x \in \mathbb{R} : \; x^2 < 0) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : \; \neg(x^2 < 0) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : \; x^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Negaatio on tosi, kuten sen pitääkin olla, kun negatoitava lause on epätosi.
b) Muodostetaan esimerkin 1.24 **b** lauseen negaatio:

$$\begin{aligned}\neg(\exists\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, x \in \mathbb{R}:\ n > x) &\Leftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}\ \neg(\forall\, x \in \mathbb{R}:\ n > x)\\ &\Leftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, x \in \mathbb{R}:\ \neg(n > x)\\ &\Leftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, x \in \mathbb{R}:\ n \leq x.\end{aligned}$$

Negaatio on tosi.

Usein käytetään seuraavankaltaista sekakieltä:

$\exists\, x < 0$ siten, että $\lvert x\rvert = 3$	$(\exists\, x < 0:\ \lvert x\rvert = 3)$
$x^2 > 0\ \forall\, x \neq 0$	$(\forall\, x \neq 0:\ x^2 > 0)$
$\exists\, x \in \mathbb{R}$ s.e. $\lvert x\rvert > \epsilon\ \forall\, \epsilon > 0$	$(\exists\, x \in \mathbb{R}\ \forall\, \epsilon > 0:\ \lvert x\rvert > \epsilon)$

Monesti käytetään myös merkintöjä

$\nexists$ ”ei ole olemassa”

$\exists!$ tai $\exists_1$ ”on olemassa täsmälleen yksi”

1.8 Todistusmetodeja [13, Appendix A]

Matematiikassa lauseet voidaan yleensä esittää implikaationa $p \Rightarrow q$, ts. oletuksesta p seuraa väite q. Eräitä yleisimpiä todistustapoja ovat:

- *Suora todistus*, jossa oletuksesta päädytään väitteeseen suoralla päättelyketjulla $p \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow p_n \Rightarrow q$.
- *Epäsuora todistus*, jossa oletetaan $\neg q$ (ns. *vastaväite* eli *antiteesi*) ja päädytään ristiriitaan oletuksen kanssa ($\neg p$) tai saadaan aikaiseksi jokin muu ristiriita ($\neg r \wedge r$).
- *Vastaesimerkki.*
- *Induktiotodistus.*

Ekvivalenssi $p \Leftrightarrow q$ voidaan lauseen 1.6 ekvivalenssilain nojalla todistaa kahdessa osassa todistamalla erikseen $p \Rightarrow q$ ja $q \Rightarrow p$.

Esimerkki 1.27. Osoita, että $x^2 + x + 1 > 0$ kaikilla $x > 0$.
Ratkaisu. Oletetaan, että $x > 0$. Silloin $x^2 > 0$, $x > 0$ ja $1 > 0$, joten niiden summalle pätee $x^2 + x + 1 > 0$. □

Esimerkki 1.28. Osoita, että jos $n \in \mathbb{Z}$ ja n^2 on parillinen, niin n on parillinen.
Ratkaisu. Oletus: n^2 on parillinen.
Väite: n on parillinen
Todistus: Käytetään epäsuoraa todistusta ja tehdään vastaväite: oletetaan, että n onkin pariton, ts. $n = 2k + 1$ jollakin $k \in \mathbb{Z}$. Silloin olisi

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1,$$

ts. n^2 olisi pariton. n ei siis voi olla pariton, joten se on parillinen. $\square$

Esimerkki 1.29. Osoita, että $\sqrt{2}$ on irrationaalinen.
Ratkaisu. Tehdään vastaväite, eli oletetaan, että $\sqrt{2}$ on rationaalinen, ts.

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n},$$

missä m ja $n \in \mathbb{Z}$. Oletetaan lisäksi, että $\frac{m}{n}$ on supistetussa muodossa, eli m:llä ja n:llä ei ole yhteisiä tekijöitä. Neliöidään:

$$\begin{aligned} 2 = \frac{m^2}{n^2} &\Rightarrow m^2 = 2n^2 \\ &\Rightarrow m^2 \text{ on parillinen} \\ &\Rightarrow m \text{ on parillinen, ts. } m = 2k,\ k \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow m^2 = 4k^2 = 2n^2 \\ &\Rightarrow n^2 = 2k^2 \\ &\Rightarrow n^2 \text{ on parillinen} \\ &\Rightarrow n \text{ on parillinen} \end{aligned}$$

Siten m ja n ovat jaollisia 2:lla. Tämä on ristiriita sen kanssa, että $\frac{m}{n}$ on supistetussa muodossa. $\square$

Esimerkki 1.30. Päteekö $a^2 - 3ab + b^2 \geq 0$ kaikilla $a, b \geq 0$?
Ratkaisu. Ei päde, mikä voidaan todeta vastaesimerkillä $a = b = 1$:
$1^2 - 3 \cdot 1 \cdot 1 + 1^2 = -1 < 0$.

Suoran todistuksen implikaatioketjun suunnan kanssa tulee olla huolellinen. Olkoon tästä esimerkkinä esimerkin 1.30 väitteen ”todistus”:

$$\begin{aligned} & a^2 - 3ab + b^2 \geq 0 \\ \Rightarrow\ & a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \\ \Rightarrow\ & (a-b)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Viimeisen rivin epäyhtälö on aina tosi, joten väite pätee. $\boxtimes$

Tämä todistus on **virheellinen** (vaikka jokainen implikaatio sinänsä on tosi). Mikä on vikana?

1.9 Induktiotodistus [13, Appendix B]

Induktioperiaate. Olkoon $p(n)$ luonnollista lukua n koskeva väite. Jos

(1) $p(1)$ on tosi ja jos

(2) kaikilla $k \in \mathbb{N}$ siitä, että $p(k)$ on tosi (*induktio-oletus*), seuraa että myös $p(k+1)$ on tosi,

niin $p(n)$ on tosi jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Kohtaa (1) kutsutaan *alkuaskeleeksi* ja kohtaa (2) *induktioaskeleeksi.*

Esimerkki 1.31. Osoita, että $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Ratkaisu. Todistetaan väite induktiolla.
(1) Alkuaskel. Tapauksesa $n = 1$ väite tulee muotoon

$$1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2},$$

mikä on tosi.
(2) Induktioaskel. Tehdään induktio-oletus, että väite pätee n:n arvolla k, ts.

$$1+2+3+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

On osoitettava, että tällöin väite pätee myös n:n arvolla $k+1$, ts.

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}.$$

Lasketaan:

$$\begin{aligned}
1+2+3+\cdots+k+(k+1) &= (1+2+3+\cdots+k)+(k+1) \\
&= \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 \qquad \text{(induktio-oletus)} \\
&= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\
&= \frac{k^2+3k+2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}. \quad \square
\end{aligned}$$

Esimerkki 1.32. Todista *Bernoullin epäyhtälö*: jos $1+x \geq 0$, niin

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ratkaisu. Todistetaan väite induktiolla n:n suhteen.
(1) Alkuaskel. Tapauksesa $n = 1$ väite pätee, sillä $(1 + x)^1 \geq 1 + x$.
(2) Induktioaskel. Oletetaan, että $(1 + x)^k \geq 1 + kx$. Silloin

$$\begin{aligned}(1 + x)^{k+1} &= (1 + x)^k(1 + x)\\ &\geq (1 + kx)(1 + x)\\ &= 1 + x + kx + kx^2\\ &\geq 1 + x + kx\\ &= 1 + (k + 1)x. \quad \square\end{aligned}$$

Induktioperiaatteessa voidaan lähteä liikkeelle muustakin n:n arvosta kuin 1.

Esimerkki 1.33. Tutki, mistä n:n arvosta ($n \in \mathbb{N}$) lähtien pätee $2^n \leq n!$ ja todista väitteesi induktiolla. Tässä luvun $n \in \mathbb{N}$ *kertoma (factorial)* $n!$ määritellään asettamalla

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n.$$

Ratkaisu. Kokeillaan:

$$\begin{aligned}&2^1 > 1\\ &2^2 > 1 \cdot 2\\ &2^3 > 1 \cdot 2 \cdot 3\\ &2^4 \leq 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4\end{aligned}$$

Todistetaan induktiolla, että $2^n \leq n!$ kaikilla $n \geq 4$.
(1) Alkuaskel. Kun $n = 4$, niin $2^4 = 16 \leq 4! = 24$.
(2) Induktioaskel. Tehdään induktio-oletus: $2^k \leq k!$, $k \geq 4$. Tällöin

$$\begin{aligned}2^{k+1} &= 2 \cdot 2^k\\ &\leq 2 \cdot k!\\ &= 2 \cdot k \cdot (k - 1) \cdots 2 \cdot 1\\ &\leq (k + 1) \cdot k \cdot (k - 1) \cdots 2 \cdot 1\\ &= (k + 1)! \quad \square\end{aligned}$$

2 Funktio-oppia [5, 1.1, 1.2 ja 4.3]

Luvussa 2 käydään läpi ensin funktion määritelmä ja peruskäsitteet yleisesti ja sitten reaalifunktioihin liittyviä perusasioita. Keskeiset käsitteet:

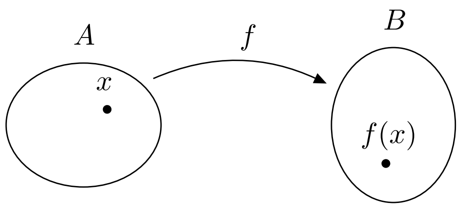
- Funktio, määrittely-, maali- ja arvojoukko, alkukuva.

- Injektio, surjektio, bijektio.
- Käänteisfunktio ja yhdistetty funktio.
- Reaalifunktio, kuvaaja, monotonisuus.

Luvun 2 tulokset mahdollistavat mm. luvussa 3 alkeisfunktioiden määrittelyn ja niiden perusominaisuuksien tutkimisen.

2.1 Funktio [5, 1.1]

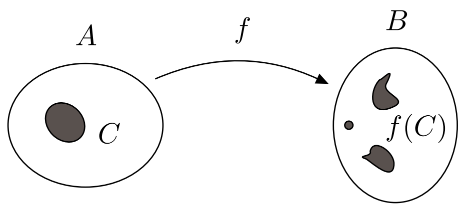
Määritelmä 2.1. Olkoot A ja B epätyhjiä joukkoja. *Funktio* eli *kuvaus (function, mapping)* $f\colon A \to B$ on olio, joka liittää jokaiseen *määrittelyjoukon (domain)* A alkioon x täsmälleen yhden *maalijoukon* B alkion y, jota merkitään $y = f(x)$. Määrittelyjoukon alkiota x kutsutaan *argumentiksi* ja vastaavaa maalijoukon alkiota $f(x)$ *kuvaksi* tai *arvoksi (value)*.



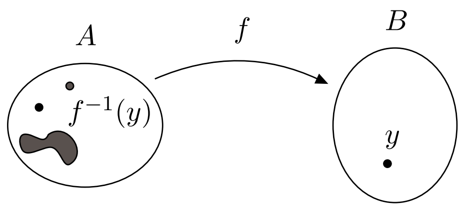
Eräitä peruskäsitteitä:

- Joukon $C \subset A$ *kuvajoukko* on $f(C) = \{f(x) : \ x \in C\}$.
- Joukko $f(A)$ on f:n *arvojoukko (range)*.
- Alkion $y \in B$ *alkukuva* on $f^{-1}(y) = \{x \in A : \ f(x) = y\}$.

$f^{-1}(y)$ luetaan "f miinus 1 y".



joukon C kuvajoukko



alkion y alkukuva

f:n määrittelyjoukkoa merkitään M_f tai D_f ja arvojoukkoa A_f tai R_f. Määritellään, että funktio $f\colon A \to B$ on

- *injektio*, jos f kuvaa eri alkiot eri alkioiksi eli $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, tai yhtäpitävästi $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$,

- *surjektio*, jos f:n arvojoukko on koko maalijoukko eli $f(A) = B$,
- *bijektio*, jos f on sekä injektio että surjektio.

Huomataan, että $f\colon A \to B$ on

- injektio jos ja vain jos jokaista $y \in B$ vastaa korkeintaan yksi $x \in A$ siten, että $f(x) = y$,
- surjektio jos ja vain jos jokaista $y \in B$ vastaa vähintään yksi $x \in A$ siten, että $f(x) = y$,
- bijektio jos ja vain jos jokaista $y \in B$ vastaa täsmälleen yksi $x \in A$ siten, että $f(x) = y$.

Yleensä määrittely- ja maalijoukkoja ei erikseen mainita, vaan ilmoitetaan vain funktion lauseke. Tällöin määrittelyjoukko ymmärretään mahdollisimman laajaksi.

Esimerkki 2.2. a) Funktion $f(x) = x^2 + 1$ määrittelyjoukko on $\mathbb{R}$, maalijoukko $\mathbb{R}$ ja arvojoukko $f(\mathbb{R}) = [1, \infty)$ (oletetaan polynomin kulun tutkiminen tunnetuksi). Joukon $(-1, 2]$ kuvajoukko on $f((-1, 2]) = [1, 5]$. Eräitä alkukuvia:

$$\begin{aligned}
f^{-1}(2) &= \{-1, 1\} && \text{(eikä funktio siten ole injektio)}\\
f^{-1}(1) &= \{0\} &&\\
f^{-1}(-7) &= \emptyset && \text{(eikä funktio siten ole surjektio)}
\end{aligned}$$

b) Funktion $f((x, y)) = f(x, y) = x + y$ määrittelyjoukko on $\mathbb{R}^2$ ja maalijoukko $\mathbb{R}$. Alkion 1 alkukuva on

$$f^{-1}(1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x + y = 1\},$$

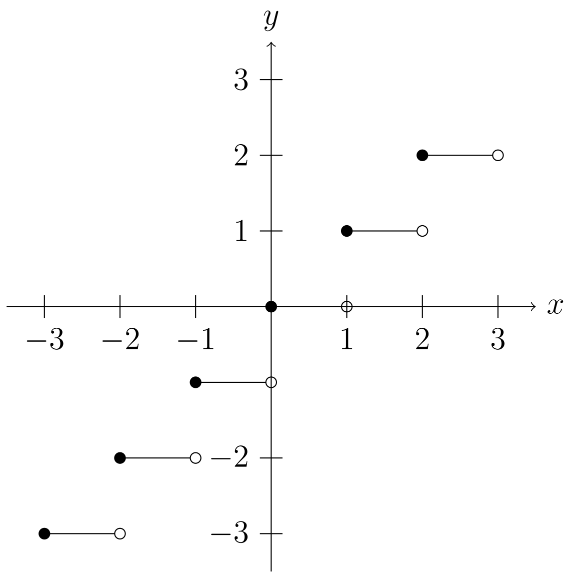
ts. suora. f ei siten ole injektio. f on kuitenkin surjektio, sillä olipa $z \in \mathbb{R}$ mikä tahansa reaaliluku, niin valitsemalla $x = z$ ja $y = 0$ on $f(x, y) = z$.

Esimerkki 2.3. Määritellään *lattiafunktio (floor)* $f(x)$ asettamalla

$$f(x) = \lfloor x \rfloor = \text{suurin } n \in \mathbb{Z}, \text{ jolle } n \leq x.$$

Nyt esimerkiksi $f(2\frac{1}{2}) = 2$, $f(2) = 2$ ja $f(-2\frac{1}{2}) = -3$. Määrittelyjoukko on $\mathbb{R}$ ja maalijoukoksi voidaan ottaan $\mathbb{R}$, ts. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Arvojoukko on $f(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$. Eräitä kuvia ja alkukuvia:

$$f([-1, 2]) = \{-1, 0, 1, 2\}, \quad f^{-1}(\tfrac{1}{2}) = \emptyset, \quad f^{-1}(2) = [2, 3).$$



Esimerkki 2.4. Mikä on funktion $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+4}}$ määrittelyjoukko?

Ratkaisu. Juurrettavan täytyy olla ei-negatiivinen, ts.

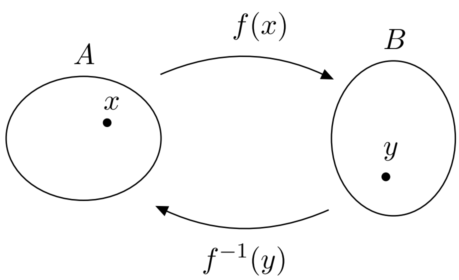
$$2x + 4 \geq 0 \iff x \geq -2.$$

Lisäksi jakaja ei saa olla 0: $2x+4 \neq 0$, ts. $x \neq -2$. Määrittelyjoukko on siten $(-2, \infty)$.

2.2 Käänteisfunktio [5, 3.8]

Edellä todettiin, että $f\colon A \to B$ on bijektio jos ja vain jos jokaista $y \in B$ vastaa täsmälleen yksi $x \in A$ siten, että $f(x) = y$. Tämä vastaavuus määrittelee *käänteisfunktion (inverse function)*

$$f^{-1}\colon B \to A,\ f^{-1}(y) = x.$$



Funktiolle ja sen käänteisfunktiolle siis pätee

$$\boxed{y = f(x) \;\Leftrightarrow\; x = f^{-1}(y)} \tag{2.5}$$

ja

$$\boxed{f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{ja} \quad f(f^{-1}(y)) = y} \tag{2.6}$$

kaikilla $x \in A$ ja kaikilla $y \in B$.

Esimerkki 2.7. Osoita, että funktio $f\colon [0,\infty) \to [1,\infty),\ f(x) = x^2 + 1$ on bijektio ja määritä käänteisfunktion lauseke.

Ratkaisu. Olkoon $y \in [1,\infty)$. Tällöin

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow x^2 + 1 = y \\ &\Leftrightarrow x^2 = y - 1 \; (\geq 0) \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{y-1} \;\text{ tai }\; x = -\sqrt{y-1} \end{aligned}$$

On siis olemassa täsmälleen yksi $x \in [0,\infty)$ siten, että $f(x) = y$. Niinpä f on bijektio, ja käänteisfunktio on

$$f^{-1}\colon [1,\infty) \to [0,\infty),\ f^{-1}(y) = \sqrt{y-1}.$$

Tarkastetaan vielä yhtälöt (2.6):

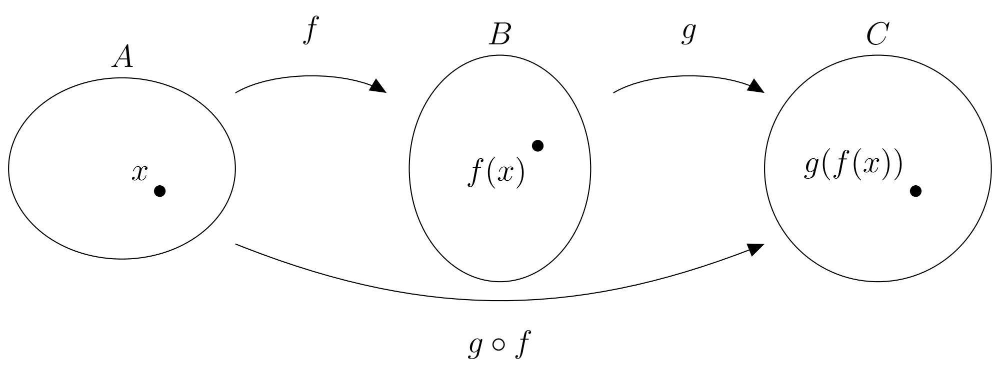
$$\begin{aligned} f(f^{-1}(y)) &= (\sqrt{y-1})^2 + 1 = (y-1) + 1 = y \\ f^{-1}(f(x)) &= \sqrt{(x^2+1) - 1} = \sqrt{x^2} = |x| = x \end{aligned}$$

2.3 Yhdistetty funktio [5, 1.4]

Jos $f\colon A \to B$ ja $g\colon B \to C$ ovat funktioita, niin voidaan määritellä *yhdistetty funktio (composition)* $g \circ f\colon A \to C$ asettamalla

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Funktiota f sanotaan *sisäfunktioksi* ja funktiota g *ulkofunktioksi*. Sulut voidaan jättää poiskin $g \circ f$:n ympäriltä ja merkitä $(g \circ f)(x) = g \circ f(x)$. $g \circ f$ luetaan "g pallo f".



Esimerkki 2.8. **a)** Olkoon $f(x) = x^3 + 3$ ja $g(x) = \sqrt{x-1}$. Voidaan muodostaa yhdistetyt funktiot

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(\sqrt{x-1}) = (\sqrt{x-1})^3 + 3 = (x-1)^{3/2} + 3 \qquad &(x \geq 1)\\
(g \circ f)(x) &= g(x^3+3) = \sqrt{(x^3+3)-1} = \sqrt{x^3+2} \qquad &(x \geq -\sqrt[3]{2})
\end{aligned}$$

b) Olkoon $f(x) = \dfrac{2}{x}$ ja $g(x) = \dfrac{x}{1-x}$. Nyt

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{2}{\frac{x}{1-x}} = \frac{2(1-x)}{x}.$$

Jotta sisäfunktio $g(x)$ olisi määritelty, on oltava $x \neq 1$. Toisaalta ulkofunktion määrittely vaatii, että $g(x) \neq 0$, ts. $x \neq 0$. Yhdistetyn funktion $f \circ g$ määrittelyjoukko on siis $M_{f \circ g} = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Samalla tavoin yhdistetyn funktion

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{\frac{2}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{2}{x-2}$$

määrittelyjoukoksi saadaan $M_{g \circ f} = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.

Esimerkki 2.9. Olkoon

$$\begin{aligned}
&f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \ f(x_1, x_2) = (x_1^2, x_1x_2, x_1 + 1) \text{ ja}\\
&g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ \ g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3.
\end{aligned}$$

Tällöin voidaan muodostaa yhdistetty funktio $g \circ f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$(g \circ f)(x_1, x_2) = g(f(x_1, x_2)) = g(x_1^2, x_1x_2, x_1 + 1) = x_1^2 \cdot x_1x_2 \cdot (x_1 + 1),$$

mutta $f \circ g$ ei ole määritelty.

Joukon A *identtinen kuvaus* on funktio $\mathrm{id}_A\colon A \to A$, jolle $\mathrm{id}_A(x) = x$ kaikilla $x \in A$. Tällöin ehdot (2.6) voidaan ilmoittaa muodossa

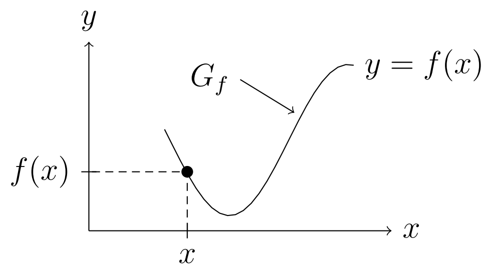
$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A \quad \text{ ja } \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B\,.$$

2.4 Reaalifunktio

Funktio $f\colon A \to B$ on *reaalifunktio*, jos $A \subset \mathbb{R}$ ja $B \subset \mathbb{R}$. Tyypillisesti reaalifunktiolle määrittelyjoukko A on väli ja maalijoukko $B = \mathbb{R}$.

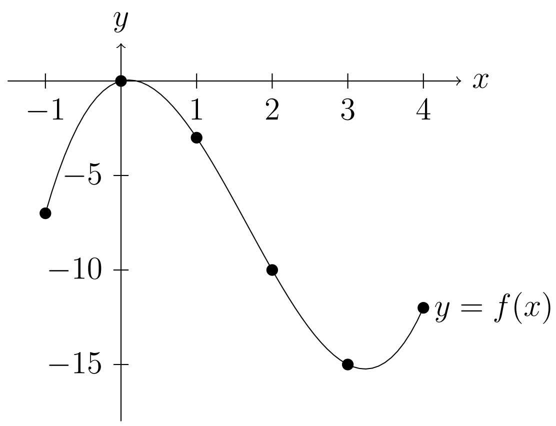
Määritelmä 2.10. Reaalifunktion $f\colon A \to \mathbb{R}$ *kuvaaja* eli *graafi (graph)* on tasojoukko

$$G_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in A\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in A,\ y = f(x)\}.$$



Esimerkki 2.11. Piirrä funktion $f\colon [-1,4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 5x^2 + x$ kuvaaja.

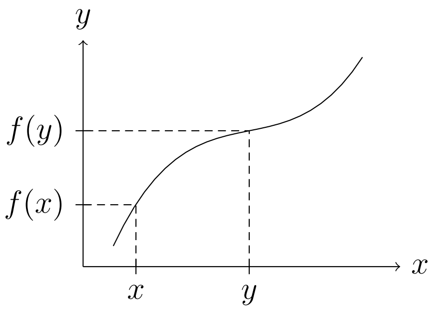
Ratkaisu. Lasketaan joitakin f:n arvoja: $f(-1) = -7$, $f(0) = 0$, $f(1) = -3$, $f(2) = -10$, $f(3) = -15$ ja $f(4) = -12$. f:n kuvaaja kulkee siis mm. pisteiden $(-1,-7)$, $(0,0)$, $(1,-3)$, $(2,-10)$, $(3,-15)$ ja $(4,-12)$ kautta. Mitä tiheämpään pisteitä lasketaan, sitä paremmin funktion kuvaaja saadaan hahmoteltua. Myöhemmin tarkastellaan funktion kuvaajan kulun tutkimista derivaatan avulla.



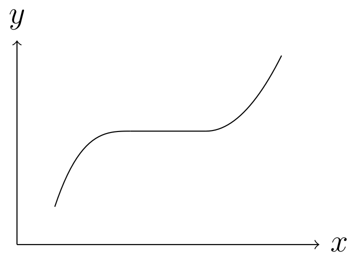
Määritelmä 2.12. Olkoon $f\colon A \to \mathbb{R}$ reaalifunktio. Jos kaikilla x ja $y \in A$

- $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$, niin f on *kasvava*,
- $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$, niin f on *aidosti kasvava*,
- $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$, niin f on *vähenevä*,
- $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$, niin f on *aidosti vähenevä*.

Funktiota, joka on kasvava tai vähenevä, sanotaan *monotoniseksi*. Vastaavasti aidosti kasvavaa tai aidosti vähenevää funktiota sanotaan *aidosti monotoniseksi*.



aidosti kasvava funktio



kasvava funktio

Lause 2.13. *Aidosti monotoninen reaalifunktio $f\colon A \to \mathbb{R}$ on injektio.*

Todistus. Jos $x \neq y$, niin $x < y$ tai $y < x$. Siten $f(x) < f(y)$ tai $f(y) < f(x)$, erityisesti $f(x) \neq f(y)$. □

Funktiosta $f\colon A \to B$ saadaan aina surjektio, jos maalijoukoksi muutetaan arvojoukko, ts. tarkastellaan funktiota $f\colon A \to f(A)$. Niinpä arvojoukkoa muuttamalla mistä tahansa injektiosta saadaan myös surjektio ja siten bijektio. Esimerkiksi funktiolla $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$ ei ole käänteisfunktiota, sillä f ei ole surjektio, mutta funktiolla $f\colon [0,\infty) \to [1,\infty)$, $f(x) = x^2 + 1$ on esimerkin 2.7 mukaan käänteisfunktio. Tässä mielessä lause 2.13 sanoo, että aidosti monotonisella reaalifunktiolla on käänteisfunktio.

Lause 2.14. *Jos reaalifunktiolla f on käänteisfunktio f^{-1}, niin f:n ja f^{-1}:n kuvaajat $y = f(x)$ ja $y = f^{-1}(x)$ ovat peilikuvia suoran $y = x$ suhteen.*

Todistus. Käytetään kuvaajille standardimerkintöjä G_f ja $G_{f^{-1}}$. Pisteen (x, y) peilikuva suoran $y = x$ suhteen on (y, x), joten on osoitettava, että $(x, y) \in G_f$ jos ja vain jos $(y, x) \in G_{f^{-1}}$.
"$\Rightarrow$" Jos $(x, y) \in G_f$, niin $y = f(x)$ ja siten $x = f^{-1}(y)$. Niinpä $(y, x) = (y, f^{-1}(y)) \in G_{f^{-1}}$.
"$\Leftarrow$" Vastaavasti. □

Lause 2.15. *Jos reaalifunktio f on aidosti kasvava (aidosti vähenevä) ja sillä on käänteisfunktio f^{-1}, niin f^{-1} on myös aidosti kasvava (aidosti vähenevä).*

Todistus. Oletetaan, että reaalifunktio $f\colon A \to B$ on aidosti kasvava bijektio. Olkoot x ja $y \in B$ siten, että $x < y$. Jos olisi $f^{-1}(x) \geq f^{-1}(y)$, niin f:n aidon kasvavuuden nojalla olisi $f(f^{-1}(x)) \geq f(f^{-1}(y))$, ts. $x \geq y$. Tämä on ristiriita oletuksen $x < y$ kanssa. On siis oltava $f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$ ja f^{-1} on siten aidosti kasvava. Aidosti vähenevän funktion tapaus todistetaan samaan tapaan. □

Lause 2.16. *Olkoot* $f\colon A \to B$ *ja* $g\colon B \to C$ *reaalifunktioita.*

(a) *Jos* f *ja* g *ovat kasvavia, niin* $g \circ f$ *on kasvava.*

(b) *Jos* f *on kasvava ja* g *on vähenevä, niin* $g \circ f$ *on vähenevä.*

Entä jos f ja g ovat väheneviä tai f vähenevä ja g kasvava?

Todistus. Todistetaan (b): Olkoot x ja $y \in A$, $x < y$. Koska f on kasvava, niin $f(x) \leq f(y)$. Siten g:n vähenevyyden nojalla $g(f(x)) \geq g(f(y))$, ts. $(g \circ f)(x) \geq (g \circ f)(y)$. Niinpä $g \circ f$ on vähenevä. $\square$

3 Alkeisfunktiot

Luvussa 3 määritellään seuraavat *alkeisfunktiot*, joiden avulla suuri osa luonnontieteiden ja tekniikan funktioista voidaan ilmaista.

- Potenssi- ja juurifunktio.
- Sini, kosini ja tangentti.
- Arkussini, arkuskosini ja arkustangentti.
- Eksponentti- ja logaritmifunktio.

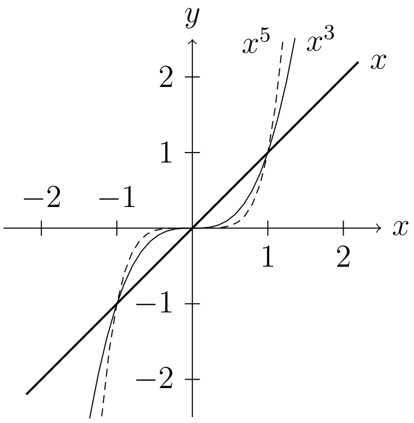
Näiden funktioiden peruslaskusäännöt ja kuvaajien kulku on jatkoa ajatellen tärkeää hallita.

3.1 Potenssi- ja juurifunktiot [5, 1.3]

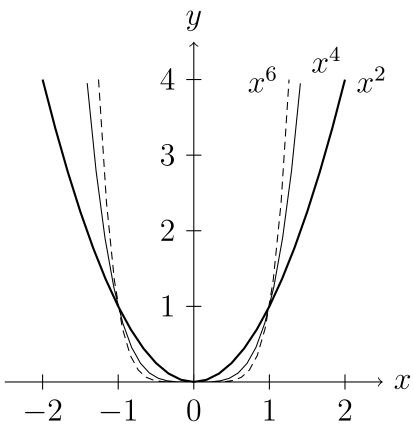
Määritelmä 3.1. Luonnollisille luvuille n *potenssifunktio (power function)* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, määritellään asettamalla

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ kpl}}.$$

Lukua x kutsutaan *kantaluvuksi* ja lukua n *eksponentiksi.* Tapauksille $n = 2$ ja $n = 3$ on erityisnimitykset: x^2 on x:n *neliö* ja x^3 on x:n *kuutio.*



x:n parittomat potenssit



x:n parilliset potenssit

Määritelmästä 3.1 seuraa suoraan, että

$$x^{n+m} = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n+m \text{ kpl}} = (\underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ kpl}})(\underbrace{x \cdot x \cdots x}_{m \text{ kpl}}) = x^n x^m.$$

Myös muut tutut laskulait voidaan helposti johtaa määritelmästä:

$$\boxed{x^{n+m} = x^n x^m, \qquad (x^n)^m = x^{nm} \quad \text{ja} \quad (xy)^n = x^n y^n,} \tag{3.2}$$

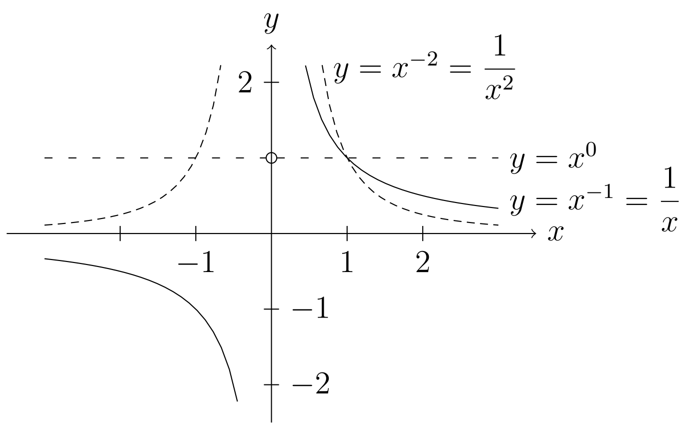
missä $x, y \in \mathbb{R}$ ja $n, m \in \mathbb{N}$.

Määritelmä 3.3. Negatiivisille eksponenteille $-n$, missä $n \in \mathbb{N}$, potenssifunktio x^{-n} määritellään asettamalla

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad (x \neq 0).$$

Lisäksi sovitaan, että $x^0 = 1$ kaikilla $x \neq 0$.

Näin ollaan saatu potenssifunktio $f(x) = x^n$ määritellyksi kaikilla $n \in \mathbb{Z}$. Kun $n \leq 0$, on f:n määrittelyjoukko $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.



On melko suoraviivaista todistaa, että laskulait (3.2) ovat voimassa kaikilla $n, m \in \mathbb{Z}$. Tarkastellaan esimerkiksi ensimmäistä lakia tapauksessa $n \geq 0$ ja $m < 0$:

$$x^n x^m = \frac{\overbrace{x \cdot x \cdots x}^{n \text{ kpl}}}{\underbrace{x \cdot x \cdots x}_{-m \text{ kpl}}} = \left\{ \begin{matrix} \overbrace{x \cdot x \cdots x}^{n-(-m) \text{ kpl}}, & \text{jos } n \geq -m \\ \frac{1}{\underbrace{x \cdot x \cdots x}_{-m-n \text{ kpl}}}, & \text{jos } n < -m \end{matrix} \right\} = x^{n+m}.$$

Potenssifunktio x^n, $n \in \mathbb{N}$, on aidosti kasvava joukossa $x \in [0, \infty)$, jos n on parillinen ja joukossa $x \in \mathbb{R}$, jos n on pariton. Tämä nähdään tarkastelemalla määritelmän 3.1 tuloa $x \cdot x \cdots x$: ei-negatiivisilla x tulo kasvaa, kun x kasvaa. Parittomien n tapauksessa negatiivisilla x tulo on negatiivinen ja se kasvaa, kun x kasvaa. Niinpä potenssifunktiolla x^n on käänteisfunktio joukossa $[0, \infty)$, kun n on parillinen ja joukossa $\mathbb{R}$, kun n on pariton.

Määritelmä 3.4. Potenssifunktion x^n, $n \in \mathbb{N}$, käänteisfunktiota merkitään $x^{1/n}$ tai $\sqrt[n]{x}$ ja sitä kutsutaan *juurifunktioksi (root function)*. Tapauksessa $n = 2$ juurifunktiota merkitään $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$ ja sitä kutsutaan *neliöjuureksi*. $\sqrt[3]{x}$ on *kuutiojuuri*.

Juurifunktio $\sqrt[n]{x}$ on aidosti kasvavan funktion x^n käänteisfunktiona aidosti kasvava (lause 2.15). Koska x^n ja $\sqrt[n]{x}$ ovat toistensa käänteisfunktioita, niin

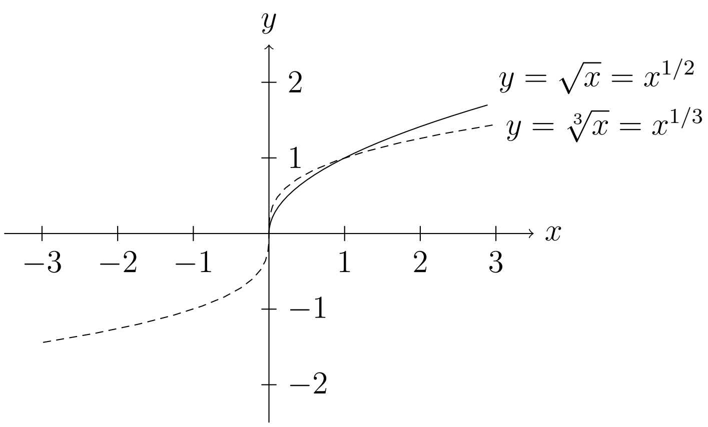
$$\boxed{y = x^n \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[n]{y}} \tag{3.5}$$

ja

$$\boxed{\sqrt[n]{x^n} = x \qquad \text{ja} \qquad \left(\sqrt[n]{y}\right)^n = y,} \tag{3.6}$$

missä parittomilla n x ja $y \in \mathbb{R}$ ja parillisilla n x ja $y \in [0, \infty)$.

x on siis yhtälön $y = x^n$ ratkaisu eli *juuri* täsmälleen silloin kun $x = \sqrt[n]{y}$.

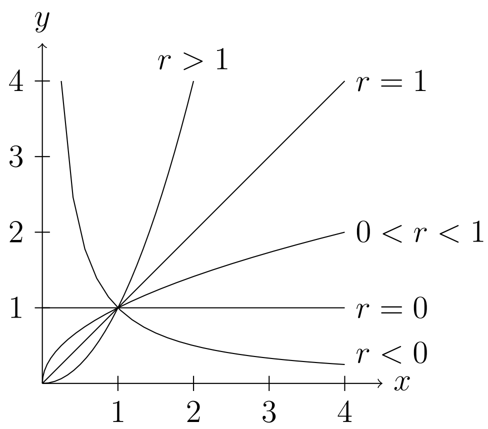


Määritelmä 3.7. Rationaalisille eksponenteille $r = m/n$, missä $n, m \in \mathbb{Z}$ ja $n > 0$, määritellään

$$x^r = x^{m/n} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m,$$

missä $x \in \mathbb{R}$ parittomilla n ja $x \in [0, \infty)$ parillisilla n. Lisäksi $x \neq 0$, jos $m < 0$.

x^r on siis yhdiste funktioista $g(x) = x^{1/n}$ ja $f(y) = y^m$. Tarkastellaan monotonisuutta joukossa $x > 0$. f on aidosti kasvava, jos $m > 0$ ja aidosti vähenevä, jos $m < 0$. g on aidosti kasvava. Niinpä lauseen 2.16 mukaan x^r on aidosti kasvava, kun $r > 0$ ja aidosti vähenevä, kun $r < 0$. Seuraavassa kuvassa hahmotellaan potenssifunktion $f(x) = x^r$ kuvaajan kulkua eri eksponenttien r arvoilla joukossa $x > 0$.



$y = x^r$

Juurifunktion määritelmästä ja ominaisuuksista (3.2) voidaan johtaa laskulait myös rationaalisille eksponenteille $r, s \in \mathbb{Q}$:

$$\boxed{x^{r+s} = x^r x^s, \qquad (x^r)^s = x^{rs} \quad \text{ja} \quad (xy)^r = x^r y^r.} \tag{3.8}$$

Todistus. Todistetaan viimeinen laki kolmessa osassa:

(a)
$$(a^n)^{1/n} = a = \left(a^{1/n}\right)^n$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$, sillä a^n ja $a^{1/n}$ ovat toistensa käänteisfunktioita.

(b)
$$\left(x^{1/n}y^{1/n}\right)^n \overset{(3.2)}{=} \left(x^{1/n}\right)^n \left(y^{1/n}\right)^n \overset{(a)}{=} xy.$$

Niinpä (korota puolittain potenssiin $1/n$ ja käytä (a)-kohtaa)

$$x^{1/n}y^{1/n} = (xy)^{1/n}.$$

(c) Nyt voidaan laskea

$$(xy)^r = (xy)^{m/n} = \left((xy)^{1/n}\right)^m \overset{(b)}{=} \left(x^{1/n}y^{1/n}\right)^m \overset{(3.2)}{=} \left(x^{1/n}\right)^m \left(y^{1/n}\right)^m$$
$$= x^{m/n}y^{m/n} = x^r y^r. \qquad \square$$

Laskusääntöjen (3.8) nojalla

$$\boxed{x^{m/n} = \left(x^{1/n}\right)^m = (x^m)^{1/n}.} \tag{3.9}$$

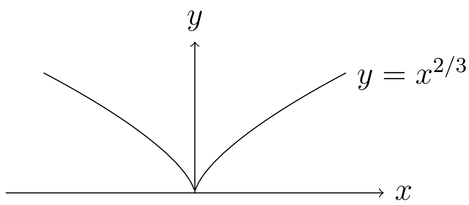
Määritelmässä 3.7 vaaditaan, että kummankin yhtälön (3.9) lausekkeen $\left(x^{1/n}\right)^m$ ja $(x^m)^{1/n}$ on oltava määritelty. Jos m ja n ovat parillisia, niin lauseke $(x^m)^{1/n}$ on määritelty kaikilla $x \neq 0$, mutta $\left(x^{1/n}\right)^m$ ei ole määritelty negatiivisilla x. Tällöin ei ole järkevää pitää myöskään funktiota $x^{m/n}$ määriteltynä, koska eksponentin laskusäännöt eivät ole silloin voimassa. Esimerkiksi

$$1 = 1^{2/2} = \left(1^2\right)^{1/2} = \left((-1)^2\right)^{1/2} = (-1)^1 = -1 \ ?$$

Syy: funktiot x^2 ja $x^{1/2}$ eivät ole toistensa käänteisfunktioita, kun $x < 0$. Itse asiassa

$$\left(x^2\right)^{1/2} = |x|.$$

Esimerkki 3.10. Funktio $x^{2/3} = \left(x^{1/3}\right)^2$ on määritelty kaikilla $x \in \mathbb{R}$.



3.2 Polynomit ja rationaalifunktiot [5, 1.3]

Määritelmä 3.11. n. asteen *polynomi (polynomial)* $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on muotoa

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

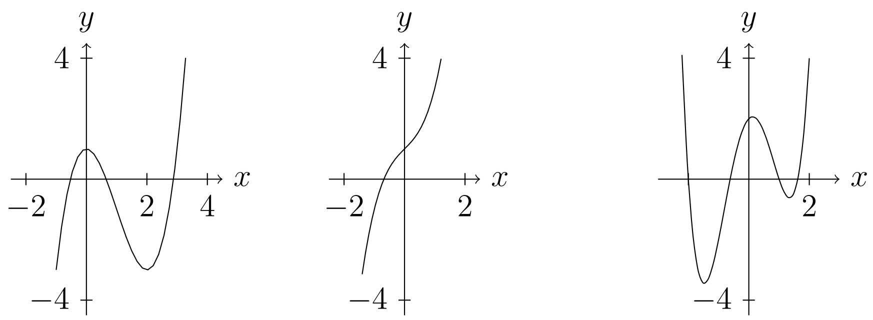
oleva funktio, missä *kertoimet (coefficients)* $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ ovat vakioita (ja $a_n \neq 0$, jos $n > 0$).

$x \in \mathbb{R}$ on funktion f *nollakohta (zero)*, jos $f(x) = 0$. Voidaan osoittaa, että tapauksessa $n > 0$ on n. asteen polynomilla $p(x)$ korkeintaan n (reaalista) nollakohtaa. Luvussa 5.5 polynomien määrittelyjoukkoa laajennetaan kompleksilukuihin. Tällöin nollakohtia on aina n kappaletta.

Esimerkki 3.12. Funktio $p(x) = -5x^3 + 3x - 7$ on 3. asteen polynomi, jonka kertoimet ovat $a_3 = -5$, $a_2 = 0$, $a_1 = 3$ ja $a_0 = -7$.

Nollakohtien lukumäärää havainnollistetaan seuraavissa kuvissa. Kolmannen asteen ponomilla f on a:n arvosta riippuen 1, 2 tai 3 nollakohtaa, kun taas polynomilla g on kaikilla b täsmälleen yksi nollakohta. Neljännen asteen polynomilla h on c:n arvosta riippuen 0, 1, 2, 3 tai 4 nollakohtaa.

$f(x) = x^3 - 3x^2 + a$ $\quad$ $g(x) = x^3 + x + b$ $\quad$ $h(x) = x^4 - 4x^2 + x + c$



Määritelmä 3.13. *Rationaalifunktio (rational function)* on muotoa

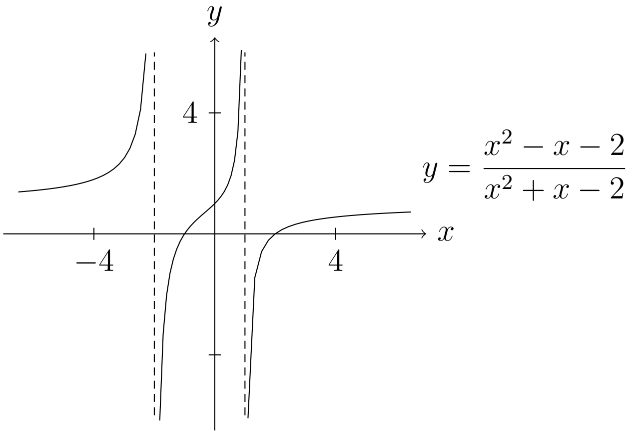
$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

oleva funktio, missä p ja q ovat polynomeja. f on määritelty joukossa $\{x \in \mathbb{R} : \ q(x) \neq 0\}$.

Esimerkki 3.14. Seuraavassa kuvassa esitetään rationaalifunktion

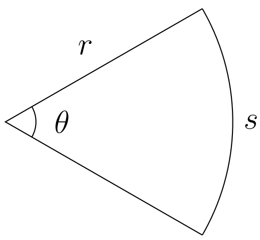
$$f(x) = \frac{(x-2)(x+1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2}$$

kuvaaja. Kiinnitä huomiota funktion käyttäytymiseen nimittäjän nollakohtien $x = -2$ ja $x = 1$ lähellä.



3.3 Trigonometriset funktiot ja niiden käänteisfunktiot [5, Appendix C, 1.4 ja 6.8]

Ympyräsektorin *kulma (angle)* θ määritellään sektorin kaaren pituuden s suhteena säteeseen r:



$$\theta = \frac{s}{r}$$

Tutkitaan seuraavassa *suunnattuja kulmia (directed angles)* xy-koordinaatiston origokeskisessä 1-säteisessä ympyrässä eli *yksikköympyrässä (unit circle)* siten, että sektorin alkukylki on positiivisella x-akselilla. Jos $\theta > 0$, niin kierretään vastapäivään (positiivinen kiertosuunta), ja jos $\theta < 0$, niin kierretään myötäpäivään (negatiivinen kiertosuunta). Koska säde = 1, on koko kierros vastapäivään 2π, puoli kierrosta π ja neljänneskierros $\pi/2$. Jos $\theta > 2\pi$ tai $\theta < -2\pi$, niin ajatellaan kierretyn useampia kierroksia.

Kulma on yksikötön suure, mutta toisinaan selvyyden vuoksi käytetään yksikkönä *radiaania (radian)*, jolloin yksi kierros on 2π rad. Kulman yksikkönä käytetään myös *astetta (degree)*, jolloin yksi kierros on 360°. Niinpä

$$1 \text{ rad} = 180°/\pi \qquad \text{eli} \qquad 1° = \pi/180 \text{ rad}.$$

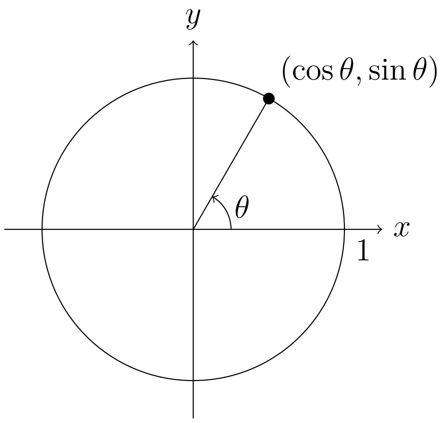
Seuraavaan on taulukoitu joitakin vastaavuuksia:

Radiaanit	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π	$3\pi/2$	2π
Asteet	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°

Määritelmä 3.15. Merkitään yksikköympyrässä kulmaa θ vastaavaa kehäpistettä (x, y). Määritellään *sini (sine)* ja *kosini (cosine)* seuraavina funktioina:

$$\begin{aligned} \sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \sin(\theta) &= y \quad \text{ja} \\ \cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \cos(\theta) &= x. \end{aligned}$$

$\sin(\theta)$ on siis kehäpisteen y-koordinaatti ja $\cos(\theta)$ x-koordinaatti:



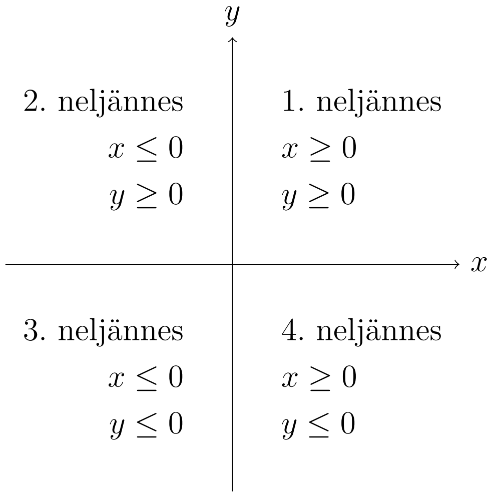
Jos sekaannuksen vaaraa ei ole, niin voidaan merkitä lyhyesti $\sin(\theta) = \sin\theta$ ja $(\sin(\theta))^n = \sin^n\theta$ (cos ja tan vastaavasti). Yksikköympyrästä päätellään sinin ja kosinin nollakohdat:

$$\boxed{\begin{array}{lcll} \sin\theta = 0 & \Leftrightarrow & \theta = n\pi & (n \in \mathbb{Z}) \\ \cos\theta = 0 & \Leftrightarrow & \theta = \pi/2 + n\pi & (n \in \mathbb{Z}) \end{array}} \tag{3.16}$$

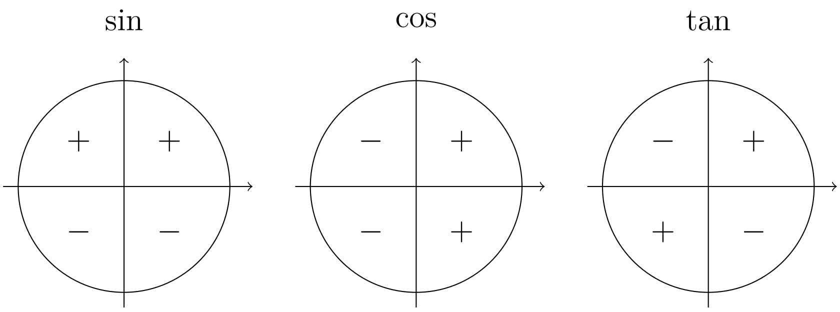
Määritelmä 3.17. Määritellään *tangentti (tangent)* funktiona

$$\tan\colon \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + n\pi :\ n \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R},\ \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$$

xy-taso jaetaan 1.–4. *koordinaattineljännekseen*, joilla tarkoitetaan seuraavia joukkoja:



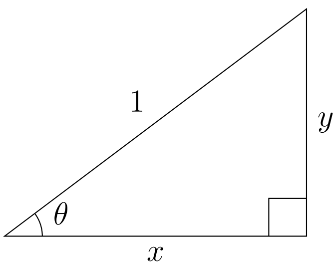
Trigonometristen funktioiden merkit eri koordinaattineljänneksiä vastaavilla kulmilla voidaan koota seuraaviksi kaavioiksi:



Pythagoras'n lauseen sovelluksena saadaan *trigonometrian peruskaava*

$$\boxed{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1.} \tag{3.18}$$

Kulmilla $0 < \theta < \pi/2$ edellä asetetut trigonometristen funktioiden määritelmät yhtyvät koulutrigonometrian suorakulmaisen kolmion avulla asetettuihin määritelmiin:

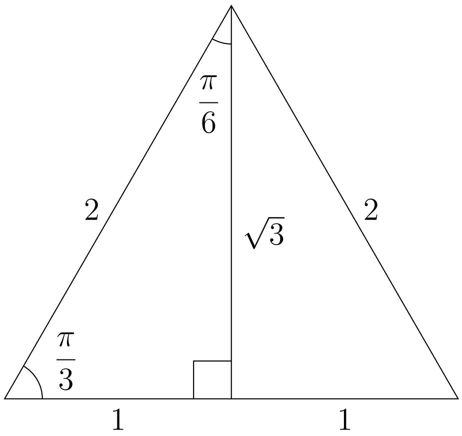


$$\sin\theta = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos\theta = \frac{x}{1} = x$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

Siten välillä $0 \leq \theta \leq \pi/2$ joitakin trigonometristen funktioiden arvoja voidaan päätellä sopivasta suorakulmaisesta kolmiosta, kuten vaikkapa seuraavasta *koululaisen kolmiosta* eli *muistikolmiosta*. Siinä lähtökohta on tasasivuinen kolmio, jonka jokaisen sivun pituus on 2 ja jokainen kulma on $\pi/3 = 60°$.



$$\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Jos kulma ei ole välillä $0 \leq \theta \leq \pi/2$, niin trigonometrisen funktion arvon laskeminen voidaan palauttaa tälle välille seuraavien *palautuskaavojen* avulla.

$$\boxed{\begin{aligned}
\sin(\theta + 2n\pi) &= \sin\theta && (n \in \mathbb{Z})\\
\cos(\theta + 2n\pi) &= \cos\theta && (n \in \mathbb{Z})\\
\tan(\theta + n\pi) &= \tan\theta && (n \in \mathbb{Z})\\
\sin(-\theta) &= -\sin\theta\\
\cos(-\theta) &= \cos\theta\\
\sin(\pi + \theta) &= -\sin\theta\\
\cos(\pi + \theta) &= -\cos\theta\\
\cos\theta &= -\sin(\theta - \pi/2) = \sin(\pi/2 - \theta)\\
\sin\theta &= \cos(\theta - \pi/2) = \cos(\pi/2 - \theta)
\end{aligned}} \tag{3.19}$$

Kaavat voidaan päätellä yksikköympyrästä, sillä esimerkiksi

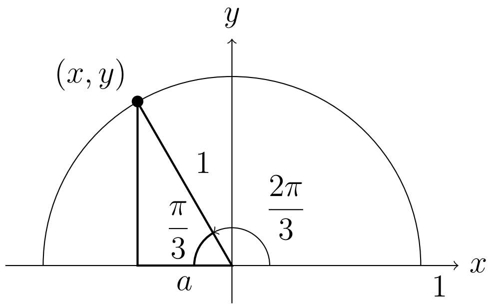
- kulmia θ ja $\theta + 2\pi n$ vastaa samaa kehäpiste kaikilla $n \in \mathbb{Z}$ ja
- kulmia θ ja $-\theta$ vastaavilla kehäpisteillä on sama x-koordinaatti mutta y-koordinaatit ovat toistensa vastalukuja.

Esimerkki 3.20. Laske $\cos\dfrac{2\pi}{3}$.

Ratkaisu. Kulma $2\pi/3$ on toisessa koordinaattineljänneksessä ja sen kosinin laskeminen palautuu ensimmäiseen neljännekseen ja muistikolmioon palautuskaavojen avulla seuraavasti:

$$\cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Vaihtoehtoinen tapa on piirtää suorakulmainen kolmio yksikköympyrän toiseen neljännekseen ja päätellä palauttaminen kulmaan $\pi/3$ suoraan siitä:



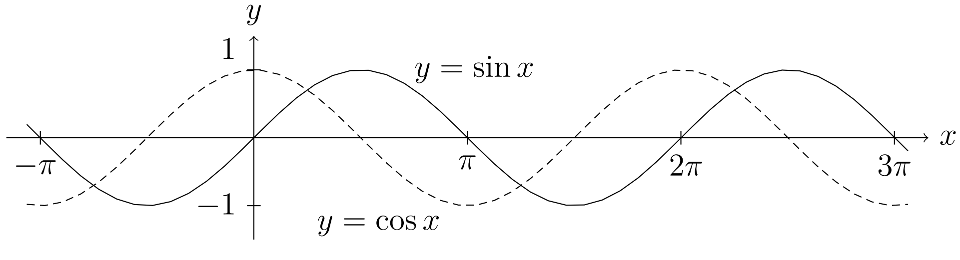
Vertaamalla muistikolmioon nähdään, että $a = 1/2$, joten kehäpisteen x-koordinaatti $x = \cos(2\pi/3) = -1/2$.

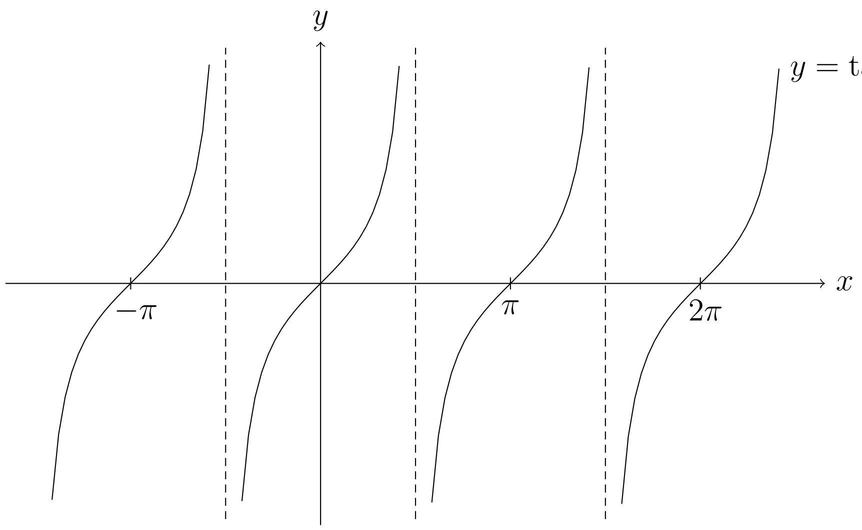
Esimerkki 3.21. Ratkaise yhtälö $3\sin^2 x - \cos^2 x = 2$ välillä $x \in [0, \pi]$.
Ratkaisu. Koska $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, niin yhtälö saadaan muotoon

$$3\sin^2 x - 1 + \sin^2 x = 2 \;\Leftrightarrow\; 4\sin^2 x = 3 \;\Leftrightarrow\; \sin^2 x = \frac{3}{4} \;\Leftrightarrow\; \sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ko. välillä sini on ei-negatiivinen, joten riittää hakea yhtälön $\sin x = \sqrt{3}/2$ kaikki ratkaisut, jotka ovat $x = \pi/3$ ja $x = 2\pi/3$.

Palautuskaavojen mukaan trigonometriset funktiot ovat jaksollisia, sinin ja kosinin jaksona 2π, tangentin jaksona π. Yksikköympyrän avulla voidaan piirtää trigonometristen funktioiden kuvaajat:





Kurssikirjan [5] liitteen C tehtävissä 41 ja 42 hahmotellaan seuraavien *summakaavojen* todistukset.

Lause 3.22 (Summakaavat)**.**

$$\sin(\theta + \phi) = \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi$$
$$\cos(\theta + \phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi$$

Summakaavojen, palautuskaavojen ja peruskaavan avulla voidaan johtaa lukuisa määrä taulukkokirjoissa lueteltuja trigonometrisiin funktioihin liittyviä kaavoja, kuten

$$\boxed{\begin{aligned} \sin^2\theta &= \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta)) \\ \cos^2\theta &= \frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta)) \end{aligned}} \tag{3.23}$$

Joskus sinin, kosinin ja tangentin käänteisluvuille käytetään nimityksiä *kosekantti*, *sekantti* ja *kotangentti*, ja merkitään

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}, \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$$

Koska trigonometriset funktiot ovat jaksollisia, on niistä kullakin käänteisfunktio vain rajoittumalla sellaiselle määrittelyjoukon osavälille, jolla funktio on aidosti monotoninen.

Määritelmä 3.24. Seuraavilla väleillä määritellään trigonometristen funktioiden käänteisfunktiot *arkussini, arkuskosini* ja *arkustangentti*. Älä sekoita jälkimmäisiä merkintöjä eksponenttiin -1!

Funktio	**Käänteisfunktio**
$\sin\colon [-\pi/2, \pi/2] \to [-1,1]$	$\arcsin = \sin^{-1}\colon [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$
$\cos\colon [0,\pi] \to [-1,1]$	$\arccos = \cos^{-1}\colon [-1,1] \to [0,\pi]$
$\tan\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$	$\arctan = \tan^{-1}\colon \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$

Muuttuja merkitään trigonometristen funktioiden tapaan yleensä ilman sulkuja, esimerkiksi $\arctan(x) = \arctan x$.

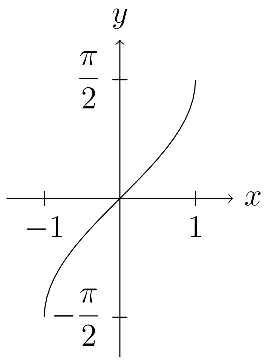
Koska $\sin(x)$ ja $\arcsin(x)$ ovat toistensa käänteisfunktioita, niin

$$\boxed{y = \sin(x) \;\Leftrightarrow\; x = \arcsin(y)} \tag{3.25}$$

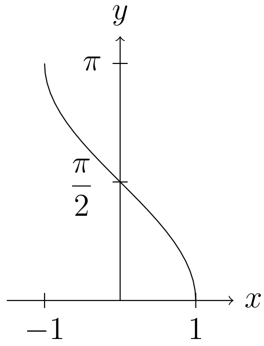
ja

$$\boxed{\arcsin(\sin(x)) = x \quad \text{ja} \quad \sin(\arcsin(y)) = y} \tag{3.26}$$

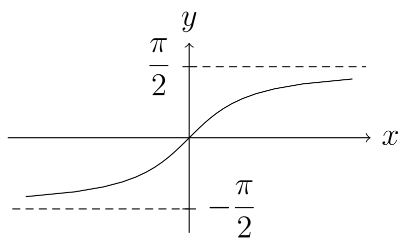
kaikilla $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ ja $y \in [-1,1]$. Toisin sanoen $\theta = \arcsin(x)$ on se kulma $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, jolle $\sin\theta = x$. Kirjoita vastaavat tulokset kosinille ja tangentille! Koska funktion ja käänteisfunktion kuvaajat ovat peilikuvia suoran $y = x$ suhteen, niin arkusfunktioiden kuvaajat ovat seuraavan näköisiä:



$y = \arcsin x$



$y = \arccos x$



$y = \arctan x$

Esimerkki 3.27. Laske **a)** $\arcsin \dfrac{1}{2}$ **b)** $\arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ **c)** $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Ratkaisu. a) On löydettävä se kulma $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, jolle $\sin\theta = 1/2$. Suoraan muistikolmiosta nähdään, että $\theta = \pi/6$, joten

$$\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

b) Kohdan **a** ja sinin määritelmän mukaan $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

c) On löydettävä se kulma $\theta \in [0, \pi]$, jolle $\cos\theta = -\sqrt{3}/2$. Koska $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$, niin $\cos(\pi - \pi/6) = \cos(5\pi/6) = -\sqrt{3}/2$. Niinpä

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}.$$

3.4 Eksponentti- ja logaritmifunktiot [5, 1.4 ja 3.8]

Määritelmä 3.28. *Eksponenttifunktioksi (exponential function)* kutsutaan funktiota

$$f(x) = a^x,$$

missä *kantaluku (base)* $a > 0$.

Potenssifunktiosta todetun perusteella eksponenttifunktio on määritelty kaikilla eksponenteilla $x \in \mathbb{Q}$. Kertauksena: jos $a > 0$, niin eksponenttifunktio a^x määritellään asettamalla

$$\boxed{\begin{aligned} &a^0 = 1, && \\ &a^x = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{x \text{ kpl}}, && \text{kun } x \in \mathbb{N}, \\ &a^x = \frac{1}{a^{-x}}, && \text{kun } x \in \mathbb{Z}_-, \\ &a^x = \left(a^{1/n}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}, && \text{kun } x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, \text{ missä } n \in \mathbb{N}, \end{aligned}}$$

ja sille pätevät seuraavat laskusäännöt ($x, y \in \mathbb{Q}$):

$$\boxed{a^{x+y} = a^x a^y, \qquad (a^x)^y = a^{xy} \qquad \text{ja} \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x}.} \tag{3.29}$$

Lause 3.30. *Eksponenttifunktio* $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ *on*

(1) *aidosti kasvava, jos* $a > 1$,

(2) *aidosti vähenevä, jos* $0 < a < 1$,

(3) *vakio* $= 1$, *jos* $a = 1$.

Todistus. (1) Olkoon ensin $x > 0$ ja merkitään $x = m/n$, missä $m, n \in \mathbb{N}$. Koska $a^m \geq a > 1$ ja $y^{1/n}$ on aidosti kasvava, niin

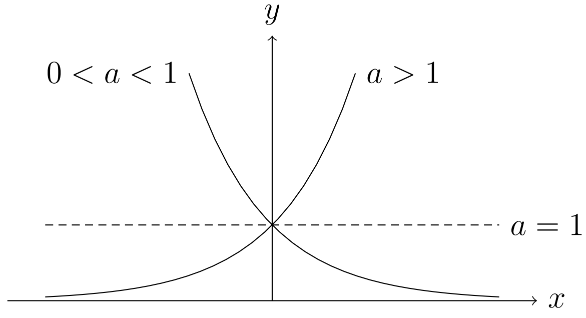
$$a^x = a^{m/n} = (a^m)^{1/n} > 1^{1/n} = 1.$$

Olkoon nyt $x, y \in \mathbb{Q}$, $y > x$. Silloin $y - x > 0$ ja edellä todetun perusteella $a^{y-x} > 1$ ja siten

$$a^y = a^{x+(y-x)} = a^x a^{y-x} > a^x.$$

(2) todistetaan vastaavasti ja (3) on selvä. □

Eksponenttifunktion $f(x) = a^x$ kuvaaja eri a:n arvoilla:



Eksponenttifunktion määrittelyn laajentaminen koko reaalilukujen joukkoon tehdään asettamalla

$$a^x = \lim_{r \in \mathbb{Q},\ r \to x} a^r, \tag{3.31}$$

kun $x \in \mathbb{R}$ on irrationaalinen. Tämän raja-arvon olemassaolo vaatii reaalilukujen *täydellisyysaksiooman* (ks. [5, Appendix E]) käyttöä. Tarkemman tarkastelun sivuutamme. Voidaan osoittaa, että näin määritellylle eksponenttifunktiolle $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ laskulait (3.29) pätevät kaikilla x ja $y \in \mathbb{R}$. Kun $a \neq 1$, niin f on aidosti monotoninen koko reaalilukujen joukossa ja f:n arvojoukko on $f(\mathbb{R}) = (0, \infty)$.

Esimerkki 3.32. Tarkastellaan lukua 2^π. $\pi = 3{,}141592\cdots$ on irrationaaliluku, jota voidaan approksimoida rationaaliluvuilla

$$r_1 = 3, \quad r_2 = 3{,}1, \quad r_3 = 3{,}14, \quad r_4 = 3{,}141, \quad \ldots.$$

Luvulle 2^π saadaan rationaalisia eksponentteja käyttäen arviot

$$2^3 = 8, \quad 2^{3{,}1} = 8{,}574187\cdots, \quad 2^{3{,}14} = 8{,}815240\cdots, \quad 2^{3{,}141} = 8{,}821353\cdots$$

ja lopulta raja-arvona saadaan $2^\pi = \lim_{n\to\infty} 2^{r_n} = 8{,}824977\cdots$.

Tässä esimerkissä käytetään lukujonon raja-arvoa, jota tutkitaan tarkemmin luvussa 8.1. Neperin luku e määritellään lemman 8.15 yhteydessä.

Määritelmä 3.33. Funktiota $e^x = \exp(x)$ kutsutaan *luonnolliseksi eksponenttifunktioksi.*

Eksponenttifunktio a^x on aidosti monotoninen, kun $a \neq 1$, joten sillä on käänteisfunktio.

Määritelmä 3.34. Olkoon $a > 0$ ja $a \neq 1$. Funktion $f\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$, $f(x) = a^x$, käänteisfunktiota $f^{-1}\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ kutsutaan *a-kantaiseksi logaritmifunktioksi (base a logarithm function)* ja sitä merkitään $f^{-1}(x) = \log_a x$.

Koska a^x ja $\log_a x$ ovat toistensa käänteisfunktioita, niin

$$\boxed{y = a^x \quad\Leftrightarrow\quad x = \log_a y} \tag{3.35}$$

ja

$$\boxed{\log_a(a^x) = x \quad \text{ja} \quad a^{\log_a y} = y} \tag{3.36}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja kaikilla $y \in (0,\infty)$. Lauseista 3.30 ja 2.15 seuraa:

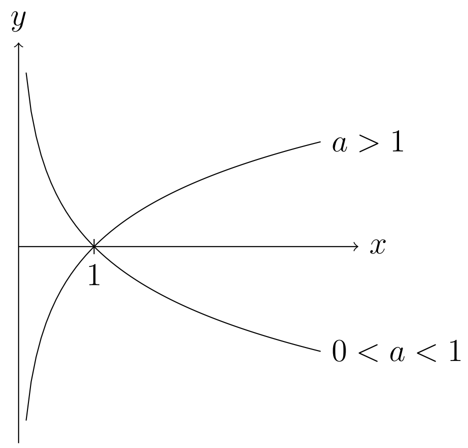
Lause 3.37. *Logaritmifunktio* $\log_a x$

(1) *on aidosti kasvava, jos* $a > 1$,

(2) *on aidosti vähenevä, jos* $0 < a < 1$,

(3) *ei ole määritelty, jos* $a = 1$.

Koska $a^0 = 1$, on $\log_a 1 = 0$ kaikilla a. Seuraavaan kuvaan on hahmoteltu $\log_a$:n kuvaaja eri a:n arvoilla. Vertaa vastaavaan eksponenttifunktion a^x kuvaajaan; kuvaajat ovat peilikuvia suoran $y = x$ suhteen.



Määritelmä 3.38. Luonnollisen eksponenttifunktion e^x käänteisfunktiota $\log_e x$ kutsutaan *luonnolliseksi logaritmiksi (natural logarithm)* ja sitä merkitään $\ln x = \log x = \log_e x$. Kymmenkantaista logaritmifunktiota kutsutaan *Briggsin logaritmiksi* ja sitä merkitään $\lg x = \log_{10} x$.

Kun jatkossa puhutaan pelkästä eksponenttifunktiosta tai logaritmifunktiosta täsmentämättä kantalukua, niin tarkoitetaan aina funktioita e^x ja $\ln x$, joille pätee

$$\boxed{\ln(e^x) = x \quad \text{ja} \quad e^{\ln y} = y} \tag{3.39}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja kaikilla $y \in (0, \infty)$.

Ominaisuuksista (3.29) seuraa logaritmille seuraavat laskulait $(x, y > 0)$:

$$\boxed{\begin{aligned} \log_a(xy) &= \log_a x + \log_a y \\ \log_a(x^y) &= y \log_a x \\ \log_a \frac{x}{y} &= \log_a x - \log_a y \end{aligned}} \tag{3.40}$$

Todistetaan kaavoista ensimmäinen luonnolliselle logaritmille: koska

$$xy = e^{\ln(xy)} \quad \text{ja toisaalta} \quad xy = e^{\ln x} e^{\ln y} = e^{\ln x + \ln y},$$

niin

$$e^{\ln(xy)} = e^{\ln x + \ln y}.$$

Eksponenttifunktion aidosta kasvavuudesta seuraa, että on oltava

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

a-kantaisten eksponentti- ja logaritmifunktioiden käsittely voidaan palauttaa e-kantaisiksi kaavoilla

$$\boxed{a^x = e^{x \ln a}} \quad \text{ja} \quad \boxed{\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.} \tag{3.41}$$

Näistä ensimmäinen voidaan perustella suoralla laskulla

$$a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \ln a}.$$

Toinen saadaan ottamalla yhtälöstä $x = a^{\log_a x}$ luonnollinen logaritmi puolittain ja käyttämällä kaavoja (3.40):

$$\ln x = \ln\left(a^{\log_a x}\right) = \log_a x \ln a.$$

Logaritmeja käsiteltäessä voi toisinaan auttaa kaavojen (3.36) pukeminen seuraavaan muotoon: luku $x = \log_a y$ on se luku, johon a pitäisi korottaa, jotta saadaan y.

Esimerkki 3.42. Laske **a)** $\log_5 125$ **b)** $\log_4 8$
c) $\log_2 10 + \log_2 12 - \log_2 15$
Ratkaisu. a) $5^3 = 125$, joten $\log_5 125 = 3$.
b) Tässä ratkaisua ei nähdä yhtä helposti suoraan, mutta voidaan muokata

$$\log_4 8 = \log_4 \left(2^3\right) = 3 \log_4 2 = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Tarkistetaan vielä:

$$4^{3/2} = \left(4^{1/2}\right)^3 = 2^3 = 8.$$

c) Logaritmin laskusäännöillä saadaan

$$\log_2 10 + \log_2 12 - \log_2 15 = \log_2(10 \cdot 12) - \log_2 15 = \log_2 \frac{10 \cdot 12}{15} = \log_2 8 = 3.$$

Luvussa 3.1 määriteltiin potenssifunktio $f(x) = x^r$ $(x > 0)$ rationaalisille ekponenteille $r \in \mathbb{Q}$. Eksponenttifunktion avulla määritelmä voidaan yleistää kaikille reaalilukueksponenteille.

Määritelmä 3.43. Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Määritellä yleinen potenssifunktio x^a asettamalla

$$x^a = \left(e^{\ln x}\right)^a = e^{a \ln x} \qquad (x > 0).$$

3.5 Hyperboliset funktiot ja niiden käänteisfunktiot [5, 6.8]

Monissa sovelluksissa esiintyy seuraavia funktioiden e^x ja e^{-x} kombinaatioita, joille annetaan omat nimensa käsittelyn helpottamiseksi.

Määritelmä 3.44. Määritellään *hyperbolinen sini* sinh ja *hyperbolinen kosini* cosh asettamalla

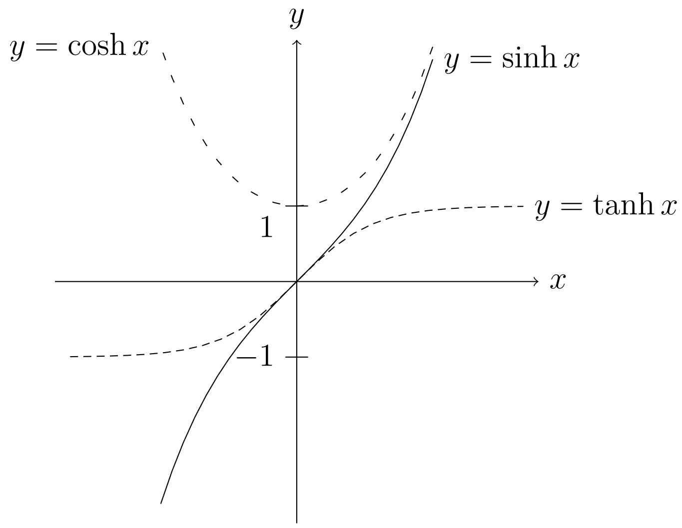
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{ja} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

sekä edelleen *hyperbolinen tangentti*

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Hyperbolisten funktioiden kulku on hahmoteltu seuraavaan kuvaan. Hyperbolisen sinin arvojoukko on $\mathbb{R}$, hyperbolisen kosinin $[1, \infty)$ ja hyperbolisen tangentin $(-1, 1)$.



Esimerkki 3.45. Ratkaise yhtälö $\sinh x = 3$.
Ratkaisu. Sopivasti muokkaamalla ja käyttämällä toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa muuttujalle $t = e^x > 0$ saadaan

$$
\begin{aligned}
& \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 3 \\
\Leftrightarrow \quad & e^x - 6 - e^{-x} = 0 \quad | \cdot e^x \\
\Leftrightarrow \quad & (e^x)^2 - 6e^x - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & e^x = \frac{6 + \sqrt{40}}{2} = 3 + \sqrt{10} \\
\Leftrightarrow \quad & x = \ln(3 + \sqrt{10}) \approx 1{,}8184
\end{aligned}
$$

Hyperbolisille funktioille pätee monia samantapaisia kaavoja kuin trigonometrisille funktioille, kuten

$$\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,} \tag{3.46}$$

joka perustellaan suoralla laskulla sijoittamalla $\cosh x$:n ja $\sinh x$:n määritelmät vasemman puolen lausekkeeseen. sinh ja tanh ovat aidosti kasvavia $\mathbb{R}$:ssä ja cosh joukossa $[0, \infty)$, joten niillä on ko. joukoissa käänteisfunktiot.

Määritelmä 3.47. Seuraavilla väleillä määritellään hyperbolisten funktioiden käänteisfunktiot, joita kutsutaan *areafunktioiksi*. Älä sekoita jälkimmäisiä merkintöjä eksponenttiin -1!

Funktio	**Käänteisfunktio**
$\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$\operatorname{ar}\sinh = \sinh^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\cosh\colon [0,\infty) \to [1,\infty)$	$\operatorname{ar}\cosh = \cosh^{-1}\colon [1,\infty) \to [0,\infty)$
$\tanh\colon \mathbb{R} \to (-1,1)$	$\operatorname{ar}\tanh = \tanh^{-1}\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$

Merkitään $y = \operatorname{ar}\sinh x$, ts. $x = \sinh y$. Menettelemällä kuten esimerkissä 3.45 saadaan $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$. Vastaavalla tavoin saadaan logaritmiesitykset myös ar cosh:lle ja ar tanh:lle:

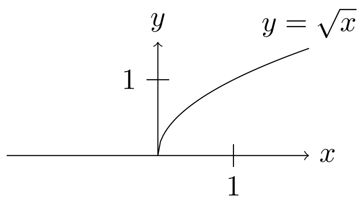
$$\boxed{\begin{array}{ll} \operatorname{ar}\sinh x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) & (x \in \mathbb{R}) \\ \operatorname{ar}\cosh x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) & (x \geq 1) \\ \operatorname{ar}\tanh x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) & (-1 < x < 1) \end{array}} \tag{3.48}$$

3.6 Esimerkkejä

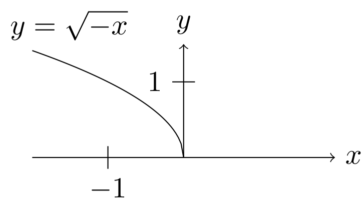
Esimerkki 3.49. Tarkastellaan muutamaa yksinkertaisinta tapaa muokata funktiota $y = f(x)$ ja muokkaamisen merkitystä geometrisesti. Kuvissa esimerkiksi on otettu funktio $y = \sqrt{x}$ välillä $0 \leq x \leq 2$. Perustele kunkin kuvaajan kulku!

Funktio **Operaatio** **Esimerkki**

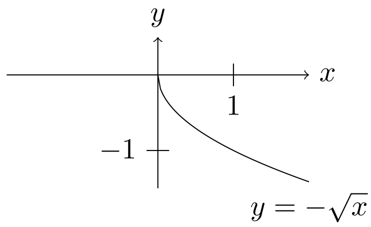
$y = f(x)$



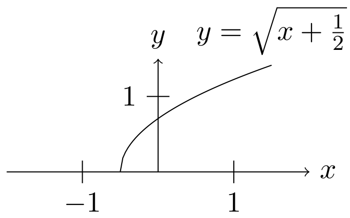
$y = f(-x)$ Peilaus y-akselin suhteen.



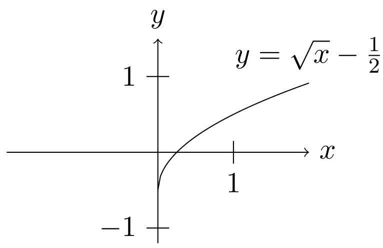
$y = -f(x)$ Peilaus x-akselin suhteen.



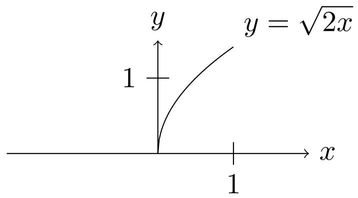
$y = f(x + a)$ Siirto x-suunnassa.



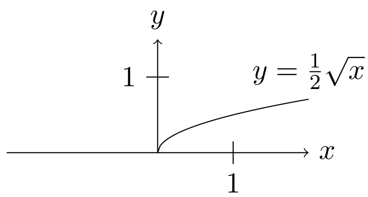
$y = f(x) + a$ Siirto y-suunnassa.



$y = f(ax)$
$(a > 0)$
Skaalaus x-suunnassa.

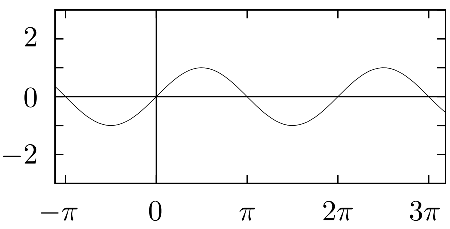


$y = af(x)$
$(a > 0)$
Skaalaus y-suunnassa.

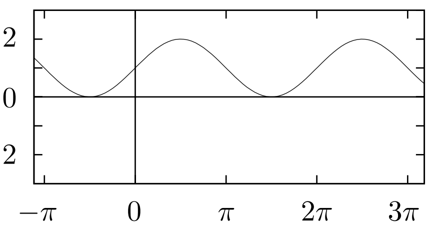


Esimerkki 3.50. Seuraavissa havainnollistetaan sinifunktion avulla edellisen esimerkin operaatioita ja niiden yhdistämistä sekä funktioiden kertomista ja yhdistämistä. Perustele kunkin kuvaajan kulku!

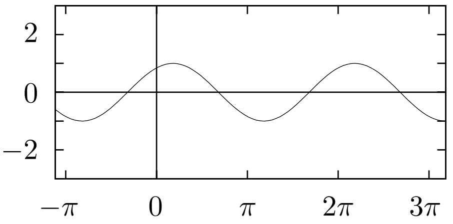
$f(x) = \sin x$



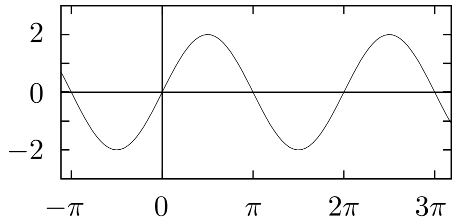
$f(x) = \sin x + 1$, siirto y-suunnassa



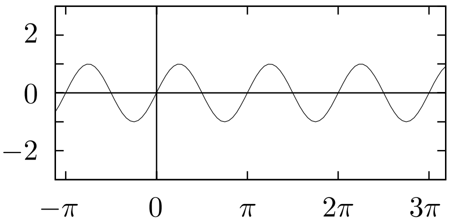
$f(x) = \sin(x+1)$, siirto x-suunnassa eli vaihesiirto



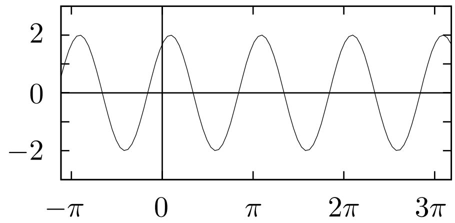
$f(x) = 2\sin x$, amplitudin säätö



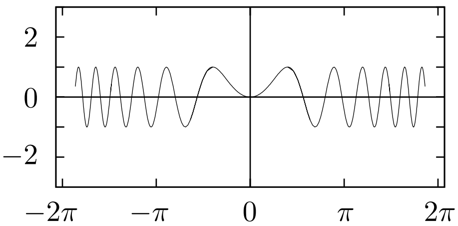
$f(x) = \sin(2x)$, taajuuden säätö



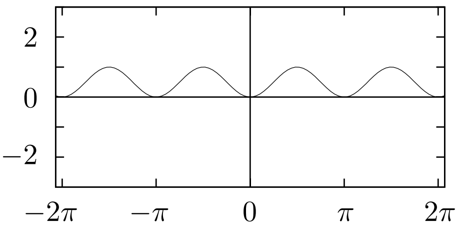
$f(x) = 2\sin(2x+1)$



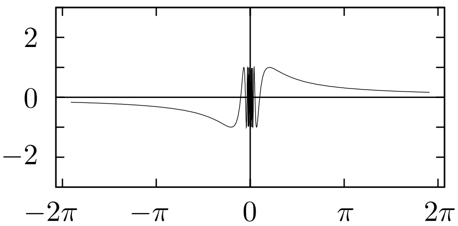
$f(x) = \sin(x^2)$



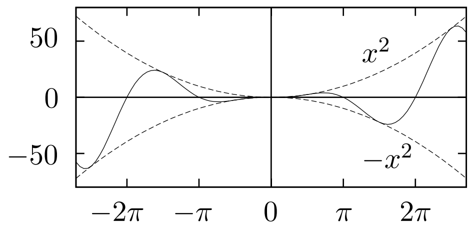
$f(x) = \sin^2 x$



$f(x) = \sin(1/x)$



$f(x) = x^2 \sin x$



Esimerkki 3.51. Talletetaan 5 000 € 8 %:n vuotuisella korolla.
a) Mikä on pääoma $f(x)$ x vuoden kuluttua?

x	$f(x)$
0	5000
1	$5\,000 \cdot 1{,}08$
2	$(5\,000 \cdot 1{,}08) \cdot 1{,}08 = 5\,000 \cdot 1{,}08^2$
3	$(5\,000 \cdot 1{,}08^2) \cdot 1{,}08 = 5\,000 \cdot 1{,}08^3$

Huomataan, että yleisesti $f(x) = 5\,000 \cdot 1{,}08^x$.

b) Mikä on pääoma 4 vuoden ja 3 kuukauden kuluttua? Käyttämällä edellä saatua funktiota saadaan

$$f\left(4\frac{3}{12}\right) = 5\ 000 \cdot 1{,}08^{4\frac{3}{12}} \approx 6\ 935,$$

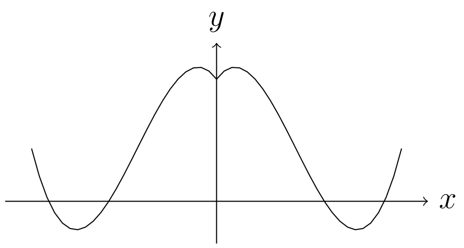
eli noin 6 935 €.
c) Milloin pääoma on 1 000 000 €?

$$\begin{aligned} 5\ 000 \cdot 1{,}08^x &= 10^6 \\ 1{,}08^x &= \frac{10^6}{5\ 000} \qquad \mid \ln(\cdot) \\ x\ln(1{,}08) &= \ln\left(\frac{10^6}{5\ 000}\right) \\ x &= \frac{\ln\left(\frac{10^6}{5\ 000}\right)}{\ln(1{,}08)} \approx 69 \end{aligned}$$

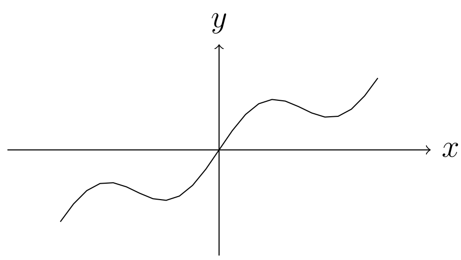
Noin 69 vuoden kuluttua.

Määritelmä 3.52. Reaalifunktio f on *parillinen*, jos $f(-x) = f(x)$ kaikilla x ja *pariton*, jos $f(-x) = -f(x)$ kaikilla x.

Geometrisesti parillisuus tarkoittaa sitä, että funktion kuvaaja on symmetrinen y-akselin suhteen. Esimerkiksi $\cos x$, 1, x^2, x^4 ja x^6 ovat parillisia funktioita. Parittomuus taas tarkoittaa, että funktion kuvaaja on symmetrinen origon suhteen. Esimerkiksi $\sin x$, $\tan x$, x, x^3 ja x^5 ovat parittomia funktioita. On huomattava, että funktio ei ”yleensä” ole parillinen eikä pariton.



parillinen funktio



pariton funktio

Esimerkki 3.53. a) Osoita, että $f(x) = x^2 \sin x$ on pariton.
Ratkaisu. Suoralla laskulla nähdään, että

$$f(-x) = (-x)^2 \sin(-x) = x^2(-\sin x) = -x^2 \sin x = -f(x)$$

kaikilla x.
b) Onko $f(x) = (x+1)^2$ parillinen tai pariton?
Ratkaisu. Koska esimerkiksi $f(-1) = 0$ ja $f(1) = 4$, niin f ei ole parillinen eikä pariton.

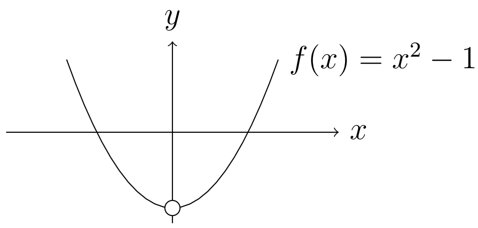
4 Funktion raja-arvo ja jatkuvuus [5, 2.1–2.4, 4.7]

Raja-arvo on tärkein peruskäsite *analyysiksi* kutsutulla matematiikan osa-alueella. Raja-arvon avulla määritellään mm. sellaiset keskeiset käsitteet ja työkalut kuten jatkuvuus, derivaatta ja integraali. Tässä luvussa tavoitteena on oppia laskemaan sekä äärellisiä että äärettömiä raja-arvoja ja tutkimaan, onko funktio jatkuva.

4.1 Raja-arvon määritelmä ja perusominaisuudet

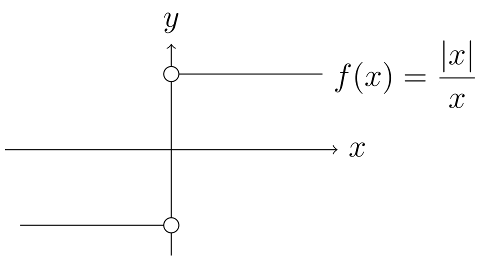
Intuitiivisesti määriteltynä funktiolla f on raja-arvo $L \in \mathbb{R}$ pisteessä a, jos x:n lähestyessä pistettä a arvot $f(x)$ lähestyvät lukua L. Tällaisella löysällä määritelmällä ei kuitenkaan saada aikaan käyttökelpoista työkalua. Ennen tarkkoja määritelmiä esimerkissä 4.1 käydään läpi erityyppisiä tapauksia siitä, miten funktion f arvot voivat käyttäytyä lähellä pistettä 0 ja mihin raja-arvon määritelmien (4.3, 4.16, 4.22 ja 4.24) tulisi ottaa kantaa.

Esimerkki 4.1. a) $f(x) = x^2 - 1$ lähestyy lukua -1, kun x lähestyy nollaa. f:llä on pisteessä 0 raja-arvo -1.

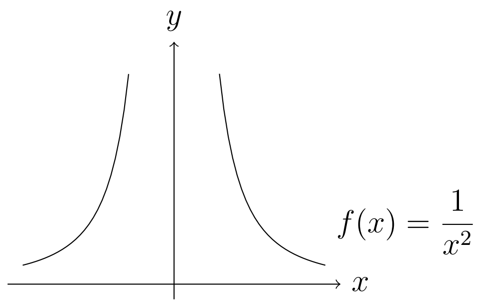


b) $f(x) = \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{kun } x > 0, \\ -1, & \text{kun } x < 0, \end{cases}$

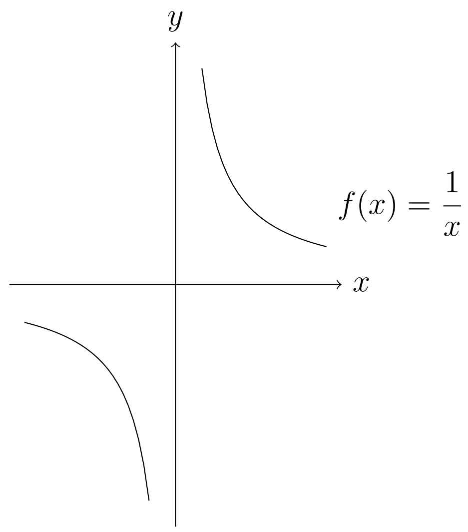
lähestyy lukua 1, kun x lähestyy nollaa oikealta ja lukua -1, kun x lähestyy nollaa vasemmalta. f:llä on pisteessä 0 vain toispuoleiset raja-arvot.



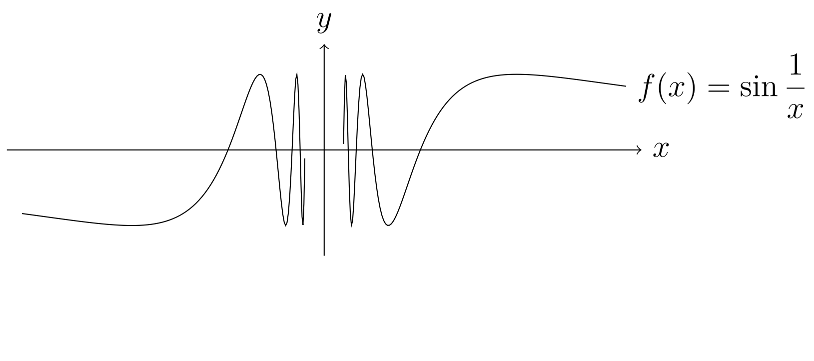
c) $f(x) = 1/x^2$ kasvaa rajatta, kun x lähestyy nollaa. f:llä on pisteessä 0 vain epäoleellinen raja-arvo ∞.



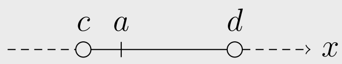
d) $f(x) = 1/x$ kasvaa rajatta, kun x lähestyy nollaa oikealta ja pienenee rajatta, kun x lähestyy nollaa vasemmalta. f:llä on pisteessä 0 vain toispuoleiset epäoleelliset raja-arvot $-\infty$ ja ∞.



e) $f(x) = \sin(1/x)$ heilahtelee -1:n ja 1:n välissä, kun x lähestyy nollaa. f:llä ei ole pisteessä 0 raja-arvoa.



Määritelmä 4.2. Pisteen $a \in \mathbb{R}$ sisältävää avointa väliä (c, d) kutsutaan a:n *ympäristöksi (neighborhood)* ja ja joukkoa $(c, a) \cup (a, d)$ pisteen a *punkteeratuksi ympäristöksi.*



a:n ympäristö

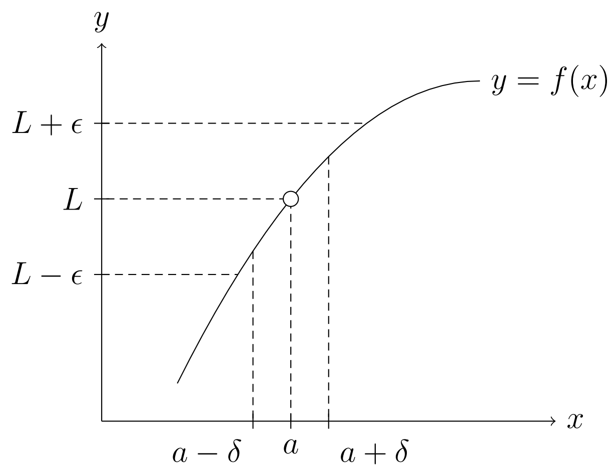
a:n punkteerattu ympäristö

Määritelmä 4.3. Olkoon reaalifunktio f määritelty jossakin pisteen a punkteeratussa ympäristössä. Funktiolla f on *raja-arvo (limit)* $L \in \mathbb{R}$ *pisteessä* a, jos jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että $|f(x) - L| < \epsilon$ aina kun $0 < |x - a| < \delta$, ts.

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Tällöin merkitään

$$L = \lim_{x \to a} f(x) \qquad \text{tai} \qquad f(x) \to L, \text{ kun } x \to a.$$



Tällä määritelmällä saadaan ilmaistua täsmällisesti sanonnat ”x lähellä a:ta” ($0 < |x - a| < \delta$) ja ”$f(x)$ lähellä L:ää” ($|f(x) - L| < \epsilon$). f voi olla tai voi olla olematta määritelty pisteessä a, sillä ehto $0 < |x - a|$ takaa, että $x \neq a$ eikä funktion arvoa siten lasketa pisteessä a.

Kerrataan kolmioepäyhtälö, jota tarvitaan monissa seuraavista todistuksista.

Lause 4.4 (Kolmioepäyhtälöitä reaaliluvuille)**.** *Kaikille x ja $y \in \mathbb{R}$ pätee*

(1) $|x+y| \leq |x| + |y|$

(2) $|x-y| \leq |x| + |y|$

(3) $\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$

Todistus. (1) Itseisarvon määritelmän mukaan $x = -|x|$ tai $x = |x|$, joten

$$-|x| \leq x \leq |x|.$$

Vastaavasti

$$-|y| \leq y \leq |y|.$$

Laskemalla nämä epäyhtälöt puolittain yhteen saadaan

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|,$$

joten $|x+y| \leq |x| + |y|$.
(2) Toinen lauseen epäyhtälö seuraa ensimmäisestä:

$$|x-y| = |x + (-y)| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|.$$

(3) Myös kolmas epäyhtälö seuraa ensimmäisestä:

$$|x| = |(x-y) + y| \leq |x-y| + |y|,$$

joten $|x| - |y| \leq |x-y|$. Vaihtamalla tässä x:n ja y:n roolit saadaan

$$|y| - |x| \leq |y-x| = |x-y|,$$

josta $|x| - |y| \geq -|x-y|$. Siten $\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$. □

Seuraavan lauseen raja-arvon peruslaskusääntöjen mukaan summan raja-arvo on raja-arvojen summa, tulon raja-arvo on raja-arvojen tulo ja osamäärän raja-arvo on raja-arvojen osamäärä:

Lause 4.5. *Jos $\lim_{x\to a} f(x) = L$ ja $\lim_{x\to a} g(x) = M$, niin*

(1) $\lim_{x\to a} \big(f(x) \pm g(x)\big) = L \pm M$,

(2) $\lim_{x\to a} \big(f(x)g(x)\big) = LM$,

(3) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$, *jos* $M \neq 0$.

Todistus. Todistetaan (1) summalle $f(x)+g(x)$. Olkoon $\epsilon > 0$. Koska

$$L = \lim_{x\to a} f(x) \qquad \text{ja} \qquad M = \lim_{x\to a} g(x),$$

niin on olemassa $\delta_1 > 0$ ja $\delta_2 > 0$ siten, että

$$|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2} \tag{4.6}$$

kun $0 < |x-a| < \delta_1$ ja

$$|g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2} \tag{4.7}$$

kun $0 < |x-a| < \delta_2$. Jos valitaan $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, niin sekä (4.6) että (4.7) ovat voimassa, kun $0 < |x-a| < \delta$. Niinpä

$$\begin{aligned} |(f(x)+g(x)) - (L+M)| &= |(f(x)-L) + (g(x)-M)| \\ &\le |f(x)-L| + |g(x)-M| \\ &\le \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

kun $0 < |x-a| < \delta$. Siten summalla $f(x)+g(x)$ on pisteessä a raja-arvo $L+M$. □

Seuraus 4.8. *Jos on olemassa* $\lim_{x\to a} f(x)$, *niin*

$$\lim_{x\to a} \Big(f(x)^n\Big) = \Big(\lim_{x\to a} f(x)\Big)^n$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Todistus. Todistetaan väite induktiolla.
(1) Alkuaskel. Tapauksessa $n = 1$ väite on selvästikin tosi.
(2) Induktioaskel. Oletetaan, että kaava pätee arvolla $n = k$:

$$\lim_{x\to a} f(x)^k = \Big(\lim_{x\to a} f(x)\Big)^k.$$

Silloin

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} \Big(f(x)^{k+1}\Big) &= \lim_{x\to a} \Big(f(x)f(x)^k\Big) \\ &\overset{\text{L. 4.5 (2)}}{=} \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} \Big(f(x)^k\Big) \\ &= \lim_{x\to a} f(x) \Big(\lim_{x\to a} f(x)\Big)^k \\ &= \Big(\lim_{x\to a} f(x)\Big)^{k+1}. \end{aligned}$$

Niinpä kaava pätee myös n:n arvolla $n = k+1$. □

Esimerkki 4.9. Seuraavassa tarvitaan kaikkia lauseen 4.5 kohtia (sekä havaintoja $\lim_{x\to a} x = a$ ja $\lim_{x\to a} c = c$, kun $c =$ vakio):

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^3 - 7}{5x + 3} = \frac{2 \cdot 3^3 - 7}{5 \cdot 3 + 3} = \frac{47}{18}.$$

Esimerkki 4.10. a) Seuraavassa lausetta 4.5 ei voida suoraan soveltaa muodon $0/0$ vuoksi ennen funktion muokkausta. Osoittajan nollakohdat ovat 1 ja -3 ja nimittäjän nollakohdat -2 ja -3, joten (ks. tekijöihinjako luvussa 5.5)

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 5x + 6} = \lim_{x\to -3} \frac{(x-1)(x+3)}{(x+2)(x+3)} = \lim_{x\to -3} \frac{(x-1)}{(x+2)} = 4.$$

b) Raja-arvoa

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{2 - x}$$

ei ole olemassa, sillä funktion itseisarvo kasvaa rajatta, kun $x \to 2$.

Lause 4.11. $\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$

Todistus. Nyt

$$(\sqrt{x} - \sqrt{a})^2 = x - 2\sqrt{x}\sqrt{a} + a \le \begin{cases} x - 2a + a = x - a, & \text{kun } x > a \\ x - 2x + a = a - x, & \text{kun } x < a \end{cases}$$
$$= |x - a|.$$

Koska neliöjuuri on kasvava, niin

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| \le \sqrt{|x - a|}.$$

Niinpä annetulle $\epsilon > 0$ pätee $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \epsilon$, kun $0 < |x - a| < \epsilon^2$. Raja-arvon määritelmässä voidaan siis valita $\delta = \epsilon^2$. □

Lause 4.12. *Olkoon* $\lim_{x\to a} g(x) = L$ *ja* $\lim_{y\to L} f(y) = f(L)$*. Silloin*

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\Big(\lim_{x\to a} g(x)\Big) = f(L).$$

Todistus. Olkoon $\epsilon > 0$. Silloin on olemassa $\delta_1 > 0$ siten, että

$$0 < |y - L| < \delta_1 \Rightarrow |f(y) - f(L)| < \epsilon$$

ja edelleen $\delta > 0$ siten, että

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - L| < \delta_1.$$

Jos merkitään $y = g(x)$, niin edellä mainituista seuraa (tapaus $|g(x) - L| = 0$ on selvä, koska silloin $g(x) = L$)

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(g(x)) - f(L)| < \epsilon. \qquad \square$$

Esimerkki 4.13. a) Lauseista 4.11 ja 4.12 seuraa, että

$$\lim_{x\to 5} \sqrt{2x^2 - 1} = \sqrt{\lim_{x\to 5}(2x^2 - 1)} = \sqrt{49} = 7.$$

b) Tutkitaan raja-arvoa

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}.$$

Suora sijoitus ei onnistu (muoto 0/0), mutta funktiota voidaan muokata sopivasti laventamalla lausekkeella $\sqrt{x+4} + 2$:

$$\frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} = \frac{(x+4) - 4}{x(\sqrt{x+4} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{x+4} + 2} \to \frac{1}{4}, \quad \text{kun } x \to 0.$$

Lause 4.14 (Kuristusperiaate, squeeze law)**.** *Olkoon $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ kaikilla $x \neq a$ jossakin a:n ympäristössä ja oletetaan, että*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L = \lim_{x\to a} h(x).$$

Silloin on olemassa $\lim_{x\to a} g(x) = L$.

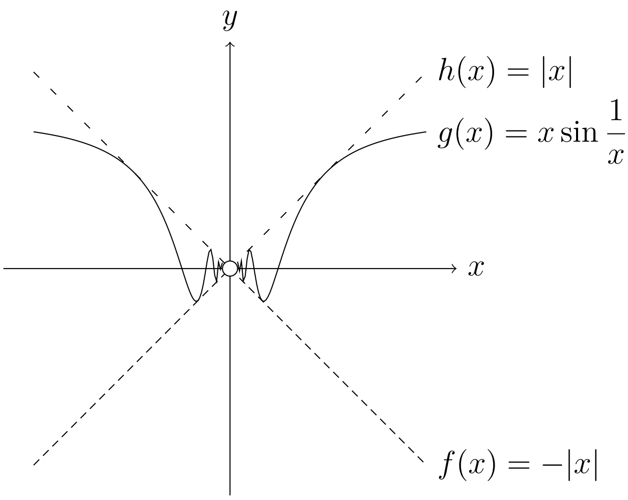
Esimerkki 4.15. Funktiolla

$$g(x) = x \sin\frac{1}{x}$$

on raja-arvo 0 pisteessä 0, sillä

$$-|x| \leq x \sin\frac{1}{x} \leq |x|$$

ja $f(x) = -|x| \to 0$ ja $h(x) = |x| \to 0$, kun $x \to 0$.



4.2 Toispuoleiset raja-arvot

Määritelmä 4.16. Olkoon reaalifunktio f määritelty joukossa (a, d). Funktiolla f on *oikeanpuoleinen raja-arvo* $L \in \mathbb{R}$ *pisteessä* a, jos

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Tällöin merkitään

$$L = \lim_{x \to a+} f(x) \qquad \text{tai} \qquad f(x) \to L, \text{ kun } x \to a+.$$

Jos reaalifunktio f on määritelty joukossa (c, a), niin funktiolla f on *vasemmanpuoleinen raja-arvo* $L \in \mathbb{R}$ *pisteessä* a, jos

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Tällöin merkitään

$$L = \lim_{x \to a-} f(x) \qquad \text{tai} \qquad f(x) \to L, \text{ kun } x \to a-.$$

Lause 4.17. *Olkoon reaalifunktio f määritelty a:n punkteeratussa ympäristössä. Tällöin*

$$L = \lim_{x \to a} f(x)$$

jos ja vain jos

$$\lim_{x \to a-} f(x) = L = \lim_{x \to a+} f(x).$$

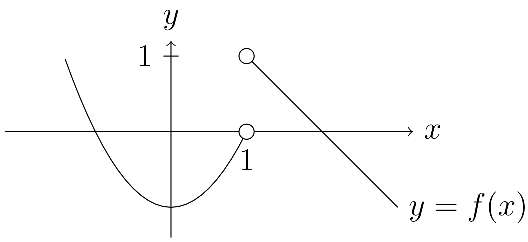
Esimerkki 4.18. a) Funktiolla

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{kun } x < 1, \\ 2 - x, & \text{kun } x > 1, \end{cases}$$

on toispuoleiset raja-arvot

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = 0 \qquad \text{ja} \qquad \lim_{x \to 1+} f(x) = 1,$$

joten ei ole olemassa raja-arvoa $\lim_{x \to 1} f(x)$.



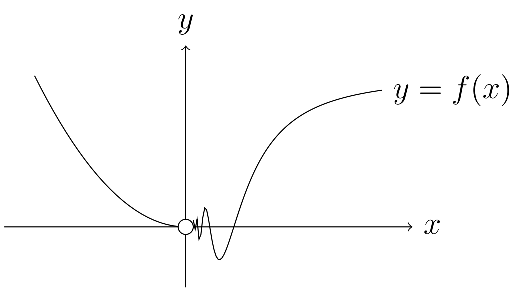
b) Funktiolla

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kun } x < 0, \\ x \sin \dfrac{1}{x}, & \text{kun } x > 0, \end{cases}$$

on toispuoleiset raja-arvot (ks. esimerkki 4.15)

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = 0 = \lim_{x \to 0+} f(x),$$

joten on olemassa raja-arvo $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.



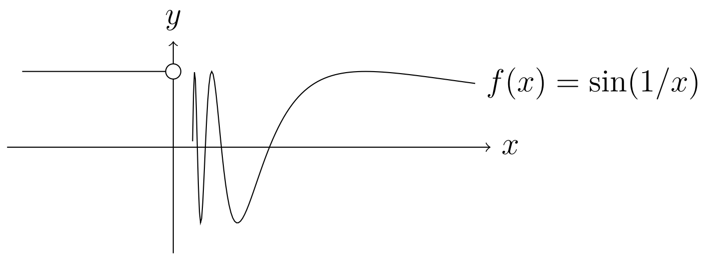
c) Funktiolla

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x < 0, \\ \sin \dfrac{1}{x}, & \text{kun } x > 0, \end{cases}$$

on vasemmanpuoleinen raja-arvo

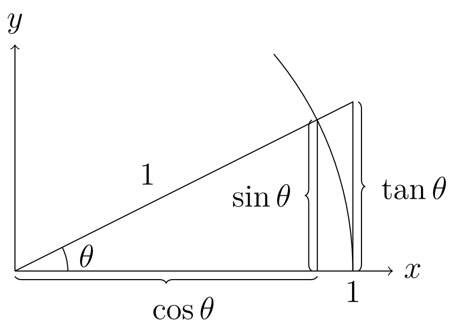
$$\lim_{x\to 0-} f(x) = 1,$$

mutta ei oikeanpuoleista raja-arvoa $\lim_{x\to 0+} f(x)$, eikä siten myöskään raja-arvoa $\lim_{x\to 0} f(x)$.



Lause 4.19. $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$

Todistus. Todistetaan lause geometrisesti. Myöhemmin käsiteltävää l'Hôspitalin sääntöä ei voida käyttää tämän todistamiseen, koska sinin derivointikaavan todistamisessa tarvitsemme tätä tulosta.



Oletetaan, että $0 < \theta < \pi/2$. Oheisesta kuvasta päätellään, että

pienen kolmion pinta-ala ≤ sektorin pinta-ala ≤ ison kolmion pinta-ala.

1-säteisen kiekon pinta-ala on $\pi \cdot 1^2 = \pi$, joten sektorin, joka on $\theta/(2\pi)$-osa kiekosta, pinta-ala on $\pi{\cdot}\theta/(2\pi) = \theta/2$. Kolmion pinta-ala on $\frac{1}{2}\times$kanta$\times$korkeus, joten

$$\frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta \le \frac{\theta}{2} \le \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan\theta = \frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{\cos\theta},$$

josta

$$\cos\theta\sin\theta \le \theta \le \frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$$

Jakamalla $\sin\theta$:lla ja ottamalla käänteisluvut saadaan

$$\frac{1}{\cos\theta} \geq \frac{\sin\theta}{\theta} \geq \cos\theta.$$

Koska $\lim\limits_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$, niin kuristusperiaatteen (lause 4.14) nojalla

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1.$$

Tapaus $-\pi/2 < \theta < 0$ käsitellään vastaavasti ja saadaan

$$\lim_{\theta\to 0-}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1. \qquad \square$$

Esimerkki 4.20. Osoitetaan, että

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0.$$

Lavennetaan $(1+\cos x)$:llä ja käytetään tietoa $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$\frac{1-\cos x}{x} = \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \frac{\sin x}{x}\,\frac{\sin x}{1+\cos x} \to 1\cdot\frac{0}{1+1} = 0, \quad \text{kun } x\to 0.$$

Esimerkki 4.21.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x)}{x} = 2\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(2x)}\right) = 2\cdot 1\cdot\frac{1}{1} = 2$$

4.3 Raja-arvokäsitteen laajennukset

4.3.1 Epäoleelliset raja-arvot ∞ ja $-\infty$

Intuitiivisesti määriteltynä funktiolla f on raja-arvo ∞ pisteessä a, jos x:n lähestyessä pistettä a arvot $f(x)$ kasvavat rajatta.

Määritelmä 4.22. Olkoon reaalifunktio f määritelty a:n punkteeratussa ympäristössä. Funktiolla f on *epäoleellinen raja-arvo* ∞ *pisteessä* a, jos

$$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0 :\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

Tällöin merkitään

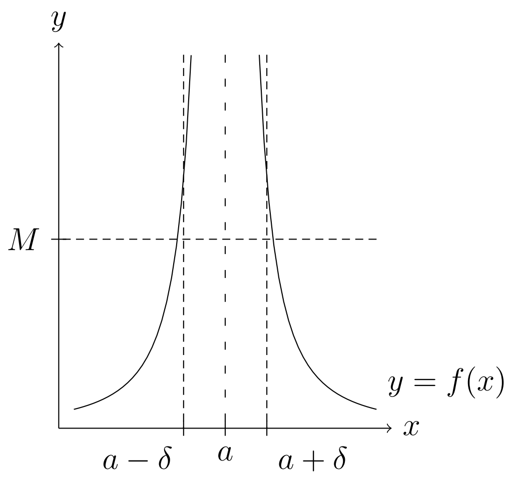
$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \qquad \text{tai} \qquad f(x) \to \infty,\ \text{kun } x \to a.$$

Vastaavasti funktiolla f on *epäoleellinen raja-arvo* $-\infty$ *pisteessä* a, jos

$$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0 :\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < M.$$

Tällöin merkitään

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \qquad \text{tai} \qquad f(x) \to -\infty,\ \text{kun } x \to a.$$



Epäoleelliset toispuoleiset raja-arvot määritellään vastaavalla tavoin kuin äärelliset toispuoleiset raja-arvot. Lukujen 4.1 ja 4.2 tuloksia voidaan käyttää myös epäoleellisille raja-arvoille seuraavia sääntöjä soveltaen ($c \in \mathbb{R}$). Näissä esimerkiksi säännön (1) ensimmäinen kohta tarkoittaa, että jos $\lim_{x \to a} f(x) = c$ ja $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$, niin

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = c + \infty = \infty.$$

(1) $c + \infty = \infty$ ja $c - \infty = -\infty$

(2) $c \cdot \infty = \infty$, jos $c > 0$ ja $c \cdot \infty = -\infty$, jos $c < 0$

(3) $\dfrac{c}{\pm\infty} = 0$

(4) $\infty + \infty = \infty$ ja $-\infty - \infty = -\infty$

(5) $\infty \cdot \infty = \infty$, $(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$, $\infty \cdot (-\infty) = -\infty$

Esimerkki 4.23. **a)** Funktiolla $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-3}$ on epäoleelliset toispuoleiset raja-arvot

$$\lim_{x \to 3-} f(x) = -\infty \qquad \text{ja} \qquad \lim_{x \to 3+} f(x) = \infty,$$

sillä $\sqrt{x} \to \sqrt{3}$, kun $x \to 3$ ja $x - 3 \to 0\pm$, kun $x \to 3\pm$. Niinpä ei ole olemassa epäoleellista raja-arvoa $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$.

b) $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{x^8}{(x-2)^2} = \lim_{x \to 2} \left(x^8\right) \lim_{x \to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = 2^8 \cdot \infty = \infty$

Seuraavat muodot ovat epämääräisiä eikä niistä raja-arvolaskuissa voida tehdä mitään johtopäätöksiä:

$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty.$$

Esimerkiksi

$$1 = \lim_{x \to 0+} 1 = \lim_{x \to 0+} x \cdot \frac{1}{x} = 0 \cdot \infty,$$

mutta toisaalta

$$2 = \lim_{x \to 0+} 2 = \lim_{x \to 0+} (2x) \cdot \frac{1}{x} = 0 \cdot \infty$$

tai

$$\infty = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0+} x \cdot \frac{1}{x^2} = 0 \cdot \infty.$$

4.3.2 Raja-arvo äärettömyydessä

Intuitiivisesti määriteltynä funktiolla f on raja-arvo $L \in \mathbb{R}$ äärettömyydessä, jos x:n kasvaessa rajatta arvot $f(x)$ lähestyvät lukua L.

Määritelmä 4.24. Olkoon reaalifunktio f määritelty joukossa (c, ∞). Funktiolla f on *raja-arvo* L *äärettömyydessä*, jos

$$\forall \epsilon > 0\ \exists M \in \mathbb{R} :\ x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Tällöin merkitään

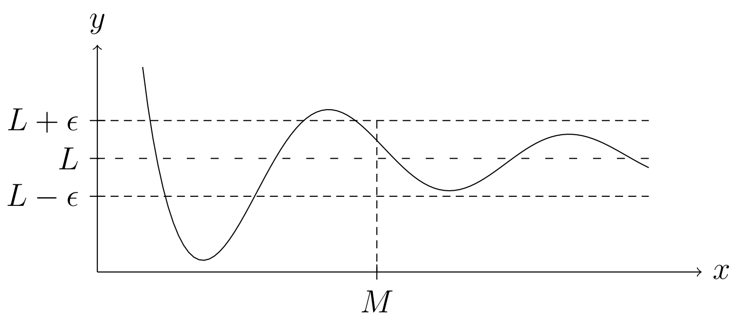
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \qquad \text{tai} \qquad f(x) \to L,\ \text{kun } x \to \infty.$$

Vastaavasti joukossa $(-\infty, c)$ määritellyllä funktiolla f on *raja-arvo* L *miinus-äärettömyydessä*, jos

$$\forall \epsilon > 0\ \exists M \in \mathbb{R} :\ x < M \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Tällöin merkitään

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \qquad \text{tai} \qquad f(x) \to L,\ \text{kun } x \to -\infty.$$



Vastaavalla tavoin voidaan määritellä myös raja-arvot ∞ ja $-\infty$ äärettömyydessä ja miinus-äärettömyydessä.

Esimerkki 4.25. a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

c) Ei ole olemassa raja-arvoa $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$.

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$

Esimerkki 4.26. Polynomi-, rationaali- ja juurifunktioiden raja-arvoja äärettömyydessä voidaan yrittää tutkia ottamalla yhteinen tekijä tai laventamalla sopivasti.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3x^3-100x^2+11\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\frac{100}{x}+\frac{11}{x^3}\right)x^3=(3-0+0)\cdot\infty=\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^3+4x^2-7}{5x^3-x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2+\frac{4}{x}-\frac{7}{x^3}}{5-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\frac{2+0-0}{5-0+0}=\frac{2}{5}$

c) $\frac{-x^3+2x^2+9}{7x^2+2x-1}=\frac{-x+2+\frac{9}{x^2}}{7+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}\overset{x\to\infty}{\longrightarrow}\frac{-\infty+2+0}{7+0-0}=\frac{-\infty}{7}=-\infty$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\overset{x\geq 0}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+0}}=1$

e) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

$=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\to\frac{1}{\infty}=0$, kun $x\to\infty$.

4.4 Jatkuvuus

Raja-arvon määritelmässä 4.3 ei vaadita, että funktio olisi määritelty rajapisteessä a. Jos $f(a)$ on määritelty, niin voidaan kysyä, onko funktion arvo sama kuin raja-arvo.

Määritelmä 4.27. Olkoon funktio f määritelty välillä (c,d). Sanotaan, että f on *jatkuva (continuous) pisteessä* $a\in(c,d)$, jos

$$f(a)=\lim_{x\to a}f(x). \tag{4.28}$$

Vaaditaan siis, että

(1) f on määritelty pisteessä a,

(2) f:llä on raja-arvo pisteessä a ja

(3) funktion arvo ja raja-arvo ovat yhtäsuuret.

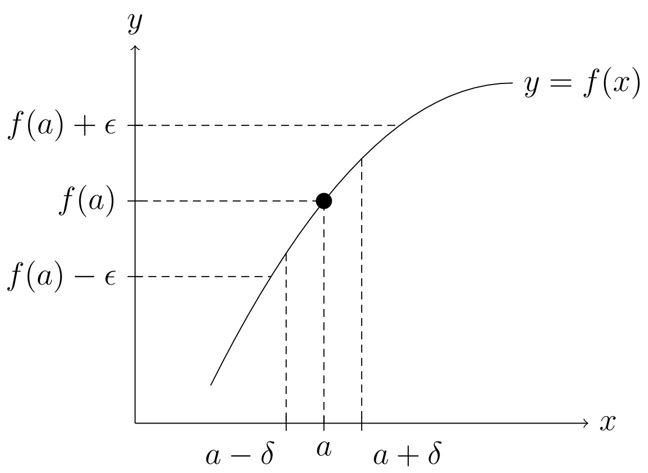
Raja-arvon olemassaolon $\epsilon\delta$-ehto ja vaatimus (4.28) voidaan muotoilla suoraan yhdeksi $\epsilon\delta$-ehdoksi:

Lause 4.29. *$f\colon (c,d) \to \mathbb{R}$ on jatkuva pisteessä $a \in (c,d)$ jos ja vain jos*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0: \ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon,$$

toisin sanoen

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0: \ f((a-\delta, a+\delta)) \subset (f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon).$$



Esimerkki 4.30. a) Esimerkin 4.15 funktio $g\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

ei ole määritelty pisteessä $x = 0$, mutta sillä on raja-arvo $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. Niinpä funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & \text{kun } x \neq 0, \\ 0, & \text{kun } x = 0, \end{cases}$$

on jatkuva pisteessä 0. Funktio g saadaan siis jatkettua jatkuvaksi funktioksi pisteessä 0, kun määritellään $g(0)$ sopivasti. Tällöin sanotaan, että piste 0 on g:n *poistuva epäjatkuvuuspiste*.
b) Esimerkin 4.1 kohdissa **b**–**e** funktiota f ei saada millään määrittelyllä $f(0)$ jatkuvaksi pisteessä 0.

Välin päätepisteessä jatkuvuus on määriteltävä erikseen.

Määritelmä 4.31. Välillä $[a, d)$ määritelty funktio f on *oikealta puolijatkuva pisteessä* a, jos

$$f(a) = \lim_{x \to a+} f(x).$$

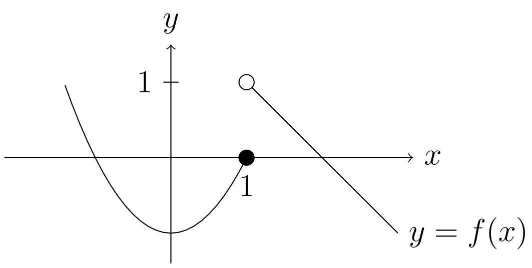
Vastaavasti välillä $(c, a]$ määritelty funktio f on *vasemmalta puolijatkuva pisteessä* a, jos

$$f(a) = \lim_{x \to a-} f(x).$$

Esimerkki 4.32. Funktio

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{kun } x \leq 1, \\ 2 - x, & \text{kun } x > 1, \end{cases}$$

on vasemmalta puolijatkuva pisteessä 1, mutta ei oikealta.



Tämän esimerkin tilanteessa, jossa pisteessä a on olemassa äärelliset toispuoleiset raja-arvot, mutta ne ovat erisuuret, sanotaan funktiolla olevan *hyppäysepäjatkuvuus*.

Määritelmä 4.33. Funktio on *jatkuva*, jos se on jatkuva jokaisessa määrittelyjoukkonsa pisteessä. Tarkemmin:

- Funktio $f\colon (c, d) \to \mathbb{R}$ on *jatkuva*, jos se on jatkuva jokaisessa pisteessä $a \in (c, d)$.
- Funktio $f\colon [c, d) \to \mathbb{R}$ on *jatkuva*, jos se on jatkuva jokaisessa pisteessä $a \in (c, d)$ ja lisäksi oikealta puolijakuva pisteessä c.
- Vastaavasti määritellään jatkuvuus myös muunlaisilla väleillä.
- Jos funktion määrittelyjoukko koostuu äärellisestä määrästä erillisiä avoimia välejä I_j, niin funktio on *jatkuva*, jos funktio on jatkuva jokaisella välillä I_j.

Lisäksi funktio on *paloittain jatkuva* välillä I, jos sillä on äärellinen määrä epäjatkuvuuspisteitä ja ne kaikki ovat hyppäysepäjatkuvuuksia.

Merkitään jatkossa I:llä yleistä väliä, joka voi olla avoin, puoliavoin tai suljettu sekä rajoitettu tai rajoittamaton.

Lauseen 4.5 mukaan jatkuvien funktioiden summa, erotus, tulo ja osamäärä ovat jatkuvia:

Lause 4.34. *Olkoot f ja $g\colon I \to \mathbb{R}$ jatkuvia pisteessä $a \in I$. Tällöin $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$ ja $f(x)g(x)$ ovat jatkuvia pisteessä a. Jos lisäksi $g(a) \neq 0$, niin myös $f(x)/g(x)$ on jatkuva pisteessä a.*

Esimerkiksi jokainen polynomi $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ on jatkuva $\mathbb{R}$:ssä ja edelleen jokainen rationaalifunktio $f(x) = p(x)/q(x)$ on jatkuva määrittelyjoukossaan.

Esimerkki 4.35. a) Funktio $f(x) = -3x^2 + 7x - 1$ on jatkuva joukossa $\mathbb{R}$.

b) Funktio $f(x) = \dfrac{1}{x}$ on jatkuva määrittelyjoukossaan $\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

c) Funktio

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 2x - 8}$$

on jatkuva määrittelyjoukossaan $\mathbb{R} \setminus \{-2, 4\}$. Koska

$$f(x) = \frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x-4)} = \frac{x+3}{x-4}, \tag{4.36}$$

niin piste $x = -2$ on f:n poistuva epäjatkuvuuspiste ja siten f saadaan määrittelyllä (4.36) jatkettua jatkuvaksi joukkoon $\mathbb{R} \setminus \{4\}$.

d) Esimerkin 4.32 funktio on paloittain jatkuva joukossa $\mathbb{R}$. Miksi **b**- ja **c**-kohtien funktiot eivät ole paloittain jatkuvia $\mathbb{R}$:ssä?

Lauseen 4.12 mukaan jatkuvista funktioista yhdistetty funktio on jatkuva:

Lause 4.37. *Olkoon $g\colon I \to \mathbb{R}$ jatkuva pisteessä $a \in I$ ja olkoon f määritelty pisteen $g(a)$ sisältävällä välillä ja jatkuva pisteessä $g(a)$. Silloin yhdistetty funktio $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ on jatkuva pisteessä a.*

Esimerkki 4.38. Koska $\sqrt{x}$ on jatkuva joukossa $[0, \infty)$ (lause 4.11), niin funktio

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-4}}$$

on jatkuva määrittelyjoukossaan $(-\infty, -3] \cup (4, \infty)$.

Seuraavan peruslauseen joudumme ottamaan käyttöön todistamatta. Kuva piirtämällä lause on kuitenkin helppo uskoa, koska ”jatkuvan funktion kuvaaja voidaan piirtää kynää nostamatta”. Todistuksessa (ks. [5, Appendix E]) tarvitaan *supremumin (least upper bound)* käsitettä ja *täydellisyysaksioomaa*.

Lause 4.39 (Jatkuvien funktioiden väliarvolause, JVAL)**.** *Olkoon f jatkuva suljetulla ja rajoitetulla välillä $[a,b]$. Silloin f saavuttaa kaikki arvojen $f(a)$ ja $f(b)$ välissä olevat arvot. Toisin sanoen: jos K on arvojen $f(a)$ ja $f(b)$ välissä, niin on olemassa piste $c \in [a,b]$, jolle $f(c) = K$.*

Seuraava väliarvolauseen erikoistapaus on syytä mainita erikseen.

Lause 4.40 (Bolzanon lause)**.** *Olkoon f jatkuva suljetulla ja rajoitetulla välillä $[a,b]$ ja olkoot $f(a)$ ja $f(b)$ erimerkkiset, ts. $f(a)f(b) < 0$. Silloin on olemassa $c \in [a,b]$ siten, että $f(c) = 0$. Toisin sanoen: jatkuva funktio ei voi vaihtaa merkkiään saamatta arvoa 0.*

Esimerkki 4.41. Tutkitaan jatkuvan funktion $f(x) = x^5 - 3x + 1$ nollakohtia. Tiedetään, että tällä 5. asteen polynomilla on korkeintaan 5 nollakohtaa, mutta yleistä ratkaisukaavaa niiden löytämiseksi ei ole. Tutkitaan kokeilemalla: koska $f(-2) = -25 < 0$ ja $f(-1) = 3 > 0$, niin välillä $[-2,-1]$ on ainakin yksi nollakohta. Puolivälissä $f(-1.5) \approx -2.09 < 0$, joten nollakohta on välillä $[-1.5,-1]$. Tämän välin puolivälissä $f(-1.25) \approx 1.70 > 0$, joten nollakohta on välillä $[-1.5,-1.25]$. Näin voidaan jatkaa, kunnes haluttu tarkkuus on saavutettu. Kyseisen nollakohdan likiarvo yhdeksällä desimaalilla on $-1.388\,791\,984$.

Tämä *puolitusmenetelmä* on yksinkertaisin esimerkki numeerisista juurtenhakumenetelmistä.

Lauseen 2.13 mukaan aidosti monotoninen funktio $f\colon I \to \mathbb{R}$ on injektio ja siten rajoittumalla $f\colon I \to f(I)$ on käänteisfunktio $f^{-1}\colon f(I) \to I$.

Lause 4.42. *Välillä I aidosti kasvavan (vähenevän) jatkuvan funktion f kuvajoukko $f(I)$ on väli ja käänteiskuvaus $f^{-1}\colon f(I) \to I$ on myös aidosti kasvava (vähenevä) ja jatkuva.*

Todistus. Olkoon f aidosti kasvava (vähenevän funktion tapaus vastaavasti). Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että väli on suljettu ja rajoitettu, ts. $I = [a,b]$.

Osoitetaan ensin, että $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$. Aidon kasvavuuden nojalla $f(a) \le f(x) \le f(b)$ kaikilla $x \in [a,b]$, ts. kaikki f:n arvot ovat välillä $[f(a), f(b)]$. Toisaalta väliarvolauseen mukaan f saavuttaa kaikki arvot väliltä $[f(a), f(b)]$.

f^{-1}:n aito kasvavuus todistettiin lauseessa 2.15.

f^{-1}:n jatkuvuus: Olkoon $y_0 = f(x_0) \in (f(a), f(b))$. Osoitetaan, että f^{-1} on jatkuva pisteessä y_0 (päätepisteet vastaavasti). Valitaan $\epsilon > 0$ niin pieneksi, että $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset [a, b]$. Koska f on aidosti kasvava, niin $f(x_0 - \epsilon) < y_0 < f(x_0 + \epsilon)$. Nyt voidaan valita $\delta > 0$ siten, että $(y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subset (f(x_0 - \epsilon), f(x_0 + \epsilon))$, jolloin f^{-1}:n aidon kasvavuuden nojalla $f^{-1}((y_0 - \delta, y_0 + \delta)) \subset (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$. Piirrä kuva! □

Lause 4.43. *Potenssifunktio x^r, $r \in \mathbb{Q}$, on jatkuva määrittelyjoukossaan.*

Todistus. Tapaus $r = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. $x^r = x^{1/n}$ on tällöin jatkuvan aidosti kasvavan funktion x^n käänteisfunktio. Väite seuraa lauseesta 4.42.

Tapaus $r = m/n$, $n \in \mathbb{N}$. $x^r = (x^{1/n})^m$ on kahden jatkuvan funktion $g(x) = x^{1/n}$ ja $f(y) = y^m$ yhdiste ja siten jatkuva. □

Lause 4.44. $\sin x$*,* $\cos x$ *ja* $\tan x$ *ovat jatkuvia määrittelyjoukoissaan.*

Todistus. Todistetaan väite ensin sinille. Olkoon $a \in \mathbb{R}$. On osoitettava, että

$$\lim_{x \to a} \sin x = \sin a.$$

Merkitsemällä $x = a + h$ huomataan, että on yhtäpitävää todistaa, että

$$\lim_{h \to 0} \sin(a + h) = \sin a.$$

Käytetään summakaavaa (lause 3.22):

$$\sin(a + h) = \sin a \cos h + \cos a \sin h \to \sin a \cdot 1 + \cos a \cdot 0 = \sin a,$$

kun $h \to 0$, sillä sinin ja kosinin määritelmien mukaan $\lim_{h \to 0} \sin h = 0$ ja $\lim_{h \to 0} \cos h = 1$. Kosinia koskeva väite todistetaan vastaavalla tavoin. Tangentti on jatkuva, sillä

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$ □

Lause 4.45. *Eksponenttifunktio a^x $(a > 0)$ on jatkuva $\mathbb{R}$:ssä.*

Todistus. Määritelmästä (3.31) seuraa, että

$$\lim_{x \to 0} a^x = \lim_{n \to \infty} a^{1/n}.$$

Juuren määritelmästä puolestaan seuraa, että

$$\lim_{n \to \infty} a^{1/n} = 1 = a^0,$$

joten $\lim_{x\to 0} a^x = a^0$ ja eksponenttifunktio on siten jatkuva 0:ssa. Jos nyt $y \in \mathbb{R}$, niin

$$\lim_{x\to y} a^x = \lim_{x\to y} \left(a^y a^{x-y}\right) = a^y \lim_{x\to y} a^{x-y} = a^y a^0 = a^y,$$

joten eksponenttifunktio on jatkuva pisteessä y. □

Koska trigonometriset funktiot ja eksponenttifunktio ovat jatkuvia, niin myös niiden käänteisfunktiot eli arkusfunktiot ja logaritmifunktio ovat lauseen 4.42 mukaan jatkuvia.

5 Kompleksiluvut [13, Appendix C–D]

Joukkoa $\mathbb{N}$ laajempien lukujoukkojen käyttöönottoa voidaan perustella erilaisten yhtälöiden ratkaisujen hakemisella:

Yhtälö	Ratkaisu
$x + 2 = 5$	$x = 3 \in \mathbb{N}$
$x + 5 = 2$	$x = -3 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$
$2x = 3$	$x = \frac{3}{2} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$
$x^2 = 2$	$x = \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
$x^2 + 1 = 0$	ei reaalista ratkaisua

Tässä myös viimeisellä yhtälöllä on ratkaisu, kunhan otamme käyttöön reaalilukuja laajemman kompleksilukujen joukon $\mathbb{C}$. Lukujoukkoja siis laajennetaan järjestyksessä $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Tavoitteena on oppia laskemaan kompleksilukujen peruslaskutoimituksia sekä koordinaatti- että napakoordinaattimuodossa, hakemaan kompleksiluvun juuret ja jakamaan polynomi tekijöihin.

5.1 Peruslaskutoimitukset

Määritelmä 5.1. *Kompleksilukujen joukko* $\mathbb{C}$ koostuu reaalilukupareista $z = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, joita merkitään $z = a + bi$ ja joille määritellään *summa* kaavalla

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

ja *tulo* kaavalla

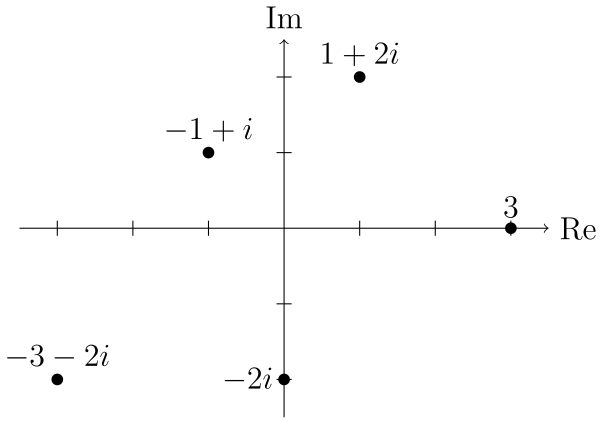
$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Alkiota $z \in \mathbb{C}$ kutsutaan *kompleksiluvuksi (complex number).*

Käytetään myös merkintöjä

$$a + bi = a + ib = a + bj = a + jb.$$

Kompleksilukuja voidaan havainnollistaa esittämällä ne pisteinä tai vektoreina *kompleksitasossa (complex plane)*.



Kompleksiluku $a+0i$ samastetaan reaaliluvun a kanssa ja merkitään $a+0i = a$. Niinpä voidaan tulkita, että $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Samoin voidaan merkitä $0 + bi = bi$. Erityisesti

$$1 = (1, 0) = 1 + 0i \quad \text{ja} \quad i = (0, 1) = 0 + 1i.$$

Kompleksilukua i kutsutaan *imaginaariyksiköksi (imaginary unit)*. Negatiivisten koordinaattien tapauksessa merkitään esimerkiksi $(-2) + (-3)i = -2 - 3i$.

Olkoon $z = a + bi$ kompleksiluku. Tällöin

- $a = \operatorname{Re} z$ on z:n *reaaliosa* ja
- $b = \operatorname{Im} z$ on z:n *imaginaariosa*.
- Jos $b = 0$, on z *reaalinen*,
- jos $b \neq 0$, on z *imaginaarinen* ja
- jos $a = 0$ ja $b \neq 0$, on z *puhtaasti imaginaarinen*.

Kompleksiluvut ovat samoja, jos niiden reaali- ja imaginaariosat ovat samoja: $z = w$ jos ja vain jos $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} w$ ja $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} w$.

Määritelmä 5.2. Kompleksiluvun $z = a + bi$ *vastaluku (negative)* on

$$-z = -a - bi$$

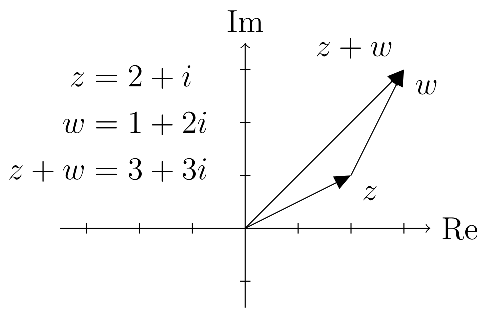
(jolloin $z + (-z) = 0$). Kompleksilukujen $z = a + bi$ ja $w = c + di$ *erotus (difference)* $z - w$ määritellään

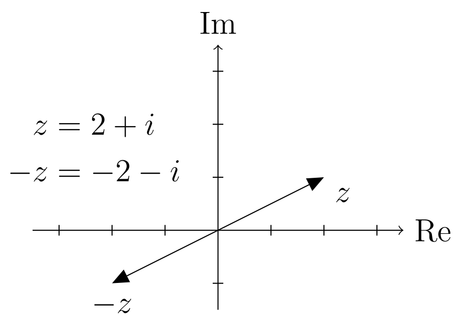
$$z - w = z + (-w) = (a - c) + (b - d)i.$$

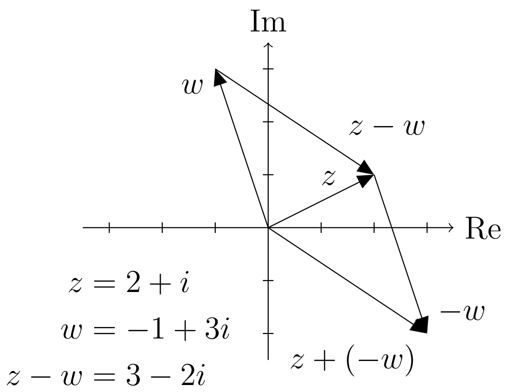
Lasketaan reaaliluvun $t = t + 0i$ ja kompleksiluvun $a + bi$ tulo määritelmän 5.1 mukaan:

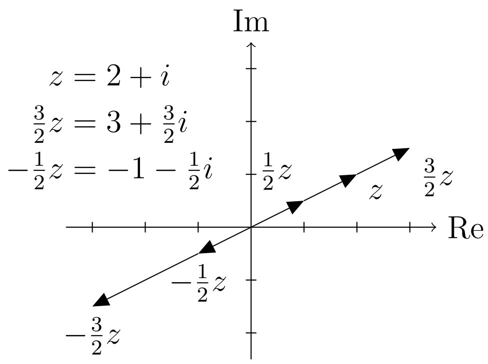
$$t(a + bi) = (t + 0i)(a + bi) = (ta - 0 \cdot b) + (tb + 0 \cdot a)i = ta + tbi,$$

eli sekä reaali- että imaginaariosa kerrotaan luvulla t. Näin ollen kompleksiluvuille yhteenlasku, vastaluku, erotus ja reaaliluvulla kertominen toimivat täsmälleen samoin kuin vastaavat operaatiot tasovektoreille, joten geometriset tulkinnat ovat myös samat kuin tasovektoreille:









Esimerkki 5.3. **a)** $\text{Re}(-2 - 3i) = -2$ ja $\text{Im}(-2 - 3i) = -3$
b) $(3 - 2i) - (-5 + 3i) = 8 - 5i$

Lause 5.4. $i^2 = i \cdot i = -1$.

Todistus. Kirjoitetaan $i = 0 + 1i$ ja lasketaan tulo määritelmän 5.1 mukaan. Nyt $a = c = 0$ ja $b = d = 1$, joten

$$\begin{aligned} i^2 &= i \cdot i = (0 + 1i)(0 + 1i) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + (0 \cdot 1 + 1 \cdot 0)i \\ &= -1 + 0i = -1. \end{aligned}$$ □

Lasketaan nyt kompleksilukujen $a + bi$ ja $c + di$ tulo auki kertomalla aivan kuten reaalisia binomeja ja ottamalla huomioon tulos $i^2 = -1$:

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + \underbrace{bdi^2}_{=-bd} = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Tulos on sama kuin määritelmässä 5.1, joten tulo voidaan laskea siten, että suoritetaan kertolasku aivan kuten i olisi reaaliluku ja sievennetään $i^2 = -1$. Tulon geometriseen tulkintaan palataan myöhemmin.

Esimerkki 5.5. $(-3 - 2i)(5 + i) = -15 - 3i - 10i - 2i^2 = -13 - 13i$

Lause 5.6. *Jokaisella kompleksiluvulla $z \neq 0$ on olemassa yksikäsitteinen* käänteisluku (reciprocal) *z^{-1}, jolle pätee $zz^{-1} = 1$.*

Todistus. Käänteisluvun olemassaolo: Olkoon $z = a + bi \neq 0$. Voidaan valita

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i, \tag{5.7}$$

jolloin $zz^{-1} = \cdots = 1$, kuten voit suoralla laskulla tarkastaa.

Yksikäsitteisyys: Jos u ja v ovat z:n käänteislukuja, ts. $zu = 1$ ja $zv = 1$, niin $zu = zv$ ja siten $uzu = uzv$. Koska myös $uz = 1$, niin $1 \cdot u = 1 \cdot v$ ja siten $u = v$. □

Määritelmä 5.8. Kompleksilukujen z ja w *osamäärä (quotient)* $\dfrac{z}{w}$, missä $w \neq 0$, määritellään asettamalla

$$\frac{z}{w} = zw^{-1}.$$

Erityisesti $\dfrac{1}{z} = 1 \cdot z^{-1} = z^{-1}$.

Reaaliluvuille $a = a+0i$ ja $b = b+0i$ kompleksiset laskutoimitukset (yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolasku) antavat samat tulokset kuin vastaavat reaaliset laskutoimitukset. Lisäksi seuraavan lauseen mukaan kompleksiset laskutoimitukset toteuttavat samat peruslait kuin reaalilukujen laskutoimitukset.

Siten kompleksilukujen laskutoimitukset laajentavat reaalilukujen laskutoimitukset $\mathbb{R}^2$:een.[1]

Lause 5.9. *Kaikilla x, y ja $z \in \mathbb{C}$ pätee:*

$$\begin{aligned}
&x + y = y + x \quad \textit{ja} \quad xy = yx && \textit{(vaihdantalait)}\\
&x + (y + z) = (x + y) + z \quad \textit{ja} \quad x(yz) = (xy)z && \textit{(liitäntälait)}\\
&x(y + z) = xy + xz && \textit{(osittelulaki)}
\end{aligned}$$

Todistus. Nämä voidaan todistaa suorilla laskuilla. Todistetaan esimerkiksi tulon vaihdantalaki: Merkitään $x = x_1 + x_2 i$ ja $y = y_1 + y_2 i$. Tällöin

$$\begin{aligned}
xy &= (x_1 + x_2 i)(y_1 + y_2 i)\\
&= x_1 y_1 + x_1 y_2 i + x_2 y_1 i + x_2 y_2 i^2\\
&= y_1 x_1 + y_1 x_2 i + y_2 x_1 i + y_2 x_2 i^2\\
&= (y_1 + y_2 i)(x_1 + x_2 i) = yx.
\end{aligned}$$ □

Lemma 5.10. *Kompleksiluvuille $z, w \neq 0$ pätee $z^{-1}w^{-1} = (zw)^{-1}$, ts.*

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{w} = \frac{1}{zw}.$$

Todistus. $zz^{-1} = 1$ ja $ww^{-1} = 1$, joten

$$(zw)\left(z^{-1}w^{-1}\right) = \left(zz^{-1}\right)\left(ww^{-1}\right) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Niinpä $z^{-1}w^{-1}$ on luvun zw käänteisluku, mitä väitettiinkin. □

Tästä lemmasta seuraa, että laventaminen ja supistaminen on luvallista: jos $z \neq 0$, niin $z(1/z) = 1$ ja siten

$$\frac{v}{w} = \frac{v}{w} z \frac{1}{z} = vz \frac{1}{w} \frac{1}{z} = vz \frac{1}{wz} = \frac{vz}{wz}.$$

Esimerkki 5.11. a) Ilmoita luvun $2 + 3i$ käänteisluku muodossa $a + bi$.
Ratkaisu. Voitaisiin käyttää kaavaa (5.7), mutta on yksinkertaisempaa laventaa luvulla $2 - 3i$:

$$(2 + 3i)^{-1} = \frac{1}{2 + 3i} = \frac{2 - 3i}{(2 + 3i)(2 - 3i)} = \frac{2 - 3i}{4 - 9i^2} = \frac{2 - 3i}{13} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13} i.$$

[1] $\mathbb{R}$ varustettuna laskutoimituksilla $(+, \cdot)$ on *kunta* (ks. [3]) ja $\mathbb{C}$ varustettuna vastaavilla laskutoimituksilla on reaalilukukunnan *kuntalaajennus*.

Voit tarkastaa vastauksen suoralla laskulla:

$$(2+3i)\left(\frac{2}{13}-\frac{3}{13}i\right)=\cdots=1.$$

b) Ilmoita luku $\dfrac{3-4i}{-2+i}$ muodossa $a+bi$.

Ratkaisu. Lavennetaan luvulla $-2-i$:

$$\frac{3-4i}{-2+i}=\frac{(3-4i)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)}=\frac{-10+5i}{5}=-2+i.$$

c) Ratkaise z yhtälöstä $(2-i)z=1+i$.
Ratkaisu. Jaetaan yhtälö puolittain $(2-i)$:llä:

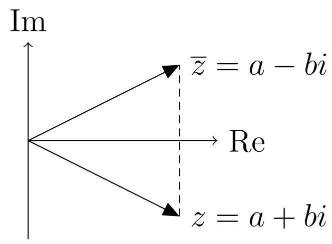
$$z=\frac{1+i}{2-i}=\frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{1+3i}{5}=\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i.$$

5.2 Liittoluku ja itseisarvo

Määritelmä 5.12. Kompleksiluvun $z=a+bi$ *liittoluku* eli *kompleksikonjugaatti (conjugate)* $\overline{z}$ määritellään asettamalla

$$\overline{z}=a-bi.$$

Esimerkissä 5.11 lavennettiin siis nimittäjän liittoluvulla. Geometrisesti liittoluvun hakeminen vastaa peilausta reaaliakselin suhteen:



Esimerkki 5.13. $\overline{-2-3i}=-2+3i$

Lause 5.14.

(1) $\overline{\overline{z}}=z$

(2) $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$

(3) $\overline{zw}=\overline{z}\cdot\overline{w}$

(4) $\overline{z/w}=\overline{z}/\overline{w}\quad(w\neq 0)$

(5) $z\in\mathbb{R}$ *jos ja vain jos* $z=\overline{z}$

Todistus. (2) Merkitään $z = a + bi$ ja $w = c + di$. Nyt

$$\overline{z+w} = \overline{(a+c)+(b+d)i} = (a+c)-(b+d)i = (a-bi)+(c-di) = \overline{z}+\overline{w}.$$

Muut kohdat todistetaan samaan tapaan. (1) ja (5) ovat lisäksi geometrisesti ilmeisiä väittämiä. □

Määritelmä 5.15. Kompleksiluvun $z = a+bi$ *itseisarvo* eli *moduli (absolute value, modulus)* $|z|$ määritellään asettamalla

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Geometrisesti itseisarvo on luvun paikkavektorin pituus.

Esimerkki 5.16. $|-2-3i| = \sqrt{(-2)^2+(-3)^2} = \sqrt{13}$

Lause 5.17.

(0) $|z|^2 = z\overline{z}$

(1) $|z| = 0$ *jos ja vain jos* $z = 0$

(2) $|z| = |\overline{z}|$

(3) $|zw| = |z||w|$

(4) $|z/w| = |z|/|w| \quad (w \neq 0)$

(5) $|z+w| \leq |z|+|w| \quad$ *(kolmioepäyhtälö)*

Todistus. (0) Merkitään $z = a + bi$. Nyt

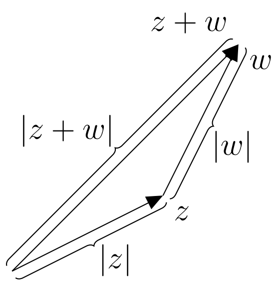
$$z\overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2+b^2 = |z|^2.$$

(3) Käyttämällä kohtaa (0) saadaan

$$|zw|^2 = zw\overline{zw} = zw\overline{z}\,\overline{w} = z\overline{z}w\overline{w} = |z|^2|w|^2,$$

mistä väite seuraa ottamalla puolittain neliöjuuri.

Muut kohdista (0)–(4) todistetaan samaan tapaan. (5) on geometrisesti selvä, sillä $|z+w|$ on summavektorin pituus ja $|z|$ ja $|w|$ ovat summattavien vektorien pituuksia.



Kohta (5) todistetaan yleisemmässä muodossa $\mathbb{R}^n$:n vektoreille opintojaksolla Insinöörimatematiikka 2. □

Huomautus 5.18. $|z-w|$ on kompleksilukujen z ja w välinen etäisyys (vrt. sivun 75 kuvaan vektorista $z-w$).

Itseisarvoja tai liittolukuja sisältävän kompleksilukuyhtälön tai -epäyhtälön ratkaisujoukko voidaan monesti selvittää merkitsemällä $z = x+yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Esimerkki 5.19. Ratkaise **a)** $\overline{z} - z = i\overline{z} + 4$ **b)** $\left|\dfrac{z-2i}{z-1}\right| = 1$
c) $|z-(2+3i)| = 2$ **d)** $|2z-\overline{z}| \le 1$
Ratkaisu. a) Merkitään $z = x+yi$. Yhtälö tulee muotoon

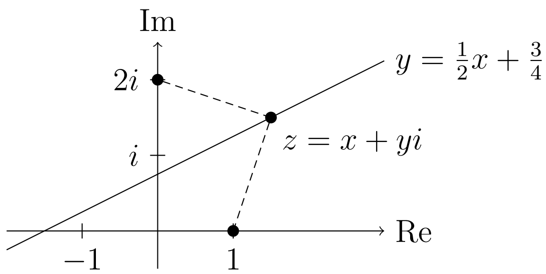
$$\begin{aligned} & x - yi - (x+yi) = i(x-yi) + 4 \\ \Leftrightarrow\quad & -2yi = xi - yi^2 + 4 \\ \Leftrightarrow\quad & -2yi = (4+y) + xi \end{aligned}$$

Merkitään reaaliosat keskenään ja imaginaariosat keskenään yhtäsuuriksi yhtälön molemmin puolin: $0 = 4+y$ ja $-2y = x$, joista $y = -4$ ja $x = 8$. Yhtälön ratkaisu on siis $z = 8-4i$.
b)

$$\left|\frac{z-2i}{z-1}\right| = \frac{|z-2i|}{|z-1|} = 1 \quad\Leftrightarrow\quad |z-2i| = |z-1| \quad (\text{ja } z \neq 1)$$

Merkitään nyt $z = x+yi$:

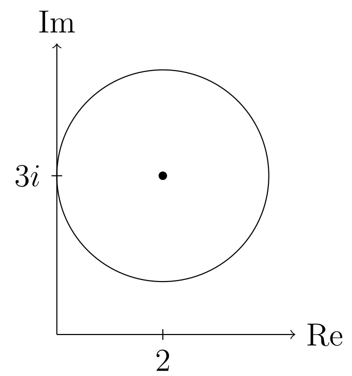
$$\begin{aligned} & |x+yi-2i| = |x+yi-1| \\ \Leftrightarrow\quad & |x+(y-2)i| = |(x-1)+yi| \\ \Leftrightarrow\quad & \sqrt{x^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x-1)^2+y^2} \\ \Leftrightarrow\quad & x^2+y^2-4y+4 = x^2-2x+1+y^2 \\ \Leftrightarrow\quad & y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \end{aligned}$$



Ratkaisujoukko on kuvan mukainen suora kompleksitasossa. Geometrinen tulkinta yhtälölle $|z-2i| = |z-1|$ on, että haetaan kaikki ne pisteet z, jotka ovat yhtä kaukana luvuista $2i$ ja 1.

c) Merkitään $z = x + yi$. Yhtälö tulee muotoon

$$\begin{aligned} & |x + yi - (2 + 3i)| = |(x-2) + (y-3)i| = 2 \\ \Leftrightarrow \quad & \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = 2 \\ \Leftrightarrow \quad & (x-2)^2 + (y-3)^2 = 4 \end{aligned}$$



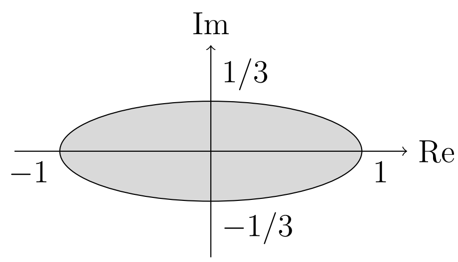
Ratkaisujoukko on $2+3i$ -keskinen 2-säteinen ympyrä kompleksitasossa. Tämä voitaisiin päätellä suoraankin huomautuksen 5.18 avulla: yhtälön

$$|z - z_1| = R$$

toteuttavat kaikki ne kompleksiluvut z, jotka ovat etäisyydellä R luvusta z_1, ts. ratkaisujoukko on z_1-keskinen R-säteinen ympyrä.

d) Merkitään $z = x + yi$. Epäyhtälö tulee muotoon

$$\begin{aligned} & |2x + 2yi - (x - yi)| = |x + 3yi| = \sqrt{x^2 + (3y)^2} \leq 1 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + 9y^2 \leq 1 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} \leq 1 \end{aligned}$$



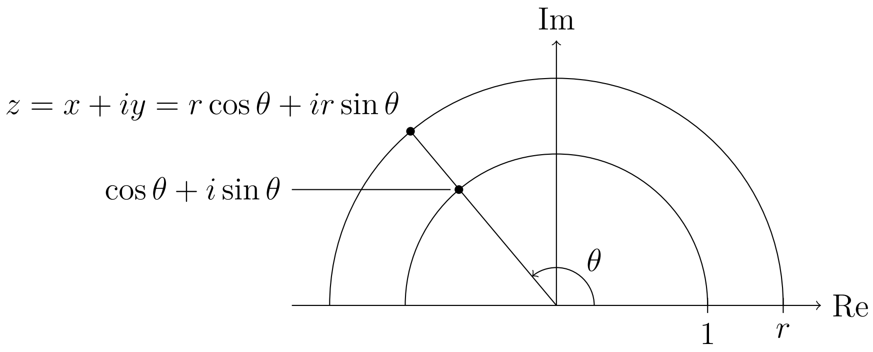
Epäyhtälö toteutuu niillä $z = x + yi$, jotka ovat ellipsin $x^2 + 9y^2 = 1$ rajaamassa joukossa.

5.3 Napakoordinaattimuoto ja eksponenttifunktio

Kompleksiluku $z = x + yi$ voidaan ilmaista *napakoordinaattien (polar coordinates)* r ja θ avulla, missä $r = |z|$ on z:n etäisyys origosta kompleksitasossa ja θ on z:n paikkavektorin ja reaaliakselin välinen kulma mitattuna reaaliakselista vastapäivään. Kosinin ja sinin määritelmien mukaan kulmaa θ vastaava kehäpiste yksikköympyrällä on $(\cos\theta, \sin\theta)$, joten r-säteisellä ympyrällä kehäpiste on $(x, y) = r(\cos\theta, \sin\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Niinpä kompleksiluvun $z = x + yi$ *napakoordinaattimuoto (polar form)* on

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\cos\theta + ir\sin\theta.} \tag{5.20}$$

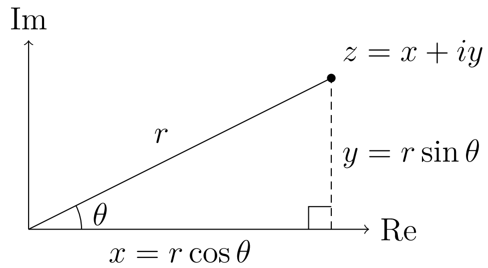
Kulmaa θ merkitään myös $\theta = \arg z$ ja kutsutaan *vaihekulmaksi* eli *argumentiksi (argument)*.



Reaali- ja imaginaariosien x ja y ja napakoordinaattien r ja θ välinen riippuvuus on siis

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}} \tag{5.21}$$

Tapauksessa $0 < \theta < \pi/2$ riippuvuudet voidaan lukea myös seuraavan kuvan suorakulmaisesta kolmiosta:



Käänteiseen suuntaan kaavat (5.21) voidaan kirjoittaa

$$\boxed{\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta &= \frac{y}{x} \quad (\text{kun } x \neq 0) \end{aligned}} \tag{5.22}$$

Jälkimmäisestä voidaan laskea suoraan $\theta = \arctan(y/x)$ silloin, kun $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Muissa tapauksissa kulman osuminen oikeaan neljännekseen tulee erikseen pohtia. θ ei ole yksikäsitteinen, sillä arvot $\theta + n2\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) vastaavat samaa kulmaa. Tilanteesta ja sovelluksesta riippuen θ on tapana valita väliltä $[0, 2\pi]$ tai $[-\pi, \pi]$.

Esimerkki 5.23. Esitä napakoordinaattimuodossa $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
a) $z = \sqrt{3} + i$, **b)** $z = -3 + i$.

Ratkaisu. a) Itseisarvoksi lasketaan $r = |z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2$. Nyt $0 < \theta < \pi/2$ ja $\tan\theta = 1/\sqrt{3}$, joten $\theta = \pi/6$. Piirrä ko. muistikolmio kompleksitasoon! Siten

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

b) Nyt $r = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$. Piste z on toisessa koordinaattineljänneksessä, joten $\cos\theta = -3/\sqrt{10}$. Piirrä kuva! Siten

$$\theta = \arccos\left(\frac{-3}{\sqrt{10}}\right) \approx 2{,}8$$

ja

$$z \approx \sqrt{10}\left(\cos(2{,}8) + i\sin(2{,}8)\right).$$

Lause 5.24. *Jos $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ ja $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, niin*

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2\Big(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\Big) \qquad \textit{ja} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}\Big(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\Big) \qquad (z_2 \neq 0). \end{aligned}$$

Todistus. Lasketaan:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2\left((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\right) \\ &= r_1 r_2\Big(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\Big), \end{aligned}$$

missä viimeinen yhtäsuuruus seuraa lauseen 3.22 summakaavoista. z_1/z_2 lasketaan vastaavasti. □

Ensimmäisen kaavan mukaan tulon itseisarvo on tekijöiden itseisarvojen tulo ja tulon argumentti on tekijöiden argumenttien summa, joten lause antaa geometrisen tulkinnan tulolle. Jälkimmäinen kaava antaa vastaavan tulkinnan osamäärälle. Esimerkiksi $|\cos\theta + i\sin\theta| = 1$, joten luvulla $\cos\theta + i\sin\theta$ kertominen vastaa kiertoa kulman θ verran. Erityisesti luvulla $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ kertominen vastaa kiertoa $\frac{\pi}{2}$:n verran.

Kompleksiluvuille potenssit z^n, z^0 ja z^{-n} ($n \in \mathbb{N}$) määritellään kuten reaaliluvuille.

Lause 5.25 (Moivren kaava)**.** *Jos $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ja $n \in \mathbb{N}$, niin*

$$z^n = r^n\Big(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\Big).$$

Todistus. Induktio n:n suhteen. Lause pätee, kun $n = 1$. Oletetaan siis, että väite pätee, kun $n = k$, ts.

$$z^k = r^k\Big(\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)\Big).$$

Nyt lauseen 5.24 mukaan

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= z^k z = r^k\Big(\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)\Big)r\Big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\Big) \\ &= r^{k+1}\Big(\cos(k\theta + \theta) + i\sin(k\theta + \theta)\Big) \\ &= r^{k+1}\Big(\cos((k+1)\theta) + i\sin((k+1)\theta)\Big). \end{aligned}$$

□

Määritelmä 5.26. Määritellään *kompleksimuuttujan eksponenttifunktio* asettamalla

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Määriteltiin siis funktio $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$. Reaaliluvulle x saadaan $f(x) = f(x + 0i) = e^x(1 + 0i) = e^x$, ts. laajennettiin eksponenttifunktion määrittely reaaliluvuilta kaikille $z \in \mathbb{C}$.

Asettamalla eksponenttifunktion määritelmässä $x = 0$ saadaan *Eulerin kaava*

$$\boxed{e^{iy} = \cos y + i\sin y.} \tag{5.27}$$

Seuraavat tutut laskusäännöt ovat voimassa myös kompleksiselle eksponenttifunktiolle.

Lause 5.28. $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ *ja* $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$.

Todistus. Merkitään $z_1 = x_1 + iy_1$ ja $z_2 = x_2 + iy_2$. Reaalisen eksponenttifunktion ominaisuuksia ja lausetta 5.24 käyttäen saadaan

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) \\ &= e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)) \\ &= e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

Toinen väite vastaavasti. □

Eksponenttifunktion avulla napakoordinaattimuodolle saadaan lyhyt merkintä

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}.} \tag{5.29}$$

Muotoa $z = re^{i\theta}$ kutsutaan napakoordinaattiesityksen *eksponenttimuodoksi.* Eksponenttimuotoa käyttäen kerto- ja jakolasku, komplementointi ja Moivren kaava voidaan kirjoittaa

$$\boxed{\begin{array}{ll} (1) & z_1z_2 = r_1e^{i\theta_1}r_2e^{i\theta_2} = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)} \\ (2) & \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}} = \dfrac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)} \\ (3) & \overline{z} = \overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta} \\ (4) & z^n = \left(re^{i\theta}\right)^n = r^ne^{in\theta} \end{array}} \tag{5.30}$$

Näistä (1) ja (2) seuraavat suoraan lauseesta 5.28 ja (4) on vain Moivren kaavan napakoordinaattiesitys kirjoitettuna eksponenttifunktion avulla. (3) seuraa kosinin parillisuudesta ja sinin parittomuudesta:

$$\begin{aligned} \overline{re^{i\theta}} &= \overline{r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))} \\ &= r(\cos(\theta) - i\sin(\theta)) \\ &= r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) \\ &= re^{-i\theta}. \end{aligned}$$

Korostetaan vielä, että $|re^{i\theta}| = r$ ja $\arg(re^{i\theta}) = \theta$, eli luvulla $re^{i\theta}$ kertominen tarkoittaa geometrisesti pituuden kertomista r:llä ja kiertoa kulman θ verran (lause 5.24).

Esimerkki 5.31. Olkoon $z = \sqrt{3} - i$ ja $w = 2 + 2i$. Muunna z ja w napakoordinaattimuotoon $re^{i\theta}$ ja laske zw ja $\dfrac{z}{w}$.

Ratkaisu. Muistikolmion avulla nähdään, että $z = 2e^{-i\pi/6}$ ja $w = 2\sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Siten

$$\begin{aligned} zw &= 2 \cdot 2\sqrt{2}e^{i(-\pi/6+\pi/4)} = 4\sqrt{2}e^{i\pi/12} \qquad \text{ja} \\ \frac{z}{w} &= \frac{2e^{-i\pi/6}}{2\sqrt{2}e^{i\pi/4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(-\pi/6-\pi/4)} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i5\pi/12}. \end{aligned}$$

Esimerkki 5.32. Olkoon $z = 2 - 2i$ ja $w = -5$. Esitä z ja w muodossa $re^{i\theta}$ ja laske zw, w/z, $\overline{z}$ ja z^5.
Ratkaisu. $z = 2\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ ja $w = 5e^{i\pi}$, joten

$$\begin{aligned} zw &= 10\sqrt{2}e^{(-\pi/4+\pi)i} = 10\sqrt{2}e^{i3\pi/4} \\ \frac{w}{z} &= \frac{5}{2\sqrt{2}}e^{(\pi-(-\pi/4))i} = \frac{5}{2\sqrt{2}}e^{i5\pi/4} \\ \overline{z} &= 2\sqrt{2}e^{i\pi/4} \\ z^5 &= \left(2\sqrt{2}\right)^5 e^{-i5\pi/4} = 128\sqrt{2}e^{i3\pi/4} \end{aligned}$$

Tässä viimeisessä kohdassa kulma $-5\pi/4$ ei ole välillä $[-\pi, \pi]$ tai $[0, 2\pi]$, joten se on syytä palauttaa jommalle kummalle välille, esim. $-5\pi/4 + 2\pi = 3\pi/4$.

Esimerkki 5.33. Esitä muodossa $a + bi$ luku $(1 + i)^{11}$.
Ratkaisu. Muunnetaan luku ensin napakoordinaattimuotoon, käytetään Moivren kaavaa ja palataan takaisin muotoon $a + bi$:

$$\begin{aligned} (1+i)^{11} &= \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^{11} = 2^{11/2}e^{i11\pi/4} = 2^{11/2}e^{i3\pi/4} \\ &= 2^{11/2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = 32\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) \\ &= -32 + 32i. \end{aligned}$$

Huomautus 5.34. Tekniikassa napakoordinaattimuodolle käytetään myös merkintää

$$z = re^{i\theta} = r\angle\theta,$$

ts. esimerkiksi

$$3e^{i\pi/4} = 3\angle\pi/4.$$

Esimerkki 5.35. Eulerin kaavasta saadaan tekniikassa usein käytetyt yhteydet trigonometristen ja hyperbolisten funktioiden välille. Laskemalla kaavat

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} &= \cos\theta - i\sin\theta \end{aligned}$$

(ks. (5.27) ja (5.30)) puolittain yhteen ja toisaalta vähentämällä puolittain saadaan

$$\boxed{\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \cosh(i\theta), \\ \sin\theta &= \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = -i\sinh(i\theta). \end{aligned}} \tag{5.36}$$

Esimerkki 5.37. Moivren kaavan mukaan

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta).$$

Toisaalta neliöimällä saadaan

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta - \sin^2\theta.$$

Vertaamalla yhtälöiden oikeiden puolten reaali- ja imaginaariosia saadaan trigonometriset muunnoskaavat

$$\boxed{\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta} \quad \text{ja} \quad \boxed{\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta}. \tag{5.38}$$

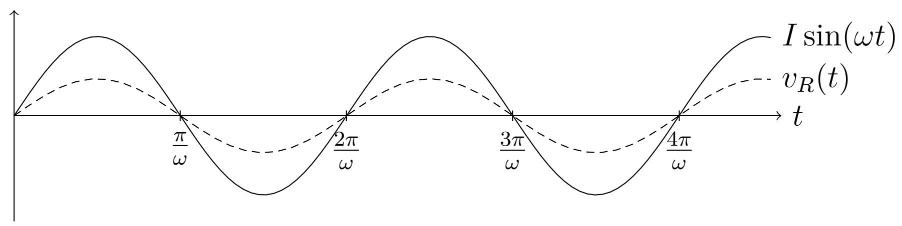
Esimerkki 5.39. Vaihtovirtapiirissä kulkee virta

$$I\sin(\omega t),$$

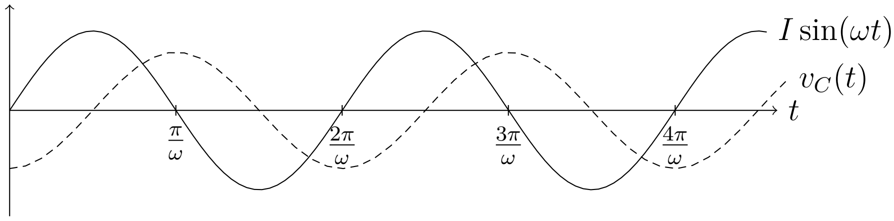
missä I (A) on virran maksimiarvo (amplitudi), ω (rad/s) kulmanopeus ja t (s) aika. Tällöin jännite riippuu piirin vastuksesta, kapasitanssista ja induktanssista. Oletetaan ensin, että piirissä on pelkästään joko vastus R ($\Omega = \mathrm{V/A}$), kondensaattori, jonka kapasitanssi on C ($\mathrm{F} = \mathrm{C/V} = \mathrm{As/V}$) tai käämi, jonka induktanssi on L ($\mathrm{H} = \mathrm{Vs/A}$). Tällöin jännite on

$$\begin{aligned} v_R(t) &= IR\sin(\omega t) && \text{(vastukselle)} \\ v_C(t) &= \frac{I}{\omega C}\sin(\omega t - \pi/2) && \text{(kondensaattorille)} \\ v_L(t) &= \omega LI\sin(\omega t + \pi/2) && \text{(käämille)} \end{aligned}$$

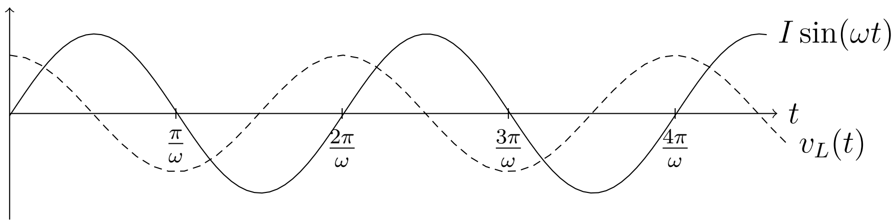
Jos piirissä on pelkkä vastus, niin jännite on samassa vaiheessa kuin virta:



Jos piirissä on pelkkä kondensaattori, niin jännite on $\pi/2$:n verran jäljessä virtaa, ts. *vaihe* on $-\pi/2$:



Jos piirissä on pelkkä käämi, niin jännite on $\pi/2$:n verran edellä virtaa, ts. vaihe on $\pi/2$:



Eulerin kaavan mukaan

$$\operatorname{Im}\left(e^{i\omega t}\right) = \operatorname{Im}(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)) = \sin(\omega t).$$

Koska $e^{-i\pi/2} = -i$ ja $e^{i\pi/2} = i$, niin

$$\begin{aligned}
v_R(t) &= \operatorname{Im}\left(IRe^{i\omega t}\right)\\
v_C(t) &= \operatorname{Im}\left(\frac{I}{\omega C}e^{i(\omega t-\pi/2)}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{I}{\omega C}e^{i\omega t}e^{-i\pi/2}\right) = \operatorname{Im}\left(I\left(\frac{-i}{\omega C}\right)e^{i\omega t}\right)\\
v_L(t) &= \operatorname{Im}\left(\omega LIe^{i(\omega t+\pi/2)}\right) = \operatorname{Im}\left(\omega LIe^{i\omega t}e^{i\pi/2}\right) = \operatorname{Im}\left(I(i\omega L)e^{i\omega t}\right)
\end{aligned}$$

Määritellään *kompleksinen impedanssi*

$$Z = \begin{cases} R & \text{vastukselle,}\\ \frac{-i}{\omega C} & \text{kondensaattorille,}\\ i\omega L & \text{käämille.} \end{cases}$$

Tällöin kussakin edellisistä tapauksista jännite voidaan esitettää muodossa

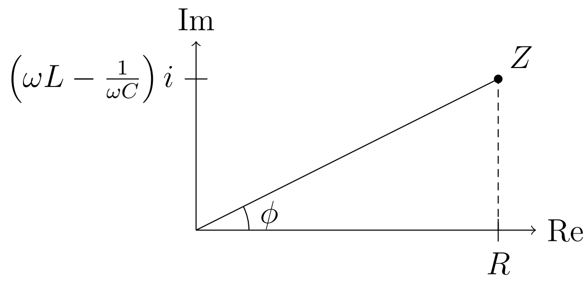
$$v(t) = \operatorname{Im}\left(IZe^{i\omega t}\right).$$

Oletetaan nyt, että piirissä on sekä vastus, kondensaattori että käämi (LCR-piiri). Tällöin jännite on (tarkasta laskemalla yhteen!)

$$v(t) = v_R(t)+v_C(t)+v_L(t) = \operatorname{Im}\left(I\left(R+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)i\right)e^{i\omega t}\right) = \operatorname{Im}\left(IZe^{i\omega t}\right),$$

kun yleistetään kompleksisen impedanssin määritelmä LCR-piirille asettamalla

$$Z = R + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) i.$$



Oheisesta kuvasta päätellään kompleksiluvun Z napakoordinaattiesityksen argumentiksi (koska $R \geq 0$)

$$\phi = \arctan\left(\frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}\right), \tag{5.40}$$

joten Z:n napakoordinaattiesitys on $Z = |Z|e^{i\phi}$. Niinpä

$$v(t) = \operatorname{Im}\left(I|Z|e^{i\phi}e^{i\omega t}\right) = I|Z| \operatorname{Im}\left(e^{i(\omega t+\phi)}\right) = I|Z|\sin(\omega t + \phi).$$

Jännitteen vaihe ϕ saadaan siten kaavalla (5.40). Itseisarvoa

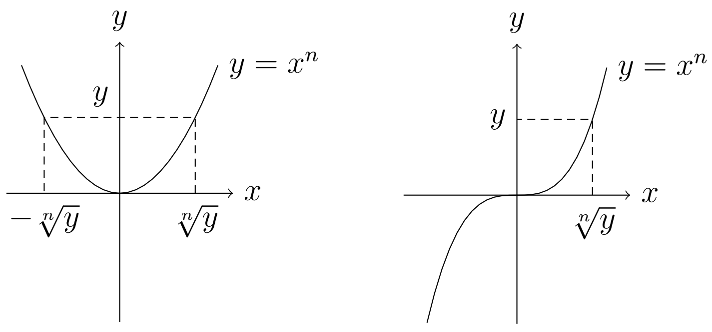
$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

kutsutaan LCR-piirin *impedanssiksi*.

5.4 Juuri

Muistetaan, että reaaliluvun $y \in \mathbb{R}$ ($y \neq 0$) n:s juuri ($n \in \mathbb{N}$) on luku x, jolle $x^n = y$. Voidaan erotella seuraavat tapaukset:

- n parillinen ja $y > 0$: on täsmälleen kaksi reaalista juurta $-\sqrt[n]{y}$ ja $\sqrt[n]{y}$.
- n parillinen ja $y < 0$: ei reaalisia juuria.
- n pariton: on täsmälleen yksi reaalinen juuri $\sqrt[n]{y}$.



parillinen n pariton n

Lauseen 5.43 mukaan kompleksilukujen joukossa juuria on sen sijaan aina n kappaletta.

Määritelmä 5.41. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Kompleksiluvun z *n:s juuri (root)* on mikä tahansa kompleksiluku w, joka toteuttaa yhtälön

$$w^n = z.$$

Esimerkki 5.42. a) i ja $-i$ ovat luvun -1:n toisia juuria, sillä

$$i^2 = -1 \qquad \text{ja} \qquad (-i)^2 = i^2 = -1.$$

Lauseen 5.43 mukaan muita toisia juuria ei ole.
b) Luvun $z = -8 = 8e^{i\pi}$ eräs kolmas juuri on $w = 2e^{i\pi/3}$, sillä

$$w^3 = \left(2e^{i\pi/3}\right)^3 = 2^3 e^{i(\pi/3)\cdot 3} = 8e^{i\pi} = z.$$

Lause 5.43. *Kompleksiluvulla $z = re^{i\theta} \neq 0$ on täsmälleen n erisuurta n:ttä juurta, jotka sijaitsevat $r^{1/n}$-säteisellä origokeskisellä ympyrällä tasaisesti kulman $2\pi/n$ välein.*

Todistus. Merkitään $w = se^{i\phi}$. Nyt

$$\begin{aligned} w^n = z &\Leftrightarrow s^n e^{in\phi} = re^{i\theta} \\ &\Leftrightarrow s^n = r \text{ ja } n\phi = \theta + k \cdot 2\pi, \;\; k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow s = r^{1/n} \text{ ja } \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \;\; k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Siten z:n juuret ovat

$$w = r^{1/n} \exp\left(i\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \tag{5.44}$$

jotka ovat erisuuria k:n arvoilla $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. $\square$

n:ttä juurta merkitään joskus $z^{1/n}$ tai $\sqrt[n]{z}$. Tämän merkinnän kanssa on kuitenkin oltava huolellinen, sillä ko. juuria on n kpl! Erityisesti yhtäältä $\sqrt{-1} = i$ ja toisaalta $\sqrt{-1} = -i$.

Käytännössä lausetta 5.43 on helpointa käyttää siten, että haetaan yksi juuri esimerkin 5.42 **b** menetelmällä napakoordinaattimuodossa. Loput juuret löytyvät kasvattamalla ensimmäisen juuren argumenttia kulman $2\pi/n$ välein.

Esimerkki 5.45. a) Hae 1:n neljännet juuret.
Ratkaisu. On haettava kaikki luvut w, joille $w^4 = 1$. Huomataan, että $w = 1 = e^{0i}$ on eräs juurista. Koska juuret ovat kulman $2\pi/4 = \pi/2$ välein, niin kaikki juuret ovat

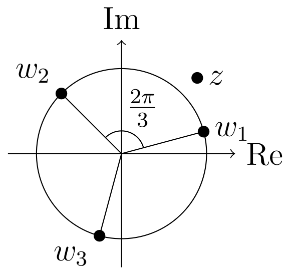
$$w = e^{0i},\ e^{i\pi/2},\ e^{i\pi},\ e^{i3\pi/2} = 1, i, -1, -i.$$

b) Hae luvun $z = (1 + i)$ kolmannet juuret.
Ratkaisu. Napakoordinaateissa $z = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Huomataan, että $w_1 = \left(\sqrt{2}\right)^{1/3} e^{i\pi/12}$ on eräs juuri, sillä

$$w_1^3 = \sqrt{2}e^{i(\pi/12)\cdot 3} = z.$$

Juuret ovat kulman $2\pi/3$ välein, joten kaikki juuret ovat

$$w_1 = 2^{1/6}e^{i\pi/12},\ w_2 = 2^{1/6}e^{i3\pi/4},\ w_3 = 2^{1/6}e^{i17\pi/12}.$$



5.5 Polynomi

Kompleksimuuttujan polynomi määritellään kuten reaalimuuttujan polynomi: n. asteen *polynomi (polynomial)* on funktio $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

missä *kertoimet (coefficients)* $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ ovat vakioita ja $a_n \neq 0$. Tapauksessa $n = 0$ kyseessä on 0. asteen polynomi eli vakiofunktio $p(x) = a_0$. Tällöin sallitaan myös tapaus $a_n = a_0 = 0$. Sanotaan, että $z \in \mathbb{C}$ on polynomin p *nollakohta (zero)*, jos $p(z) = 0$. Polynomiyhtälön $p(x) = 0$ ratkaisua kutsutaan *juureksi (root)*. Polynomin p astetta merkitään $\deg p$.

Esimerkki 5.46. **a)** Funktio $p(x) = 7x^5 - ix^2 + 3x + 1 + i$ on 5. asteen polynomi, jolle esimerkiksi

$$p(i) = 7i^5 - i^3 + 3i + 1 + i = 1 + 12i.$$

b) Toisen asteen polynomin $x^2 + 1$ ja kolmannen asteen polynomin $3x^3 - 2x + 1$ tulo on 5. asteen polynomi

$$(x^2 + 1)(3x^3 - 2x + 1) = 3x^5 + x^3 + x^2 - 2x + 1.$$

Lemma 5.47. *Jos $a, b \in \mathbb{C}$ ja $n \in \mathbb{N}$, niin*

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Tapauksissa $n = 1, 2$ ja 3 väite on:

$$\begin{aligned}
n = 1 : \qquad & a^1 - b^1 = (a - b) \\
n = 2 : \qquad & a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \\
n = 3 : \qquad & a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)
\end{aligned}$$

Todistus. Suora lasku:

$$\begin{aligned}
&(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\
&= a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} \\
&\quad - (a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + a^{n-3}b^3 + \cdots + ab^{n-1} + b^n) \\
&= a^n - b^n.
\end{aligned}$$

□

Lause 5.48 (Tekijöihinjako)**.** *Jos p on n. asteen polynomi ($n \geq 1$) ja $z \in \mathbb{C}$ on p:n nollakohta, niin p on jaollinen polynomilla $(x - z)$:*

$$p(x) = (x - z)q(x),$$

missä q on polynomi astetta $n - 1$.

Todistus. Merkitään $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$. Nyt

$$\begin{aligned}
&p(x) = p(x) - p(z) \\
&= a_n(x^n - z^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - z^{n-1}) + \cdots + a_1(x - z) + (a_0 - a_0).
\end{aligned} \tag{5.49}$$

Lemman 5.47 mukaan

$$\begin{aligned}
x^n - z^n &= (x - z)q_{n-1}(x), \\
x^{n-1} - z^{n-1} &= (x - z)q_{n-2}(x), \\
&\vdots
\end{aligned}$$

missä kunkin polynomin q_k aste on k. Niinpä p:n esityksessä (5.49) voidaan ottaa $x - z$ yhteiseksi tekijäksi ja nähdään, että

$$p(x) = (x - z)q(x),$$

missä polynomin q aste on $n - 1$. □

Tässä polynomi $q(x)$ on jakolaskun $p(x)/(x - z)$ tulos, joka saadaan laskemalla jakokulmassa. Lauseen 5.48 mukaan jako menee aina tasan, jos z on nollakohta. Katso esimerkki 6.62 tapauksesta, jossa jako ei mene tasan.

Esimerkki 5.50. Tarkastellaan polynomia $p(x) = x^3 + 3x^2 - 11x + 2$. Kokeilemalla huomataan, että $p(2) = 0$, joten $x - 2$ on p:n tekijä. Haetaan toinen tekijä jakolaskulla:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & & x^2 & +5x & -1 \\ \hline
x-2 & x^3 & +3x^2 & -11x & +2 \\
 & x^3 & -2x^2 & & \\ \cline{2-3}
 & & 5x^2 & -11x & \\
 & & 5x^2 & -10x & \\ \cline{3-4}
 & & & -x & +2 \\
 & & & -x & +2 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}$$

Siten $p(x) = (x - 2)(x^2 + 5x - 1)$. Tarkasta kertomalla!

Lause 5.51 (Algebran peruslause)**.** *Jokaisella ensimmäisen tai korkeamman asteen polynomilla on ainakin yksi nollakohta kompleksitasossa.*

Todistus. Helpohko todistus (jossa ei nojauduta analyyttisten funktioiden teoriaan) löytyy lähteestä [7]. □

Määritelmä 5.52. Olkoot $p(x)$ ja $q(x)$ polynomeja ja $k \in \mathbb{N}$. Jos $p(x) = (x - z)^k q(x)$, missä $q(z) \neq 0$, niin z on polynomin p *k-kertainen nollakohta.*

Esimerkki 5.53. Polynomilla

$$p(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18 = (x + 2)(x - 3)^2 = (x + 2)(x - 3)(x - 3)$$

on yksinkertainen nollakohta $z = -2$ ja kaksinkertainen nollakohta $z = 3$. Sanotaan, että monikerrat huomioiden polynomin nollakohdat ovat $z_1 = -2$, $z_2 = 3$ ja $z_3 = 3$.

Algebran peruslauseesta eli vähintään yhden nollakohdan olemassaolosta seuraa n:n nollakohdan olemassaolo:

Lause 5.54. *n. asteen polynomilla $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ on (monikerrat huomioiden) täsmälleen n nollakohtaa $z_1, \ldots, z_n$ ja p voidaan esittää muodossa*

$$p(x) = a_n(x - z_1)(x - z_2) \cdots (x - z_n).$$

Todistus. Algebran peruslauseen mukaan p:llä on nollakohta z_1. Lauseen 5.48 mukaisella jakolaskulla $p(x)/(x - z_1)$ saadaan

$$p(x) = (x - z_1)q_{n-1}(x),$$

missä q_{n-1}:n aste on $n - 1$. Algebran peruslauseen mukaan polynomilla q_{n-1} on nollakohta z_2, joten voidaan tehdä jakolasku $q_{n-1}(x)/(x-z_2)$ ja päädytään muotoon

$$p(x) = (x - z_1)(x - z_2)q_{n-2}(x),$$

missä q_{n-2}:n aste on $n - 2$. Menettelyä voidaan jatkaa kunnes viimeisen jakolaskun tulos on astetta 0 oleva polynomi eli vakio c ja p on tullut muotoon

$$p(x) = c(x - z_1)(x - z_2) \cdots (x - z_n).$$

Kertomalla auki n. asteen termiksi saadaan cx^n, joten täytyy olla $c = a_n$. □

Algebran peruslause ei sano mitään siitä, kuinka sen lupaama nollakohta löydetään. Reaalikertoimisen toisen asteen polynomin nollakohdat saadaan kuitenkin suoraan tutulla lauseen 5.56 ratkaisukaavalla.

Lemma 5.55. *Yhtälön $z^2 = -A$, $A > 0$, ratkaisut ovat $z = \pm i\sqrt{A}$.*

Todistus. Ratkaisut voitaisiin hakea lauseen 5.43 avulla tai "arvaamalla" kuten esimerkissä 5.42 ja vetoamalla lauseeseen 5.43 juurien lukumäärän osalta. Perustellaan tässä yksinkertaisessa tapauksessa tekijöihinjako ja juuret kuitenkin suoraan:

$$\begin{aligned}
& z^2 = -A \\
\Leftrightarrow \quad & z^2 + A = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & z^2 - \left(i\sqrt{A}\right)^2 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \left(z - i\sqrt{A}\right)\left(z + i\sqrt{A}\right) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & z = \pm i\sqrt{A}.
\end{aligned}$$

□

Lause 5.56. *Olkoon 2. asteen polynomi $p(x) = ax^2+bx+c$ reaalikertoiminen. Merkitään $D = b^2 - 4ac$ (*diskriminantti*). Tällöin p:n nollakohdat ovat*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad \text{jos } D \geq 0,$$
$$x = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}, \qquad \text{jos } D < 0.$$

Todistus. Todistetaan tapaus $D < 0$ (tapaus $D \geq 0$ vastaavasti). Neliöidään:

$$\begin{aligned}
& ax^2 + bx + c = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \\
\Leftrightarrow \quad & \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{4ac - b^2}{4a^2}.
\end{aligned}$$

Soveltamalla lemmaa 5.55 luvuille $z = x + \dfrac{b}{2a}$ ja $A = \dfrac{4ac - b^2}{4a^2} > 0$ ratkaisuiksi saadaan

$$x + \frac{b}{2a} = \pm i\sqrt{\frac{4ac - b^2}{4a^2}} = \pm i\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2|a|} = \pm i\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

Väite seuraa tästä yhtälöstä ratkaisemalla x. □

Esimerkki 5.57. Ratkaise **a)** $2x^2 + 4x - 3 = 0$ **b)** $4x^2 - 4x + 3 = 0$.
Ratkaisu. a) Ratkaisukaavalla

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 24}}{4} = -1 \pm \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

b) Ratkaisukaavalla

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 48}}{8} = \frac{4 \pm \sqrt{-32}}{8} = \frac{4 \pm i\sqrt{32}}{8} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Tässä juuria alettiin laskea lauseen 5.56 ensimmäisellä kaavalla. Kun huomataan, että diskriminantti juuren alla on negatiivinen, niin siirrytään toiseen kaavaan. Muistisääntönä vaidaan käyttää tietoa $\sqrt{-1} = \pm i$:

$$\sqrt{-32} = \sqrt{-1}\sqrt{32} = \pm i\sqrt{32}.$$

Myös 3. ja 4. asteen polynomiyhtälöille on olemassa ratkaisukaavat. Niitä ei kuitenkaan käytännössä juuri käytetä. Voidaan osoittaa, että 5. ja korkeamman asteen polynomiyhtälöille ei ole olemassa yleistä ratkaisukaavaa.

Lauseen 5.54 todistus antaa erään *juurtenhakualgoritmin*: "Arvataan" yksi juuri, tehdään jakolasku, "arvataan" alempiasteiselle polynomille juuri, tehdään jakolasku jne., kunnes tekijänä saadaan toisen asteen polynomi, jonka juuret saadaan ratkaisukaavalla. Käsin laskettaessa menetelmä ei käytännössä ole käyttökelpoinen, jos arvaamalla (eli kokeilemalla) ei löydetä uutta juurta. Monet numeeriset polynomin juurtenhakualgoritmit perustuvat kuitenkin tähän menetelmään, joten sen periaate on syytä tuntea.

Esimerkki 5.58. Hae polynomin **a)** $p(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{3}{2}$
b) $p(x) = x^3 - 6x^2 + 21x - 26$ nollakohdat ja jaa p tekijöihin.
Ratkaisu. a) Huomataan, että $x = -1$ on eräs nollakohta, joten $x + 1$ on p:n tekijä. Jakolaskulla saadaan

$$p(x) = (x+1)\left(x^2 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{3}{2}\right).$$

Ratkaisukaavalla toisen asteen tekijän nollakohdiksi lasketaan $x = -1$ ja $x = \frac{3}{2}$, eli

$$p(x) = (x+1)(x+1)\left(x - \tfrac{3}{2}\right) = (x+1)^2\left(x - \tfrac{3}{2}\right).$$

p:n nollakohdat ovat siis $x = \frac{3}{2}$ sekä kaksinkertainen nollakohta $x = -1$.
b) Huomataan, että $x = 2$ on eräs nollakohta, joten $x - 2$ on p:n tekijä. Jakolaskulla saadaan

$$p(x) = (x-2)(x^2 - 4x + 13).$$

Ratkaisukaavalla toisen asteen tekijän nollakohdiksi lasketaan

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm i\sqrt{36}}{2} = 2 \pm 3i.$$

p:n nollakohdat ovat siis 2 ja $2 \pm 3i$ ja tekijöihinjako

$$p(x) = (x-2)(x - (2+3i))(x - (2-3i)).$$

Mahdolliset rationaalijuuret löytyvät seuraavan lauseen avulla.

Lause 5.59. *Jos kokonaislukukertoimisella n. asteen polynomilla* $p(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0$ *on rationaalijuuri* a/b *(supistettu muoto), niin* a *on* a_0*:n tekijä ja* b *on* a_n*:n tekijä.*

Todistus. Olkoon a/b p:n juuri, missä kokonaislukujen a ja b suurin yhteinen tekijä on 1. Koska a/b on juuri, niin

$$p\left(\frac{a}{b}\right) = a_n\left(\frac{a}{b}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\frac{a}{b}\right) + a_0 = 0.$$

Kerrotaan puolittain b^n:llä:

$$\begin{aligned} & a_n a^n + a_{n-1}a^{n-1}b + \cdots + a_1 ab^{n-1} + a_0 b^n = 0 \\ \Rightarrow \quad & a_n a^n = b\left(-a_{n-1}a^{n-1} - \cdots - a_1 ab^{n-2} - a_0 b^{n-1}\right) \end{aligned}$$

Tässä sulkulauseke on kokonaisluku, koska kertoimet a_k sekä a ja b ovat kokonaislukuja. Niinpä b on tämän yhtälön oikean puolen tekijä, joten b on myös kokonaisluvun $a_n a^n$ tekijä. Koska a:lla ja b:llä ei ole ykköstä suurempia yhteisiä tekijöitä, täytyy b:n olla a_n:n tekijä (ns. *Eukleideen lemma*, ks. [2]).

a perustellaan a_0:n tekijäksi vastaavalla tavalla. □

Esimerkki 5.60. Hae polynomin $p(x) = 6x^3 + 13x^2 - 4$ rationaalijuuret.
Ratkaisu. Jos a/b on juuri, niin

$$a \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\} \quad \text{ja} \quad b \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}.$$

Ainoat mahdolliset rationaalijuuret ovat siis

$$\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm 2, \pm\frac{2}{3}, \pm 4, \pm\frac{4}{3}.$$

Kokeilemalla havaitaan, että näistä -2, $-\frac{2}{3}$ ja $\frac{1}{2}$ ovat juuria. p:n kaikki juuret ovat siis rationaalisia.

On huomattava, että kokonaislukukertoimisella polynomilla ei aina ole yhtään rationaalijuurta, kuten esimerkki $p(x) = x^2 - 2$ osoittaa.

Lause 5.61. *Reaalikeroimisen polynomin $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ kompleksiset nollakohdat esiintyvät kompleksikonjugaattipareina, ts. jos $p(z) = 0$, niin myös $p(\overline{z}) = 0$.*

Todistus. Jos $p(z) = 0$, niin suoralla laskulla liittoluvun ominaisuuksia käyttäen saadaan

$$\begin{aligned} p(\overline{z}) &= a_n\overline{z}^n + \cdots + a_2\overline{z}^2 + a_1\overline{z} + a_0 \\ &= \overline{a_n}\,\overline{z^n} + \cdots + \overline{a_2}\,\overline{z^2} + \overline{a_1}\,\overline{z} + \overline{a_0} \\ &= \overline{a_n z^n} + \cdots + \overline{a_2 z^2} + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} \\ &= \overline{a_n z^n + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0} \\ &= \overline{p(z)} = \overline{0} = 0. \end{aligned}$$

□

Lause 5.62. *Reaalikeroiminen polynomi* $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ *voidaan jakaa mahdollisimman alhaista astetta oleviin 1. ja 2. asteen reaalikertoimisiin tekijöihin seuraavasti:*

$$\begin{aligned} p(x) =& a_n (x - x_1)^{m_1} (x - x_2)^{m_2} \cdots (x - x_j)^{m_j} \\ & \cdot (x^2 + b_1 x + c_1)^{n_1} \cdots (x^2 + b_k x + c_k)^{n_k}, \end{aligned}$$

missä $x_1, \ldots, x_j \in \mathbb{R}$ *ovat polynomin* p *erisuuret reaaliset nollakohdat,* m_i *on nollakohdan* x_i *kertaluku ja polynomeilla* $x^2 + b_i x + c_i$ *ei ole reaalisia nollakohtia.*

Todistus. Lauseiden 5.54 ja 5.61 mukaan

$$\begin{aligned} p(x) =& a_n (x - x_1)^{m_1} (x - x_2)^{m_2} \cdots (x - x_j)^{m_j} \\ & \cdot ((x - z_1)(x - \overline{z_1}))^{n_1} \cdots ((x - z_k)(x - \overline{z_k}))^{n_k}, \end{aligned}$$

missä $z_1, \overline{z_1}, \ldots, z_k, \overline{z_k}$ ovat p:n imaginaariset nollakohdat. Väite seuraa nyt siitä, että tulo

$$(x - z)(x - \overline{z}) = x^2 - \overline{z}x - zx + z\overline{z} = x^2 - (\overline{z} + z)x + |z|^2$$

on toisen asteen polynomi, jonka kertoimet $b = -(\overline{z} + z)$ ja $c = |z|^2$ ovat reaalisia. $\square$

6 Derivaatta [5, 3–4]

Luvussa 6 tarkastellaan derivaatan käsitettä kahdesta näkökulmasta:

- Mikä on funktion $f(x)$ hetkellinen kasvunopeus pisteessä $x = a$? Kasvunopeudella voi tilanteesta riippuen olla jokin fysikaalinen tulkinta. Lisäksi kasvunopeuden merkin perusteella voidaan päätellä, missä f kasvaa ja missä vähenee. Sovelluksena tästä kulkutarkastelusta saadaan keino selvittää funktion pienin ja suurin arvo.
- Mikä on funktion $f(x)$ kuvaajan $y = f(x)$ pisteeseen $(a, f(a))$ piirretyn tangenttisuoran yhtälö? Funktio, jonka kuvaaja on tämä tangenttisuora, on muotoa $T(x) = Ax + B$ ja antaa siten yksinkertaisen approksimaation mahdollisesti monimutkaiselle funktiolle $f(x)$ lähellä pistettä a.

Tavoitteena on oppia derivoimaan alkeisfunktioista muodostettuja funktioita ja tehdä niille kulku-, ääriarvo- ja approksimaatiotarkasteluja.

6.1 Määritelmä ja perusominaisuudet

Olkoon $s(t)$ [km] kuljettu matka ajan t [h] funktiona. Matkan keskimääräinen muutosnopeus aikavälillä $t \ldots t + \Delta t$ on

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} \qquad \left[\frac{\text{km}}{\text{h}}\right].$$

Tätä kutsutaan keskimääräiseksi vauhdiksi ko. aikavälillä. On luonnollista määritellä hetkellinen muutosnopeus (vauhti $v(t)$) raja-arvona keskimääräisestä muutosnopeudesta, kun $\Delta t \to 0$:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} \qquad \left[\frac{\text{km}}{\text{h}}\right].$$

Tämä motivoi määrittelemään vastaavan raja-arvon yleiselle funktiolle f.

Määritelmä 6.1. Funktion $f\colon (c, d) \to \mathbb{R}$ *derivaatta (derivative) pisteessä* $a \in (c, d)$ on

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h},$$

mikäli ko. raja-arvo on olemassa. Tällöin sanotaan, että f on *derivoituva (differentiable)* pisteessä a. Funktion $f\colon [a, b) \to \mathbb{R}$ *oikeanpuoleinen derivaatta pisteessä* a on

$$f'(a+) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Vasemmanpuoleinen derivaatta $f'(a-)$ määritellään vastaavasti. Funktio $f\colon I \to \mathbb{R}$ on *derivoituva (differentiable)*, mikäli sillä on derivaatta jokaisella $x \in I$ (päätepisteissä toispuoleinen derivaatta). Tällöin myös funktiota $f'(x)$ kutsutaan f:n *derivaataksi.*

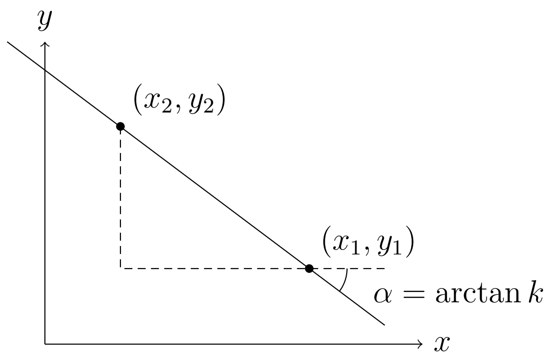
Funktio on derivoituva pisteessä a jos ja vain jos sillä on a:ssa sekä vasemman- että oikeanpuoleinen derivaatta ja ne ovat yhtäsuuret. Tällöin $f'(a) = f'(a-)$ $= f'(a+)$.

Funktion $y = f(x)$ derivaattaa merkitään myös

$$\boxed{f'(x) = D_x f(x) = Df(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{dy}{dx}.}$$

Määritelmässä esiintyvää osamäärää kutsutaan *erotusosamääräksi (difference quotient)*. Asettamalla $x = a + h$ derivaatta pisteessä a voidaan yhtäpitävästi kirjoittaa myös raja-arvona

$$\boxed{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.} \tag{6.2}$$



Muistetaan, että pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) kautta kulkevan suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

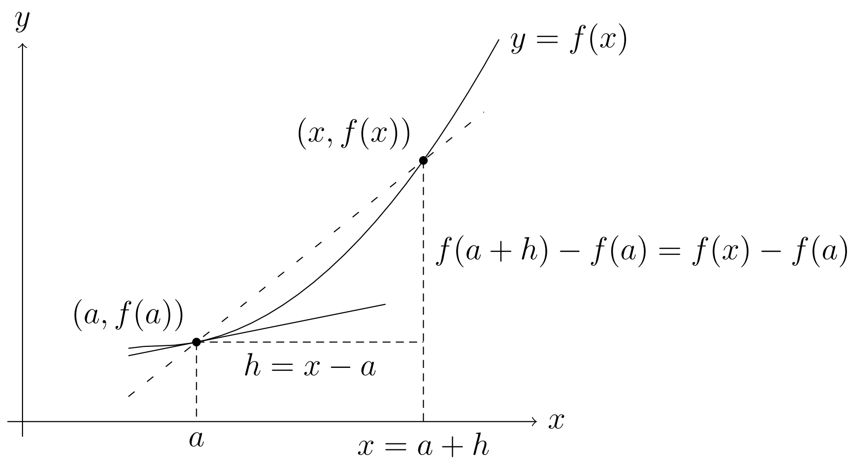
ja suoran yhtälö $y - y_1 = k(x - x_1)$, ts.

$$\boxed{y = y_1 + k(x - x_1).} \tag{6.3}$$

Nyt nähdään, että geometrisesti erotusosamäärä on xy-tason pisteiden $(a, f(a))$ ja $(x, f(x))$ kautta kulkevan *sekantin (secant)* kulmakerroin *(slope)*. Siten derivaatan olemassaolo pisteessä $x = a$ tarkoittaa sitä, että kuvaajalla $y = f(x)$ on pisteessä $(a, f(a))$ *tangenttisuora*, jonka kulmakerroin on $f'(a)$, jolloin tangenttisuoran yhtälö on

$$\boxed{y = f(a) + f'(a)(x - a).} \tag{6.4}$$

Välillä I derivoituvan funktion kuvaajalla on jokaisessa pisteessä tangenttisuora, joten kuvaajalla ei voi olla kärkiä tai kulmia. Oheisessa kuvassa on hahmoteltu tapaus $h > 0$ (h voi olla myös negatiivinen).



Esimerkki 6.5. Laske funktion $f(x) = 3x^2 - 7x + 5$ derivaatta pisteessä $x = 3$.

$$\begin{aligned} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} &= \frac{(3(3+h)^2 - 7(3+h) + 5) - (3 \cdot 3^2 - 7 \cdot 3 + 5)}{h} \\ &= \frac{3h^2 + 11h}{h} = 3h + 11 \to 11, \quad \text{kun } h \to 0, \end{aligned}$$

joten $f'(3) = 11$.

Lause 6.6. *Jos f on derivoituva pisteessä a, niin f on jatkuva pisteessä a.*

Todistus. On osoitettava, että $f(x) \to f(a)$, kun $x \to a$. Näin on, sillä

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) \to f'(a) \cdot 0 = 0, \quad \text{kun } x \to a. \qquad \square$$

Käänteinen väite ei päde, eli jatkuva funktio ei välttämättä ole derivoituva. Esimerkiksi tästä käy funktion $f(x) = |x|$ käyttäytyminen pisteessä $x = 0$ (ks. esimerkki 6.59).

Lause 6.7 (Derivoinnin perussäännöt)**.** *Olkoot f ja g derivoituvia pisteessä x ja olkoon $c \in \mathbb{R}$. Tällöin*

(1) $D(cf(x)) = cf'(x)$

(2) $D(f(x) \pm g(x)) = f'(x) \pm g'(x)$

(3) $D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

(4) $D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$, *jos* $g(x) \neq 0$.

Todistus. (1) ja (2) ovat suoraviivaisia todeta erotusosamäärän avulla.
(3) Funktion $f(x)g(x)$ erotusosamäärälle pätee

$$\begin{aligned} &\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h}g(x+h) + f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &\to f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \quad \text{kun } h \to 0. \end{aligned}$$

Tässä $\lim_{h \to 0} g(x+h) = g(x)$, sillä g on jatkuva pisteessä x.

(4) Tutkitaan funktion $1/g(x)$ erotusosamäärää. Lavennetaan $g(x+h)g(x)$:llä:

$$\frac{\dfrac{1}{g(x+h)} - \dfrac{1}{g(x)}}{h} = \frac{g(x) - g(x+h)}{h} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \to -g'(x)\frac{1}{g(x)^2},$$

kun $h \to 0$. Saatiin siis todistettua derivoimissääntö

$$D\left(\frac{1}{g(x)}\right) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}. \tag{6.8}$$

Nyt kohdasta (3) ja säännöstä (6.8) seuraa

$$\begin{aligned} D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) &= D\left(f(x)\frac{1}{g(x)}\right) = f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)' \\ &= \frac{f'(x)}{g(x)} - f(x)\frac{g'(x)}{g(x)^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}. \end{aligned}$$ □

Lause 6.9. *Vakiofunktion $f(x) = c$ derivaatta on* 0.

Todistus. Määritelmän mukaan

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0.$$ □

Esimerkki 6.10. Laske $D(x^{-1})$, $D(x)$ ja $D(x^2)$.
Ratkaisu. Käytetään määritelmää:

$$\begin{aligned} D\left(x^{-1}\right) &= D\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{x-(x+h)}{(x+h)x} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+h)x} = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2} \\ D\left(x^1\right) &= D(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1 = 1\cdot x^0 \\ D(x^2) &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x \end{aligned}$$

Esimerkin 6.10 potenssifunktioille x^n derivaatta on nx^{n-1}. Kaava pätee yleisestikin:

Lause 6.11 (Potenssifunktion derivoimiskaava)**.** *Olkoon $n \in \mathbb{Z}$ (ja $x \neq 0$, jos $n < 0$). Tällöin*

$$D(x^n) = nx^{n-1}.$$

Todistus. Tapauksissa $n = 0$ ja 1 kaava sanoo, että $D(1) = 0$ ja $D(x) = 1$, jotka todistettiin edellä. Todistetaan kaava induktiolla, kun $n \geq 2$.
(1) Alkuaskel $n = 2$ todistettiin esimerkissä 6.10.
(2) Induktioaskel: Oletetaan, että kaava pätee jollekin $n = k \geq 2$, ts. $D(x^k) = kx^{k-1}$. Tällöin tulon derivoimissäännön (lause 6.7) nojalla

$$D(x^{k+1}) = D(x \cdot x^k) = D(x)x^k + xD(x^k) = x^k + kx^k = (k+1)x^k.$$

Niinpä kaava pätee myös n:n arvolle $n = k + 1$.

Tapauksessa $n < 0$ merkitään $m = -n$. Koska $m > 0$, niin edellä todetun perusteella $D(x^m) = mx^{m-1}$ ja osamäärän derivoimissääntöä käyttäen saadaan

$$D(x^n) = D\left(\frac{1}{x^m}\right) = -\frac{D(x^m)}{(x^m)^2} = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1} = nx^{n-1}. \qquad \square$$

Nyt polynomit ja rationaalifunktiot nähdään derivoituviksi määrittelyjoukoissaan ja voidaan derivoida em. tuloksia käyttäen.

Esimerkki 6.12. a) Funktion $f(x) = x^3 - \dfrac{1}{x^5}$ derivaatta on

$$f'(x) = 3x^2 - D(x^{-5}) = 3x^2 - (-5)x^{-6} = 3x^2 + \frac{5}{x^6}.$$

b) Funktion $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x^3 - 7}$ derivaatta on

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x^3-7) - (x^2+x)3x^2}{(x^3-7)^2} = \frac{-x^4 - 2x^3 - 14x - 7}{(x^3-7)^2}.$$

Esimerkki 6.13. Mikä on käyrän $y = x^3 - 4x^2 + 7$ pisteeseen $(3, -2)$ piirretyn tangenttisuoran yhtälö?
Ratkaisu. Kyseessä on funktion $y = y(x)$ kuvaaja, joten tangenttisuoran kulmakertoimen antaa derivaatan arvo pisteessä $x = 3$: $y'(x) = 3x^2 - 8x$, joten $y'(3) = 3$. Niinpä tangenttisuoran yhtälö on (ks. kaava (6.4))

$$y - (-2) = 3(x - 3), \text{ ts. } y = 3x - 11.$$

Lause 6.14 (Ketjusääntö, Chain rule)**.** *Olkoon g derivoituva pisteessä x ja f derivoituva pisteessä $g(x)$. Silloin yhdistetty funktio $f \circ g$ on derivoituva pisteessä x ja*

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Todistus. Muodostetaan erotusosamäärä yhdistetylle funktiolle $f \circ g$:

$$\frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x}.$$

Merkitään $y = g(x)$ ja $\Delta y = g(x + \Delta x) - g(x)$. Oletetaan, että $g'(x) \neq 0$, jolloin pienillä Δx on $\Delta y/\Delta x \neq 0$ ja siten $\Delta y \neq 0$. Yleinen tapaus todistetaan luvussa 6.3 differentiaalikehitelmän avulla (ks. s. 112). Nyt

$$\begin{aligned} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} &= \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{g(x+\Delta x) - g(x)} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{f(y+\Delta y) - f(y)}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta x} \to f'(y)g'(x) = f'(g(x))g'(x), \text{ kun } h \to 0, \end{aligned}$$

sillä $\Delta y \to 0$, kun $h \to 0$. □

Merkintöjä $u = f(g(x))$ ja $y = g(x)$ käyttäen ketjusääntö voidaan kirjoittaa muotoon

$$\boxed{\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}.} \tag{6.15}$$

Esimerkki 6.16. Derivoi $h(x) = \left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^{11}$.

Ratkaisu. Tulkitaan h funktioksi $h(x) = f(g(x))$, missä $f(y) = y^{11}$ ja $g(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$. Koska $f'(y) = 11y^{10}$, niin

$$h'(x) = 11\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{10} D\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) = 11\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{10}\left(2x - \frac{1}{x^2}\right).$$

Lause 6.17 (Käänteisfunktion derivoimissääntö). *Olkoon f aidosti kasvava (vähenevä) ja derivoituva välillä I. Merkitään $y = f(x)$. Tällöin käänteisfunktio $f^{-1}\colon f(I) \to I$ on derivoituva välillä $f(I)$ niissä pisteissä y, joille $f'(x) \neq 0$, ja derivaatta on*

$$D_y f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)} \qquad (y = f(x)).$$

Todistus. Lauseen 4.42 mukaan f^{-1} on jatkuva ja $f(I)$ on väli. Tutkitaan f^{-1}:n erotusosamäärää pisteessä $y_0 = f(x_0)$. Merkitään $y = f(x)$ ja vaaditaan, että $y \neq y_0$, jolloin myös $x \neq x_0$.

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \to \frac{1}{f'(x_0)}, \text{ kun } y \to y_0,$$

sillä f^{-1} on jatkuva ja siten $x = f^{-1}(y) \to f^{-1}(y_0) = x_0$, kun $y \to y_0$. □

Merkintöjä $dx/dy = D_y f^{-1}(y)$ ja $dy/dx = f'(x)$ käyttäen käänteisfunktion derivoimissääntö voidaan kirjoittaa muotoon

$$\boxed{\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}},} \tag{6.18}$$

missä on muistettava, että dx/dy lasketaan pisteessä $y = f(x)$ ja dy/dx pisteessä x.

Esimerkki 6.19. Olkoon $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$. Laske $f'(x)$.
Ratkaisu. f:llä on aidosti kasvava ja derivoituva käänteisfunktio $x = f^{-1}(y) = y^3$, jolle $D_y f^{-1}(y) = 3y^2$. Siten myös f on derivoituva ja

$$f'(x) = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2} = \frac{1}{3}x^{-2/3}.$$

Tämän esimerkin menetelmällä saadaan perusteltua potenssifunktion derivoimiskaava rationaalisille eksponenteille.

Lause 6.20 (Potenssifunktion derivoimiskaava)**.** *Olkoon $r \in \mathbb{Q}$ ja $x \neq 0$ (ja lisäksi määritelmän 3.7 määrittelyehto voimassa). Tällöin*

$$D(x^r) = rx^{r-1}.$$

Todistus. Tutkitaan ensin funktiota $y = f(x) = x^{1/n}$, $n \in \mathbb{N}$. f:llä on aidosti kasvava ja derivoituva käänteisfunktio $x = f^{-1}(y) = y^n$, jolle $D_y f^{-1}(y) = ny^{n-1}$. Siten myös f on derivoituva ja

$$f'(x) = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n(x^{1/n})^{n-1}} = \frac{1}{n}x^{1/n-1}.$$

Siten lauseen väite pätee, kun r on muotoa $r = 1/n$.

Yleisessä tapauksessa kirjoitetaan $r = m/n$, missä $n \in \mathbb{N}$. Nyt ketjusäännön mukaan

$$\begin{aligned} D(x^r) &= D((x^{1/n})^m) = m(x^{1/n})^{m-1}D(x^{1/n}) = m(x^{1/n})^{m-1}\frac{1}{n}(x^{1/n-1}) \\ &= \frac{m}{n}x^{m/n-1} = rx^{r-1}. \end{aligned}$$

□

Esimerkki 6.21. a) $D\sqrt{x} = D(x^{1/2}) = \dfrac{1}{2}x^{-1/2} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

b) Funktion $f(x) = \left(\sqrt{3x^2 - 7}\right)^3$ derivaatta on

$$f'(x) = D\Big((3x^2 - 7)^{3/2}\Big) = \frac{3}{2}(3x^2 - 7)^{1/2} \cdot 6x = 9x\sqrt{3x^2 - 7}.$$

6.2 Alkeisfunktioden derivaatat

Lause 6.22. $D(e^x) = e^x$

Todistus. Tutkitaan ensin erotusosamäärää pisteessä $x = 0$. Olkoon $0 < h < 1$. Erotusosamäärä on

$$\frac{e^{0+h} - e^0}{h} = \frac{e^h - 1}{h}.$$

Valitaan $n \in \mathbb{N}$ siten, että

$$\frac{1}{n+1} < h \leq \frac{1}{n}.$$

Lemman 8.15 mukaan

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < e, \quad \text{ts.} \quad \frac{1}{n+1} < e^{1/(n+1)} - 1,$$

ja toisaalta

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{e}, \quad \text{ts.} \quad e^{1/n} - 1 < \frac{1}{n-1}.$$

Niinpä

$$\frac{1}{n+1} < e^{1/(n+1)} - 1 < e^h - 1 \leq e^{1/n} - 1 < \frac{1}{n-1}$$

ja siten

$$\frac{n}{n+1} < \frac{e^h - 1}{h} \leq \frac{n+1}{n-1}.$$

Kun $h \to 0+$, niin $n \to \infty$, jolloin arvion laitimmaiset lausekkeet lähestyvät lukua 1. Kuristusperiaatteen nojalla siten

$$\lim_{h \to 0+} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Vastaavasti myös vasemmanpuoleinen raja-arvo on 1 ja siten

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Tämän avulla voidaan laskea erotusosamäärän raja-arvo pisteessä x:

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \frac{e^x e^h - e^x}{h} = e^x \frac{e^h - 1}{h} \to e^x \cdot 1 = e^x, \quad \text{kun } h \to 0. \qquad \square$$

Esimerkki 6.23. a) $D\left(e^{3x^2}\right) = e^{3x^2} D\left(3x^2\right) = 6xe^{3x^2}$.

b) $D\left(\sqrt{1 + e^{2x}}\right) = \dfrac{D(1 + e^{2x})}{2\sqrt{1 + e^{2x}}} = \dfrac{2e^{2x}}{2\sqrt{1 + e^{2x}}} = \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1 + e^{2x}}}$

Lause 6.24. $D(\ln x) = \dfrac{1}{x}$

Todistus. Funktion $f(x) = \ln x$ käänteisfunktio on $f^{-1}(y) = e^y$, joten käänteisfunktion derivoimissäännön mukaan

$$D_x(\ln x) = \frac{1}{D_y(e^y)} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}. \qquad \square$$

Lause 6.25. $D\left(a^x\right) = a^x \ln a \qquad$ *ja* $\qquad D\left(\log_a x\right) = \dfrac{1}{x \ln a}.$

Todistus. Kaavoista (3.41) saadaan

$$D\left(a^x\right) = D\left(e^{x \ln a}\right) = e^{x \ln a} D(x \ln a) = a^x \ln a \quad \text{ja}$$
$$D\left(\log_a x\right) = D\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right) = \frac{D(\ln x)}{\ln a} = \frac{1}{x \ln a}. \qquad \square$$

Esimerkki 6.26. a) $D(3^{x^2}) = 3^{x^2} \ln 3 D(x^2) = 2x3^{x^2} \ln 3$

b) $D \ln(\sqrt{1+x^2}) = \dfrac{D(\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{D(1+x^2)}{2\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{x}{1+x^2}$

c) $D(\ln(\ln x)) = \dfrac{D(\ln x)}{\ln x} = \dfrac{1}{x \ln x}$

Lause 6.27. $D\left(x^a\right) = ax^{a-1} \qquad (a \in \mathbb{R},\ x > 0)$

Todistus. Määritelmän 3.43 mukaan

$$D\left(x^a\right) = D\left(e^{a \ln x}\right) = e^{a \ln x} D(a \ln x) = x^a \frac{a}{x} = ax^{a-1}. \qquad \square$$

Esimerkki 6.28. $D\left(e^{x^e}\right) = e^{x^e} D(x^e) = ex^{e-1}e^{x^e}$

Lause 6.29. *Trigonometriset funktiot ovat derivoituvia määrittelyjoukoissaan ja*

$$D \sin x = \cos x$$
$$D \cos x = -\sin x$$
$$D \tan x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Todistus. Kirjoitetaan erotusosamäärä sinille ja käytetään summakaavaa (lause 3.22), lausetta 4.19 ja esimerkin 4.20 tulosta:

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} &= \frac{\sin x\cos h+\sin h\cos x-\sin x}{h} \\ &= -\sin x\frac{1-\cos h}{h}+\cos x\frac{\sin h}{h} \\ &\to -\sin x\cdot 0+\cos x\cdot 1=\cos x, \quad \text{kun } h\to 0.\end{aligned}$$

Kosinin derivointikaava todistetaan vastaavasti. Tangentin derivointikaava saadaan nyt osamäärän derivoimissäännöllä:

$$D\tan x = D\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

missä viimeinen vaihe voidaan sieventää myös

$$\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1+\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = 1+\tan^2 x. \qquad \square$$

Lause 6.30. *Arkusfunktioiden derivoimiskaavat:*

$$\begin{aligned} D\arcsin x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} && (-1<x<1) \\ D\arccos x &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} && (-1<x<1) \\ D\arctan x &= \frac{1}{1+x^2} && (x\in\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Todistus. Funktiolla $y=\sin x$ on välillä $x\in[-\pi/2,\pi/2]$ käänteisfunktio $x=\arcsin y$. Välillä $x\in(-\pi/2,\pi/2)$ (vastaten väliä $y\in(-1,1)$) on $D\sin x=\cos x\neq 0$, joten käänteisfunktion derivoimissäännön mukaan

$$D_y\arcsin y = \frac{1}{D\sin x} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Tässä toiseksi viimeinen vaihe seuraa kaavasta $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ ottamalla huomioon, että $\cos x>0$ välillä $x\in(-\pi/2,\pi/2)$. Vastaavalla tavoin voidaan päätellä derivoimiskaavat arkuskosinille ja arkustangentille. $\square$

Hyperbolisten funktioiden derivoimiskaavat seuraavat suoraan määritelmästä 3.44:

Lause 6.31.
$$D\sinh x = \cosh x$$
$$D\cosh x = \sinh x$$
$$D\tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

Areafunktioiden derivointikaavat saadaan joko käänteisfunktion derivoimissäännöillä tai derivoimalla suoraan kaavat (3.48):

Lause 6.32.
$$D\operatorname{ar}\sinh x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad (x \in \mathbb{R})$$
$$D\operatorname{ar}\cosh x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad (x > 1)$$
$$D\operatorname{ar}\tanh x = \frac{1}{1-x^2} \qquad (-1 < x < 1)$$

Derivoimissäännöistä ja derivointikaavoista on yhteenveto taulukoissa 2 ja 3 sivuilla 253–254.

6.3 Lineaarinen approksimaatio

Määritelmän mukaan pisteessä a derivoituvalle funktiolle f pätee

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

ts.

$$\lim_{h\to 0} \left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a) \right) = 0.$$

Merkitään tässä sulkulauseketta $\epsilon(h)$:lla, ts.

$$\epsilon(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a).$$

Ratkaistaan tästä $f(a+h)$:

$$\underbrace{f(a+h)}_{\text{tarkka arvo}} = \underbrace{f(a)+f'(a)h}_{\text{arvio}} + \underbrace{h\epsilon(h)}_{\text{virhe}}, \tag{6.33}$$

missä $\epsilon(h)$ on funktio, jolle $\epsilon(h) \to 0$, kun $h \to 0$. Esitystä (6.33) kutsutaan funktion f *differentiaalikehitelmäksi* pisteessä a. Päättely voidaan kääntää myös toiseen suuntaan, eli differentiaalikehitelmästä seuraa derivoituvuus:

Lause 6.34. *Funktio* $f\colon (c,d) \to \mathbb{R}$ *on derivoituva pisteessä* $a \in (c,d)$ *jos ja vain jos on olemassa* $A \in \mathbb{R}$ *ja funktio* $\epsilon\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *siten, että* $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$ *ja*

$$f(a+h) = f(a) + Ah + h\epsilon(h)$$

kaikilla (itseisarvoltaan pienillä) $h \in \mathbb{R}$*. Tällöin* $A = f'(a)$*.*

Jättämällä pois *virhetermi* $h\epsilon(h)$ saadaan arvio funktion arvolle $f(a+h)$:

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h, \tag{6.35}$$

tai merkitsemällä $x = a + h$

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a).$$

Tässä oikean puolen funktio

$$\boxed{T(x) = f(a) + f'(a)(x-a)} \tag{6.36}$$

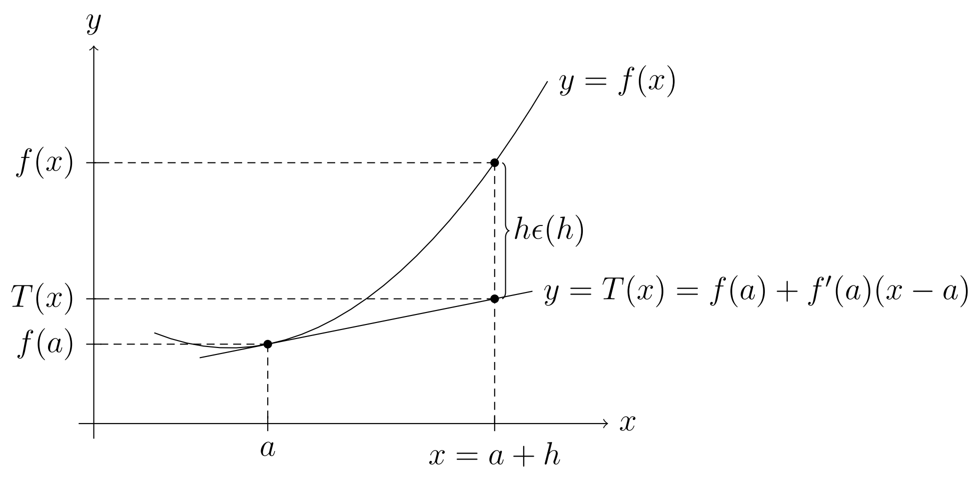
on funktio, jonka kuvaaja on f:n kuvaajan pisteeseen $(a, f(a))$ piirretty tangenttisuora (vrt. yhtälöön (6.4)). Funktiosta $T(x)$ käytetään nimityksiä f:n *lineaarinen approksimaatio (arvio)*, *tangenttiapproksimaatio* ja *linearisointi* pisteessä a. Lineaarisessa arviossa $f(x) \approx T(x)$ tehty virhe on

$$f(x) - T(x) = h\epsilon(h),$$

jolle pätee

$$\frac{\text{virhe}}{x\text{:n muutos}} = \frac{h\epsilon(h)}{h} = \epsilon(h) \to 0, \quad \text{kun } h \to 0.$$

Lähellä a:ta tehty virhe on siis mitätön suhteessa etäisyyteen a:sta ja f:n kuvaaja näyttää likimain tangenttisuoraltaan $y = f(a) + f'(a)(x-a)$.

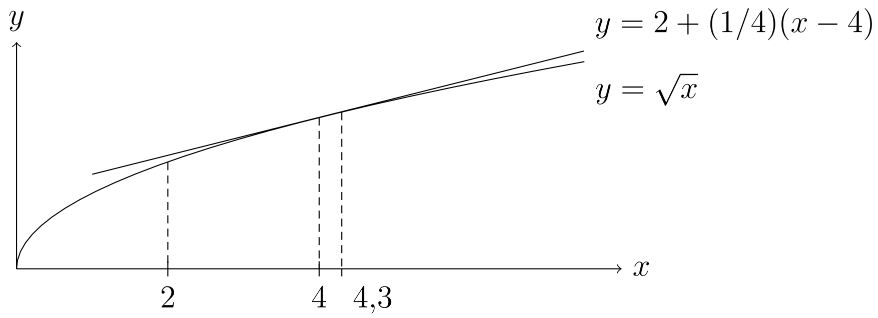


Nimitys ”lineaarinen arvio” johtuu siitä, että funktio $L\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $L(h) = f'(a)h$ on ns. *lineaarikuvaus* ja arvio voidaan kirjoittaa vakion ja lineaarikuvauksen summana: $f(a+h) \approx f(a) + L(h)$. Lineaarikuvauksia käsitellään tarkemmin opintojaksolla Insinöörimatematiikka 2.

Esimerkki 6.37. Arvioi lukua $\sqrt{4{,}3}$ sopivalla lineaarisella approksimaatiolla.
Ratkaisu. Käytetään funktion $f(x) = \sqrt{x}$ lineaarista arviota pisteessä $a = 4$. Idea on, että f:n ja f':n arvot on helppo laskea pisteessä 4 ja niitä käyttäen saadaan arvio f:n arvolle pisteessä $4{,}3 = a+h = 4+0{,}3$. Nyt $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$ ja $f'(4) = 1/4$, joten

$$\sqrt{4{,}3} = f(4+0{,}3) \approx f(4) + f'(4)\cdot(4{,}3-4) = 2 + \frac{1}{4}\cdot 0{,}3 = 2{,}075.$$

Voimme verrata tätä laskimen antamaan arvoon $\sqrt{4{,}3} = 2{,}073644\cdots$.



Määritelmä 6.38. Suureen *suhteellinen virhe* määritellään

$$\text{suhteellinen virhe} = \left|\frac{\text{virhe}}{\text{tarkka arvo}}\right|.$$

Edellisessä esimerkissä suhteellinen virhe on

$$\left|\frac{\sqrt{4{,}3} - 2{,}075}{\sqrt{4{,}3}}\right| \approx 0{,}0007,$$

eli prosentteina 0,07 %.

Lineaarisen arvion käyttö on järkevää vain silloin, kun $|h|$ on ”pieni”. Esimerkiksi edellisen esimerkin approksimaatiota käyttäen arvio luvulle $\sqrt{2}$ olisi

$$\sqrt{2} = f(4-2) \approx f(4) + f'(4)\cdot(4-2) = 2 + \frac{1}{4}\cdot(-2) = 1{,}5,$$

missä on 6 %:n virhe.

Monissa sovelluksissa lineaarista arviota käytetään virheiden arvioimiseen. Mitataan suureen arvoksi x. Jos mittauksessa tehdään virhe Δx, niin suureen oikea arvo on $x + \Delta x$. Oletetaan, että suure f riippuu x:stä, ts. $f = f(x)$. Nyt (6.35) tulee muotoon

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$$

ja f:n virhettä $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ voidaan siten arvioida

$$\boxed{\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x.} \tag{6.39}$$

Tässä yhteydessä suhteellinen virhe usein lasketaan arvioimalla

$$\text{suhteellinen virhe} \approx \left|\frac{\text{virhe}}{\text{mitattu arvo}}\right|.$$

Esimerkiksi x:n suhteellinen virhe $\approx \left|\dfrac{\Delta x}{x}\right|$ ja f:n suhteellinen virhe $\approx \left|\dfrac{\Delta f}{f(x)}\right|$.

Esimerkki 6.40. Mitataan ympyrän säde r ja tämän mittaustuloksen perusteella lasketaan ympyrän pinta-ala $A = A(r) = \pi r^2$.

a) Mittaustulokseksi saadaan $r = 32 \pm 2$ mm, ts. virhe $|\Delta r| \leq 2$. Pinta-ala on $A(32) = \pi 32^2 \approx 3\,200$ mm^2 ja $A'(r) = 2\pi r$, joten virheelle saadaan arvio

$$|\Delta A| \overset{(6.39)}{\approx} |A'(32)\Delta r| = 64\pi|\Delta r| \leq 64\pi \cdot 2 \approx 400 \text{ mm}^2.$$

Pinta-ala on siis $3\,200 \pm 400$ mm^2.

b) Säteen mittaamisessa tehdään korkeintaan 2 %:n virhe. Arvioi pinta-alan prosentuaalista virhettä.

Ratkaisu. Koska $|\Delta r|/r \leq 0{,}02$, niin voidaan arvioida

$$\left|\frac{\Delta A}{A}\right| \overset{(6.39)}{\approx} \frac{|A'(r)\Delta r|}{A} = \frac{2\pi r|\Delta r|}{\pi r^2} = 2\frac{|\Delta r|}{r} \leq 2 \cdot 0{,}02 = 0{,}04.$$

Pinta-alan suhteellisen virheen arvioidaan siis olevan korkeintaan 4 %.

Ketjusäännön (lause 6.14) todistus. Käytetään differentiaalikehitelmää (6.33) ensin sisäfunktiolle g ja sitten ulkofunktiolle f:

$$\begin{aligned}
&(f \circ g)(x + \Delta x) = f(g(x + \Delta x)) \\
&= f\Big(g(x) + \underbrace{g'(x)\Delta x + \Delta x \epsilon_g(\Delta x)}_{=:\Delta y}\Big) \\
&= f(g(x)) + f'(g(x))\Delta y + \Delta y \epsilon_f(\Delta y) \\
&= f(g(x)) + f'(g(x))g'(x)\Delta x + \underbrace{f'(g(x))\Delta x \epsilon_g(\Delta x) + \Delta y \epsilon_f(\Delta y)}_{=:\Delta x \epsilon(\Delta x)} \\
&= (f \circ g)(x) + f'(g(x))g'(x)\Delta x + \Delta x \epsilon(\Delta x),
\end{aligned}$$

missä $\epsilon(\Delta x) \to 0$, kun $\Delta x \to 0$ (sillä tällöin myös $\Delta y \to 0$). Niinpä $f \circ g$ on derivoituva ja derivaatta on $f'(g(x))g'(x)$. □

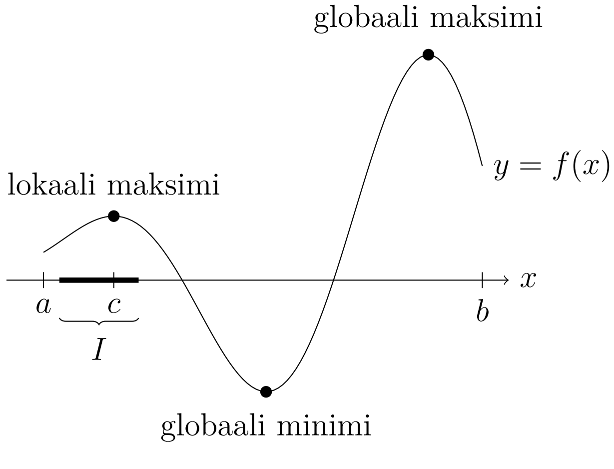
6.4 Ääriarvot ja funktion kulku

Määritelmä 6.41. Reaalifunktiolla $f\colon A \to \mathbb{R}$ on pisteessä $c \in A$

- *(globaali) maksimi*, jos $f(x) \leq f(c)$ kaikilla $x \in A$,
- *(globaali) minimi*, jos $f(x) \geq f(c)$ kaikilla $x \in A$,
- *lokaali maksimi*, jos on olemassa c:n ympäristö I siten, että $f(x) \leq f(c)$ kaikilla $x \in I \cap A$,
- *lokaali minimi*, jos on olemassa c:n ympäristö I siten, että $f(x) \geq f(c)$ kaikilla $x \in I \cap A$.

Pistettä c kutsutaan *ääriarvopisteeksi* (*minimipisteeksi* tai *maksimipisteeksi*) ja arvoa $f(c)$ *ääriarvoksi* (*minimiarvoksi* tai *maksimiarvoksi*). Funktion f globaalia maksimiarvoa joukossa A merkitään $\max_A f$ tai $\max f$ ja minimiarvoa $\min_A f$ tai $\min f$.

Tyypillisesti tarkastelujoukko on suljettu ja rajoitettu väli, ts. $A = [a, b]$.



Todistamatta otamme käyttöön seuraavan tuloksen. Todistuksessa (ks. [5, Appendix E]) tarvitaan supremumin käsitettä ja täydellisyysaksioomaa.

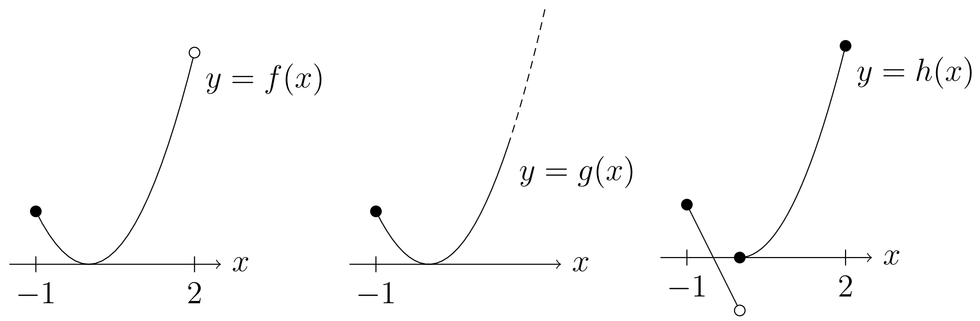
Lause 6.42. *Suljetulla ja rajoitetulla välillä jatkuva funktio saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa kyseisellä välillä. Tarkemmin: jos f on jatkuva välillä $[a, b]$, niin on olemassa c ja $d \in [a, b]$ siten, että $f(c)$ on f:n maksimi ja $f(d)$ on f:n minimi välillä $[a, b]$.*

Seuraavat esimerkit osoittavat, että kaikki lauseen 6.42 oletukset (väli on suljettu, väli on rajoitettu ja funktio on jatkuva) ovat tarpeen.

Esimerkki 6.43. **a)** $f\colon [-1,2) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Funktio on jatkuva ja väli on rajoitettu, mutta väli ei ole suljettu. f:llä on minimi $f(0) = 0$, muttei maksimia.
b) $g\colon [-1,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$. Funktio on jatkuva ja väli on suljettu, mutta väli ei ole rajoitettu. f:llä on minimi $g(0) = 0$, muttei maksimia.

c) $h\colon [-1,2] \to \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} -2x-1, & \text{kun } x < 0, \\ x^2, & \text{kun } x \geq 0. \end{cases}$

Väli on suljettu ja rajoitettu, mutta funktio ei ole jatkuva. h:lla on maksimi $h(2) = 4$, muttei minimiä.



Lause 6.44. *Jos c on f:n lokaali ääriarvokohta ja f on derivoituva pisteessä c, niin $f'(c) = 0$.*

Todistus. Oletetaan, että c on lokaali maksimipiste. Koska f on derivoituva, niin
$$f'(c) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$
ja koska c on lokaali maksimipiste, niin $f(c+h) - f(c) \leq 0$ pienillä h. Siten pienillä $h > 0$ on
$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$
ja niinpä
$$f'(c) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0.$$
Vastaavasti pienillä $h < 0$ on
$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

ja siten

$$f'(c) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0.$$

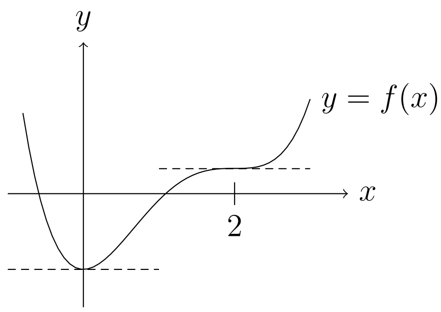
Nyt $f'(c) \leq 0$ ja $f'(c) \geq 0$, joten on oltava $f'(c) = 0$. □

Derivoituvan funktion lokaalit ääriarvot löytyvät nyt lauseen 6.44 mukaan derivaatan nollakohtien joukosta. Aina derivaatan nollakohta ei kuitenkaan ole ääriarvokohta:

Esimerkki 6.45. Olkoon $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 - 1$. Haetaan derivaatan $f'(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ nollakohdat:

$$\begin{aligned} & x^3 - 4x^2 + 4x = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x(x^2 - 4x + 4) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 - 4x + 4 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 0 \quad \text{tai} \quad x = 2 \end{aligned}$$

Näistä $x = 0$ on lokaali minimipiste, mutta $x = 2$ ei ole lokaali ääriarvopiste (kuten lauseen 6.53 avulla voidaan perustella).



Määritelmä 6.46. Pistettä c, jossa $f'(c) = 0$ tai jossa f ei ole derivoituva, kutsutaan f:n *kriittiseksi pisteeksi.*

Edellisestä lauseesta seuraa suoraan:

Lause 6.47. *Olkoon $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio ja olkoon c f:n ääriarvopiste. Silloin c on joko kriittinen piste tai välin $[a, b]$ päätepiste.*

Lause voidaan muotoilla seuraavaksi globaalien ääriarvojen etsintäohjeeksi suljetulla välillä $[a, b]$ jatkuvalle funktiolle f:

(1) Etsi kriittiset pisteet, ts. derivaatan nollakohdat ja pisteet, joissa f ei ole derivoituva.

(2) Laske f:n arvo kriittisissä pisteissä ja välin päätepisteissä a ja b.

(3) Poimi saamistasi arvoista suurin ja pienin.

Esimerkki 6.48. Etsi funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ suurin ja pienin arvo välillä $[-2, 2]$.
Ratkaisu. f on derivoituva ja $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$. Ratkaisukaavalla tämän nollakohdiksi saadaan $x = -1$ ja $x = 3$, joista vain ensin mainittu on tarkasteluvälillä. Lasketaan f:n arvot päätepisteissä ja kriittisessä pisteessä: $f(-2) = 0$, $f(-1) = 7$ ja $f(2) = -20$. Siten f:n pienin arvo on -20 ja suurin arvo 7.

Esimerkki 6.49. Määritä funktion $f(x) = x^{2/3} - x$ suurin ja pienin arvo välillä $-1 \leq x \leq 1/2$.
Ratkaisu. f on jatkuva ja $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} - 1$, kun $x \neq 0$. Pisteessä $x = 0$ f ei ole derivoituva, koska $|f'(x)| \to \infty$, kun $x \to 0$.[2] f':n nollakohdat:

$$\frac{2}{3}x^{-1/3} - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^{-1/3} = \frac{3}{2} \;\Leftrightarrow\; x = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = \frac{8}{27}.$$

Välillä $[-1, 1/2]$ on siis kriittiset pisteet 0 ja $8/27$. Lasketaan f:n arvot päätepisteissä ja kriittisissä pisteissä: $f(-1) = 2$, $f(0) = 0$, $f(8/27) = 4/27 \approx 0{,}15$ ja $f(1/2) \approx 0{,}13$. Siten f:n pienin arvo on 0 ja suurin 2. Funktion kuvaaja hahmotellaan esimerkissä 6.55.

Lause 6.50 (Rollen lause)**.** *Oletetaan, että f on jatkuva välillä $[a, b]$ ja derivoituva välillä (a, b). Jos $f(a) = f(b) = 0$, niin $f'(c) = 0$ eräällä $c \in (a, b)$.*

Todistus. Lauseen 6.42 mukaan f saavuttaa maksiminsa ja miniminsä välillä $[a, b]$. Jos f saa positiivisia arvoja, niin f:n maksimi on pisteessä $c \in (a, b)$, koska $f(a) = f(b) = 0$. Lauseen 6.44 mukaan tällöin $f'(c) = 0$. Vastaavasti käy jos f saa negatiivisia arvoja. Jos f on nolla koko välillä $[a, b]$, niin $f'(c) = 0$ kaikilla $c \in (a, b)$. □

Rollen lause on tekninen apuneuvo väliarvolauseen todistamiseksi:

Lause 6.51 (Differentiaalilaskennan väliarvolause, DVAL)**.** *Oletetaan, että f on jatkuva välillä $[a, b]$ ja derivoituva välillä (a, b). Silloin eräällä $c \in (a, b)$ on*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

[2] Tämän perustelu sivuutetaan. Lisäksi on huomattava, että f voi olla derivoituva, vaikka f':lla ei olisikaan raja-arvoa (ks. huomautus 6.61 **b**). Käytännössä kuitenkin ääriarvotehtävissä tarkastetaan kaikki pisteet, joissa f':lla ei ole raja-arvoa, sillä menetelmän ideana on vain rajata tarkastettavien pisteiden joukko riittävän pieneksi, jotta niiden läpikäynti olisi mahdollista.

Todistus. Funktio

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

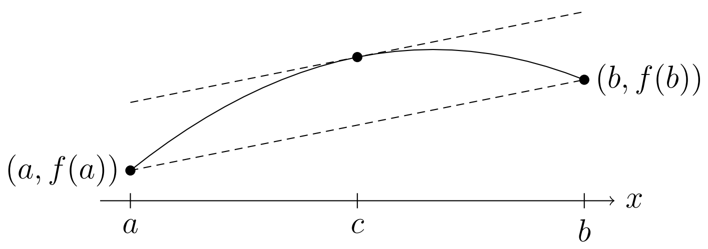
toteuttaa Rollen lauseen oletukset välillä $[a, b]$ (tarkasta!) ja

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Niinpä eräällä $c \in (a, b)$ on

$$0 = F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \qquad \square$$

Geometrisesti lauseen väite on ilmeinen: tangentin kulmakerroin on jossakin välin pisteessä c sama kuin pisteiden $(a, f(a))$ ja $(b, f(b))$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin.



Väliarvolauseesta seuraa keskeiset funktion kulusta kertovat lauseet.

Lause 6.52. *Oletetaan, että f on jatkuva välillä $[a, b]$ ja että $f'(x) = 0$ kaikilla $x \in (a, b)$. Silloin f on vakiofunktio.*

Todistus. Olkoon $x \in (a, b]$. Sovelletaan väliarvolausetta välillä $[a, x]$: eräällä $c \in (a, x)$ on

$$0 = f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Siten $f(x) - f(a) = 0$ eli $f(x) = f(a)$. $\square$

Lause 6.53. *Oletetaan, että f on jatkuva välillä $[a, b]$ ja että $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) kaikilla $x \in (a, b)$. Silloin f on aidosti kasvava (aidosti vähenevä) välillä $[a, b]$.*

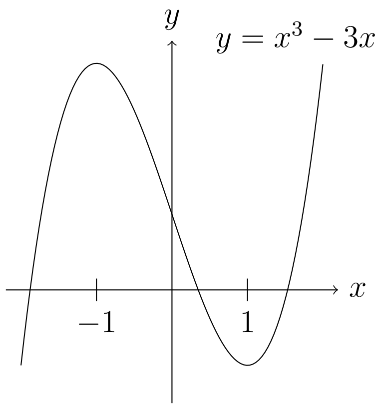
Todistus. Olkoon $f'(x) > 0$ kaikilla $x \in (a, b)$ (tapaus $f'(x) < 0$ vastaavasti). Olkoot u ja $v \in [a, b]$, $u < v$. On osoitettava, että $f(u) < f(v)$. Sovelletaan väliarvolausetta välillä $[u, v]$:

$$f'(c) = \frac{f(v) - f(u)}{v - u} \quad \Leftrightarrow \quad f(v) - f(u) = f'(c)(v - u).$$

Koska $f'(c) > 0$ ja $v - u > 0$, niin $f(v) - f(u) > 0$ ja siten $f(u) < f(v)$. $\square$

Esimerkki 6.54. Funktion $f(x) = x^3 - 3x + 1$ derivaatan $f'(x) = 3x^2 - 3$ nollakohdat ovat $x = -1$ ja $x = 1$. Laskemalla f' joissakin välien $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ ja $(1, \infty)$ pisteissä saadaan selville derivaatan merkki ko. väleillä ja siten funktion kasvusuunta: $f'(-2) = 9 > 0$, $f'(0) = -3 < 0$ ja $f(2) = 9 > 0$, joten f on vähenevä keskimmäisellä välillä ja kasvava muualla. Tieto voidaan koota kuvan mukaiseksi *merkkikaavioksi.* Merkkikaaviosta voidaan myös päätellä, onko kriittisessä pisteessä lokaali minimi tai maksimi.

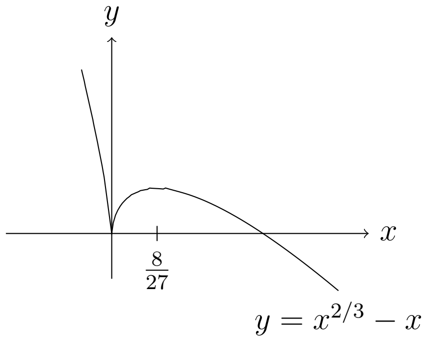
	-1		1	
f'	$+++$	$---$	$+++$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		max	min	



Lausetta 6.53 voidaan yrittää soveltaa sopivilla osaväleillä, vaikka f ei olisikaan derivoituva koko välillä tai f:n määrittelyjoukko ei olisi suljettu ja rajoitettu väli.

Esimerkki 6.55. Tutkitaan esimerkin 6.49 funktion $f(x) = x^{2/3} - x$ kulkua. Derivaatan $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} - 1$ ainoa nollakohta on $8/27$. Lisäksi pisteessä $x = 0$ f ei ole derivoituva.

		0		$\frac{8}{27}$	
f'	$- - -$		$+ + +$		$- - -$
f	↘	min	↗	max	↘



Esimerkki 6.56. Tutkitaan funktion

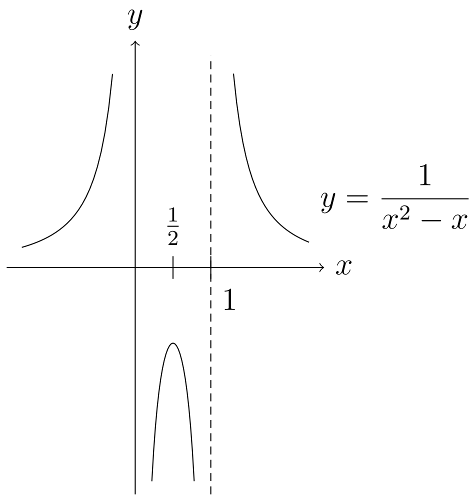
$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$$

kulkua. Nimittäjän $x^2 - x = x(x-1)$ nollakohdissa $x = 0$ ja $x = 1$ f ei ole määritelty. Derivaatan

$$f'(x) = \frac{-2x + 1}{(x^2 - x)^2}$$

nimittäjä on määrittelyjoukossa positiivinen, joten derivaatan merkki määräytyy osoittajasta $-2x + 1$, jonka ainoa nollakohta on $x = 1/2$.

		0		$\frac{1}{2}$		1	
f'	$+$		$+$		$-$		$-$
f	↗		↗	max	↘		↘



Differentiaalilaskennan väliarvolause antaa työkalun, jolla käytännössä lasketaan toispuoleiset derivaatat:

Lause 6.57. *Oletetaan, että f on jatkuva välillä $[a, b]$ ja derivoituva välillä (a, b). Jos derivaatalla on olemassa raja-arvo*

$$L = \lim_{x \to a+} f'(x), \tag{6.58}$$

niin silloin f:llä on a:ssa oikeanpuoleinen derivaatta $f'(a+)$ ja $f'(a+) = L$. Vastaava tulos pätee vasemmanpuoleiselle derivaatalle $f'(b-)$.

Todistus. Olkoon $x > a$, $x \in (a, b)$. Sovelletaan differentiaalilaskennan väliarvolausetta välillä $[a, x]$: eräällä $c(x) \in (a, x)$ on

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c(x)).$$

Tehdään näin jokaisella $x \in (a, b)$ ja tutkitaan em. erotusosamäärän raja-arvoa. Koska $c(x) \to a+$, kun $x \to a+$, niin

$$f'(a+) = \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a+} f'(c(x)) = \lim_{c \to a+} f'(c) = L. \qquad \square$$

Esimerkki 6.59. Tarkastellaan itseisarvofunktiota $f(x) = |x|$. Koska

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{kun } x < 0, \\ x, & \text{kun } x \geq 0, \end{cases}$$

niin $f(x)$ on derivoituva, kun $x \neq 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{kun } x < 0, \\ 1, & \text{kun } x > 0. \end{cases}$$

Pisteessä $x = 0$ $f(x)$ ei ole derivoituva, sillä f on jatkuva ja

$$f'(0-) = \lim_{x \to 0-} f'(x) = -1 \neq 1 = \lim_{x \to 0+} f'(x) = f'(0+).$$

Pisteessä $x = 0$ f:n kuvaajalla on kulma.

Esimerkki 6.60. Määrää vakiot a ja b siten, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} x + a, & \text{kun } x < 1, \\ bx^2, & \text{kun } x \geq 1 \end{cases}$$

on derivoituva $\mathbb{R}$:ssä.

Ratkaisu. f on polynomina derivoituva, kun $x \neq 1$. Jotta f olisi jatkuva pisteessä $x = 1$, on oltava

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} (x + a) = 1 + a = b = f(1).$$

Derivoituvuuteen pisteessä $x = 1$ vaaditaan

$$f'(1-) = \lim_{x\to 1-} f'(x) = \lim_{x\to 1-} 1 = 1 = 2b = \lim_{x\to 1+} 2bx = \lim_{x\to 1+} f'(x) = f'(1+).$$

Yhtälöparista

$$\begin{cases} 1 + a = b \\ 1 = 2b \end{cases}$$

saadaan ratkaisuksi $a = -1/2$ ja $b = 1/2$. Geometrisesti on kyse suoran ja paraabelin liittämisestä pisteessä $x = 1$ siten, että kuvaajaan ei jää kulmaa. Piirrä kuva!

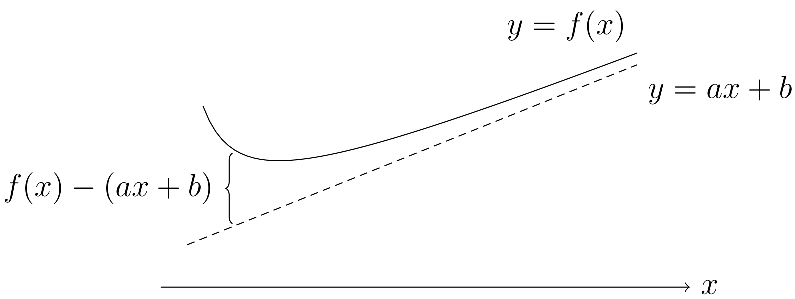
Huomautus 6.61. a) Lauseen 6.57 oletus jatkuvuudesta on oleellinen. Esimerkiksi esimerkin 4.32 funktiolle $\lim_{x\to 1+} f'(x) = -1$, mutta f:llä ei ole oikeanpuoleista derivaattaa $f'(1+)$.
b) Oletus (6.58) tarkoittaa, että f' on oikealta jatkuva pisteessä a. Aina näin ei ole derivoituvallekaan funktiolle: esimerkiksi funktiolle

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{kun } x \neq 0, \\ 0, & \text{kun } x = 0, \end{cases}$$

on $f'(0) = 0$, mutta raja-arvoa $\lim_{x\to 0+} f'(x)$ ei ole olemassa.

Joskus funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kuvaajan hahmottelemisessa voidaan käyttää asymptootteja. Sanotaan, että suora $y = ax + b$ on kuvaajan $y = f(x)$ *asymptootti*, jos

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \qquad \text{tai} \qquad \lim_{x\to -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$



Suora $x = a$ on kuvaajan $y = f(x)$ *pystysuora asymptootti*, jos

$$\lim_{x\to a-} f(x) = \pm\infty \qquad \text{tai} \qquad \lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty.$$

Esimerkki 6.62. Hahmotellaan funktion $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x + 2}$ kuvaaja.

$$\lim_{x \to -2\pm} f(x) = \pm\infty$$

(miksi?), joten kuvaajalla on pystysuora asymptootti $x = -2$. Derivaatan

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x+2) - (x^2 - 2x - 3)}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x - 1}{(x+2)^2}$$

nollakohdat: $x^2 + 4x - 1 = 0 \iff x = -2 \pm \sqrt{5}$. Lisäksi f ei ole määritelty, kun $x = -2$. Kulkukaavio:

	$-2-\sqrt{5}$ $\approx -4{,}2$		-2		$-2+\sqrt{5}$ $\approx 0{,}3$	

f'	$+$	$-$	$-$	$+$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Suoritetaan $f(x)$:n määrittelevän lausekkeen jakolasku:

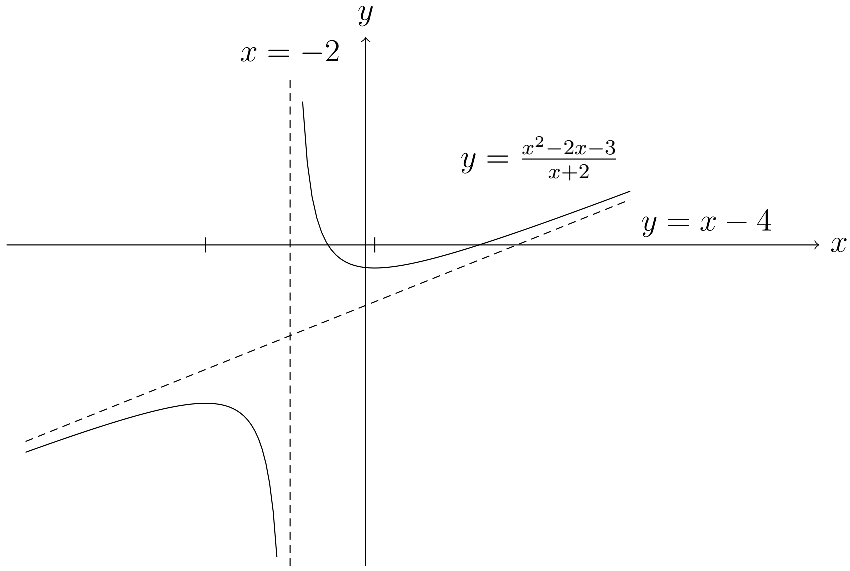
$$\begin{array}{r|rrr}
 & & x & -4 \\ \cline{2-4}
x+2 & x^2 & -2x & -3 \\
 & x^2 & +2x & \\ \cline{2-3}
 & & -4x & -3 \\
 & & -4x & -8 \\ \cline{3-4}
 & & & 5
\end{array}$$

Jakojäännökseksi jäi 5, joten

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 2} = x - 4 + \frac{5}{x + 2}.$$

Tarkasta laventamalla $(x+2)$:lla! Tässä $\lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{5}{x+2} = 0$, eli suora $y = x - 4$ on asymptootti.

Kun piirretään asymptootit, lasketaan f:n arvot derivaatan nollakohdissa (jotka on merkitty kuvaan x-akselille) ja huomataan, että $f(x) < x - 4$, kun $x < -2$ ja $f(x) > x - 4$, kun $x > -2$ (miksi?), niin voidaan hahmotella kuvaaja:



Esimerkki 6.63. Halutaan valmistaa puolen litran vetoinen suoran ympyrälieriön muotoinen säilyketölkki. Vaippa ja pohjat valmistetaan ohuesta metallilevystä. Miten tölkin korkeus ja pohjan halkaisija on valittava, jotta levyä kuluisi mahdollisimman vähän? (Vaipan ja pohjan liitoskohdissa tarvittaviin taitoksiin kuluva levy jätetään yksinkertaisuuden vuoksi huomiotta.)

Ratkaisu. Olkoon tölkin korkeus h cm ja pohjan halkaisija d cm. Tölkin tilavuus on 500 cm^3, joten

$$\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 h = 500.$$

Tästä voidaan ratkaista yksi muuttuja toisen avulla, esimerkiksi

$$h = \frac{500}{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2}.$$

Tölkin pinta-ala on (vaipan ala) + 2·(pohjan ala) eli

$$\pi dh + 2\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi d \frac{500}{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2} + 2\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{2000}{d} + \frac{\pi}{2} d^2 = f(d).$$

On selvitettävä funktion $f(d)$ pienin arvo joukossa $d > 0$. Lasketaan derivaatta

$$f'(d) = -\frac{2000}{d^2} + \pi d$$

ja sen nollakohta:

$$\frac{2000}{d^2} = \pi d \quad \Leftrightarrow \quad d = \sqrt[3]{\frac{2000}{\pi}} = 10\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$$

Koska $-2000/d^2$ ja πd ovat kasvavia funktioita joukossa $d > 0$, niin derivaatta on kasvava funktio ja siten negatiivinen kohdan $d = 10\sqrt[3]{2/\pi}$ vasemmalla ja positiivinen oikealla puolella. (Vaihtoehtoisesti kulkukaavion muodostamiseksi voidaan laskea derivaatta esimerkiksi kohdissa $1 < 10\sqrt[3]{2/\pi} < 10$.) Siten $f(d)$:n minimi saavutetaan kohdassa $d = 10\sqrt[3]{2/\pi}$. Tällöin

$$h = \frac{500}{\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2} = 10\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}.$$

Vastaus. On valittava korkeus = pohjan halkaisija = $10\sqrt[3]{2/\pi} \approx 8{,}6$ cm.

6.5 Korkeammat derivaatat

Jos derivoituvan funktion f derivaatta f' on derivoituva, niin sen derivaattaa $D(f'(x))$ kutsutaan f:n *toiseksi derivaataksi* ja merkitään

$$f''(x) = f^{(2)}(x) = D(f'(x)).$$

Vastaavasti määritellään f:n *kolmas derivaatta*

$$f'''(x) = f^{(3)}(x) = D(f''(x))$$

ja yleisesti *n:s derivaatta*

$$f^{(n)}(x) = D(f^{(n-1)}(x)).$$

Esimerkki 6.64. Lasketaan funktion $f(x) = x^3 + x^{3/2}$ neljä ensimmäistä derivaattaa:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 3x^2 + \frac{3}{2}x^{1/2} \\
f''(x) &= 6x + \frac{3}{4}x^{-1/2} \\
f^{(3)}(x) &= 6 - \frac{3}{8}x^{-3/2} \\
f^{(4)}(x) &= \frac{9}{16}x^{-5/2}
\end{aligned}$$

Korkeampia derivaattoja käytetään esimerkiksi funktion approksimointiin Taylorin polynomeilla luvussa 8.6. Toisen derivaatan avulla voidaan tutkia derivaatan kulkua ja tehdä tarkempia päätelmiä f:n käyttäytymisestä:

Lause 6.65. *Olkoon f kahdesti derivoituva välillä (a, b) ja olkoon $c \in (a, b)$ f:n kriittinen piste, ts. $f'(c) = 0$.*

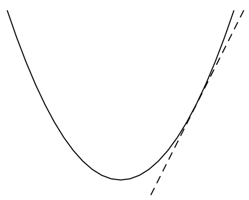
- *Jos $f''(x) > 0$ välillä (a, b), niin c on f:n lokaali minimipiste.*
- *Jos $f''(x) < 0$ välillä (a, b), niin c on f:n lokaali maksimipiste.*

Todistus. Jos $f''(x) > 0$, niin f' on kasvava välillä (a, b) ja siten sen merkki vaihtuu negatiivisesta positiiviseksi pisteesä c. Silloin c on f:n lokaali minimipiste. Tapaus $f''(x) < 0$ vastaavasti. □

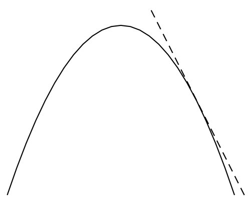
Esimerkki 6.66. Esimerkin 6.54 funktion $f(x) = x^3 - 3x + 1$ derivaatalla $f'(x) = 3x^2 - 3$ on nollakohta pisteessä $x = 1$. Toinen derivaatta $f''(x) = 6x$ on positiivinen pisteen $x = 1$ ympäristössä, joten $x = 1$ on f lokaali minimipiste.

Määritelmä 6.67. Kahdesti derivoituva funktio f on välillä (a, b) *alaspäin kupera (concave upward)*, jos $f''(x) > 0$ välillä (a, b) ja *ylöpäin kupera (concave downward)*, jos $f''(x) < 0$ välillä (a, b). Pistettä x, jossa kuperuussuunta (eli toisen derivaatan merkki) muuttuu kutsutaan *käännepisteeksi (inflection point)*.

Alaspäin kuperan funktion derivaatta on kasvava funktio, joten funktion kuvaaja kaareutuu ylöspäin ja funktion kuvaaja on minkä tahansa tangenttisuoransa yläpuolella. Vastaavasti ylöspäin kuperan funktion derivaatta on vähenevä, joten funktion kuvaaja kaareutuu alaspäin ja funktion kuvaaja on minkä tahansa tangenttisuoransa alapuolella.

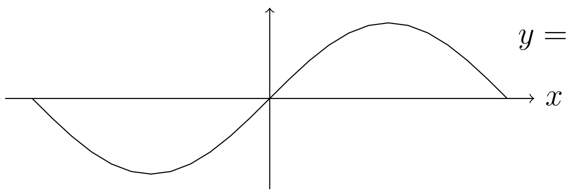


alaspäin kupera



ylöspäin kupera

Esimerkki 6.68. Tarkastellaan funktiota $f(x) = \sin x$ välillä $(-\pi, \pi)$. Nyt $f'(x) = \cos x$ ja $f''(x) = -\sin x$. Pisteessä $x = 0$ toisen derivaatan merkki muuttuu positiivisesta negatiiviseksi ja siten f:n kuvaaja alaspäin kuperasta ylöspäin kuperaksi. Piste $x = 0$ on f:n käännepiste.



6.6 l'Hôpital'n sääntö

l'Hôpitalin säännöllä voidaan yrittää selvittää raja-arvoa epämääräisessä tapauksessa $\frac{0}{0}$ tai $\frac{\infty}{\infty}$.

Lause 6.69 (l'Hôpital'n sääntö)**.** *Olkoot f ja g derivoituvia ja $g'(x) \neq 0$ pisteen a punkteeratussa ympäristössä. Jos*

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 = \lim_{x\to a} g(x),$$

niin

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

mikäli jälkimmäinen raja-arvo on olemassa.

Vastaavat tulokset ovat voimassa myös tapauksissa $a = \pm\infty$ ja $\lim_{x\to a} f(x) = \infty = \lim_{x\to a} g(x)$.

Todistus. Todistetaan väite siinä tapauksessa, että f ja g ovat derivoituvia myös a:ssa, $g'(a) \neq 0$ ja f' ja g' ovat jatkuvia. Silloin f ja g ovat jatkuvia a:ssa ja siten $f(a) = g(a) = 0$, ja lausetta 6.57 ja derivaatan määritelmää käyttäen saadaan

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f'(x)}{\lim_{x\to a} g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Yleinen tapaus: ks. [5, Appendix H]. $\square$

Esimerkki 6.70. a) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(2x)}{\ln x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{2x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} 1 = 1$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$

Kohdassa **c** ideana on, että sovelletaan l'Hôpital'n sääntöä toistuvasti, kunnes nimittäjäpolynomin aste on nolla.

Huomautus 6.71. On syytä muistaa, että l'Hôspital'n sääntö sopii vain tapauksiin $\frac{0}{0}$ tai $\frac{\infty}{\infty}$, ei esimerkiksi tapauksiin $\frac{0}{1}$ tai $\frac{\infty}{0}$.

Esimerkki 6.72. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Tutkitaan raja-arvoa $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^n}$ soveltamalla toistuvasti l'Hôspital'n sääntöä:

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{nx^{n-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}} \\ &= \cdots = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\cdots 2x^1} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1} = \infty. \end{aligned}$$

Tulos pätee muillekin kuin x:n kokonaislukueksponenteille:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^a} = \infty \quad (a > 0).} \tag{6.73}$$

Vastaavalla tavoin nähdään, että

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{\ln x} = \infty \quad (a > 0).} \tag{6.74}$$

Eksponentti-, potenssi- ja logaritmifunktiot voidaan siis asettaa kasvunopeuden suhteen seuraavaan järjestykseen:

- Eksponenttifunktio e^x kasvaa nopeammin kuin mikä tahansa potenssifunktio x^a.
- Logaritmifunktio $\ln x$ kasvaa hitaammin kuin mikä tahansa potenssifunktio x^a.

7 Integraali

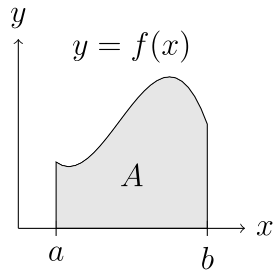
Integraalilaskennan motivaationa ovat seuraavat ongelmat:

(1) Etsi sellainen funktio F, jonka derivaatta on annettu funktio f. Ratkaisua merkitään

$$F(x) = \int f(x)\,dx.$$

(2) Laske sellaisen alueen A, jota rajoittavat x-akseli, suorat $x = a$ ja $x = b$ sekä funktion $f > 0$ kuvaaja, pinta-ala $a(A)$. Ratkaisua merkitään

$$a(A) = \int_a^b f(x)\,dx.$$



Esimerkki 7.1. Kappale liikkuu pitkin x-akselia. Tiedetään (esimerkiksi ratkaisemalla Newtonin liikeyhtälöstä $F = ma$), että kappaleen kiihtyvyys ajan t funktiona on $a(t) = 6t$. Merkitään kappaleen vauhtia $v(t)$:llä. Kappale lähtee levosta ajanhetkellä $t = 0$. Ratkaise $v(t)$.
Ratkaisu. $v'(t) = a(t)$, joten kyseessä on kohdan (1) mukainen ongelma. Helposti nähdään, että ainakin funktio $v(t) = 3t^2$ toteuttaa yhtälön $v'(t) = a(t)$ ja alkuehdon $v(0) = 0$.

Osoittautuu, että hyvin erilaisilta näyttävillä ongelmilla (1) ja (2) on läheinen yhteys keskenään. Aloitetaan ensimmäisestä ongelmasta.

7.1 Integraalifunktio [5, 5.2]

Olkoon seuraavassa $I \subset \mathbb{R}$ (rajoitettu tai rajoittamaton) reaalilukuväli.

Määritelmä 7.2. Funktio $F\colon I \to \mathbb{R}$ on funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ *integraalifunktio eli antiderivaatta (antiderivative)* välillä I, jos $F'(x) = f(x)$ kaikilla $x \in I$.

Esimerkki 7.3. Olkoon $f(x) = 2x+1$. Silloin esimerkiksi $F(x) = x^2+x-4$ ja $G(x) = x^2 + x + 8$ ovat f:n integraalifunktioita, koska $F'(x) = f(x)$ ja $G'(x) = f(x)$.

Esimerkki näyttää, että integraalifunktio ei ole yksikäsitteinen. Eri integraalifunktiot eroavat toisistaan kuitenkin vain vakion osalta:

Lause 7.4. *Olkoon F jokin f:n integraalifunktio välillä I. Tällöin jokainen f:n integraalifunktio voidaan esittää muodossa $G(x) = F(x) + C$, missä $C \in \mathbb{R}$ (ns.* integroimisvakio*).*

Todistus. Olkoot F ja G f:n integraalifunktioita välillä I. Merkitään $H(x) = G(x) - F(x)$. Silloin

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Differentiaalilaskennan väliarvolauseen seurauslauseen 6.52 mukaan H on silloin vakiofunktio, eli $H(x) = G(x) - F(x) = C$. $\square$

Määritelmä 7.5. Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ *integroimisella* tarkoitetaan kaikkien f:n integraalifunktioiden määrittämistä välillä I. f:n integraalifunktiolle F käytetään merkintää

$$F(x) = \int f(x)\,dx.$$

Merkinnän katsotaan sisältävän kaikki f:n integraalifunktiot, joten integroimisvakiota ei tässä merkinnässä yleensä kirjoiteta näkyviin.

Esimerkki 7.6. Esimerkiksi seuraavat on helppo tarkastaa derivoimalla:

$$\begin{aligned}
\int 13x^3\,dx &= \frac{13}{4}x^4 + C \\
\int \sin(3x)\,dx &= -\frac{1}{3}\cos(3x) + C \\
\int e^{-9x}\,dx &= -\frac{1}{9}e^{-9x} + C
\end{aligned}$$

Määritelmästä 7.2 ja lauseesta 7.4 seuraa suoraan, että integrointi ja derivointi ovat käänteisiä operaatioita: mikäli f:llä on integraalifunktio välillä I, niin

$$\boxed{D \int f(x)\,dx = f(x)} \tag{7.7}$$

ja mikäli f on derivoituva välillä I, niin

$$\boxed{\int f'(x)\,dx = f(x) + C.} \tag{7.8}$$

Lauseessa 7.4 (ja määritelmässä 7.2) on oleellista, että tarkastelujoukkona I on väli, kuten seuraava esimerkki osoittaa.

Esimerkki 7.9. Funktioille $F(x) = 1$ ja

$$G(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0, \\ 1, & \text{kun } x > 0, \end{cases}$$

on $F'(x) = G'(x) = 0$ kaikilla $x \neq 0$, mutta silti $F(x) \neq G(x) + C$.

Lause 7.10 (Integroinnin lineaarisuus)**.**

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx \qquad (c \in \mathbb{R} \text{ } \textit{vakio})$$
$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

Todistus. Väitteet seuraavat suoraan derivoinnin lineaarisuudesta: Jos $F(x)$ on $f(x)$:n jokin integraalifunktio, niin $cf(x) = c(DF(x)) = D(cF(x))$, joten funktiolla $cf(x)$ on integraalifunktio $cF(x)$. Toinen väite vastaavasti. □

Esimerkki 7.11.

$$\begin{aligned}\int 2x(\sqrt{x} - 1)\,dx &= \int \left(2x^{3/2} - 2x\right) dx = 2\int x^{3/2}\,dx - \int 2x\,dx \\ &= 2 \cdot \frac{2}{5}x^{5/2} - x^2 + C = \frac{4}{5}x^2\sqrt{x} - x^2 + C\end{aligned}$$

Kaikilla funktioilla ei ole integraalifunktiota:

Esimerkki 7.12. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0, \\ 1, & \text{kun } x \geq 0. \end{cases}$$

Oletetaan, että f:llä on integraalifunktio $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Silloin

$$F(x) = \begin{cases} C, & \text{kun } x < 0, \\ x + D, & \text{kun } x > 0. \end{cases}$$

Koska F on derivoituva 0:ssa, niin F on jatkuva 0:ssa ja siten $C = D$. Nyt F:n kuvaajalla on kulma pisteessä $x = 0$, eikä F siten ole derivoituva 0:ssa. Tämä ristiriita osoittaa, että f:llä ei voi olla integraalifunktiota.

Integraalifunktion olemassaoloa pohditaan tarkemmin lauseessa 7.49 ja huomautuksessa 7.50. Hyvä uutinen on, että jokaisella jatkuvalla funktiolla (ja monilla muillakin funktioilla) on integraalifunktio. Huono uutinen on, että monesti yksinkertaisenkaan näköisen jatkuvan funktion $f(x)$ integraalifunktiota $F(x)$ ei voida esittää äärellisen monen alkeisfunktion avulla. Tällaisia funktioita $f(x)$ ovat esimerkiksi

$$\frac{\sin x}{x}, \quad \frac{1}{\ln x}, \quad \frac{e^x}{x} \quad \text{ja} \quad e^{x^2}.$$

Luvussa 7.2 käydään läpi joitakin tapoja laskea integraalifunktio silloin, kun sille on lauseke olemassa.

7.2 Integroimistekniikkaa

Yksinkertaisimmissa tapauksissa paras keino integraalifunktion selvittämiseksi on ”arvata” tai selvittää kokeilemalla, minkä funktion derivaatta integroitava funktio on. Lähtökohdaksi voidaan ottaa taulukon 4 (s. 255) suoraan derivointikaavoista johdetut perusintegraalit.

Integraalifunktiota määritettäessä on syytä selvittää väli I, jolla tulos on voimassa (vrt. esimerkki 7.9). Välejä voi olla useampiakin, jolloin tulos on voimassa kullakin välillä erikseen.

Yleensä funktiosta ei kuitenkaan näe suoraan, kuinka se olisi integroitava. Tällöin seuraavat integroimismenetelmät saattavat auttaa. Menetelmästä riippumatta **integroinnin tulos kannattaa aina tarkastaa derivoimalla!**

7.2.1 Osittaisintegrointi [5, 7.3]

Tulon derivoimissäännnön mukaan

$$D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

ts.

$$f'(x)g(x) = D(f(x)g(x)) - f(x)g'(x).$$

Integroimalla puolittain saadaan osittaisintegrointikaava (integration by parts), jota voi yrittää käyttää, kun integroitavana on tulo, jonka tekijöistä toinen osataan integroida ja toinen derivoida:

$$\boxed{\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.} \tag{7.13}$$

Huomautus 7.14. Yhtälöiden (7.13) kaltaisissa integraalifunktioita koskevissa yhtälöissä on muistettava, että laskettaessa puolittain jotkin integraalifunktiot yhtälö pätee vain vakiota vaille. Esimerkiksi yhtälöstä $1 = 1$ ei seuraa puolittain integroimalla, että $x = x + 7$, vaikka sekä $F(x) = x$ että $G(x) = x + 7$ ovat funktion 1 integraalifunktioita.

Esimerkki 7.15. Laske $\int xe^{-x}\,dx$.

Ratkaisu. Valitaan $f'(x) = e^{-x}$ ja $g(x) = x$, jolloin $f(x) = \int e^{-x}\,dx = -e^{-x}$ (integroimisvakio voidaan valita nollaksi, sillä kaava (7.13) pätee kaikille $f'(x)$:n integraalifunktioille $f(x)$) ja $g'(x) = 1$. Nyt

$$\int xe^{-x}\,dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C.$$

Esimerkki 7.16. Laske $\int x^2 e^x\,dx$.

Ratkaisu. Sovelletaan osittaisintegrointia kahdesti niin, että päästään ensin eroon tekijästä x^2 ja sitten tekijästä x:

$$\begin{aligned}
&\int x^2 e^x\,dx && \left|\begin{array}{ll} f'(x) = e^x, & f(x) = e^x \\ g(x) = x^2, & g'(x) = 2x \end{array}\right. \\
&= x^2 e^x - 2\int xe^x\,dx && \left|\begin{array}{ll} f'(x) = e^x, & f(x) = e^x \\ g(x) = x, & g'(x) = 1 \end{array}\right. \\
&= x^2 e^x - 2\left(xe^x - \int e^x\,dx\right) = (x^2 - 2x + 2)e^x + C
\end{aligned}$$

Esimerkki 7.17. Laske $\int e^x \sin x\,dx$.

Ratkaisu. Sovelletaan ensin osittaisintegrointia kahdesti:

$$\begin{aligned}
&\int e^x \sin x\,dx && \left|\begin{array}{ll} f'(x) = e^x, & f(x) = e^x \\ g(x) = \sin x, & g'(x) = \cos x \end{array}\right. \\
&= e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx && \left|\begin{array}{ll} f'(x) = e^x, & f(x) = e^x \\ g(x) = \cos x, & g'(x) = -\sin x \end{array}\right. \\
&= e^x \sin x - \left(e^x \cos x + \int e^x \sin x\,dx\right)
\end{aligned}$$

Kysytty integraali voidaan ratkaista tästä yhtälöstä:

$$\int e^x \sin x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C.$$

Osittaisintegroinnin onnistuminen on suuresti kiinni siitä, kuinka funktiot f ja g valitaan. Väärä järjestys voi johtaa ojasta allikkoon ja monesti oikea tapa selviääkin vasta kokeilujen jälkeen.

7.2.2 Integrointi sijoituksen avulla [5, 5.7, 7.6]

Olkoon F funktion f integraalifunktio. Yhdistetyn funktion derivointisäännöstä $DF(g(x)) = f(g(x))g'(x)$ saadaan integrointikaava

$$\boxed{\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C.} \tag{7.18}$$

Erityisesti

$$\boxed{\begin{aligned} &\int g'(x)e^{g(x)}\,dx = e^{g(x)} + C, \\ &\int g'(x)(g(x))^a\,dx = \frac{1}{a+1}(g(x))^{a+1} + C \qquad (a \neq -1), \\ &\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln|g(x)| + C \qquad (g(x) \neq 0). \end{aligned}} \tag{7.19}$$

Esimerkki 7.20. a) $\displaystyle\int x^2 e^{4x^3}\,dx = \frac{1}{12}\int 12x^2 e^{4x^3}\,dx = \frac{1}{12}e^{4x^3} + C$

b) $\displaystyle\int (9x-7)^4\,dx = \frac{1}{9}\int 9(9x-7)^4\,dx = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5}(9x-7)^5 + C = \frac{1}{45}(9x-7)^5 + C$

c) $\displaystyle\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + C$

Näissä kaavaa (7.18) käytetään tulkitsemalla hankalan integraalin olevan muotoa $\int f(g(x))g'(x)\,dx$. Tällainen yhdistetyn funktion derivointiin perustuva integroimismenettely on onnistuessaan nopea ja tehokas, mutta vaatii kekseliäisyyttä tai kokeiluja integroitavan funktion saattamiseksi muotoon $f(g(x))g'(x)$. Menetelmä voidaan tehdä hieman mekaanisemmaksi kirjoittamalla kaava (7.18) uuteen muotoon. Merkitään sisäfunktiota $u(x)$:llä:

$$\boxed{\int f(u(x))u'(x)\,dx = \left[\int f(u)\,du\right]_{u=u(x)},} \tag{7.21}$$

missä merkintä $[\,\cdot\,]_{u=u(x)}$ tarkoittaa, että sulkujen sisällä olevaan lausekkeeseen sijoitetaan u:n paikalle funktio $u = u(x)$. Tässä alkuperäisestä muuttujasta x siirrytään *muuttujanvaihdon (change of variables)* eli *sijoituksen (substitution)* avulla uuteen muuttujaan $u = u(x)$. Tässä laskettavana on vasemman puolen integraali, josta tunnistetaan sopiva sisäfunktio $u(x)$ ja sen derivaatta $u'(x)$. Tällöin kyseessä on *suora sijoitus*. Muistisääntönä muuttujanvaihdossa differentiaalisymboleja du ja dx käytetään ikään kuin ne olisivat lukuja:

$$\frac{du}{dx} = u'(x) \;\Rightarrow\; u'(x)\,dx = du.$$

Jos vaihdetaan (7.21):ssä x:n ja u:n roolit, saadaan

$$\left[\int f(x)\,dx\right]_{x=x(u)} = \int f(x(u))x'(u)\,du.$$

Oletetaan, että $x(u)$ on bijektio, jolloin tähän yhtälöön voidaan sijoittaa puolittain käänteisfunktio $u = u(x)$. Vasemmalle puolelle jää sijoitusten jälkeen $x = x(u(x))$, joten saadaan

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \left[\int f(x(u))x'(u)\,du\right]_{u=u(x)}.} \tag{7.22}$$

Kaavassa (7.22) ajatellaan, että vasemmalle puolelle x:n paikalle sijoitetaan uusi funktio $x = x(u)$. Sopivalla sijoituksella oikean puolen integraali u:n suhteen voi tulla helpommin laskettavaksi kuin alkuperäinen integraali x:n suhteen. Tällaisesta sijoituksesta käytetään joskus nimitystä *käänteinen sijoitus (inverse substitution)*. Tässä voidaan käyttää samanlaista muistisääntöä kuin edellä:

$$\frac{dx}{du} = x'(u) \;\Rightarrow\; x'(u)\,du = dx.$$

Bijektiivistä sijoitusta $x = x(u) \;\Leftrightarrow\; u = u(x)$ käytettäessä toisinaan keksitään ensin käänteisfunktio. Käänteisfunktion derivoimissääntöä käyttämällä voi käydä niin, että itse funktion lauseketta ei tarvitse selvittää:

$$\frac{dx}{du} = x'(u) = \frac{1}{u'(x)} = \frac{1}{\frac{du}{dx}},$$

josta voidaan laskea sijoituksen jälkeen syntyvä integraali operoimalla muuttujien x ja u lisäksi myös symboleilla dx ja du ikään kuin ne olisivat lukuja.

Esimerkki 7.23. Laske $\displaystyle\int e^{2x+3}\,dx$.

Ratkaisu. Sijoitetaan $u = 2x + 3$. Tällöin

$$\frac{du}{dx} = 2 \;\Rightarrow\; dx = \frac{1}{2}\,du.$$

Niinpä

$$\int e^{2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\int e^{u}\,du = \frac{1}{2}e^{u} + C = \frac{1}{2}e^{2x+3} + C.$$

Esimerkki 7.24. Laske $\int t^4 \sqrt[3]{3-5t^5}\, dt$.

Ratkaisu. Sijoitetaan $u = 3 - 5t^5$, jolloin

$$\frac{du}{dt} = -25t^4 \;\Rightarrow\; t^4\, dt = -\frac{1}{25} du.$$

Siten

$$\begin{aligned}\int t^4 \sqrt[3]{3-5t^5}\, dt &= -\frac{1}{25}\int u^{1/3}\, du = -\frac{1}{25}\cdot\frac{3}{4}u^{4/3} + C \\ &= -\frac{3}{100}(3-5t^5)^{4/3} + C.\end{aligned}$$

Esimerkit 7.23 ja 7.24 oltaisiin voitu integroida myös suoraan kaavoja (7.19) käyttäen. Aina sopiva sijoitus ei ole yhtä ilmeinen.

Esimerkki 7.25. Laske $\int \frac{x}{x^4+1}\, dx$.

Ratkaisu. Sijoitetaan $u = x^2$. Nyt

$$\frac{du}{dx} = 2x \;\Rightarrow\; x\, dx = \frac{du}{2},$$

joten

$$\int \frac{x}{x^4+1}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{2}\arctan u + C = \frac{1}{2}\arctan x^2 + C.$$

Esimerkeissä 7.23–7.25 tehtiin suora sijoitus, jossa löydettiin sopiva sisäfunktio ja sen derivaatta. Seuraavissa käytetään käänteistä sijoitusta.

Esimerkki 7.26. Laske $\int x^2\sqrt{x-1}\, dx$.

Ratkaisu. Tapa 1. Kokeillaan sijoitusta $u = x - 1$, jolloin $dx = du$ ja $x = u + 1$. Nyt

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{x-1}\, dx &= \int (u+1)^2\sqrt{u}\, du = \int (u^2+2u+1)u^{1/2}\, du \\ &= \int (u^{5/2} + 2u^{3/2} + u^{1/2})\, du = \frac{2}{7}u^{7/2} + \frac{4}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2} + C \\ &= \frac{2}{7}(x-1)^{7/2} + \frac{4}{5}(x-1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + C\end{aligned}$$

Tapa 2. Kokeillaan sijoitusta $u = \sqrt{x-1}$, jolloin

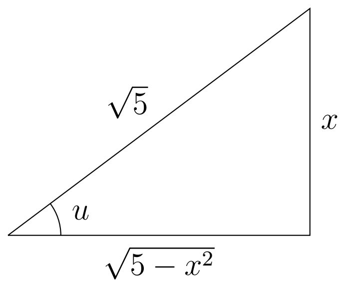
$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2u} \;\Rightarrow\; dx = 2u\, du$$

ja $x = u^2 + 1$. Nyt

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{x-1}\,dx &= \int (u^2+1)^2 u \cdot 2u\,du = 2\int (u^4+2u^2+1)u^2\,du \\ &= 2\int (u^6+2u^4+u^2)\,du = \frac{2}{7}u^7 + \frac{4}{5}u^5 + \frac{2}{3}u^3 + C \\ &= \frac{2}{7}(x-1)^{7/2} + \frac{4}{5}(x-1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + C.\end{aligned}$$

Esimerkki 7.27. Laske $\displaystyle\int \frac{dx}{(5-x^2)^{3/2}}$.

Ratkaisu. Tässä $|x| < \sqrt{5}$. Sijoitetaan $x = \sqrt{5}\sin u$, joka on bijektio välillä $-\pi/2 < u < \pi/2$.



Kuvan suorakulmaisesta kolmiosta havaitaan, että

$$\cos u = \frac{\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{5}} \quad \text{ja} \quad \tan u = \frac{x}{\sqrt{5-x^2}}.$$

Lisäksi $dx = \sqrt{5}\cos u\,du$, joten

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(5-x^2)^{3/2}} &= \int \frac{\sqrt{5}\cos u}{5^{3/2}\cos^3 u}\,du = \frac{1}{5}\int \frac{du}{\cos^2 u} \\ &= \frac{1}{5}\tan u + C = \frac{1}{5}\frac{x}{\sqrt{5-x^2}} + C.\end{aligned}$$

Vastaavalla tavoin monien muidenkin lausekkeen $\sqrt{x^2+a^2}$, $\sqrt{a^2-x^2}$ tai $\sqrt{x^2-a^2}$ sisältävien funktioiden integroimiseksi löydetään sopiva trigonometrinen sijoitus suorakulmaisen kolmion avulla.

Tietokoneohjelmat (`Matlab`, `Maxima`, `Maple`, `WolframAlpha`,...) suoriutuvat integraalifunktion hakemisesta varsin hyvin, joten soveltajalle riittää ymmärtää sijoituskeinon pääperiaatteet.

Esimerkki 7.28. Lasketaan esimerkin 7.27 integraalifunktio kahdella eri sovelluksella.

Matlab (jossa Symbolic Math Toolbox)

```
syms x
int((5-x^2)^(-3/2),x)
ans = x/(5*(5 - x^2)^(1/2))
```

WolframAlpha (`http://www.wolframalpha.com/`)

```
int(1/(5-x^2)^(3/2),x)
```

$$\int \frac{x}{(5-x^2)^{3/2}}\,dx = \frac{x}{5\sqrt{5-x^2}} + \text{constant}$$

7.2.3 Rationaalifunktion integrointi [5, 7.5]

Rationaalifunktio on muotoa

$$\frac{p(x)}{q(x)},$$

missä p ja q ovat reaalikertoimisia polynomeja. Jokainen rationaalifunktio voidaan integroida alkeisfunktioita käyttäen. Tarkastellaan seuraavassa integrointimenetelmän vaiheita.

Jos p:n aste on suurempi tai yhtä suuri kuin q:n aste, niin jakolaskulla saadaan

$$\frac{p(x)}{q(x)} = r(x) + \frac{s(x)}{q(x)},$$

missä r ja s ovat polynomeja ja s:n aste on pienempi kuin q:n aste. Polynomi r osataan helposti integroida, joten riittää osata integroida $p(x)/q(x)$ tapauksessa, jossa **p:n aste on pienempi kuin q:n aste**. Oletetaan seuraavassa, että näin on (tee ensin tarvittaessa jakolasku, ks. luku 5.5). Lauseen 5.62 mukaan polynomi q voidaan jakaa mahdollisimman alhaista astetta oleviin 1. ja 2. asteen reaalikertoimisiin tekijöihin seuraavasti:

$$\begin{aligned} q(x) =& a(x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}\cdots(x-a_j)^{m_j} \\ & \cdot (x^2+b_1x+c_1)^{n_1}\cdots(x^2+b_kx+c_k)^{n_k}, \end{aligned}$$

missä $a \in \mathbb{R}$, $a_1, \ldots, a_j \in \mathbb{R}$ ovat polynomin q eri nollakohdat, m_i on nollakohdan a_i kertaluku ja polynomeilla $x^2 + b_ix + c_i$ ei ole reaalisia nollakohtia.

Tällöin rationaalifunktiolle $p(x)/q(x)$ voidaan muodostaa *osamurtokehitelmä (partial fraction)*

$$\frac{p(x)}{q(x)} = F_1(x) + F_2(x) + \cdots + F_n(x),$$

missä rationaalifunktiot F_ℓ (ns. *osamurtoluvut*) muodostuvat seuraavasti: jokaista q:n muotoa $(ax-b)^m$ olevaa tekijää vastaa osamurtoluvut

$$\frac{A_1}{(ax-b)} + \frac{A_2}{(ax-b)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(ax-b)^m}$$

ja jokaista q:n muotoa $(ax^2+bx+c)^n$ olevaa tekijää vastaa osamurtoluvut

$$\frac{B_1x+C_1}{ax^2+bx+c} + \frac{B_2x+C_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{B_nx+C_n}{(ax^2+bx+c)^n}.$$

Nämä osamurtoluvut ovat sellaista muotoa, jotka osataan integroida ja siten

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$$

saadaan laskettua osamurtolukujen integraalien summana.

Esimerkki 7.29. Laske $\displaystyle\int \frac{4x-9}{x^2-8x+15}\,dx$.

Ratkaisu. Nimittäjäpolynomilla $q(x) = x^2 - 8x + 15$ on kaksi nollakohtaa $x = 3$ ja $x = 5$, joten sen tekijät ovat $(x-3)$ ja $(x-5)$. Niinpä

$$\frac{4x-9}{x^2-8x+15} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-5}.$$

Vakioiden A ja B selvittämiseksi lavennetaan oikean puolen termit samannimisiksi:

$$\frac{4x-9}{x^2-8x+15} = \frac{A(x-5)+B(x-3)}{x^2-8x+15},$$

eli on oltava

$$\begin{cases} 4 = A + B, \\ -9 = -5A - 3B, \end{cases}$$

josta $A = -3/2$ ja $B = 11/2$. Siten

$$\int \frac{4x-9}{x^2-8x+15}\,dx = -\frac{3}{2}\int \frac{dx}{x-3} + \frac{11}{2}\int \frac{dx}{x-5}$$
$$= -\frac{3}{2}\ln|x-3| + \frac{11}{2}\ln|x-5| + C.$$

Esimerkki 7.30. Laske $\displaystyle\int \frac{1}{x(x-1)^2}\,dx$.

Ratkaisu. Nimittäjäpolynomi on suoraan tekijämuodossa, joten voidaan muodostaa osamurtokehitelmä

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x^2-2x+1) + B(x^2-x) + Cx}{x(x-1)^2},$$

josta vastinpotenssien kertoimia tutkimalla saadaan $A = 1$, $B = -1$ ja $C = 1$. Niinpä

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x(x-1)^2}\,dx &= \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx \\
&= \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C \\
&= \ln\left|\frac{x}{x-1}\right| - \frac{1}{x-1} + C.
\end{aligned}$$

Esimerkki 7.31. Laske $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^2+1)^2}\,dx$.

Ratkaisu. Toisen asteen tekijällä x^2+1 ei ole reaalisia nollakohtia, joten nimittäjäpolynomi on suoraan tekijämuodossa ja voidaan muodostaa osamurtokehitelmä

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Laventamalla saadaan $A = 1$, $B = -1$, $C = 0$, $D = -1$ ja $E = 0$, joten

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x(x^2+1)^2}\,dx &= \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx \\
&= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} + C \\
&= \ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{2(x^2+1)} + C.
\end{aligned}$$

Muotoa

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+bx+c}\,dx$$

oleva osamurtoluvun integraali palautuu helpommin käsiteltävään muotoon täydentämällä jakaja neliöksi ja tekemällä sopiva sijoitus.

Esimerkki 7.32. Laske $\displaystyle\int \frac{6x-11}{x^2-8x+25}\,dx.$

Ratkaisu. Nimittäjällä ei ole nollakohtia, joten integroitava funktio on valmiiksi osamurtomuodossa. Neliöidään:

$$x^2-8x+25 = x^2-8x+16+9 = (x-4)^2+9.$$

Sijoitetaan $u = x-4$, jolloin $(x-4)^2+9 = u^2+9,\ x = u+4$ ja $dx = du$:

$$\begin{aligned}\int \frac{6x-11}{x^2-8x+25}\,dx &= 6\int \frac{u}{u^2+9}\,du + 13\int \frac{du}{u^2+9} \\ &= 3\ln\left(u^2+9\right) + \frac{13}{3}\arctan\frac{u}{3} + C \\ &= 3\ln\left(x^2-8x+25\right) + \frac{13}{3}\arctan\frac{x-4}{3} + C.\end{aligned}$$

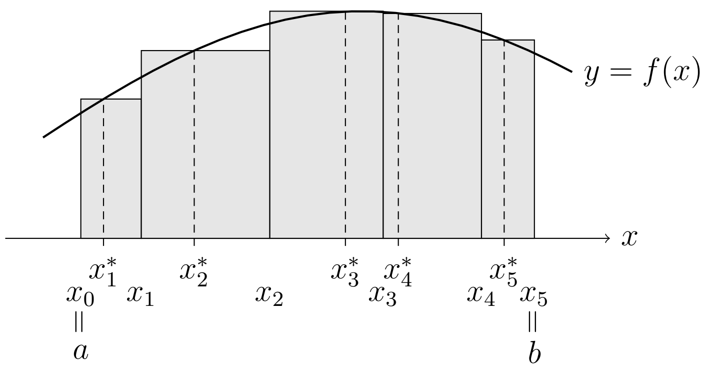
7.3 Määrätty integraali [5, 5.3–5.6]

Palataan nyt luvun 7 alussa esitettyyn pinta-alaongelmaan (2).

Olkoon $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ rajoitettu funktio. Jaetaan väli $[a,b]$ osaväleihin *jakopisteillä* $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Jakopisteiden muodostamaa joukkoa $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ kutsutaan välin $[a,b]$ *jaoksi (partition)*. Valitaan jokaiselta osaväliltä $[x_{i-1}, x_i]$ piste x_i^* ja merkitään $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, ts. Δx_i on i:nnen osavälin pituus. *Jaon normiksi* $|P|$ sanotaan pisimmän osavälin pituutta, ts. $|P| = \max\{\Delta x_i :\ i = 1, 2, \ldots, n\}$. Summaa

$$R = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

kutsutaan jakoon P ja pisteisiin x_i^* liittyväksi *Riemannin summaksi*.



Jos $f(x) \geq 0$, niin Riemannin summan kukin termi on kuvan mukaisen suorakulmion pinta-ala, joten Riemannin summa antaa arvion funktion f kuvaajan ja x-akselin väliin jäävän joukon pinta-alalle välillä $[a, b]$. Geometrisesti on ilmeistä, että arvio paranee, kun osavälijakoa tihennetään, ts. kun $|P| \to 0$. Tämä antaa motivaation integraalin määrittelemiseksi.

Määritelmä 7.33. Olkoon $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ rajoitettu funktio. Jos raja-arvo

$$I = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

on olemassa, niin sanotaan, että f on *integroituva (integrable)* välillä $[a, b]$ ja luku I on funktion f *(määrätty) integraali (integral) yli välin* $[a, b]$. Tällöin merkitään

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f.$$

Käytetään myös nimityksiä *Riemann-integroituva* ja *Riemann-integraali*. Määritelmän raja-arvo tarkoittaa tarkemmin ottaen seuraavaa: raja-arvo on I, jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i \right| < \epsilon \tag{7.34}$$

olipa P mikä tahansa välin $[a, b]$ jako ja x_i^* mitkä tahansa siihen liittyvät pisteet siten, että $|P| < \delta$.

Geometrinen tulkinta määritelmälle on, että jos $f(x) \geq 0$ ja f on integroituva, niin luku

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

on funktion f kuvaajan ja x-akselin väliin jäävän joukon pinta-ala. Jos $f(x) \leq 0$, niin f:n kuvaajan ja x-akselin väliin jäävän joukon pinta-ala on

$$-\int_a^b f(x)\,dx.$$

Seuraavan lauseen otamme käyttöön todistamatta. Todistuksessa (ks. [5, Appendix F]) tarvitaan *tasaisen jatkuvuuden (uniform continuity)* käsitettä.

Lause 7.35. *Suljetulla välillä* $[a, b]$ *jatkuva funktio on integroituva välillä* $[a, b]$.

Esimerkki 7.36. Laske $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$.

Ratkaisu. Valitaan välille $[0,1]$ kullakin $n \in \mathbb{N}$ tasavälinen jako, jonka jakopisteinä ovat $x_i = i/n$, $i = 0,1,2,\ldots,n$, jolloin kunkin jakovälin pituus on $1/n$. Pisteiksi x_i^* valitaan jakovälien oikeanpuoleiset päätepisteet, ts. $x_i^* = i/n$. Nyt

$$\begin{aligned} R &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 \\ &= \frac{1}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \end{aligned} \tag{7.37}$$

missä summakaava

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

voidaan todistaa induktiolla. Funktio f on jatkuva välillä $[0,1]$, joten se on integroituva ja siten Riemannin summat (7.37) suppenevat kohti integraalia, kun $|P| \to 0$, ts. kun $n \to \infty$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2\,dx &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\,\frac{2n^3+3n^2+n}{6} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Pian perustellaan integraalifunktioon perustuva tapa laskea määrättyjä integraaleja.

Lause 7.38 (Integraalin ominaisuuksia)**.** *Integroituville funktioille f ja $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ pätee:*

(1) $\displaystyle\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx \qquad (c \in \mathbb{R}).$

(2) $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$

(3) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad (a < c < b).$

(4) *Jos $f(x) \le g(x)$ kaikilla $x \in [a,b]$, niin* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$

(5) $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$

Perustele väitteet ensin kuvien avulla pinta-alatulkintaa käyttäen! Kohtien (1) ja (2) mukaan integrointi on integroitavan funktion suhteen lineaarinen operaatio.

Perustelu. Väitteiden todistaminen vaatisi integraalin määritelmän raja-arvon (7.34) tarkkaa analysointia eri jaoilla ja jakopisteillä. Kaavojen todistusta voidaan kuitenkin luonnostella seuraavaan tapaan:
(2) Käytetään jakoa $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$:

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx &= \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (f(x_i^*) + g(x_i^*))\Delta x_i \\ &= \lim_{|P|\to 0} \left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} g(x_i^*)\Delta x_i \right) \\ &= \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i + \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} g(x_i^*)\Delta x_i \\ &= \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx.\end{aligned}$$

(3) Käytetään välillä $[a, c]$ jakoa $P_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ ja välillä $[c, b]$ jakoa $P_2 = \{x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n}\}$. Nyt $P = P_1 \cup P_2 = \{x_0, x_1, \dots, x_{2n}\}$ on välin $[a, b]$ jako ja

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\, dx &= \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{2n} f(x_i^*)\Delta x_i \\ &= \lim_{|P|\to 0} \left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i + \sum_{i=n+1}^{2n} f(x_i^*)\Delta x_i \right) \\ &= \lim_{|P_1|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i + \lim_{|P_2|\to 0} \sum_{i=n+1}^{2n} f(x_i^*)\Delta x_i \\ &= \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.\end{aligned}$$ □

Sovitaan seuraavista merkinnöistä ($a < b$):

$$\boxed{\int_a^a f(x)\, dx = 0} \quad \text{ja} \quad \boxed{\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx.}$$

Silloin lauseen 7.38 kohdan (3) kaava pätee, olivatpa a, b ja c missä järjestyksessä tahansa tai vaikka yhtäsuuria (kunhan f ja g ovat integroituvia kyseisillä väleillä).

Voidaan osoittaa, että jatkuvien funktioiden lisäksi myös paloittain jatkuvat funktiot ovat integroituvia. Monesti paloittain jatkuvan funktion integraali lasketaan laskemalla integraali kullakin välillä, jolla f on jatkuva ja laskemalla nämä integraalit yhteen kohdan (3) mukaisesti. Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integroituvuuteen tai integraaliin ei vaikuta sen arvojen muuttaminen äärellisen monessa välin $[a,b]$ pisteessä, joten paloittain jatkuvan funktion arvoilla hyppäyspisteissä ei ole merkitystä.

Esimerkki 7.39. Kaikki rajoitetut funktiot eivät ole integroituvia. Otetaan esimerkiksi $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{kun } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Jos P on mikä tahansa välin $[0,1]$ jako, voidaan yhtäältä jokaiselta osaväliltä valita $x_i^* \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, jolloin Riemannin summa on 0, tai toisaalta jokaiselta osaväliltä $x_i^* \in \mathbb{Q}$, jolloin Riemannin summa on 1. Riemannin summilla ei siten voi olla raja-arvoa. Voidaan ajatella, että tässä lähdetään liikkeelle nollafunktiosta, jonka arvoja muutetaan kaikissa rationaalipisteissä. Jos arvoja olisi muutettu vain äärellisen monessa pisteessä, niin f olisi paloittain jatkuvana funktiona integroituva (ja integraali $= 0$).

Lause 7.40. *Jos $c \in \mathbb{R}$ on vakio, niin* $\displaystyle\int_a^b c\,dx = c(b-a)$.

Tämä tulos on geometrisesti ilmeinen, koska tapauksessa $c > 0$ laskettavana on sellaisen suorakulmion pinta-ala, jonka kanta on $b-a$ ja korkeus c.

Todistus. Valitaan mikä tahansa välin $[a,b]$ jako ja jakopisteet. Tällöin

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i = c\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = c(b-a). \qquad \square$$

Esimerkki 7.41. Osoita, että

$$\frac{\pi}{8} \le \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1+\cos^2 x}\,dx \le \frac{\pi}{6}.$$

Ratkaisu. Koska $1/\sqrt{2} \le \cos x \le 1$ kaikilla $x \in [0, \pi/4]$, niin $1/2 \le \cos^2 x \le 1$ ja siten

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1+1} \le \frac{1}{1+\cos^2 x} \le \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

kaikilla $x \in [0, \pi/4]$. Niinpä (lause 7.38 (4) ja lause 7.40)

$$\frac{\pi}{8} = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}\, dx \leq \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1+\cos^2 x}\, dx \leq \int_0^{\pi/4} \frac{2}{3}\, dx = \frac{\pi}{6}.$$

Lause 7.42 (Integraalilaskennan väliarvolause, IVAL)**.** *Jos $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva, niin on olemassa $c \in [a,b]$ siten, että*

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(c)(b-a).$$

Todistus. Suljetulla ja rajoitetulla välillä $[a,b]$ jatkuvana funktiona f saavuttaa siellä pienimmän arvonsa m ja suurimman arvonsa M (lause 6.42). Nyt $m \leq f(x) \leq M$ kaikilla $x \in [a,b]$, joten lauseen 7.38 kohdan (4) mukaan

$$\int_a^b m\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b M\, dx.$$

Laskemalla oikean ja vasemmanpuoleiset integraalit lauseen 7.40 mukaisesti saadaan

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b-a),$$

joten

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx \leq M.$$

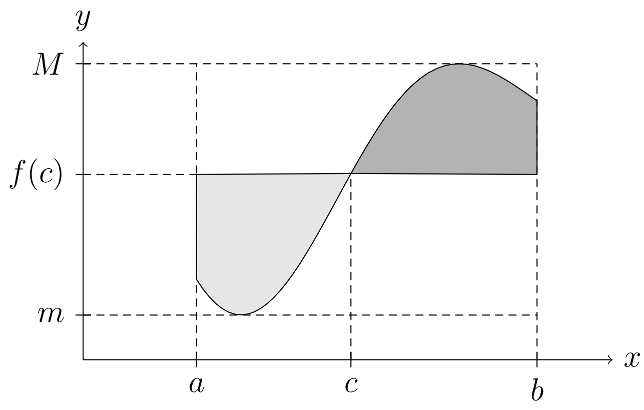
Jatkuvien funktioiden väliarvolauseen 4.39 mukaan f jatkuvana funktiona saavuttaa kaikki pienimmän arvonsa m ja suurimman arvonsa M väliset arvot, joten se saavuttaa eräässä pisteessä $c \in [a,b]$ arvon

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx. \qquad \square$$

Olkoon c kuten lauseessa 7.42. Silloin

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x)-f(c))\, dx &= \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b f(c)\, dx \\ &= \int_a^b f(x)\, dx - f(c)(b-a) \\ &= \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx = 0.\end{aligned}$$

Niinpä funktion $f(x)-f(c)$ kuvaajan ja x-akselin väliin jäävästä pinta-alasta on yhtä paljon x-akselin ala- kuin yläpuolella. Siten funktion $f(x)$ kuvaajan ja suoran $y = f(c)$ väliin jäävästä pinta-alasta on yhtä paljon suoran $y = f(c)$ ala- kuin yläpuolella.



Tällä perusteella arvoa $f(c)$ voidaan sanoa funktion f keskiarvoksi välillä $[a, b]$. Keskiarvo voidaan määritellä myös niille integroituville funktioille, jotka eivät ole jatkuvia.

Määritelmä 7.43. Integroituvan funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *keskiarvo (average value)* on luku

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

Integraalilaskennan väliarvolause voidaan nyt muotoilla niin, että ”jatkuva funktio saavuttaa keskiarvonsa”.

Lause 7.44 (Analyysin peruslause)**.** *Jos $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva, niin f:n määrätty integraali ylärajansa funktiona*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt \tag{7.45}$$

on derivoituva ja $F'(x) = f(x)$ kaikilla $x \in [a, b]$.

Todistus. Tutkitaan F:n erotusosamäärää pisteessä x. Oletetaan, että $h > 0$ (tapaus $h < 0$ vastaavasti). Käytetään tietoa

$$\int_a^{x+h} f(t)\, dt = \int_a^x f(t)\, dt + \int_x^{x+h} f(t)\, dt$$

ja sovelletaan integraalilaskennan väliarvolausetta välillä $[x, x+h]$:

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt\right)\\ &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\, dt = f(c),\end{aligned}$$

missä c on x:n ja $(x+h)$:n välissä. Koska $c \to x$, kun $h \to 0$, niin on olemassa

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(c) = \lim_{c\to x} f(c) = f(x),$$

missä viimeinen yhtäsuuruus seuraa f:n jatkuvuudesta. $\square$

Lause 7.46. *Jos G on jokin f:n integraalifunktio, niin*

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) =: \Big/_a^b G(x).$$

Todistus. Olkoon G mikä tahansa f:n integraalifunktio ja F yhtälön (7.45) funktio, joka myös on edellisen lauseen mukaan f:n integraalifunktio. Lauseen 7.4 nojalla on olemassa vakio C siten, että $G(x) = F(x) + C$. Nyt

$$G(b) - G(a) = \left(\int_a^b f(t)\,dt + C\right) - \left(\int_a^a f(t)\,dt + C\right) = \int_a^b f(t)\,dt. \quad \square$$

Esimerkki 7.47.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{3} (5x^2+2)\,dx = \Big/_{-1}^{3} \left(\frac{5}{3}x^3 + 2x\right) = 51 - \left(-\frac{11}{3}\right) = \frac{164}{3}$

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\Big/_1^2 \ln(x^2+1) = \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 2)$

Esimerkki 7.48. Derivoi **a)** $F(x) = \displaystyle\int_{-3}^{x} e^{-t^2}\,dt$ **b)** $F(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x^3} e^{-t^2}\,dt$

Ratkaisu. a) Analyysin peruslauseen mukaan $F'(x) = e^{-x^2}$.
b) Voidaan kirjoittaa

$$F(x) = \int_{x^2}^{0} e^{-t^2}\,dt + \int_0^{x^3} e^{-t^2}\,dt = -\int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt + \int_0^{x^3} e^{-t^2}\,dt.$$

Merkitsemällä

$$G(y) = \int_0^y e^{-t^2}\,dt,$$

$f(x) = x^2$ ja $h(x) = x^3$ voidaan F ilmoittaa muodossa $F(x) = -G(f(x)) + G(h(x))$, joten ketjusääntöä ja analyysin peruslausetta soveltaen saadaan

$$F'(x) = -G'(f(x))f'(x) + G'(h(x))h'(x) = -2xe^{-x^4} + 3x^2e^{-x^6}.$$

Analyysin peruslauseesta seuraa:

Lause 7.49. *Jatkuvalla funktiolla $f\colon I \to \mathbb{R}$ on integraalifunktio $F\colon I \to \mathbb{R}$.*

Huomautus 7.50. Jatkuva funktio $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on siis aina integroituva ja sillä on integraalifunktio, jonka avulla määrätty integraali voidaan laskea. Yleisesti ottaen tilanne on hieman mutkikkaampi:
a) Myös epäjatkuvalla funktiolla voi olla integraalifunktio. Esimerkiksi tällaisesta tapauksesta käy funktio $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolle $F(x) = x^2 \sin(1/x^2)$, kun $x \neq 0$, ja $F(0) = 0$. F:llä on olemassa derivaatta $F'(x) = f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, mutta f ei ole jatkuva.
b) Integroituvalla funktiolla ei välttämättä ole integraalifunktiota. Esimerkiksi esimerkin 7.12 hyppyfunktio on integroituva välillä $[-1,1]$, mutta sillä ei ole integraalifunktiota.
c) Integraalifunktion olemassaolosta ei välttämättä seuraa integroituvuus.

Huomautus 7.51. a) Tulon derivointisäännön ja lauseen 7.46 mukaan

$$\int_a^b \left(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\right)\, dx = \Big/_{\!a}^{\,b} f(x)g(x),$$

josta saadaan osittaisintegrointikaava määrättylle integraalille:

$$\boxed{\int_a^b f'(x)g(x)\, dx = \Big/_{\!a}^{\,b} f(x)g(x) - \int_a^b f(x)g'(x)\, dx.} \tag{7.52}$$

b) Myös suoraa sijoitusta (7.21) ja käänteistä sijoitusta (7.22) voidaan soveltaa. On vain muistettava laskea sijoitusfunktion $u = u(x)$ tai $x = x(u)$ määräämät uudet rajat:

$$\boxed{\int_a^b f(u(x))u'(x)\, dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\, du} \tag{7.53}$$

$$\boxed{\int_{x(a)}^{x(b)} f(x)\, dx = \int_a^b f(x(u))x'(u)\, du} \tag{7.54}$$

Käänteisessä sijoituksessa (7.54) oletusta funktion $x(u)$ bijektiivisyydestä ei tarvita, toisin kuin integraalifunktion tapauksessa.

Esimerkki 7.55. Laske **a)** $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}\, dx$ **b)** $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(1+2x)^2}$

c) $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{x}{x^4+1}\, dx$ **d)** $\displaystyle\int_{-1/3}^2 \frac{x}{\sqrt[3]{3x+2}}\, dx$

Ratkaisu. a) Osittaisintegroidaan kuten esimerkissä 7.15: valitaan $f'(x) = e^{-x}$ ja $g(x) = x$, jolloin $f(x) = -e^{-x}$ ja $g'(x) = 1$ ja siten

$$\int_0^1 xe^{-x}\,dx = -\Big/_0^1 xe^{-x} + \int_0^1 e^{-x}\,dx = -\frac{1}{e} - \Big/_0^1 e^{-x} = 1 - \frac{2}{e}.$$

b) Sijoitetaan $u = 1 + 2x$, jolloin $du = 2\,dx$. Rajat: kun $x = 1$, niin $u = 3$ ja kun $x = 2$, niin $u = 5$ ja siten

$$\int_1^2 \frac{dx}{(1+2x)^2} = \frac{1}{2}\int_3^5 \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{2}\Big/_3^5 \frac{1}{u} = \frac{1}{15}.$$

c) Kuten esimerkissä 7.25, sijoitetaan $u = x^2$, jolloin $du = 2x\,dx$. Rajat: kun $x = -1$, on $u = 1$ ja kun $x = 2$, on $u = 4$, joten

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 \frac{x}{x^4+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{2}\Big/_1^4 \arctan u \\ &= \frac{1}{2}(\arctan 4 - \arctan 1) = \frac{1}{2}\arctan 4 - \frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

d) Sijoitetaan $u = \sqrt[3]{3x+2}$ eli $x = u^3/3 - 2/3$, jolloin $dx = u^2\,du$. Rajat: kun $x = -1/3$, niin $u = 1$ ja kun $x = 2$, niin $u = 2$. Siten

$$\begin{aligned}\int_{-1/3}^2 \frac{x}{\sqrt[3]{3x+2}}\,dx &= \int_1^2 \frac{u^3/3 - 2/3}{u}\,u^2\,du = \frac{1}{3}\int_1^2 (u^4 - 2u)\,du \\ &= \frac{1}{3}\Big/_1^2 \left(\frac{u^5}{5} - u^2\right) = \frac{16}{15}.\end{aligned}$$

Huomautus 7.56. Sijoitusmenetelmässä voidaan vaihtoehtoisesti ensin laskea integraalifunktio x:n avulla ja käyttää alkuperäisiä integroimisrajoja. Esimerkiksi **d**-kohdassa

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt[3]{3x+2}}\,dx = \cdots &= \frac{1}{3}\left(\frac{u^5}{5} - u^2\right) + C \\ &= \frac{1}{15}(3x+2)^{5/2} - \frac{1}{3}(3x+2)^{2/3} + C,\end{aligned}$$

joten

$$\int_{-1/3}^2 \frac{x}{\sqrt[3]{3x+2}}\,dx = \left(\frac{32}{15} - \frac{4}{3}\right) - \left(\frac{1}{15} - \frac{1}{3}\right) = \frac{16}{15}.$$

Esimerkki 7.57. Lasketaan esimerkin 7.55 **d** määrätty integraali kahdella eri sovelluksella.

Matlab (jossa Symbolic Math Toolbox)

```
syms x
int(x/(3*x+2)^(1/3),x,-1/3,2)
ans = 16/15
```

WolframAlpha (`http://www.wolframalpha.com/`)

```
int(x/(3*x+2)^(1/3),x,-1/3,2)
```

$$\int_{-1/3}^{2} \frac{x}{\sqrt[3]{3x+2}}\,dx = \frac{16}{15} \approx 1.06667$$

Jos integroitava funktio on pariton tai parillinen (ks. määritelmä 3.52), niin seuraava tulos helpottaa funktion integroimista 0:n suhteen symmetrisen välin yli.

Lause 7.58. *Olkoon $f\colon [-a,a] \to \mathbb{R}$ integroituva. Jos f on pariton, niin*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

ja jos f on parillinen, niin

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Perustele piirtämällä kuvat! Todistukset hoituvat tekemällä sijoitus $u = -x$ integraaliin

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx.$$

Esimerkki 7.59. a) $f(x) = \sin(2x)$ on pariton funktio, joten

$$\int_{-3\pi/2}^{3\pi/2} \sin(2x)\,dx = 0.$$

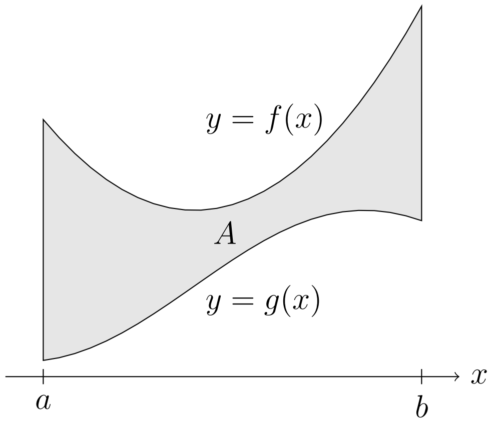
b) $f(x) = x^4 - 2$ on parillinen funktio, joten

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} (x^4-2)\,dx &= 2\int_{0}^{2} (x^4-2)\,dx \\ &= 2\Big/_{0}^{2} \left(\frac{1}{5}x^5 - 2x\right) = 2\left(\left(\frac{32}{5} - 4\right) - 0\right) = \frac{24}{5}.\end{aligned}$$

7.4 Integraalin geometrisia sovelluksia [5, 5.8,6.2–6.4]

Määrätyn integraalin geometrista tulkintaa laajentamalla saadaan: jatkuvien funktioiden f ja $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) \geq g(x)$, *kuvaajien väliin jäävän alueen pinta-ala* on

$$\boxed{A = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx.} \tag{7.60}$$



Pituuden, pinta-alan ja tilavuuden määritelmiä käsitellään tarkemmin vasta kursseilla Insinöörimatematiikka 4 ja Vektorianalyysi, mutta kuvien avulla voidaan vakuuttua seuraavista tuloksista (ks. [5, 6.2–6.4]). Oletetaan, että $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva, derivoituva ja että f' on jatkuva. Funktion f *kuvaajan pituus* on

$$\boxed{s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.} \tag{7.61}$$

Kun funktion f kuvaaja pyörähtää x-akselin ympäri, niin syntyvän kappaleen *vaipan ala* on

$$\boxed{A = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx} \tag{7.62}$$

ja kappaleen *tilavuus* on

$$\boxed{V = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx.} \tag{7.63}$$

Esimerkki 7.64. Mikä on käyrän $y = x^{3/2}$ pituus välillä $0 \leq x \leq 1$? Entä pyörähdyskappaleen tilavuus?
Ratkaisu. $y'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}$, joten kysytty pituus on

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = \Big/_0^1 \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2} = (13\sqrt{13} - 8)/27 \approx 1{,}44.$$

Tilavuus on

$$V = \pi \int_0^1 x^3\,dx = \pi \Big/_0^1 \frac{1}{4}x^4 = \frac{\pi}{4}.$$

7.5 Numeerinen integrointi [5, 5.9]

Käytännössä törmätään usein tilanteisiin, joissa

- integrointi alkeisfunktioiden avulla ei onnistu (esimerkiksi $f(x) = e^{x^2}$) tai on vaikeaa, tai
- f:n lauseketta ei tunneta, vaan tiedetään vain f:n arvoja tietyissä pisteissä esimerkiksi mittaustuloksina.

Tällöin f:n integraalia voidaa arvioida *numeerisella integroinnilla* käyttäen f:n arvoja äärellisen monessa integroimisvälin pisteessä.

7.5.1 Riemannin summa

Jos $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ on välin $[a, b]$ jako, niin mikä tahansa Riemannin summa antaa arvion f:n integraalille välillä $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x_i.$$

Jos valitaan tasavälinen jako, jossa kunkin osavälin pituus on h, sievenee arvio muotoon

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx h\sum_{i=1}^n f(x_i^*).} \tag{7.65}$$

Jos f on ei-negatiivinen, niin geometrinen tulkinta arviolle on se, että jokaisella välillä $[x_{i-1}, x_i]$ f:n kuvaajan ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-alaa arvioidaan suorakulmion pinta-alalla (ks. kuva sivulla 140).

Esimerkki 7.66. Arvioi integraalia

$$\int_1^3 \frac{dx}{x} \tag{7.67}$$

Riemannin summalla, kun käytetään tasavälistä jakoa, jolle $n = 6$ ja x_i^* on osavälin keskipiste.

Ratkaisu. Nyt $h = (b-a)/n = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ja välien keskipisteet ovat $\frac{7}{6}$, $\frac{9}{6}, \dots,$ $\frac{17}{6}$, joten

$$\int_1^3 \frac{dx}{x} \approx \frac{1}{3}\Big(f\left(\tfrac{7}{6}\right) + f\left(\tfrac{9}{6}\right) + \cdots + f\left(\tfrac{17}{6}\right)\Big) \approx 1{,}094\ 581.$$

Vertaa tarkkaan arvoon $\ln(3) = 1{,}098\ 612\ 288\cdots$.

Käytännössä Riemannin summaa ei juurikaan integraalin arvioimiseen käytetä, sillä voidaan kehittää huomattavasti tehokkaampia menetelmiä, joissa samalla määrällä jakopisteitä (eli samalla vaivalla tai tietokoneajalla) päästään huomattavasti parempaan tarkkuuteen. Käsitellään seuraavassa kahta yksinkertaista menetelmää.

7.5.2 Puolisuunnikassääntö

Puolisuunnikassäännössä (*trapezoid rule*) ideana on (kun f on ei-negatiivinen) käyttää f:n kuvaajan ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-alan arvioinnissa suorakulmioiden sijasta puolisuunnikkaita, jotka syntyvät, kun korvataan f:n kuvaaja pisteiden $(x_i, f(x_i))$ kautta kulkevalla murtoviivalla. Käytetään tasavälistä jakoa, jossa osavälin pituus on h. Tällöin i:nnen puolisuunnikkaan pinta-ala on

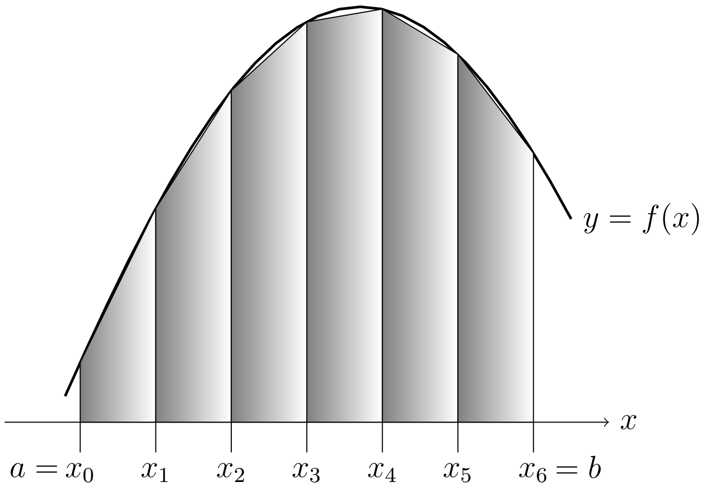
$$\frac{1}{2}(f(x_{i-1}) + f(x_i))h,$$

joten pinta-alojen summa on

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(f(x_{i-1}) + f(x_i))h &= h\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(f(x_{i-1}) + f(x_i)) \\
&= h\biggl(\frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2) + \cdots \\
&\qquad + \frac{1}{2}f(x_{n-2}) + \frac{1}{2}f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)\biggr).
\end{aligned}$$

f:n integraalille saadaan siten arvio

$$\boxed{\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx \approx h\biggl(&\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) \\ &+ \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)\biggr).\end{aligned}} \tag{7.68}$$



Kaava (7.68) pätee myös yleiselle f (eli jos f ei ole ei-negatiivinen): jos $g(x)$:n kuvaaja on ko. murtoviiva, niin välillä $[x_{i-1}, x_i]$ on

$$g(x) = f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}(x - x_{i-1}).$$

Integroimalla saadaan (laske!)

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)\,dx = \frac{1}{2}(f(x_{i-1}) + f(x_i))h$$

ja summaamalla yli kaikkien osavälien

$$\int_a^b g(x)\,dx = h\biggl(\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)\biggr).$$

Esimerkki 7.69. Arvioi integraalia (7.67) puolisuunnikassäännöllä, kun käytetään tasavälistä jakoa, jolle $n = 6$.
Ratkaisu. Nyt $h = (b - a)/n = \frac{1}{3}$ ja jakopisteet ovat 1, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$,. . . , 3, joten

$$\int_1^3 \frac{dx}{x} \approx \frac{1}{3}\biggl(\frac{1}{2}f(1) + f\left(\tfrac{4}{3}\right) + f\left(\tfrac{5}{3}\right) + \cdots + f\left(\tfrac{8}{3}\right) + \frac{1}{2}f(3)\biggr) = 1{,}106\ 746.$$

7.5.3 Simpsonin kaava

Yleensä vielä parempaan arvioon päädytään, jos korvataan f:n kuvaaja paraabelinpaloilla. *Simpsonin kaavassa* käytetään kolmea peräkkäistä jakopistettä x_i, x_{i+1} ja x_{i+2} vastaavien pisteiden kautta kulkevaa paraabelia. Käytetään tasavälistä jakoa, jossa osavälin pituus on h ja jossa on parillinen määrä osavälejä.

Tarkastellaan ensin tilannetta, jossa $x_0 = -h$, $x_1 = 0$ ja $x_2 = h$. Olkoon $y(x) = Ax^2 + Bx + C$ se toisen asteen polynomi, jonka kuvaaja kulkee pisteiden $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ ja $(x_2, f(x_2))$ kautta. Nyt

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_2} y(x)\,dx &= 2\int_0^h (Ax^2 + C)\,dx = 2\Big/_0^h \left(\frac{A}{3}x^3 + Cx\right)\\ &= 2\left(\frac{A}{3}h^3 + Ch\right) = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C).\end{aligned}$$

Kauttakulkuehdot ovat

$$\begin{aligned}f(x_0) &= y(x_0) = Ah^2 - Bh + C,\\ f(x_1) &= y(x_1) = C,\\ f(x_2) &= y(x_2) = Ah^2 + Bh + C,\end{aligned}$$

joten $f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) = 2Ah^2 + 6C$. Saatiin siis

$$\int_{x_0}^{x_2} y(x)\,dx = \frac{h}{3}\Big(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\Big).$$

Tämä kaava on voimassa myös ilman oletusta $x_1 = 0$ (miksi?). Erityisesti

$$\int_{x_2}^{x_4} y(x)\,dx = \frac{h}{3}\Big(f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\Big)$$

ja vastaavalla tavoin kaikilla väleillä $[x_{2i}, x_{2(i+1)}]$, joten päädytään arvioon

$$\boxed{\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\Big(&f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4)\\ &+ \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\Big).\end{aligned}} \tag{7.70}$$

Esimerkki 7.71. Arvioi integraalia (7.67) Simpsonin kaavalla, kun käytetään tasavälistä jakoa, jolle $n = 6$.

Ratkaisu. Nyt $h = (b-a)/n = \frac{1}{3}$ ja jakopisteet ovat 1, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$,. . . , 3, joten

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{dx}{x} &\approx \frac{1}{9}\Big(f(1) + 4f\left(\tfrac{4}{3}\right) + 2f\left(\tfrac{5}{3}\right) + 4f\left(\tfrac{6}{3}\right) + 2f\left(\tfrac{7}{3}\right) + 4f\left(\tfrac{8}{3}\right) + f(3)\Big)\\ &\approx 1{,}098\ 942.\end{aligned}$$

Huomautus 7.72. Merkitään M_n:llä n:n pisteen *keskipisteapproksimaatiota* (eli Riemannin summaa, jossa käytetään n:ää osaväliä ja x_i^* on osavälin keskipiste) ja T_n:llä n:n osavälin puolisuunnikassäännön antamaa arviota. Tällöin Simpsonin kaavan antama arvio $2n$:llä osavälillä on

$$S_{2n} = \frac{1}{3}(2M_n + T_n).$$

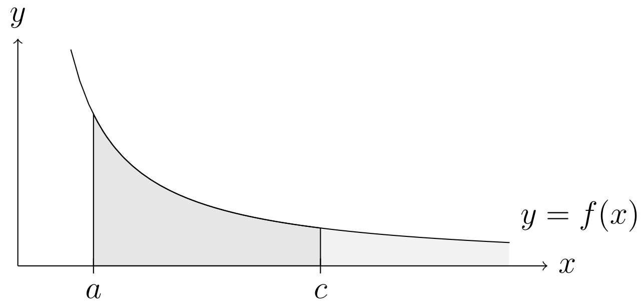
Simpson-arvio saadaan siis keskipiste- ja puolisuunnikasapproksimaatioiden sopivasti painotettuna keskiarvona. Perustelu: ks. [5, luku 5.9, (10)–(11)].

7.6 Epäoleellinen integraali [5, 7.8]

Edellä integraali määriteltiin vain rajoitetulla välillä $[a, b]$ määritellylle rajoitetulle (yleensä paloittain jatkuvalle) fuktiolle. Yleistämme nyt tätä määritelmää myös tapauksiin, joissa

- integroimisväli on rajoittamaton, ts. $a = -\infty$ tai $b = \infty$, tai
- funktio ei ole rajoitettu.

7.6.1 Rajoittamaton integroimisväli



Määritelmä 7.73. Olkoon f jatkuva välillä $[a, \infty)$. Määritellään

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{c\to\infty}\int_a^c f(x)\,dx.$$

Vastaavasti jos f on jatkuva välillä $(-\infty, a]$, määritellään

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{c\to-\infty}\int_c^a f(x)\,dx.$$

Mikäli raja-arvo on (äärellisenä) olemassa, ko. epäoleellinen integraali *suppenee (converges)*, muulloin *hajaantuu (diverges)*.

Lause 7.74. *Olkoon $a > 0$ ja $p \in \mathbb{R}$. Tällöin*

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^p} \quad \text{suppenee jos ja vain jos} \quad p > 1.$$

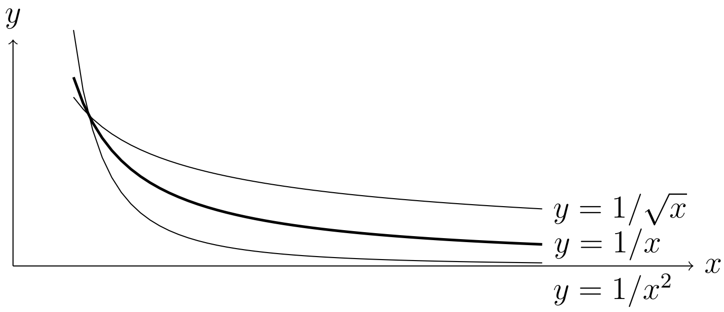
Todistus. Olkoon $c > a$. Oletetaan ensin, että $p \neq 1$. Tällöin

$$\int_a^c \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}\Big/_a^c \frac{1}{x^{p-1}} = \frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{c^{p-1}} - \frac{1}{a^{p-1}}\right) \to \begin{cases} \frac{a^{1-p}}{p-1}, & \text{kun } p > 1, \\ \infty, & \text{kun } p < 1, \end{cases}$$

kun $c \to \infty$. Tapauksessa $p = 1$

$$\int_a^c \frac{dx}{x} = \Big/_a^c \ln x = \ln c - \ln a \to \infty, \quad \text{kun } c \to \infty. \qquad \square$$

Potenssifunktioiden integroituvuudessa välillä $[a, \infty)$ $1/x$ on siis rajatapaus. Vertaa tulosta funktioiden kuvajiin:



Hajaantuvan integraalin arvo ei välttämättä ole ∞ tai $-\infty$:

Esimerkki 7.75. Esimerkiksi

$$\int_0^c \cos x \, dx = \Big/_0^c \sin x = \sin c,$$

jolla ei ole raja-arvoa, kun $c \to \infty$. Niinpä

$$\int_0^\infty \cos x \, dx$$

hajaantuu. Miten voit päätellä tämän jo kosinin kuvaajasta?

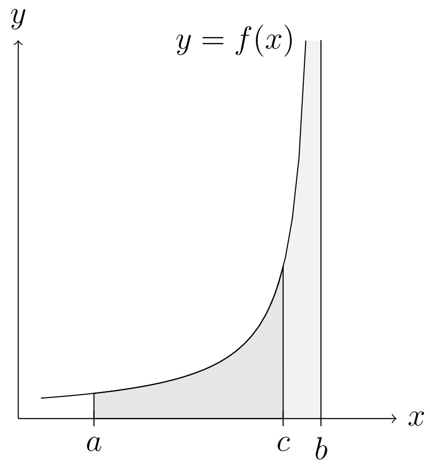
Huomautus 7.76. Selvissä tapauksissa voidaan käyttää merkintää

$$\Big/_a^\infty F(x) := \lim_{c \to \infty} \Big/_a^c F(x).$$

Esimerkiksi

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \Big/_1^\infty \ln x = \ln(\infty) - \ln 1 = \infty.$$

7.6.2 Rajoittamaton funktio



Määritelmä 7.77. Olkoon f jatkuva mutta rajoittamaton välillä $[a,b)$. Määritellään

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b-} \int_a^c f(x)\,dx.$$

Vastaavasti jos f on jatkuva mutta rajoittamaton välillä $(a,b]$, määritellään

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a+} \int_c^b f(x)\,dx.$$

Mikäli raja-arvo on (äärellisenä) olemassa, ko. epäoleellinen integraali *suppenee*, muulloin *hajaantuu*.

Lause 7.78. *Olkoon $a > 0$ ja $p \in \mathbb{R}$. Tällöin*

$$\int_0^a \frac{dx}{x^p} \quad \textit{suppenee jos ja vain jos} \quad p < 1.$$

Todistus. Samaan tapaan kuin lause 7.74. □

Esimerkki 7.79. Suppeneeko vai hajaantuuko $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(x-2)^2}$?

Ratkaisu. Integroitava funktio

$$\frac{1}{(x-2)^2} \to \infty, \quad \text{kun } x \to 2-,$$

joten kyseessä on epäoleellinen integraali ja

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x-2)^2} = \lim_{c\to 2-} \int_1^c \frac{dx}{(x-2)^2} = \lim_{c\to 2-} \Big/_1^c -\frac{1}{x-2}$$

$$= \lim_{c\to 2-} \left(-\frac{1}{c-2} - 1\right) = \infty.$$

Integraali siis hajaantuu.

7.6.3 Integroimisvälin jako osiin

Jos integroimisväli on $(-\infty, \infty)$, tai on useampia pisteitä, joiden ympäristöissä f on rajoittamaton, on integroimisväli jaettava osiin siten, että saadaan määritelmien 7.73 ja 7.77 mukaiset epäoleelliset integraalit $I_1, I_2, \ldots, I_n$. Määritellään, että f:n integraali I suppenee, jos jokainen I_i suppenee. Tällöin asetetaan

$$I = I_1 + I_2 + \cdots + I_n.$$

Esimerkki 7.80. Tutki suppenemista ja laske arvo, jos suppenee:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2}$ **b)** $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^{1/3}}$ **c)** $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$

Ratkaisu. a) Integroitava funktio $1/x^2 \to \infty$, kun $x \to 0+$, joten kyseessä on epäoleellinen integraali, joka voidaan jakaa osiin

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2} + \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}.$$

Lauseen 7.78 mukaan ensimmäinen näistä integraaleista hajaantuu, joten kysytty integraali myös hajaantuu.

b) Integroitava funktio $1/x^{1/3} \to \pm\infty$, kun $x \to 0\pm$, joten kyseessä on epäoleellinen integraali, joka voidaan jakaa osiin

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^{1/3}} &= \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^{1/3}} + \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/3}} = \lim_{c\to 0-} \int_{-1}^c \frac{dx}{x^{1/3}} + \lim_{c\to 0+} \int_c^1 \frac{dx}{x^{1/3}} \\ &= \lim_{c\to 0-} \Big/_{-1}^{c} \frac{3}{2}x^{2/3} + \lim_{c\to 0+} \Big/_{c}^{1} \frac{3}{2}x^{2/3} = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0.\end{aligned}$$

c) Integroitava funktio on rajoitettu ($0 < 1/(1+x^2) \le 1$ kaikilla x), mutta integroimisväli on molemmista päistä rajoittamaton, joten integroimisväli täytyy jakaa kahteen osaan:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} &= \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \lim_{c\to -\infty} \int_c^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{c\to\infty} \int_0^c \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \lim_{c\to -\infty} \Big/_{c}^{0} \arctan x + \lim_{c\to\infty} \Big/_{0}^{c} \arctan x \\ &= \Big(0 - \Big(-\frac{\pi}{2}\Big)\Big) + \Big(\frac{\pi}{2} - 0\Big) = \pi.\end{aligned}$$

Huomautus 7.81. **a)** Parittoman funktion integraali 0:n suhteen symmetrisen välin yli ei ole automaattisesti nolla. Esimerkiksi

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x} = -\infty + \infty,$$

ts. integraali hajaantuu.
b) Analyysin peruslauseessa oletus funktion jatkuvuudesta koko suljetulla ja rajoitetulla välillä on oleellinen. Esimerkiksi huolimattomasti voisimme laskea

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} \overset{\text{Väärin!}}{=} -\Big/_{-1}^{1} \frac{1}{x} = -(1+1) = -2.$$

Tämän laskun tulos on selvästi virheellinen jo siksi, että integroitava funktio on positiivinen kaikilla $x \neq 0$.

Lause 7.82 (Vertailuperiaate)**.** *Olkoon* $-\infty \leq a < b \leq \infty$ *ja oletetaan, että jatkuville funktioille* $f(x)$ *ja* $g(x)$ *pätee* $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *kaikilla* x*. Tällöin*

$$\int_a^b g(x)\,dx \text{ suppenee } \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \text{ suppenee (majoranttiperiaate)},$$
$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ hajaantuu } \Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx \text{ hajaantuu (minoranttiperiaate)}.$$

Lause sanoo, että jos pienemmän funktion integraali hajaantuu, niin silloin suuremmankin funktion integraali hajaantuu, ja kääntäen jos suuremman funktion integraali suppenee, niin silloin myös pienemmän funktion integraali suppenee (vrt. sivun 157 kuva). Tässä on huomattava, että tutkittavien funktioiden täytyy olla ei-negatiivisia. Esimerkiksi $f(x) = -1/x \leq 1/x^2 = g(x)$ välillä $x \in [1, \infty)$, mutta $\int_1^\infty f(x)\,dx$ hajaantuu, vaikka $\int_1^\infty g(x)\,dx$ suppenee.

Perustelu. Tutkitaan tapausta $-\infty < a$ ja $b = \infty$. Funktio

$$F(c) = \int_a^c f(x)\,dx$$

on kasvava, sillä ei-negatiiviselle f luku $F(c)$ on kuvaajan $y = f(x)$ ja x-akselin rajaaman joukon pinta-ala, joka kasvaa, kun c kasvaa (tai analyysin peruslauseella $F'(c) = f(c) \geq 0$, joten F on kasvava). Voidaan osoittaa, että kasvavalla funktiolla on raja-arvo $\lim_{c\to\infty} F(c)$ joko äärellisenä tai raja-arvo on ∞, eli ei voi käydä kuten esimerkissä 7.75, jossa raja-arvoa ei heilahtelun vuoksi ole olemassa. Niinpä lauseen ensimmäisen väitteen todistamiseksi riittää osoittaa, että raja-arvo ei ole ∞:

$$F(c) = \int_a^c f(x)\,dx \leq \int_a^c g(x)\,dx =: G(c)$$

ja oletuksen mukaan $\lim_{c\to\infty} G(c) < \infty$. Raja-arvojen ominaisuuksista seuraa, että tällöin myös $\lim_{c\to\infty} F(c) < \infty$. Toinen väite samaan tapaan. $\square$

Esimerkki 7.83. Suppeneeko vai hajaantuuko

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$ **b)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$?

Ratkaisu. a) Integraali suppenee, sillä

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{x+x^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{3/2}},$$

kun $x \geq 1$ ja $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}}$ suppenee (lause 7.74). Usein tällainen arvio kirjoitetaan lyhyesti

$$0 \leq \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}} \leq \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3}} = \int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}} < \infty.$$

b) Koska $1+\sqrt{x} \leq \sqrt{x}+\sqrt{x} = 2\sqrt{x}$, kun $x \geq 1$, niin voidaan arvioida

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+\sqrt{x}} \geq \int_1^\infty \frac{dx}{1+\sqrt{x}} \geq \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} = \infty.$$

Integraali siis hajaantuu.

8 Sarjateoria

Tässä luvussa tutkitaan sarjoja eli summia, joissa on äärettömän monta termiä. Niiden avulla voidaan esimerkiksi approksimoida alkeisfunktioita. Kuinka esimerkiksi laskin laskee (tyypillisesti kymmendesimaalisen) likiarvon luvulle $\sin(17°)$? Laskimeen ei voida suoraan määritellä sinifunktiota, sillä laskimeen voidaan pohjimmiltaan ohjelmoida vain peruslaskutoimitukset: yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolasku. Tämän vuoksi sinifunktio esitetään äärettömänä summana, jonka alusta otetaan niin monta termiä, että kaikki laskimen näyttämät desimaalit ovat oikein. Tällä kurssilla pohditaan mm. sitä, millainen tämä summa on eri alkeisfunktioille ja kuinka monta termiä tarvitsee laskea tiettyyn tarkkuuteen pääsemiseksi.

Sarjoja käyttäen voidaan myös esimerkiksi integroida hankalia funktioita (kuten e^{x^2}), ratkaista differentiaaliyhtälöitä (joita tutkitaan luvussa 9) tai muodostaa eriasteisia malleja fysiikassa.

8.1 Lukujono [5, 10.2]

Määritelmä 8.1. Jos jokaista luonnollista lukua $n \in \mathbb{N}$ vastaa reaaliluku a_n, niin päättymätöntä järjestettyä luetteloa

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (a_n) = (a_n)_{n=1}^{\infty}$$

kutsutaan *lukujonoksi (sequence)*. Luvut a_n ovat lukujonon *termejä (term)* (tai *alkioita*). Indeksointi voidaan aloittaa mistä tahansa kokonaisluvusta.

Esimerkki 8.2. **a)** $(2n)_{n=0}^{\infty} = (0, 2, 4, 6, \ldots)$

b) $(2n-1)_{n=1}^{\infty} = (1, 3, 5, 7, \ldots)$

c) $\Big((-1)^n 2^n\Big)_{n=1}^{\infty} = (-2, 4, -8, 16, -32, \ldots)$

d) $\left(\dfrac{1}{3^n}\right)_{n=0}^{\infty} = \left(1, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{27}, \ldots\right)$

Joskus lukujonon termeille ei anneta (tai ei voida antaa) edellisen esimerkin mukaista kaavaa.

Esimerkki 8.3. **a)** Kasvavaan järjestykseen asetetut alkuluvut muodostavat jonon

$$(2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots).$$

b) Määrittely $a_1 = 1$ ja $a_n = 2a_{n-1} + 3$, kun $n > 1$, tuottaa lukujonon

$$(1, 5, 13, 29, 61, \ldots).$$

c) Määrittely $a_1 = a_2 = 1$ ja $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, kun $n > 2$, tuottaa ns. *Fibonaccin jonon*

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots).$$

Kohdissa **b** ja **c** on kyse *rekursiivisesti* (*induktiivisesti*) määritellystä lukujonosta, joka asetetaan määräämällä, kuinka kukin termi riippuu edellisestä tai edellisistä termeistä.

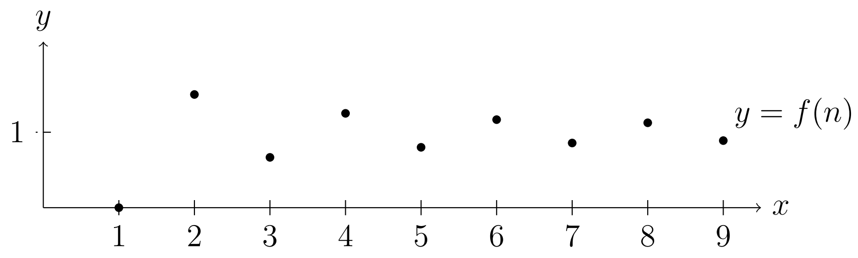
Lukujono $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ voidaan samastaa funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = a_n$, kanssa. Esimerkiksi lukujonoa

$$\left(\frac{(-1)^n}{n} + 1\right)_{n=1}^{\infty}$$

vastaa funktio

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ f(n) = \frac{(-1)^n}{n} + 1.$$

Lukujonoa (a_n) voidaan havainnollistaa geometrisesti piirtämällä sitä vastaavan funktion $f(n)$ kuvaaja.



Huomautus 8.4. Joskus lukujono esitellään listaamalla muutama ensimmäinen termi, esimerkiksi

$$(1, 2, 3, \ldots). \tag{8.5}$$

Tällainen määrittely ei kuitenkaan ole yksikäsitteinen, esimerkiksi jono (8.5) voisi olla

$$(n+1)_{n=0}^{\infty} = (1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots)$$

tai vaikkapa

$$\left(-\frac{1}{2}n^3 + \frac{3}{2}n^2 + 1\right)_{n=0}^{\infty} = (1, 2, 3, 1, -7, -24, \ldots).$$

8.1.1 Lukujonon raja-arvo

Lukujonolle määritellään raja-arvo samaan tapaan kuin funktiolle raja-arvo äärettömyydessä.

Määritelmä 8.6. Lukujono (a_n) *suppenee* kohti *raja-arvoa* $L \in \mathbb{R}$, jos

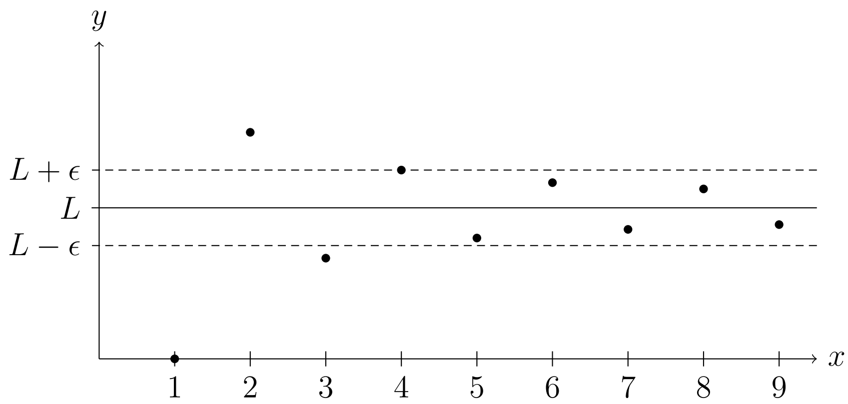
$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \; n > N \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon.$$

Tällöin merkitään

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \text{tai} \qquad a_n \to L, \text{ kun } n \to \infty.$$

Jos lukujono ei suppene, se *hajaantuu*.

Seuraavan kuvan tilanteessa valitulla ϵ voidaan valita $N = 4$.



Perustulokset 8.7–8.9 voidaan todistaa samaan tapaan kuin funktioiden raja-arvojen laskusäännöt (ks. luku 4).

Lause 8.7. *Jos (a_n) ja (b_n) suppenevat ja $c \in \mathbb{R}$, niin*

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(ca_n) = c \lim\limits_{n\to\infty} a_n$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$, *jos* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

Lause 8.8. *Olkoon $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ ja olkoon $f(x)$ jatkuva pisteessä $x = L$. Silloin*

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\Big(\lim_{n\to\infty} a_n\Big) = f(L).$$

Lause 8.9 (Kuristusperiaate, squeeze law)**.** *Olkoon $a_n \leq b_n \leq c_n$ kaikilla n ja*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} c_n.$$

Silloin $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$.

Jos suppenevan lukujonon termien lauseke on tiedossa, niin raja-arvoa voidaan yrittää selvittää sopivan funktion raja-arvoa tutkimalla:

Lause 8.10. *Jos funktiolle $f\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$ ja jonolle (a_n) pätee $a_n = f(n)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Esimerkki 8.11. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2}{4n^2-9n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{4-9/n} = \dfrac{3}{4-0} = \dfrac{3}{4}$.

b) Suppeneeko $\left(\dfrac{\cos n}{n}\right)$? Koska

$$0 \leftarrow -\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n} \to 0,$$

kun $n \to \infty$, niin $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos n}{n} = 0$.

Jonon suppenemiseen ja mahdolliseen raja-arvoon ei äärellisen monella jonon alkupään termillä ole merkitystä. Niinpä esimerkiksi lauseissa 8.9–8.10 riittää, että jono toteuttaa vaaditun ehdon jostakin indeksin $n \in \mathbb{N}$ arvosta alkaen.

8.1.2 Kasvavat ja vähenevät lukujonot

Määritelmä 8.12. Lukujono (a_n) on *kasvava*, jos

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \text{kaikilla } n$$

ja *vähenevä*, jos

$$a_n \geq a_{n+1} \quad \text{kaikilla } n.$$

Lukujono on *monotoninen*, jos se on kasvava tai vähenevä. Lukujono (a_n) on *ylhäältä rajoitettu*, jos on olemassa luku M, jolle $a_n \leq M$ kaikilla n. Vastaavasti määritellään *alhaalta rajoitettu* lukujono.

Esimerkki 8.13. a) Vakiolukujono $(1, 1, 1, \ldots)$ on kasvava, vähenevä, alhaalta rajoitettu ja ylhäältä rajoitettu.
b) Jos

$$a_n = \frac{1}{2n^2+7},$$

niin lukujono (a_n) on vähenevä, sillä $2n^2 + 7$ on kasvava joukossa $n \in \mathbb{N}$. Lisäksi lukujono on sekä alhaalta että ylhäältä rajoitettu, sillä selvästikin $0 < a_n < 1$ kaikilla n.
c) Jos

$$a_n = \frac{n+2}{n+13},$$

niin lukujono (a_n) on kasvava, sillä funktion

$$f(x) = \frac{x+2}{x+13}$$

derivaatta on

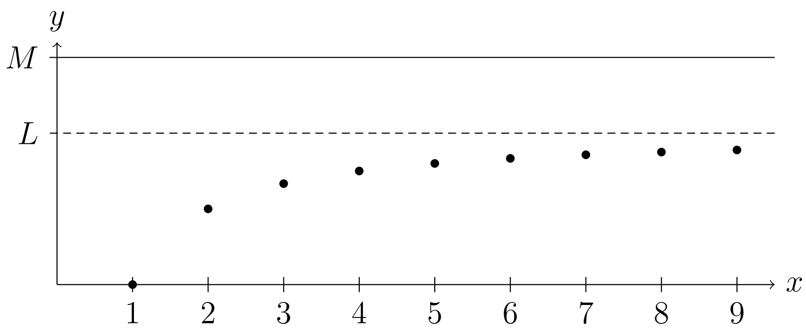
$$f'(x) = \frac{11}{(x+13)^2} > 0$$

kaikilla $x \geq 1$. Lukujono on lisäksi sekä alhaalta että ylhäältä rajoitettu: kasvavuuden nojalla $a_n \geq a_1 = 3/14$ ja koska $n+2 \leq n+13$ kaikilla n, niin $a_n \leq 1$ kaikilla n.

Lause 8.14. *Ylhäältä rajoitettu kasvava lukujono suppenee.*

Todistus. Ks. [5, Appendix E]. □

Vastaava tulos on voimassa myös vähenevälle ja alhaalta rajoitetulle lukujonolle. Tätä perustulosta emme tällä kurssilla voi todistaa, mutta tuloksen järkevyydestä voinee vakuuttua kuvan avulla:



Lemma 8.15. *Lukujono* (a_n)*, missä*

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

on aidosti kasvava ja ylhäältä rajoitettu, eli sillä on lauseen 8.14 mukaan raja-arvo. Merkitään tätä raja-arvoa e:llä:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828\cdots.$$

Lisäksi myös lukujono (b_n)*, missä* $b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$*, on aidosti kasvava ja*

$$\frac{1}{e} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

Lukua e kutsutaan *Neperin luvuksi*. Sillä on erityisasema eksponenttifunktion kantalukuna. Lemmaa 8.15 tarvittiin eksponenttifunktion e^x määrittelemiseksi (määritelmä 3.33) ja derivoimiskaavan $D(e^x) = e^x$ todistamiseksi (lause 6.22).

Lemman 8.15 todistus. Todistetaan ensimmäinen väite. Olkoon $0 < x < y$. Silloin lemman 5.47 mukaan

$$\begin{aligned} y^{n+1} - x^{n+1} &= (y-x)(y^n + y^{n-1}x + \cdots + yx^{n-1} + x^n) \\ &< (y-x)(y^n + y^n + \cdots + y^n + y^n) \\ &= (y-x)(n+1)y^n \\ &= (yn - (n+1)x)y^n + y^{n+1}, \end{aligned}$$

joten

$$x^{n+1} > ((n+1)x - yn)y^n. \tag{8.16}$$

Sovelletaan nyt epäyhtälöä (8.16) arvoilla $x = 1 + \dfrac{1}{n+1}$ ja $y = 1 + \dfrac{1}{n}$ (joille $0 < x < y$):

$$a_{n+1} = x^{n+1} > ((n+1+1) - (n+1))y^n = y^n = a_n.$$

Lukujono (a_n) on siis aidosti kasvava. Toisaalta jos sovelletaan epäyhtälöä (8.16) arvoilla $x = 1$ ja $y = 1 + \dfrac{1}{2n}$, niin saadaan arvio

$$1 > \left((n+1) - \left(n + \frac{1}{2}\right)\right)\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n,$$

josta

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n < 2.$$

Neliöimällä saadaan

$$a_{2n} = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} < 4,$$

eli $a_{2n} < 4$. Kasvavuudesta seuraa, että $a_n < 4$ kaikilla n, eli jono (a_n) on ylhäältä rajoitettu. □

8.2 Sarja [5, 10.3]

8.2.1 Summamerkintä

Jos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ovat reaalilukuja, niin merkitään

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Esimerkiksi

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55.$$

Summausindeksin nimi voidaan valita vapaasti, joskin yleensä käytetään kirjainta i, j, k, l, m tai n. Indeksointi voidaan aloittaa muustakin indeksistä kuin 1. Esimerkiksi edellinen summa voidaan kirjoittaa

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = \sum_{k=1}^{5} k^2 = \sum_{j=2}^{6} (j-1)^2 = \sum_{j=0}^{4} (j+1)^2.$$

Jos termeillä on yhteinen tekijä c, niin voidaan laskea

$$\sum_{i=1}^{n} ca_i = (ca_1) + (ca_2) + \cdots + (ca_n) = c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = c\sum_{i=1}^{n} a_i$$

eli

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i.}$$

Samaan tapaan saadaan

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i.}$$

Esimerkiksi

$$\sum_{i=1}^{5} (7i^2 - 4i) = 7\sum_{i=1}^{5} i^2 - 4\sum_{i=1}^{5} i = 7 \cdot 55 - 4 \cdot 15 = 325.$$

Tärkeä erikoistapaus on vakiotermin c summa

$$\sum_{i=1}^{n} c = \underbrace{c + c + \cdots + c}_{n \text{ kappaletta}} = nc.$$

Erityisesti

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} 1 = n.}$$

Merkin vaihtelu saadaan -1:n potensseilla: $(-1)^i$ on -1, kun i on pariton ja 1, kun i on parillinen. Esimerkiksi

$$\sum_{i=1}^{5} (-1)^i i = -1 + 2 - 3 + 4 - 5 = -3$$

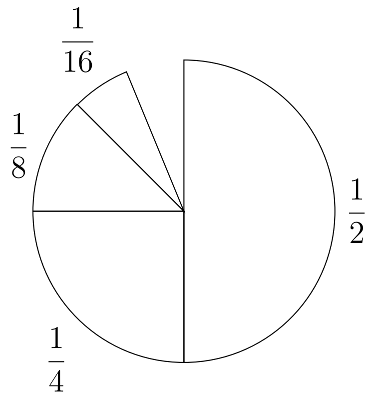
ja

$$\sum_{i=1}^{5} \frac{(-1)^{i+1}}{i^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} = \frac{821}{979} \approx 0{,}8386.$$

8.2.2 Sarja

Jaetaan leipä kahteen osaan, joista toinen osa jaetaan edelleen kahteen osaan jne. Viipaleista muodostuu kokonainen leipä, joten on ilmeisesti oltava

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1.$$



Mitä tämä ääretön summa tarkoittaa?

Määritelmä 8.17. Olkoon (a_k) lukujono. Muodollista summaa

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

kutsutaan *sarjaksi (series)*. Luku a_k on sarjan k:s *termi*. Sarjan ensimmäisten termien summa indeksiin n saakka on sarjan n:s *osasumma (partial sum)*. Osasummaa merkitään S_n, ts.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Esimerkki 8.18. Sarjan

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

neljä ensimmäistä osasummaa ovat

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{2} \\
S_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\
S_3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \\
S_4 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}
\end{aligned}$$

Määritelmä 8.19. Tarkastellaan sarjaa $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Jos osasummien S_n muodostama jono (S_n) suppenee ja sen raja-arvo on $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, niin sanotaan, että sarja *suppenee (converges)* ja että sen *summa (sum)* on S. Tällöin merkitään

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S.$$

Jos (S_n) hajaantuu, niin sanotaan, että sarja *hajaantuu (diverges)*. Tapauksissa $\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$ merkitään

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \pm\infty.$$

Esimerkki 8.20. a) Osoita, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots$$

suppenee ja laske summa.

Ratkaisu. Muodostamalla osamurtokehitelmä nähdään, että yleinen termi voidaan kirjoittaa muodossa

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

joten osasummalle S_n pätee

$$\begin{aligned}
S_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots \\
&\quad + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1, \quad \text{kun } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Siten sarja suppenee ja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$.

b) Osoita, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

hajaantuu.
Ratkaisu. Ensimmäiset osasummat ovat

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 \\ S_2 &= 1 - 1 = 0 \\ S_3 &= 1 - 1 + 1 = 1 \\ S_4 &= 1 - 1 + 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Nähdään, että osasummien jono on $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$, jolla ei ole raja-arvoa.

Huomautus 8.21. Sarjan indeksointi voidaan aloittaa muustakin indeksistä kuin 1, esimerkiksi

$$\sum_{i=5}^{\infty} \frac{1}{(i-4)^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots .$$

Tämän sarjan osasummat ovat

$$S_5 = 1, \quad S_6 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \quad S_7 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{49}{36}, \quad \ldots .$$

Määritelmä 8.22. Sarja $\sum a_k$ on *geometrinen sarja (geometric series)*, jos on olemassa $r \in \mathbb{R}$ siten, että

$$a_{k+1} = r a_k$$

kaikilla k, ts. ensimmäisen termin jälkeen kukin termi saadaan edeltävästä termistä kertomalla *suhdeluvulla (ratio)* r.

Jos geometrisen sarjan ensimmäistä termiä merkitään a:lla, niin sarjan termit ovat $a_0 = a$, $a_1 = ar$, $a_2 = ar^2$, $a_3 = ar^3$ jne. Niinpä geometrinen sarja voidaan kirjoittaa muodossa

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots .} \tag{8.23}$$

Huomaa, että tässä ensimmäinen indeksi on $k = 0$.

Lause 8.24. *Jos* $|r| < 1$, *niin geometrinen sarja* (8.23) *suppenee ja*

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}.$$

Jos $|r| \geq 1$ *ja* $a \neq 0$, *niin geometrinen sarja hajaantuu.*

Todistus. Kirjoitetaan n:s osasumma ja kerrotaan yhtälö puolittain suhdeluvulla:

$$\begin{aligned} S_n &= a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n \\ rS_n &= \phantom{a + {}} ar + ar^2 + \cdots + ar^n + ar^{n+1} \end{aligned}$$

Vähentämällä nämä yhtälöt puolittain saadaan

$$(1-r)S_n = a - ar^{n+1},$$

joten

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{a(1-r^{n+1})}{1-r}, & \text{kun } r \neq 1, \\ (n+1)a, & \text{kun } r = 1. \end{cases}$$

Kun $|r| < 1$, niin $\lim\limits_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$, joten

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}.$$

Kun $|r| > 1$, niin raja-arvoa $\lim\limits_{n\to\infty} r^{n+1}$ ei ole olemassa ja silloin sarja hajaantuu, mikäli $a \neq 0$. Myös tapauksissa $r = \pm 1$, $a \neq 0$, sarja hajaantuu (miksi?). □

Geometrisen sarjan indeksointia ei aina aloiteta nollasta. Silloin paras tapa lukea lauseen 8.24 kaava on

$$\boxed{\sum_{k=p}^{\infty} ar^k = \frac{1.\text{ termi}}{1 - \text{suhdeluku}} \qquad (p \in \mathbb{N}).} \tag{8.25}$$

Geometrisen sarjan osasummaa S_n kutsutaan *geometriseksi summaksi*, jolle edellisen todistuksen mukaan

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} ar^k = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} \qquad (r \neq 1).} \tag{8.26}$$

Esimerkki 8.27. a) Sarja

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$$

on geometrinen sarja, suhdeluku $r=\frac{1}{2}$, joten

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{1/2}{1-1/2}=1.$$

b) Sarja

$$2-4+8-16+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}2(-2)^k$$

on geometrinen sarja, jonka suhdeluku on -2, joten sarja hajaantuu.
c) Sarja

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2^{k+1}}{5^k}$$

on suppeneva geometrinen sarja:

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2^{k+1}}{5^k}=\sum_{k=2}^{\infty}2\left(\frac{2}{5}\right)^k=\frac{8/25}{1-2/5}=\frac{8}{15}.$$

Lause 8.28. *Jos sarjat* $\sum a_k$ *ja* $\sum b_k$ *suppenevat ja* c *on vakio, niin myös sarjat* $\sum ca_k$ *ja* $\sum(a_k+b_k)$ *suppenevat ja*

$$\sum ca_k=c\sum a_k \qquad \text{ja} \qquad \sum(a_k+b_k)=\sum a_k+\sum b_k.$$

Todistus. Sarjan summa on osasummien jonon raja-arvo, joten väite seuraa lauseesta 8.7. □

Esimerkki 8.29.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\left(2\left(-\frac{1}{3}\right)^k+\frac{\pi}{e^k}\right)&=2\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^k+\pi\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^k\\&=2\cdot\frac{-1/3}{1-(-1/3)}+\pi\frac{1/e}{1-1/e}=-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{e-1}.\end{aligned}$$

Lause 8.30. *Jos* $\sum a_k$ *suppenee, niin* $\lim_{k\to\infty}a_k=0$.

Todistus. Merkitään $S=\sum a_k$. Silloin $S=\lim S_n=\lim S_{n-1}$, joten

$$a_n=S_n-S_{n-1}\to S-S=0, \quad \text{kun } n\to\infty.$$

□

Seuraus 8.31. *Jos* $\lim a_k \neq 0$ *tai raja-arvoa* $\lim a_k$ *ei ole olemassa, niin* $\sum a_k$ *hajaantuu.*

Huomautus 8.32. Lauseen 8.30 käänteinen väite ei päde, ts. $\sum a_k$ voi hajaantua, vaikka olisi $\lim a_k = 0$. Esimerkiksi tästä käy harmoninen sarja (esimerkki 8.43).

Esimerkki 8.33. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k}$ hajaantuu, sillä $\dfrac{k-1}{k} = 1 - \dfrac{1}{k} \to 1 \neq 0$, kun $k \to \infty$.

Määritelmä 8.34. Sarjan $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *n:s jäännöstermi (remainder)* on sarja $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$. Jos jäännöstermi suppenee, niin sen summaa merkitään R_n.

Seuraava lause toteaa sen ilmeisen seikan, että suppenevan sarjan summa S voidaan jakaa osiin

$$S = \underbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}_{=S_n} + \underbrace{a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots}_{=R_n} = S_n + R_n$$

ja että sarja suppenee jos ja vain jos jäännöstermi suppenee.

Lause 8.35. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *suppenee* $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ *suppenee kaikilla* $n \geq 0$.

Suppenevassa tapauksessa

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k. \tag{8.36}$$

Todistus. "$\Leftarrow$" Selvä (valitse $n = 0$).

"$\Rightarrow$" Koska $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee, niin on olemassa raja-arvo (seuraavassa $m > n$)

$$\begin{aligned} S - S_n &= \lim_{m\to\infty} S_m - S_n = \lim_{m\to\infty} (S_m - S_n) \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{m} a_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = R_n. \end{aligned}$$

Tämä yhtälö todistaa samalla kaavan (8.36). □

Lauseesta seuraa erityisesti, että mikään äärellinen määrä sarjan alkupään termejä ei vaikuta sarjan suppenemiseen.

8.3 Positiivitermiset sarjat [5, 10.5, 10.6]

Sarjan summa voidaan laskea helposti vain joissakin erikoistapauksissa, kuten esimerkiksi edellä geometriselle sarjalle (lause 8.24) ja "teleskooppisarjalle" (esimerkki 8.20). Monissa sovelluksissa tarkkaa summaa tärkeämpää onkin perustella, että sarja ylipäätään suppenee. Tässä ja seuraavassa luvussa esitellään suppenemistestejä, joilla suppenemista ja hajantumista voi koettaa tutkia.

Määritelmä 8.37. Sarja $\sum a_k$ on *positiiviterminen*, jos $a_k \geq 0$ kaikilla k.

Lause 8.38. *Positiiviterminen sarja $\sum a_k$ joko suppenee tai $\sum a_k = \infty$.*

Todistus. Osasummien jono on kasvava: jokaisella $n \in \mathbb{N}$ pätee
$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$, sillä $a_{n+1} \geq 0$. Väite seuraa nyt lauseesta 8.14. □

Positiivitermisille sarjoille on useita suppenemistestejä. Ensimmäisessä sarjan summaa verrataan sopivaan integraaliin.

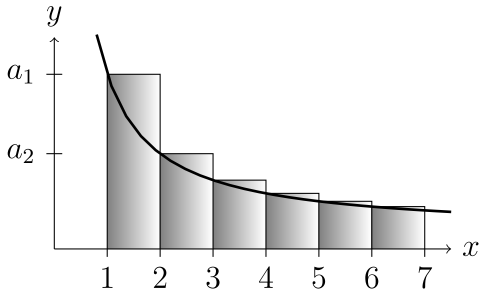
Lause 8.39 (Integraalitesti, integral test)**.** *Olkoon $\sum a_k$ positiiviterminen sarja sekä $f\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$ vähenevä funktio, jolle $f(k) = a_k$ kaikilla $k \geq 1$. Tällöin*

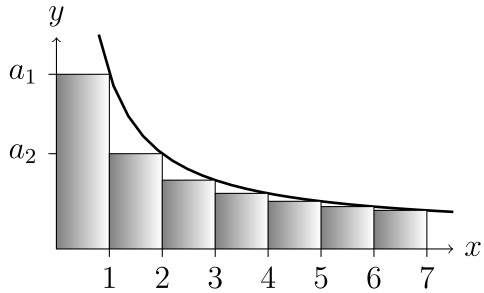
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ suppenee } \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)\,dx \text{ suppenee.}$$

Lauseesta 8.35 seuraa, että integraalin alaraja 1 ei ole tässä oleellinen: jos on olemassa $m \geq 1$ ja vähenevä ei-negatiivinen funktio $f\colon [m,\infty) \to \mathbb{R}$ siten, että $f(k) = a_k$ kaikilla $k \geq m$, niin

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ suppenee } \Leftrightarrow \int_m^{\infty} f(x)\,dx \text{ suppenee.}$$

Todistus. Perustellaan väite ensin kuvan avulla: Oheisissa kuvissa k:nnen suorakulmion pinta-ala on kanta × korkeus = $1 \times f(k) = a_k$. Sarjan summa on siis suorakulmioiden yhteenlaskettu pinta-ala. Integraalin pinta-alatulkinta huomioiden vasemmanpuoleisesta kuvasta voidaan nyt päätellä, että jos $\int_1^\infty f(x)\,dx$ hajaantuu, niin myös $\sum_{k=1}^\infty a_k$ hajaantuu ja oikeanpuoleisesta kuvasta, että jos $\int_1^\infty f(x)\,dx$ suppenee, niin myös $\sum_{k=2}^\infty a_k$ suppenee ja siten myös $\sum_{k=1}^\infty a_k$ suppenee.





Tarkempi todistus: Oletetaan ensin, että $I = \int_1^\infty f(x)\,dx$ suppenee. Koska $f(x)$ on vähenevä, niin $a_{k+1} \leq f(x)$ välillä $k \leq x \leq k+1$. Niinpä

$$a_{k+1} = \int_k^{k+1} a_{k+1}\,dx \leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx.$$

Siten osasummalle S_n pätee

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n} a_{k+1} \leq a_1 + \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq a_1 + I.$$

Tässä viimeinen arvio perustuu siihen, että ei-negatiiviselle jatkuvalle integroituvalle funktiolle $f(x)$ integraalifunktio

$$F(y) = \int_1^y f(x)\,dx$$

on kasvava ja sillä on ylärajana integraalin arvo

$$\lim_{y\to\infty} F(y) = \int_1^\infty f(x)\,dx.$$

S_n on siis kasvava ja ylhäältä rajoitettu lukujono ja niin ollen se suppenee.

Vastaavalla tavoin päätellään, että jos $\int_1^\infty f(x)\,dx$ hajaantuu, niin myös $\sum_{k=1}^\infty a_k$ hajaantuu. □

Määritelmä 8.40. Olkoon $p > 0$. Tarkastellaan *p-sarjaa (p-series)*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}. \tag{8.41}$$

- Jos $p < 1$, niin (8.41) on *aliharmoninen sarja.*
- Jos $p = 1$, niin (8.41) on *harmoninen sarja.*
- Jos $p > 1$, niin (8.41) on *yliharmoninen sarja.*

Lause 8.42. *Sarja* (8.41) *suppenee jos ja vain jos* $p > 1$. *Toisin sanoen harmoninen ja aliharmoninen sarja hajaantuvat ja yliharmoninen sarja suppenee.*

Todistus. Jos $p < 0$, niin sarjan yleinen termi $1/k^p = k^{-p} \to \infty$, kun $k \to \infty$ (sillä tällöin $-p > 0$). Tällöin sarja hajaantuu.

Jos $p \geq 0$, niin tutkitaan suppenemista integraalitestiä (lause 8.39) käyttäen. Testin funktioksi kelpaa $f(x) = 1/x^p$, sillä $f(k) = 1/k^p$ kaikilla k ja f on vähenevä funktio. Lauseen 7.74 mukaan integraali

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$$

suppenee jos ja vain jos $p > 1$, joten sarja (8.41) suppenee jos ja vain jos $p > 1$. □

Esimerkki 8.43. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots$

on aliharmoninen sarja ja hajaantuu,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

on harmoninen sarja ja hajaantuu ja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots$$

on yliharmoninen sarja ja suppenee.

Huomautus 8.44. Palataan vielä lauseeseen 8.30 ja huomautukseen 8.32. Harmoniselle sarjalle

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

on $\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$, mutta silti $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$.

Seuraavassa suppenemistestissä tutkittavaa sarjaa verrataan sopivaan tunnettuun sarjaan.

Lause 8.45 (Vertailuperiaate, comparison test)**.**
Oletetaan, että $0 \leq a_k \leq b_k$ *kaikilla* k.

(1) *Jos* $\sum b_k$ *suppenee, niin* $\sum a_k$ *suppenee (majoranttiperiaate).*

(2) *Jos* $\sum a_k$ *hajaantuu, niin* $\sum b_k$ *hajaantuu (minoranttiperiaate).*

Todistus. (1) Merkitään $S = \sum b_k$. Nyt

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} b_k \leq S,$$

joten sarjan $\sum a_k$ osasummien jono on kasvava ja ylhäältä rajoitettu ja siten suppenee.

(2) Jos $\sum b_k$ suppenisi, niin kohdan (1) mukaan myös $\sum a_k$ suppenisi. Sarjan $\sum b_k$ täytyy siis hajaantua. □

Esimerkki 8.46. Tutki, suppeneeko vai hajaantuuko

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k+1}$ **b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$.

Ratkaisu. a) Sarja suppenee, sillä

$$0 \leq \frac{1}{2^k+1} \leq \frac{1}{2^k}$$

ja $\sum(1/2)^k$ on suppeneva geometrinen sarja.
b) Verrataan harmoniseen sarjaan $\sum(1/k)$. $\ln x$ on kasvava funktio ja $\ln e = 1$, joten $\ln k \geq 1$, kun $k \geq 3$. Siten

$$\frac{\ln k}{k} \geq \frac{1}{k}$$

kaikilla $k \geq 3$. Koska sarja $\sum(1/k)$ on hajaantuu harmonisena sarjana, niin myös tutkittava sarja hajaantuu.

Joskus sopivan vertailusarjan löytäminen on työläämpää:

Esimerkki 8.47. Suppeneeko **a)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k-2}{k^2+1}$ **b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k-1}$?

Ratkaisu. a) Tutkitaan ensin asiaa tekemällä seuraava arvaus: suurilla k vakio sekä osoittajassa että nimittäjässä voidaan unohtaa, joten

$$\frac{3k-2}{k^2+1} \approx \frac{3k}{k^2} = \frac{3}{k}.$$

$\sum(1/k)$ hajaantuu harmonisena sarjana, joten ilmeisesti tutkittava sarjakin hajaantuu. **Tämä ei vielä riitä todistamaan hajaantumista**, mutta päättely antaa vihjeen, että termejä kannattaa pyrkiä arvioimaan alhaalta päin $(1/k)$:lla. Suoraan saatava arvio

$$\frac{3k-2}{k^2+1} \leq \frac{3}{k}$$

on käyttökelvoton, koska arvio menee väärään suuntaan. Arvioidaan seuraavasti: kun $k \geq 2$, on $3k-2 \geq 3k-k$ ja $k^2+1 \leq k^2+k$, joten tällöin

$$\frac{3k-2}{k^2+1} \geq \frac{3k-k}{k^2+k} = \frac{2k}{k(k+1)} = \frac{2}{k+1}.$$

Koska

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{k+1} = 2\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

(harmoninen sarja), niin tutkittava sarja hajaantuu.

b) Ilmeisesti käy samoin kuin esimerkissä 8.46 **a)** . Nyt kuitenkin

$$\frac{1}{2^k-1} \geq \frac{1}{2^k},$$

joten ei voida suoraan verrata sarjaan $\sum(1/2^k)$. Tutkitaan näiden sarjojen termien osamäärää:

$$\frac{1/(2^k-1)}{1/2^k} = \frac{2^k}{2^k-1} = \frac{1}{1-1/2^k} \to 1,$$

kun $k \to \infty$. Siten jostakin k:n arvosta lähtien on (valitse raja-arvon määritelmässä 8.6 epsiloniksi 1)

$$\frac{1/(2^k-1)}{1/2^k} \leq 2 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{1}{2^k-1} \leq 2\frac{1}{2^k}.$$

Koska sarja $\sum(1/2^k)$ suppenee, niin tutkittava sarja suppenee.

Seuraavassa testissä ei tarvita vertailusarjaa, vaan sarjan suppeneminen tai hajaantuminen päätellään sarjan termien käyttäytymisestä.

Lause 8.48 (Suhdetesti, ratio test)**.** *Olkoon* $\sum a_k$ *positiiviterminen sarja ja olkoon*

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

olemassa äärellisenä tai $L = \infty$*.*

(1) *Jos* $L < 1$*, niin sarja suppenee.*

(2) *Jos* $L > 1$*, niin sarja hajaantuu.*

Tapauksessa $L = 1$ *voi käydä kummin vain.*

Todistus. (1) Valitaan $r \in (L, 1)$. Raja-arvon määritelmän mukaan on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että kaikilla $k \geq N$ pätee

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq r, \quad \text{ts.} \quad a_{k+1} \leq a_k r.$$

Siten

$$\begin{aligned} a_{N+1} &\leq a_N r \\ a_{N+2} &\leq a_{N+1} r \leq a_N r^2 \\ a_{N+3} &\leq a_{N+2} r \leq a_N r^3 \end{aligned}$$

ja yleisesti

$$a_{N+k} \leq a_N r^k.$$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_N r^k$ on suppeneva geometrinen sarja (suhdeluku $r \in (-1, 1)$), joten

$$R_N = \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_N r^k < \infty.$$

Siten $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee.

(2) Suurilla k on $a_k > 0$ ja $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$, jolloin $0 < a_k \leq a_{k+1}$. Ei siis voi olla $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, eikä sarja siten suppene (lause 8.30).

Harmoniselle sarjalle $\sum(1/k)$ ja yliharmoniselle sarjalle $\sum(1/k^2)$ on $L = 1$, mutta ensin mainittu näistä hajaantuu ja toinen suppenee. Tapauksessa $L = 1$ tämä testi ei siis anna tulosta. □

Määritelmä 8.49. Jos $n \in \mathbb{N}$, niin määritellään *n-kertoma (factorial)* $n!$ asettamalla

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n.$$

Lisäksi asetetaan $0! = 1$.

Esimerkki 8.50. Suppeneeko $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{10^k}{k!}$?

Ratkaisu. Sarja on positiiviterminen. Käytetään suhdetestiä:

$$\begin{aligned} \frac{a_{k+1}}{a_k} &= \frac{\frac{10^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{10^k}{k!}} = \frac{k!}{(k+1)!} \frac{10^{k+1}}{10^k} = \frac{k(k-1)\cdots 2 \cdot 1}{(k+1)k(k-1)\cdots 2 \cdot 1} 10 \\ &= \frac{10}{k+1} \to 0, \end{aligned}$$

kun $k \to \infty$, joten sarja suppenee.

8.4 Vuorottelevat sarjat ja itseinen suppeneminen [5, 10.7]

Määritelmä 8.51. Sarja on *vuorotteleva (alternating)*, jos sen termit ovat vuorotellen positiivisia ja negatiivisia, ts. sarja on muotoa

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \cdots \tag{8.52}$$

tai

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}a_k = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \cdots , \tag{8.53}$$

joissa $a_k > 0$ kaikilla k.

On huomattava, että tässä merkinnässä a_k:lla ei merkitä k:tta termiä, vaan k:nnen termin itseisarvoa.

Lause 8.54 (Leibnizin testi)**.** *Jos vuorottelevalle sarjalle* (8.52) *tai* (8.53) *pätee, että*

- $a_k \geq a_{k+1}$ *kaikilla* k *ja*
- $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$,

niin sarja suppenee. Silloin jäännöstermille R_n *pätee*

$$|R_n| \leq a_{n+1},$$

toisin sanoen jäännöstermin itseisarvo on pienempi kuin ensimmäisen poisjätetyn termin itseisarvo.

Todistus. Ks. [5, Thm 10.7.1–2]. □

Esimerkki 8.55. *Vuorotteleva harmoninen sarja*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

suppenee, sillä

$$a_k = \frac{1}{k} \geq \frac{1}{k+1} = a_{k+1}$$

kaikilla k ja $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k} = 0$.

Esimerkki 8.56. Tutkitaan summaa

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+2^k}$$

ja osasummaa

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{1+2^k}.$$

a) Laske osasumma S_4 ja arvioi, millä tarkkuudella $S \approx S_4$.
b) Hae S:lle oikea kolmidesimaalinen likiarvo.
Ratkaisu. Sarja on vuorotteleva ja yleisen termin itseisarvo

$$a_k = \frac{1}{1+2^k}$$

toteuttaa Leibnizin testin oletukset (miksi?), joten sarja suppenee.
a) Osasummaksi lasketaan

$$S_4 = \sum_{k=1}^{4} \frac{(-1)^k}{1+2^k} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{17} \approx -0{,}185\ 621.$$

Koska $S = S_n + R_n$, niin

$$S_n - |R_n| \le S \le S_n + |R_n|. \tag{8.57}$$

Leibnizin testin virhearvio on

$$|R_n| \le a_{n+1} = \frac{1}{1+2^{n+1}}, \tag{8.58}$$

eli osasummalle S_4

$$R_4 \le \frac{1}{1+2^5} \approx 0{,}030\ 303.$$

Arvion (8.57) mukaan

$$-0{,}215\ 924 \le S \le -0{,}155\ 318.$$

Niinpä voidaan päätellä, että summalle S saatiin oikea likiarvo yhden desimaalin tarkkuudella: $S \approx -0{,}2$.
b) Lasketaan virhearvioita (8.58):

n	$\lvert R_n\rvert \le$
11	0,000 244
12	0,000 122
13	0,000 061

Kokeillaan, riittäisikö valita $n = 12$: $S_{12} \approx -0{,}205\,618$, joten arvion (8.57) mukaan

$$-0{,}205\,740 \leq S \leq -0{,}205\,496.$$

S:n oikea kolmidesimaalinen likiarvo on siis $-0{,}206$ tai $-0{,}205$. Asian varmistamiseksi lasketaan $S_{13} \approx -0{,}205\,740$, joten arvion (8.57) mukaan

$$-0{,}205\,801 \leq S \leq -0{,}205\,679.$$

Oikea kolmidesimaalinen likiarvo on siten $S \approx -0{,}206$.

Määritelmä 8.59. Sarja $\sum a_k$ *suppenee itseisesti (converges absolutely)*, jos sarja $\sum |a_k|$ suppenee.

Lause 8.60. *Jos sarja suppenee itseisesti, niin se suppenee. Toisin sanoen jos $\sum |a_k|$ suppenee, niin $\sum a_k$ suppenee.*

Todistus. Koska

$$|a_k| = \begin{cases} a_k, & \text{jos } a_k \geq 0, \\ -a_k, & \text{jos } a_k \leq 0, \end{cases}$$

niin

$$0 \leq |a_k| + a_k \leq |a_k| + |a_k| = 2|a_k|.$$

Niinpä sarja

$$\sum (|a_k| + a_k) \tag{8.61}$$

on positiiviterminen ja sillä on majoranttina sarja $\sum 2|a_k|$. Oletuksen mukaan tämä sarja suppenee, joten myös sarja (8.61) suppenee. Nyt sarja

$$\sum a_k = \sum \Big((|a_k| + a_k) - |a_k| \Big) = \sum (|a_k| + a_k) - \sum |a_k|$$

voidaan esittään kahden suppenevan sarjan erotuksena, joten se lauseen 8.28 mukaan suppenee. □

Käänteinen tulos ei päde, sillä esimerkiksi vuorotteleva harmoninen sarja suppenee, mutta sen itseisarvosarja on harmoninen sarja, joka hajaantuu. Tällaista sarjaa, joka suppenee, mutta ei suppene itseisesti, sanotaan *ehdollisesti suppenevaksi (conditionally convergent)*.

Esimerkki 8.62. Suppeneeko $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{2^k}$?

Ratkaisu. Tutkitaan itseistä suppenemista suhdetestillä:

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{\dfrac{k+1}{2^{k+1}}}{\dfrac{k}{2^k}} = \frac{1}{2}\frac{k+1}{k} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{k}\right) \to \frac{1}{2},$$

kun $k \to \infty$, joten sarja suppenee itseisesti. Niinpä se suppenee.

Muokataan suhdetesti (lause 8.48) muotoon, jota voidaan käyttää suoraan kaikille (myös ei-positiivitermisille) sarjoille:

Lause 8.63 (Suhdetesti). *Olkoon $\sum a_k$ sarja ja olkoon*

$$L = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$$

olemassa äärellisenä tai $L = \infty$.

(1) *Jos $L < 1$, niin sarja suppenee itseisesti.*

(2) *Jos $L > 1$, niin sarja hajaantuu.*

Tapauksessa $L = 1$ voi käydä kummin vain.

Todistus. Sarja $\sum |a_k|$ on positiiviterminen, joten väite (1) seuraa suoraan lauseesta 8.48. Kohdassa (2) soveltamalla lauseen 8.48 todistuksen päättelyä sarjaan $\sum |a_k|$ nähdään, että ei ole $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$. Siten ei myöskään ole $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, joten sarja $\sum a_k$ ei suppene. □

8.5 Potenssisarjat [5, 10.8]

Määritelmä 8.64. Luvusta $x \in \mathbb{R}$ riippuvaa sarjaa

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots \tag{8.65}$$

kutsutaan *potenssisarjaksi (power series)* pisteen c suhteen. Luku a_k on k:sta riippuva *kerroin* ja $c \in \mathbb{R}$ on *kehityskeskus*.

Tässä ensimmäisessä termissä $(x-c)^0 = 1$, jos $x \neq c$. Mukavuussyistä sovitaan, että potenssisarjoissa (mutta ei ilman harkintaa muualla!) $0^0 = 1$, jolloin ensimmäinen termi on $a_0(x-c)^0 = a_0$ kaikilla x.

Esimerkki 8.66. Sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(x-0)^k$$

on potenssisarja pisteen 0 suhteen ($a_k = 1/k!$). Suhdetestillä nähdään, että sarja suppenee itseisesti, kun $x \neq 0$:

$$\frac{\left|\dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right|}{\left|\dfrac{x^k}{k!}\right|} = \frac{|x|}{k+1} \to 0,$$

kun $k \to \infty$. Myös pisteessä $x = 0$ sarja suppenee itseisesti, joten sarja suppenee itseisesti kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Lause 8.67. *Jos potenssisarja*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

suppenee jollakin $x = x_0 \neq 0$, niin sarja suppenee itseisesti kaikilla x, joille $-|x_0| < x < |x_0|$.

Todistus. Olkoon $x \in (-|x_0|, |x_0|)$ ja merkitään $r = |x/x_0| < 1$. Koska sarja suppenee pisteessä x_0, on oltava $\lim_{k\to\infty} a_k x_0^k = 0$ ja siten on olemassa indeksi K siten, että $|a_k x_0^k| < 1$ kaikilla $k \geq K$. Nyt

$$\sum_{k=K}^{\infty} \left|a_k x^k\right| = \sum_{k=K}^{\infty} \left|a_k x_0^k\right| \left|\frac{x^k}{x_0^k}\right| \leq \sum_{k=K}^{\infty} r^k < \infty. \qquad \square$$

Seuraus 8.68. *Potenssisarjalle (8.65) pätee täsmälleen yksi seuraavista:*

- *Sarja suppenee vain kun $x = c$.*
- *Sarja suppenee itseisesti kaikilla $x \in \mathbb{R}$.*
- *Eräälle $R > 0$ pätee: sarja suppenee itseisesti, kun $c - R < x < c + R$ ja hajaantuu, kun $|x - c| > R$.*

Todistus. Väite seuraa edellisestä lauseesta asettamalla $t = x - c$, jolloin väite palautuu sarjan $\sum a_k t^k$ tutkimiseksi. $\square$

Lukua $R \in [0, \infty)$ tai $R = \infty$ kutsutaan sarjan *suppenemissäteeksi (radius of convergence)*. Niiden pisteiden joukkoa, joissa sarja suppenee, kutsutaan *suppenemisväliksi (interval of convergence)*. Jos $R \in (0, \infty)$, niin päätepisteissä $c - R$ ja $c + R$ sarja voi supeta tai hajaantua. Potenssisarjan suppenemisväli on siis $\{c\}$, $(c - R, c + R)$, $[c - R, c + R)$, $(c - R, c + R]$, $[c - R, c + R]$ tai $\mathbb{R}$.

Suppenemissäde selviää usein suhdetestillä: Oletetaan, että potenssisarjalle (8.65) on olemassa (äärellinen) raja-arvo

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|.$$

Merkitään yleistä termiä $u_k = a_k(x - c)^k$. Tällöin suhdetestin (8.63) raja-arvolle pätee

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \frac{|x - c|^{k+1}}{|x - c|^k} = \rho|x - c| < 1$$

jos ja vain jos $|x-c| < 1/\rho$. Suppenemissäde on siis

$$R = \frac{1}{\rho} = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|.$$

Mahdolliset päätepisteet $c-R$ ja $c+R$ on tutkittava erikseen.

Esimerkki 8.69. Selvitä potenssisarjan suppenemisväli:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!\left(\frac{x}{2}\right)^n$ **c)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+5)^n}{(n^2+1)3^n}$

Ratkaisu. a) Tämä on potenssisarja, jolle $a_0 = 0$ ja $a_k = 1/k$ muilla k sekä $c = 0$. Tutkitaan suppenemista suhdetestillä ($x \neq 0$):

$$\frac{\left|\frac{x^{k+1}}{k+1}\right|}{\left|\frac{x^k}{k}\right|} = \frac{k}{k+1}|x| \to |x|,$$

kun $k \to \infty$. Sarja siis suppenee itseisesti, kun $|x| < 1$, ts. kun $x \in (-1, 1)$ (ja hajaantuu, kun $|x| > 1$). Tutkitaan vielä päätepisteet: Kun $x = 1$, sarja on harmoninen sarja ja siten hajaantuu. Kun $x = -1$, sarja on vuorotteleva harmoninen sarja ja siten suppenee. Sarjan suppenemisväli on siis $[-1, 1)$.

b) Muokkaamalla

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^n}x^n$$

nähdään, että kyseessä on potenssisarja, jolle $a_n = n!/2^n$ ja $c = 0$. Tutkitaan suppenemista suhdetestillä ($x \neq 0$):

$$\frac{\left|\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}x^{n+1}\right|}{\left|\frac{n!}{2^n}x^n\right|} = \frac{n+1}{2}|x| \to \infty,$$

kun $n \to \infty$. Sarja siis suppenee vain kun $x = 0$.

c) Nyt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+5)^n}{(n^2+1)3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(x-(-5/2))^n}{(n^2+1)3^n}.$$

Tämän potenssisarjan kehityskeskus on $c = -5/2$. Suhdetesti ($x \neq -5/2$):

$$\frac{\left|\frac{2^{n+1}(x-(-5/2))^{n+1}}{((n+1)^2+1)3^{n+1}}\right|}{\left|\frac{2^n(x-(-5/2))^n}{(n^2+1)3^n}\right|} = \frac{2}{3}\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}|x-(-5/2)| \to \frac{2}{3}|x-(-5/2)|,$$

kun $n \to \infty$. Sarja suppenee itseisesti, kun

$$\frac{2}{3}|x - (-5/2)| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x - (-5/2)| < \frac{3}{2}.$$

Suppenemissäde on siis $R = 3/2$ ja sarja suppenee ainakin välillä $(-5/2 - 3/2, -5/2 + 3/2) = (-4, -1)$. Päätepisteet: Pisteessä $x = -4$ sarja tulee muotoon

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}.$$

Tämä suppenee itseisesti, sillä

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Pisteessä $x = -1$ sarja tulee muotoon

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1},$$

joka nähdään suppenevaksi samalla arviolla kuin edellä. Kysytty suppenemisväli on siis $[-4, -1]$.

Potenssisarja määrittelee suppenemisvälillään funktion

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots . \tag{8.70}$$

Seuraavan lauseen mukaan f on derivoituva ja integroituva, ja derivointi ja integrointi voidaan suorittaa termeittäin aivan kuten polynomille.

Lause 8.71. *Olkoon $R > 0$ potenssisarjan (8.70) suppenemissäde. Tällöin funktio $f(x)$ on derivoituva välillä $(-R, R)$ ja integroituva jokaisella välillä $[a, b] \subset (-R, R)$. Kun $-R < x < R$, niin*

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} D(a_k x^k) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots \quad \text{ja}$$

$$\int_0^x f(t)\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x a_k t^k\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k x^{k+1}}{k+1} = a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \frac{1}{3} a_2 x^3 + \cdots .$$

Lisäksi derivoidulla ja integroidulla sarjalla on sama suppenemissäde R.

Lause pätee vastaavalla tavalla myös yleiselle potenssisarjalle $\sum a_k (x - c)^k$.

Todistus. Sivuutetaan. □

Esimerkki 8.72. Tutkitaan geometrista sarjaa

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad (-1 < x < 1)} \tag{8.73}$$

Derivoimalla (8.73) puolittain saadaan

$$\boxed{\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \quad (-1 < x < 1)} \tag{8.74}$$

Toisaalta integroimalla (8.73) puolittain 0:sta x:ään saadaan

$$-\ln(1-x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} x^{k+1} = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots .$$

Sijoitetaan tässä x:n paikalle $-x$ $(-1 < x < 1)$:

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots .} \tag{8.75}$$

8.6 Taylorin sarja ja Taylorin polynomi [5, 10.4, 10.9]

Lauseen 8.71 mukaan jokainen potenssisarja $\sum a_k x^k$ esittää suppenemisvälillään derivoituvaa funktiota $f(x)$. Kääntäen voidaan kysyä: jos funktio $f(x)$ on annettu, niin millä ehdoilla on olemassa potenssisarja $\sum a_k x^k$ siten, että $f(x) = \sum a_k x^k$? Miten kertoimet a_k löydetään? Lausetta 8.71 soveltamalla nähdään, että ainakin $f(x)$:llä täytyy olla kaikkien kertalukujen derivaatat. Lisäksi kertoimet voidaan valita vain yhdellä tavalla:

Lause 8.76 (Potenssisarjan yksikäsitteisyys)**.** *Jos*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k$$

välillä $(c - R, c + R)$, *niin*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Todistus. Sovelletaan lausetta 8.71 n kertaa:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-c)^{k-1} \\ f''(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k (x-c)^{k-2} \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)(k-2)\cdots(k-(n-1)) a_k (x-c)^{k-n} \end{aligned}$$

Asetetaan viimeisessä yhtälössä $x = c$, jolloin sarjasta jää jäljelle vain indeksiä $k = n$ vastaava termi. Saadaan $f^{(n)}(c) = n!a_n$. □

Määritelmä 8.77. Jos funktiolla $f(x)$ on pisteessä $x = c$ kaikkien kertalukujen derivaatat $f^{(k)}(c)$, niin lauseen 8.76 määräämää potenssisarjaa

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k \\ &= f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f^{(3)}(c)}{3!}(x-c)^3 + \cdots \end{aligned} \tag{8.78}$$

kutsutaan funktion f *Taylorin sarjaksi (Taylor series)* pisteen c suhteen. Jos $c = 0$, niin sarjasta käytetään myös nimitystä *Maclaurinin sarja (Maclaurin series)*.

Vaikka sarja (8.78) suppenisi pisteessä x, niin se ei välttämättä suppene kohti funktion arvoa $f(x)$.

Esimerkki 8.79. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{kun } x \neq 0, \\ 0, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

f on jatkuva myös 0:ssa, sillä

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} e^{-1/x^2} = 0.$$

Kun $x \neq 0$, niin

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}.$$

Muuttujanvaihdolla $t = 1/x^2$ nähdään, että

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = 2 \lim_{x \to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^3} = 2 \lim_{t \to \infty} \frac{t^{3/2}}{e^t} = 0, \tag{8.80}$$

sillä eksponenttifunktio voittaa kasvussa potenssifunktion (ks. (6.73)). Lauseen 6.57 mukaan f:n jatkuvuudesta ja (8.80):sta seuraa, että on olemassa $f'(0) = 0$. $f'(x)$ on siten kaikkialla jatkuva ja kun $x \neq 0$, niin vastaavalla tavoin kuin edellä saadaan

$$f''(x) = \left(-\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right) e^{-1/x^2} \to 0,$$

kun $x \to 0$. Siten on olemassa $f''(0) = 0$. Näin jatkaen nähdään, että f:llä on kaikkien kertalukujen jatkuvat derivaatat ja että ne ovat kaikki nollia 0:ssa: $f^{(k)}(0) = 0$. Niinpä f:llä on kaikilla $x \in \mathbb{R}$ suppeneva Maclaurinin sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0.$$

Kuitenkin $f(x) \neq 0$ kaikilla $x \neq 0$, joten sarja esittää f:ää vain 0:ssa.

Seuraava lause antaa keinon tutkia, milloin Taylorin sarja suppenee kohti funktiota.

Lause 8.81 (Taylorin kaava). *Olkoon funktiolla $f\colon I \to \mathbb{R}$ kaikkien kertalukujen derivaatat välillä I ja olkoon $c \in I$. Silloin kaikilla $x \in I$ on voimassa* Taylorin kaava

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \tag{8.82}$$

missä

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k \tag{8.83}$$

on Taylorin sarjan n:s osasumma eli n. asteen Taylorin polynomi (Taylor polynomial) *ja*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} (x-c)^{n+1}, \quad \text{missä } z \in [c, x) \text{ tai } z \in (x, c] \tag{8.84}$$

on Taylorin sarjan virhetermi (Taylor remainder).

Todistus. Sivuutetaan. □

Nyt funktion Taylorin sarja esittää funktiota niillä x, joilla virhetermin raja-arvo on nolla, ts.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k$$

jos ja vain jos

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} (x-c)^{n+1} = 0.$$

Korostettakoon, että lauseen 8.81 z riippuu x:n lisäksi myös n:stä: $z = z(x, n)$. Erityisesti em. raja-arvoa laskettaessa ei voida olettaa, että z olisi vakio. Vertaa esimerkkiin 8.86, jossa ongelma hoidetaan arvioimalla $e^z < e^{|x|}$, missä $e^{|x|}$ on n:n suhteen vakio.

Esimerkissä 8.72 saatiin johdettua funktioiden $1/(1-x)^2$ ja $\ln(1+x)$ potenssisarjaesitykset "sattumalta" derivoimalla ja integroimalla funktion $1/(1-x)$ potenssisarjaa. Taylorin kaavalla saadaan (ainakin periaatteessa) potenssisarjaesitys mille tahansa funktiolle, jolla sellainen on olemassa. Yksikäsitteisyyslause 8.76 takaa, että saatu potenssisarja on aina Taylorin sarja, olipa se saatu millä (kelvollisella) menetelmällä tahansa.

Seuraavaa lemmaa tarvitaan usein virhetermiä arvioitaessa.

Lemma 8.85. *Olkoon $c > 0$. Silloin*

(1) $\left(\dfrac{c^n}{n!}\right)$ *on vähenevä, kun $n \geq c - 1$ ja*

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c^n}{n!} = 0.$

Todistus. (1) Tutkitaan, milloin $a_{n+1} \leq a_n$, ts. $a_{n+1}/a_n \leq 1$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{c^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{c^n}{n!}} = \frac{c}{n+1} \leq 1,$$

kun $n \geq c - 1$.

(2) Olkoon $m = \lfloor c \rfloor = c$:n kokonaisosa. Silloin kaikilla $n > m$

$$\frac{c^n}{n!} = \underbrace{\frac{c}{1}\frac{c}{2}\cdots\frac{c}{m}}_{=:A\in\mathbb{R}}\underbrace{\frac{c}{m+1}}_{\leq 1}\underbrace{\frac{c}{m+2}}_{\leq 1}\cdots\underbrace{\frac{c}{n-1}}_{\leq 1}\frac{c}{n} \leq A\frac{c}{n} \to 0,$$

kun $n \to \infty$. □

Esimerkki 8.86. Etsi funktion $f(x) = e^x$ potenssisarjaesitys pisteen $x = 0$ suhteen.

Ratkaisu. Koska $D(e^x) = e^x$, niin $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$ kaikilla k ja siten f:n Maclaurinin sarja on

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Suppeneeko tämä kohti e^x:ää? Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Jos $x < 0$, niin kaikilla $z \in (x, 0]$ pätee $x < z < 0$ ja siten $z < |x|$. Jos taas $x > 0$, niin kaikilla $z \in [0, x)$

pätee $0 < z < x = |x|$. Aina siis $z < |x|$ ja siten $f^{(n+1)}(z) = e^z \leq e^{|x|}$, joten

$$0 \leq |R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}\right| |x|^{n+1} \leq e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0,$$

kun $n \to \infty$ (lemma 8.85). Niinpä

$$\boxed{e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \qquad (x \in \mathbb{R})} \tag{8.87}$$

Esimerkki 8.88. Etsi funktion $f(x) = \sin x$ potenssisarjaesitys pisteen $x = 0$ suhteen.
Ratkaisu. Lasketaan f:n derivaattoja pisteessä $x = 0$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin x & f(0) &= 0 \\
f'(x) &= \cos x & f'(0) &= 1 \\
f''(x) &= -\sin x & f''(0) &= 0 \\
f^{(3)}(x) &= -\cos x & f^{(3)}(0) &= -1 \\
f^{(4)}(x) &= \sin x & f^{(4)}(0) &= 0
\end{aligned}$$

Neljäs derivaatta on $\sin x$, joten funktiot ja arvot alkavat toistua syklisesti. Nyt $|f^{(n)}(z)| \leq 1$ kaikilla z, joten

$$0 \leq |R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}\right| |x|^{n+1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0,$$

kun $n \to \infty$. Niinpä

$$\boxed{\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad (x \in \mathbb{R})} \tag{8.89}$$

Tässä potenssisarjaesityksen

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

parillisten potenssien kerroin on siis 0:

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{kun } n = 2k, \\ \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}, & \text{kun } n = 2k+1. \end{cases}$$

Vastaavalla tavoin voidaan johtaa

$$\boxed{\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad (x \in \mathbb{R})} \tag{8.90}$$

Esimerkki 8.91. Etsi funktion $f(x) = (1+x)^k$ $(k \in \mathbb{R})$ potenssisarjaesitys pisteen $x = 0$ suhteen.
Ratkaisu. Lasketaan f:n derivaattoja pisteessä $x = 0$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^k & f(0) &= 1 \\
f'(x) &= k(1+x)^{k-1} & f'(0) &= k \\
f''(x) &= k(k-1)(1+x)^{k-2} & f''(0) &= k(k-1) \\
f^{(3)}(x) &= k(k-1)(k-2)(1+x)^{k-3} & f^{(3)}(0) &= k(k-1)(k-2) \\
&\vdots & &\vdots \\
f^{(n)}(x) &= k(k-1)\cdots(k-n+1)(1+x)^{k-n} & f^{(n)}(0) &= k(k-1)\cdots(k-n+1)
\end{aligned}$$

Niinpä Maclaurinin sarja on

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n,$$

missä sarjan kerrointa kutsutaan *binomikertoimeksi (binomial coefficient)* ja merkitään

$$\boxed{\binom{k}{n} = \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}, \quad \text{kun } n \geq 1 \quad \text{ja} \quad \binom{k}{0} = 1.} \tag{8.92}$$

$\binom{k}{n}$ luetaan "k yli n:n". Tutkitaan suppenemista suhdetestillä:

$$\frac{\left|\binom{k}{n+1} x^{n+1}\right|}{\left|\binom{k}{n} x^n\right|} = \frac{|k-n|}{n+1}|x| = \frac{\left|\frac{k}{n} - 1\right|}{1 + \frac{1}{n}}|x| \to |x|,$$

kun $n \to \infty$. Sarja siis suppenee itseisesti, kun $|x| < 1$ ja hajaantuu, kun $|x| > 1$. Osoitetaan, että sarja suppenee kohti funktiota $f(x)$. Virhetermin (8.84) käyttäminen osoittautuu tässä hankalaksi, joten menetellään seuraavasti: merkitään

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n$$

ja derivoidaan termeittäin välillä $|x| < 1$:

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{k}{n} x^{n-1}.$$

Nyt

$$\begin{aligned}
(1+x)g'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{k}{n} x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{k}{n} x^{n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \binom{k}{n+1} x^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} n \binom{k}{n} x^{n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left((n+1) \frac{k(k-1)\cdots(k-n)}{(n+1)!} + n \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!} \right) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)(k-n)}{n!} + n \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!} \right) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (k-n+n) \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!} x^n \\
&= k \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = kg(x). \qquad (8.93)
\end{aligned}$$

Merkitään edelleen $h(x) = \dfrac{g(x)}{(1+x)^k}$, derivoidaan ja otetaan huomioon kaava (8.93):

$$h'(x) = \frac{-kg(x)}{(1+x)^{k+1}} + \frac{g'(x)}{(1+x)^k} = 0.$$

Siten $h(x)$ on vakiofunktio ja koska $h(0) = g(0) = 1$, niin $h(x) = 1$ kaikilla $|x| < 1$. Niinpä täytyy olla $g(x) = (1+x)^k$. Saatiin todistettua seuraava *binomisarjaesitys (binomial series)*:

$$\boxed{(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n \qquad (k \in \mathbb{R},\ -1 < x < 1).} \qquad (8.94)$$

Kokeile tarkistuksen vuoksi kaavaa tapauksissa $k = 2$, $k = 3$ ja $k = -2$ (jota voit verrata esitykseen (8.74)).

Joskus tunnettuja sarjoja voidaan käyttää apuna potenssisarjaesitystä muodostettaessa.

Esimerkki 8.95. Määritä funktion $f(x) = e^{x^2}$ Maclaurinin sarja.
Ratkaisu. Merkitään $t = x^2$ ja käytetään funktion e^t tunnettua Maclaurinin

sarjaa:

$$e^{x^2} = e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots$$
$$= 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

8.6.1 Funktion polynomiapproksimaatio

Taylorin kaava (8.82) on tärkeä työkalu funktion approksimoinnissa: funktiota $f(x)$ arvioidaan Taylorin polynomilla $P_n(x)$ ja arviossa tehdyn virheen suuruutta arvioidaan virhetermin $R_n(x)$ avulla.

Huomautus 8.96. Jatkossa sanonnalla ”kahden desimaalin tarkkuudella” tarkoitetaan sitä, että virhe $\leq 0{,}005$. Tämä ei tarkoita välttämättä sitä, että saataisiin oikea kaksidesimaalinen likiarvo (vrt. esimerkki 8.56 **b**), mutta likiarvon toinen desimaali on kuitenkin korkeintaan ykkösen verran väärä. Vastaavasti määritellään yleisesti ”n:n desimaalin tarkkuudella”.

Esimerkki 8.97. Laske e neljän desimaalin tarkkuudella.
Ratkaisu. Käytetään Taylorin kaavaa (8.82) funktiolle e^x arvolla $x = 1$:

$$e = e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R_n(1) = P_n(1) + R_n(1).$$

Koska $f^{(n+1)}(z) = e^z \leq e$, kun $0 < z < 1$, niin virhetermille (8.84) pätee

$$|R_n(1)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} \right| 1^{n+1} \leq \frac{e}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)!}.$$

On löydettävä n siten, että $|R_n(1)| < 0{,}000\,05 = 1/20\,000$, ts.

$$\frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{20\ 000} \quad \Leftrightarrow \quad (n+1)! > 60\,000.$$

Kokeilemalla havaitaan, että pienin epäyhtälön toteuttava n on $n = 8$. Siten e:n arvo kysytyllä tarkkuudella on

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{8!} \approx 2{,}7183.$$

Esimerkki 8.98. Hae polynomi, joka approksimoi $\sin x$:ää yhden desimaalin tarkkuudella välillä **a)** $[-\pi/4, \pi/4]$, **b)** $[-\pi/2, \pi/2]$.
c) Millä tarkkuudella $\sin x$:n 7. asteen Taylorin polynimi approksimoi $\sin x$:ää

välillä $[-\pi, \pi]$?
Ratkaisu. Taylorin kaavan

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(x) = P_{2n+1}(x) + R_{2n+1}(x)$$

virhetermiä voidaan arvioida

$$|R_{2n+1}(x)| = \frac{|f^{(2n+2)}(z)||x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

a) Nyt $|x| < \pi/4 < 1$, joten

$$|R_{2n+1}(x)| \leq \frac{1}{(2n+2)!}.$$

Vaaditaan, että

$$\frac{1}{(2n+2)!} < 0{,}05 = \frac{1}{20} \quad \Leftrightarrow \quad (2n+2)! > 20.$$

Riittää valita $n = 1$, eli

$$\sin x \approx P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

yhden desimaalin tarkkuudella välillä $[-\pi/4, \pi/4]$.
b) Nyt $|x| < \pi/2 < 2$, joten

$$|R_{2n+1}(x)| \leq \frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Vaaditaan, että

$$\frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!} < 0{,}05.$$

Riittää valita $n = 3$, eli

$$\sin x \approx P_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

yhden desimaalin tarkkuudella välillä $[-\pi/2, \pi/2]$.
c) Nyt $n = 3$, joten

$$|R_7(x)| \leq \frac{\pi^8}{8!} = 0{,}235\cdots.$$

Approksimoitaessa $\sin x$:ää välillä $[-\pi, \pi]$ polynomilla $P_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$ tehdään siis korkeintaan 0,24:n suuruinen virhe.

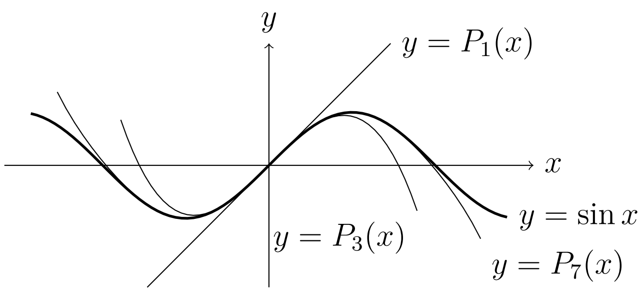
Seuraavassa kuvassa havainnollistetaan esimerkin 8.98 approksimaatioita. Ensimmäisen asteen Taylorin polynomi

$$P_1(x) = f(c) + f'(c)(x - c)$$

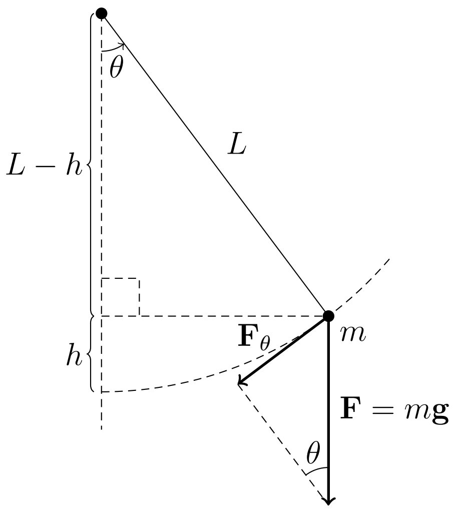
on lineaarinen approksimaatio, joka tässä esimerkissä on

$$\sin x \approx P_1(x) = x.$$

Korkeamman asteen termien mukaan ottaminen parantaa arviota, kuten kuvastakin selvästi nähdään.



Esimerkki 8.99. Heilurin heilahdusaika, 1. approksimaatio. Tarkastellaan kuvan mukaista mallia heilurista, jossa massattoman langan (pituus L) päässä oleva punnus (massa m) vapautetaan kulmasta $\theta_0 \in [0, \pi]$ (jolloin $-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$). Arvioidaan heilurin heilahdusaikaa eli jaksoa T.



Jätetään ilmanvastus huomiotta, jolloin punnukseen vaikuttaa liikkeen suunnassa ainoastaan painovoiman $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ liikkeen suuntainen komponentti $\mathbf{F}_\theta$, jonka suuruus on

$$F_\theta = mg \sin \theta.$$

Käytetään sinille Maclaurinin kehitelmää (8.89) eli

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots$$

ja tehdään arvio $\sin\theta \approx \theta$. Kyseessä on vuorotteleva sarja, joten arviossa tehdään virhe, joka on korkeintaan $|\theta^3/6|$ (Lemma 8.85 ja Leibnizin testi). Jos esimerkiksi $|\theta| \leq 10° \approx 0{,}17$ rad, niin suhteellisen virheen maksimiksi voidaan arvioida $(0{,}17^3/6)/0{,}17 \approx 0{,}5$ %. Merkitään x:llä punnuksen kulkemaa matkaa tasapainotilasta ($\theta = 0$) kulmaan θ, eli $x = L\theta$. Nyt

$$F_\theta \approx mg\theta = \frac{mg}{L}x,$$

eli F_θ on likimain suoraan verrannollinen poikkeamaan x tasapainoasemasta, verrannollisuuskertoimena ("jousivakiona") $k = mg/L$. Pienillä kulmilla heiluri siis käyttäytyy kuten vaimentamaton vapaa värähtelijä (ks. luku 9.8.1), jonka kulmanopeus on $\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{g/L}$. Jaksolle $T = 2\pi/\omega$ saadaan siten arvio

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad \text{(kun } \theta_0 \text{ on pieni).}$$

Erityisesti nähdään, että pienillä θ_0 jakso ei riipu heilahduksen amplitudista θ_0, vaan ainoastaan heilurin pituudesta L. Tämän vuoksi heilurikello näyttää oikeaa aikaa, vaikka heiluriliikkeen amplitudi pienenisi ajan kuluessa.

Esimerkki 8.100. Heilurin heilahdusaika, yleinen tapaus. Kun esimerkissä 8.99 alkukulma θ_0 on "suuri", on edellä heilurin jaksolle T tehty approksimaatio huono. Johdetaan tarkka kaava jaksolle T yleisellä θ_0. Kuvan kolmiosta päätellään

$$L - h = L\cos\theta$$

(missä $L - h \leq 0$, jos $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$), joten punnuksen korkeus kulmalla θ on

$$h(\theta) = L(1 - \cos\theta).$$

Korkeusero lähtökulmasta θ_0 kulmaan $\theta \geq 0$ on

$$\Delta h = h(\theta_0) - h(\theta) = L(\cos\theta - \cos\theta_0).$$

Punnus lähtee levosta, joten vauhti v saadaan energiansäilymislaista $mg\Delta h = mv^2/2$, josta ratkaistaan

$$v = \sqrt{2g\Delta h} = \sqrt{2gL(\cos\theta - \cos\theta_0)}.$$

Jos rataliikkeen kulmanopeutta merkitään ω:lla, niin $v = L\omega = -L\dfrac{d\theta}{dt}$, joten

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{v}{L} = -\sqrt{\frac{2g}{L}}\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}. \tag{8.101}$$

Olkoon alussa ($\theta = \theta_0$) ajanhetki $t = 0$, jolloin punnuksen saapuessa alimpaan pisteeseen ($\theta = 0$) aika on $t = T/4$. Nyt

$$\frac{T}{4} = \int_0^{T/4} dt.$$

Tehdään tähän integraaliin muuttujanvaihto $\theta = \theta(t)$. (8.101):stä saadaan

$$dt = -\sqrt{\frac{L}{2g}}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}.$$

Rajat: kun $t = 0$, niin $\theta = \theta_0$ ja kun $t = T/4$, niin $\theta = 0$, joten

$$\frac{T}{4} = -\sqrt{\frac{L}{2g}}\int_{\theta_0}^{0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}.$$

Nyt

$$T = \sqrt{\frac{8L}{g}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} = \sqrt{\frac{4L}{g}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{k^2 - \sin^2(\theta/2)}},$$

kun käytetään trigonometrisia muunnoskaavoja $\cos\theta = 1 - 2\sin^2(\theta/2)$ ja $\cos\theta_0 = 1 - 2\sin^2(\theta_0/2)$ ja merkitään $k = \sin(\theta_0/2)$. Tehdään nyt muuttujanvaihto

$$k\sin\phi = \sin(\theta/2),$$

josta derivoimalla puolittain θ:n suhteen

$$k\cos\phi\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{1}{2}\cos(\theta/2)$$

eli

$$d\theta = \frac{2k\cos\phi}{\cos(\theta/2)}\,d\phi = \frac{2k\sqrt{1-\sin^2\phi}}{\sqrt{1-\sin^2(\theta/2)}}\,d\phi = \frac{2k\sqrt{1-\sin^2\phi}}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}\,d\phi.$$

Rajat: kun $\theta = 0$, niin $k \sin\phi = 0$ eli $\phi = 0$, ja kun $\theta = \theta_0$, niin $k \sin\phi = k$ eli $\phi = \pi/2$. Saadaan

$$\begin{aligned} T &= 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{k\sqrt{1-\sin^2\phi}}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}\sqrt{k^2-k^2\sin\phi}}\, d\phi \\ &= 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}. \end{aligned}$$

Tätä integraalia kutsutaan *elliptiseksi integraaliksi*. Elliptistä integraalia ei voida integroida suljetussa muodossa (eli ilman sarjoja). Binomisarja (8.94) eksponentin arvolla $k = -1/2$ on

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \cdots,$$

joten soveltamalla tätä arvolla $x = -k^2 \sin^2\phi$ saadaan

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{1}{2}k^2\sin^2\phi + \frac{3}{8}k^4\sin^4\phi + \cdots\right) d\phi.$$

Ottamalla tästä mukaan useampia termejä saadaa heilahdusajalle arvioita myös suuremmilla θ_0.
1. approksimaatio:

$$T \approx 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} d\phi = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Päädyttiin samaan arvioon kuin esimerkissä 8.99.
2. approksimaatio:

$$\begin{aligned} T &\approx 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{1}{2}k^2\sin^2\phi\right) d\phi = 4\sqrt{\frac{L}{g}}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{k^2}{2}\underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin^2\phi\, d\phi}_{=\pi/4}\right) \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{\sin^2(\theta_0/2)}{4}\right). \end{aligned}$$

Nähdään, että suuremmilla θ_0 heilahdusaika kasvaa θ_0:n kasvaessa. Tätä havainnollistetaan animaatioilla Wikipediassa [4].

8.6.2 Muita Taylorin sarjojen käyttötapoja

Joskus sarjoja voidaan hyödyntää muotoa $\frac{0}{0}$ tai $\frac{\infty}{\infty}$ olevien raja-arvojen laskemisessa esimerkiksi tapauksissa, joissa l'Hôpital'n sääntö ei tuota tulosta.

Esimerkki 8.102. Laske $\lim_{x\to 0} \dfrac{(e^x-1-x)^2}{x^2-\ln(1+x^2)}$.

Ratkaisu. Kyseessä on muotoa $\frac{0}{0}$ oleva raja-arvo. Kehitetään e^x ja $\ln(1+x^2)$ sarjoiksi:

$$\begin{aligned}\frac{(e^x-1-x)^2}{x^2-\ln(1+x^2)} &= \frac{\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots-1-x\right)^2}{x^2-\left(x^2-\dfrac{x^4}{2}+\dfrac{x^6}{3}-\cdots\right)} \\ &= \frac{\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\cdots\right)^2}{\dfrac{x^4}{2}-\dfrac{x^6}{3}+\cdots} = \frac{\dfrac{x^4}{4}\left(1+\dfrac{x}{3}+\cdots\right)^2}{\dfrac{x^4}{2}\left(1-\dfrac{2x^2}{3}+\cdots\right)} \to \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

kun $x \to 0$.

Taylorin kaavalla voidaan arvioida monia hankalia integraaleja.

Esimerkki 8.103. Arvioi integraalia $\int_0^1 \sin(x^2)\,dx$ kolmen desimaalin tarkkuudella.

Ratkaisu. Kehitetään integroitava funktio sarjaksi:

$$\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!} + \cdots.$$

Integroimalla termeittäin 0:sta 1:een saadaan

$$\int_0^1 \sin(x^2)\,dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{11\cdot 5!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(4n+3)(2n+1)!} + \cdots.$$

Voitaisiin soveltaa esimerkin 8.98 virhearviota funktiolle $\sin(x^2)$ ja arvioida sillä integraalin virhettä, mutta koska integraalin sarjakehitelmä on vuorotteleva sarja ja toteuttaa Leibnizin testin oletukset (lemma 8.85), niin on yksinkertaisempaa käyttää Leibnizin testiä: pienin n, joka toteuttaa epäyhtälön

$$\frac{1}{(4n+3)(2n+1)!} < 0{,}0005$$

on $n = 3$. Haluttuun tarkkuuteen riittää siis ottaa termit indeksiin $n = 2$ saakka:

$$\int_0^1 \sin(x^2)\,dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{11\cdot 5!} \approx 0{,}310.$$

Tämä keino on huomattavasti tehokkaampi kuin "numeronmurskaaminen" esimerkiksi jollakin luvun 7.5 numeerisen integroinnin menetelmällä, jossa jouduttaisiin ottamaan kymmeniä tai satoja osavälejä samaan tarkkuuteen pääsemiseksi.

9 Differentiaaliyhtälöt

Monien sovellusten matemaattisissa malleissa päädytään yhtälöihin, joissa esiintyy suureiden muutosnopeuksia toisten suureiden suhteen. Tällaisia yhtälöitä kutsutaan differentiaaliyhtälöiksi.

Esimerkki 9.1. a) Sijoitetaan kappale vakiolämpöiseen lämpökylpyyn, jonka lämpötila on T_0 (°C). Merkitään kappaleen lämpötilaa $T(t)$ (°C) hetkellä t (s). Oletetaan siis, että tällä kappaleella on jokaisessa sen pisteessä sama lämpötila. Lämpö virtaa kuumasta kylmään ja lämpötilan muutosnopeus $T'(t)$ on suoraan verrannollinen kappaleen ja ympäristön väliseen lämpötilaeroon $T(t) - T_0$, eli

$$T'(t) = -k(T(t) - T_0), \tag{9.2}$$

missä $k > 0$ (1/s) on verrannollisuuskerroin. Kerroin $-k$ on negatiivinen, koska kappaleen ollessa ympäristöä lämpimämpi $T(t) - T_0 > 0$ ja lämpötila $T(t)$ vähenee ja siten derivaatta $T'(t)$ on negatiivinen. Päinvastaisessa tilanteessa $T(t) - T_0 < 0$ ja $T'(t) > 0$.

Jos vakiot k ja T_0 tunnetaan, niin ratkaise funktio $T(t)$.

b) Suoraviivaisesti liikkuvaan kappaleeseen vaikuttaa vakiosuuruinen työntövoima F_0 (N) ja vauhdista v (m/s) riippuva vastusvoima $-kv^2$, missä $k > 0$ (kg/m) on vakio. Kappaleeseen vaikuttava kokonaisvoima on $F_0 - kv^2$, joten Newtonin lain mukaan $F_0 - kv^2 = ma$, missä m (kg) on massa ja a (m/s^2) on kiihtyvyys. Merkitään $x(t)$:llä kappaleen paikkaa (m) hetkellä t (s). Koska $x'(t) = v(t)$ ja $x''(t) = v'(t) = a(t)$, niin

$$F_0 - kx'(t)^2 = mx''(t). \tag{9.3}$$

Jos vakiot F_0, k ja m tunnetaan, niin ratkaise funktio $x(t)$.

9.1 Terminologiaa [5, 8.1]

Tavallinen differentiaaliyhtälö (ordinary differential equation, ODE) on yhtälö, jossa esiintyy yksi muuttuja x, siitä riippuva tuntematon funktio $y = y(x)$ ja sen derivaattoja $y', y'', \ldots$. Differentiaaliyhtälön *ratkaisemisella* tarkoitetaan kaikkien sellaisten funktioiden y hakemista, jotka toteuttavat yhtälön. Eräitä peruskäsitteitä:

- *Kertaluku (order)*: suurin yhtälössä esiintyvien derivaattojen kertaluvuista.
- *Yksittäisratkaisu (solution)*: yksittäinen funktio y, joka toteuttaa yhtälön.

- *Yleinen ratkaisu (general solution)*: kaava tai esitysmuoto, joka antaa yhtälön kaikki ratkaisut, usein yhden tai useamman parametrin avulla esitettynä.
- *Erikoisratkaisu (particular solution)*: ratkaisu, joka muodoltaan poikkeaa muista ratkaisuista tai on muuten erikoisasemassa.
- *Alkuarvotehtävässä (initial value problem)* haetaan ratkaisua y, joka toteuttaa yhden tai useampia funktiolle y tai sen derivaatoille asetettuja *alkuehtoja (initial condition)* $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1, \ldots$.

Esimerkki 9.4. Yhtälö

$$2xy'(x) + y'''(x)y(x) = \frac{1}{x}e^{y(x)}$$

on kolmannen kertaluvun differentiaaliyhtälö. Monesti funktion y muuttuja jätetään kirjoittamatta, eli merkitään lyhyesti

$$2xy' + y'''y = \frac{1}{x}e^{y}.$$

Esimerkki 9.5. Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä

$$y' = y^2. \tag{9.6}$$

Tälle yhtälölle $y(x) = -\dfrac{1}{x+1}$ on yksittäisratkaisu, kuten sijoittamalla nähdään:

$$y' = \frac{1}{(x+1)^2} = y^2.$$

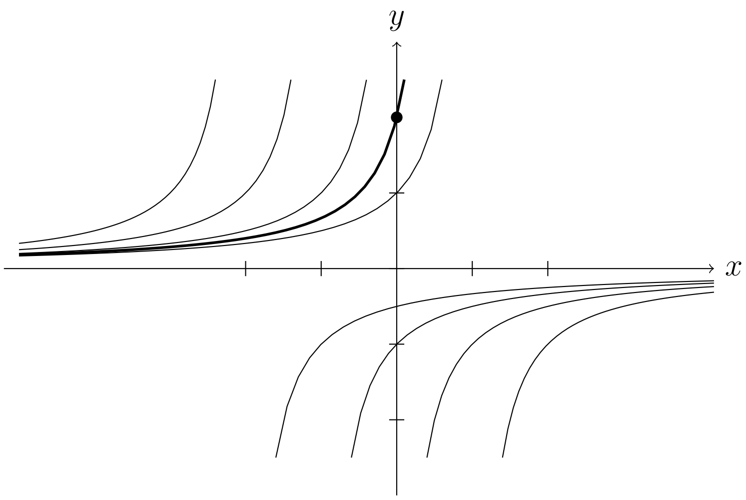
Yhtälön yleinen ratkaisu on

$$y(x) = -\frac{1}{x+C}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad (x < -C \text{ tai } x > -C), \tag{9.7}$$

ja lisäksi yhtälöllä on erikoisratkaisu $y(x) = 0$. Sijoittamalla voit todeta, että kaikki muotoa (9.7) olevat funktiot ratkaisevat yhtälön. Myöhemmin perustellaan, miksi yhtälön kaikki ratkaisut erikoisratkaisua lukuunottamatta ovat tätä muotoa. Näistä ratkaisuista alkuehdon $y(0) = 2$ toteuttaa ratkaisu

$$y(x) = -\frac{1}{x - \frac{1}{2}} = \frac{2}{1-2x}.$$

Seuraavaan kuvaan on piirretty *ratkaisuparven* (9.7) funktiot C:n arvoilla $-1, 0, 1$ ja 2 (ohuet käyrät) sekä kyseisen alkuarvotehtävän ratkaisu, joka kulkee pisteen $(0, 2)$ kautta (ja jolle $C = -1/2$).



Käydään seuraavassa läpi joitakin tärkeimpiä differentiaaliyhtälötyyppejä.

9.2 Integroimistehtävä

Jos differentiaaliyhtälö on muokattavissa muotoon $y' = f(x)$, niin se voidaan ratkaista suoraan integroimalla.

Esimerkki 9.8. Ratkaise alkuarvotehtävä $3y' = x^2$, $y(1) = 1/2$.
Ratkaisu. Kirjoitetaan yhtälö muotoon

$$y'(x) = \frac{1}{3}x^2,$$

josta integroimalla

$$y(x) = \int \frac{1}{3}x^2\,dx = \frac{1}{9}x^3 + C.$$

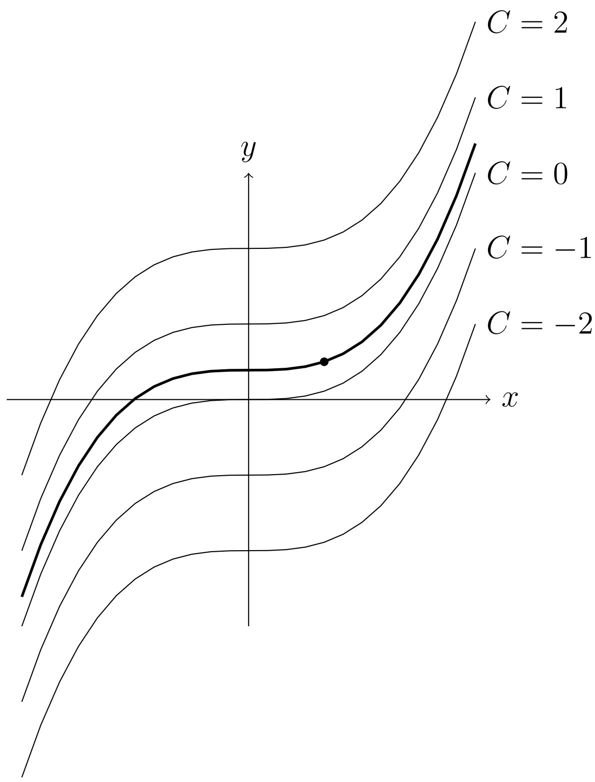
Lauseen 7.4 nojalla tämä on yhtälön yleinen ratkaisu. Alkuehdon $y(1) = 1/2$ toteuttava ratkaisu:

$$y(1) = \frac{1}{9} + C = \frac{1}{2},$$

joten $C = 7/18$ ja siten kysytty alkuarvotehtävän ratkaisu on

$$y(x) = \frac{1}{9}x^3 + \frac{7}{18}.$$

Oheiseen kuvaan on piirretty alkuehdon $y(1) = 1/2$ ($C = 7/18$) toteuttavan ratkaisun lisäksi muutama muukin ratkaisu.



9.3 Separoituva yhtälö [5, 8.3]

1. kertaluvun differentiaaliyhtälöä sanotaan *separoituvaksi (separable)*, jos se on muotoa

$$\boxed{y'(x) = f(x)g(y(x)).} \tag{9.9}$$

Jos $g(y(x)) \neq 0$, niin (9.9) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x),$$

joten

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))}\,dx = \int f(x)\,dx + C.$$

Tehdään vasemmalle puolelle muuttujanvaihto $y = y(x)$ (kaava (7.18)):

$$\boxed{\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + C.} \tag{9.10}$$

y voidaan nyt (yrittää) ratkaista tästä yhtälöstä integroimalla. Lisäksi erikoisratkaisuja ovat vielä vakiofunktiot $y(x) = a$, missä luku a on g:n nollakohta.

Käytännössä käytettäessä separointia kaava (9.10) "johdetaan" kirjoittamalla ensin

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y).$$

Tässä kerrotaan dx:llä aivan kuin se olisi luku ja siirretään y:t vasemmalle ja x:t oikealle (separointi), jolloin saadaan

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx.$$

Tämä integroidaan puolittain:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + C.$$

Huomautus 9.11. Kaavassa (9.10) ja yleisestikin differentiaaliyhtälöiden yhteydessä integroimisvakio kirjoitetaan näkyviin ja merkintä $\int f(x)\,dx$ tarkoittaa yhtä (mitä tahansa) f:n integraalifunktiota. Vertaa huomautukseen 7.14.

Esimerkki 9.12. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' = x^2y^3$.
Ratkaisu. Kyseessä on separoituva differentiaaliyhtälö, jossa $f(x) = x^2$ ja $g(y) = y^3$. Separoidaan:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= x^2y^3 \\
\int \frac{dy}{y^3} &= \int x^2\,dx + C_1 \\
-\frac{1}{2}\frac{1}{y^2} &= \frac{1}{3}x^3 + C_1 \\
y(x) &= \pm\frac{1}{\sqrt{C - \frac{2}{3}x^3}}
\end{aligned}$$

missä $C = -2C_1$. Lisäksi erikoisratkaisuna saadaan

$$y(x) = 0.$$

Esimerkiksi alkuehdolla $y(1) = 3$ (ts. $C = 7/9$) saadaan ratkaisu

$$y(x) = \frac{3}{\sqrt{7 - 6x^3}}, \qquad x < \left(\frac{7}{6}\right)^{1/3}.$$

Esimerkki 9.13. Populaation koko. Tarkastellaan populaation kokoa $x(t)$ ajan t funktiona. Derivaatta $x'(t)$ kuvaa koon muutosnopeutta, ts. pienillä $\Delta t > 0$ on

$$x'(t) \approx \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{\text{koon muutos}}{\text{aikaväli}}.$$

Usein hyvä perusoletus on, että muutosnopeus $x'(t)$ on suoraan verrannollinen populaation kokoon:

$$\boxed{x'(t) = kx(t).} \tag{9.14}$$

Siten esimerkiksi kooltaan kaksinkertaisessa populaatiossa koon muutos on kaksinkertainen aikayksikköä kohden. Ratkaistaan yhtälö separoimalla:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= kx \\ \int \frac{dx}{x} &= k \int dt \\ \ln x &= kt + C_1 \\ x(t) &= e^{kt+C_1} = e^{C_1} e^{kt} = Ce^{kt} \end{aligned}$$

missä $C = e^{C_1} > 0$. Jos hetkellä $t = 0$ populaation koko on x_0, niin $x(0) = Ce^0 = C = x_0$, joten

$$\boxed{x(t) = x_0 e^{kt}.} \tag{9.15}$$

Populaation koko siis kasvaa eksponentiaalisesti, jos $k > 0$ ja vähenee eksponentiaalisesti, jos $k < 0$.

Esimerkki 9.16. Radioaktiivinen hajoaminen. Merkitään radioaktiivisen näytteen radioaktiivisen isotoopin ydinten lukumäärää $N(t)$:llä ajan t funktiona. Hajoavien ydinten lukumäärä aikayksikössä eli $-N'(t)$ on suoraan verrannollinen ydinten lukumäärään, ts.

$$N'(t) = -kN(t), \quad k > 0.$$

Esimerkin 9.13 mukaan

$$N(t) = N_0 e^{-kt},$$

missä $N_0 = N(0)$. Olkoon $\tau > 0$ vakio. Lasketaan lukumäärien $N(t+\tau)$ ja $N(t)$ suhde:

$$\frac{N(t+\tau)}{N(t)} = \frac{N_0 e^{-k(t+\tau)}}{N_0 e^{-kt}} = e^{-k\tau}.$$

Huomataan, että suhde ei riipu alkuajanhetkestä t. Voidaan laskea *puoliintumisaika* τ, jonka kuluessa lukumäärä puolittuu:

$$e^{-k\tau} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -k\tau = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\tau = \frac{\ln 2}{k}}$$

Esimerkki 9.17. Erään maan väkiluku vuonna 2009 on 1 500 000. Oletetaaan, että maan oma väestö lisääntyy 4 % vuodessa ja tämän lisäksi vuosittain maahan muuttaa 50 000 asukasta. Selvitä maan väkiluku ajan funktiona. Mikä on väkiluku vuonna 2029?
Ratkaisu. Merkitään väkilukua $x(t)$ ajan t (vuosina, $t = 0$ vuonna 2009) funktiona. On ratkaistava alkuarvotehtävä

$$x'(t) = 0{,}04x(t) + 50\ 000, \quad x(0) = 1\ 500\ 000.$$

Muokataan yhtälöä:

$$\begin{aligned} 25x'(t) &= x(t) + 1\ 250\ 000 \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{25}(x(t) + 1\ 250\ 000) \end{aligned}$$

Huomataan, että yhtälö separoituu:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x + 1\ 250\ 000} &= \int \frac{1}{25}\, dt + C_1 \\ \ln(x + 1\ 250\ 000) &= \frac{t}{25} + C_1 \\ x + 1\ 250\ 000 &= e^{t/25}e^{C_1} = Ce^{t/25} \end{aligned}$$

joten

$$x(t) = Ce^{t/25} - 1\ 250\ 000.$$

Alkuehdosta saadaan $x(0) = C - 1\ 250\ 000 = 1\ 500\ 000$, joten $C = 2\ 750\ 000$. Niinpä väkiluku ajan t funktiona on

$$x(t) = 2\ 750\ 000e^{t/25} - 1\ 250\ 000$$

ja vuonna 2029 väkiluku on $x(20) \approx 4\ 870\ 000$.

Esimerkki 9.18. Ratkaistaan esimerkin 9.1 differentiaaliyhtälö (9.2), eli

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0).$$

Tämä separoituu:

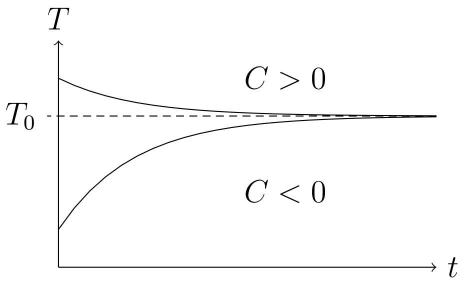
$$\begin{aligned} \int \frac{dT}{T - T_0} &= -k \int dt + C_1 \\ \ln |T - T_0| &= -kt + C_1 \\ |T - T_0| &= e^{C_1}e^{-kt} \\ T - T_0 &= \pm e^{C_1}e^{-kt} \end{aligned}$$

Merkitään tässä $C = \pm e^{C_1}$. Lämpötila T ajan t funktiona on siis

$$T(t) = T_0 + Ce^{-kt}.$$

Tässä termi $Ce^{-kt} \to 0$, kun $t \to \infty$, eli kappaleen lämpötila lähestyy lämpökylvyn lämpötilaa ajan kuluessa, kuten pitääkin. Lisäksi jos kappale on aluksi ympäristöä lämpimämpi eli $T(0) - T_0 > 0$, niin $C > 0$ ja lämpötila $T(t)$ vähenee kohti raja-arvoaan T_0. Jos taas kappale on aluksi ympäristöä kylmempi eli $T(0) - T_0 < 0$, niin $C < 0$ ja lämpötila $T(t)$ kasvaa kohti raja-arvoaan T_0. Oheisessa kuvassa ratkaisu kahdella erimerkkisellä C:n arvolla.

Erikoisratkaisuun $T(t) = T_0$ päädytään silloin, kun $T(0) - T_0 = 0$, toisin sanoen jos kappaleella on alussa sama lämpötila kuin ympäristöllä.



9.4 Ensimmäisen kertaluvun lineaariyhtälö [5, 8.4]

Tässä luvussa tarkastellaan 1. *kertaluvun (normaalimuotoista) lineaarista differentiaaliyhtälöä (linear first-order equation)*

$$\boxed{y' + a(x)y = f(x),} \tag{9.19}$$

missä $a(x)$ ja $f(x)$ ovat jatkuvia avoimella välillä I. Koska $a(x)$ on jatkuva, on sillä vakiota vaille yksikäsitteinen integraalifunktio välillä I (lause 7.49). Valitaan näistä integraalifunktioista yksi ja merkitään sitä $A(x)$:llä. Muodostetaan funktio $\mu(x) = e^{A(x)}$, ns. *integroiva tekijä (integrating factor)*. Kertomalla yhtälö (9.19) puolittain funktiolla $\mu(x) \neq 0$ nähdään, että funktio $y(x)$ on yhtälön (9.19) ratkaisu jos ja vain jos

$$\left(y'(x) + a(x)y(x)\right) e^{A(x)} = f(x)e^{A(x)}. \tag{9.20}$$

Lasketaan nyt tulon $y(x)\mu(x)$ derivaatta:

$$\begin{aligned}
D_x\Big(y(x)\mu(x)\Big) &= y'(x)\mu(x) + y(x)\mu'(x) \\
&= y'(x)e^{A(x)} + y(x)e^{A(x)}A'(x) \\
&= y'(x)\mu(x) + y(x)\mu(x)a(x) \\
&= \mu(x)\left(y'(x) + a(x)y(x)\right)
\end{aligned}$$

Niinpä funktio $y(x)$ on yhtälön (9.19) ratkaisu jos ja vain jos

$$D_x\Big(y(x)\mu(x)\Big) = \mu(x)f(x).$$

Integroimalla puolittain saadaan

$$y(x)\mu(x) = \int \mu(x)f(x)\,dx + C, \tag{9.21}$$

josta $y(x)$ voidaan ratkaista. Saatiin todistettua:

Lause 9.22. *Ensimmäisen kertaluvun lineaariyhtälön* (9.19) *yleinen ratkaisu löydetään seuraavasti:*

- *Muodosta integroiva tekijä* $\mu(x) = e^{\int a(x)\,dx}$.
- *Kerro yhtälö puolittain integroivalla tekijällä.*
- *Tunnista yhtälön vasemmalta puolelta derivaatta* $D_x\Big(y(x)\mu(x)\Big)$.
- *Integroi puolittain.*

Lause 9.23 (Olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslause)**.** *Olkoon* $x_0 \in I$ *ja* $y_0 \in \mathbb{R}$. *Silloin yhtälöllä* (9.19) *on täsmälleen yksi alkuehdon* $y(x_0) = y_0$ *toteuttava ratkaisu* $y(x)$ *välillä* I.

Todistus. Integraalifunktion $A(x)$ valinnalla ei ole vaikutusta $y(x)$:ään: jos yhtälössä (9.20) $A(x)$:n paikalle sijoitetaan $A(x)+D$, niin saadaan puolittain tekijä $e^{A(x)+D} = e^{A(x)}e^D$, joten vakio e^D voidaan jakaa yhtälöstä puolittain pois. Kiinnitetään siis jokin integraalifunktio $A(x)$. Yhtälöstä (9.21) voidaan C ratkaista yksikäsitteisesti siten, että $y(x_0) = y_0$:

$$C = y_0\mu(x_0) - \left[\int \mu(x)f(x)\,dx\right]_{x=x_0}. \qquad \square$$

Esimerkki 9.24. Ratkaise alkuarvotehtävä $x^3y' + x^2y = x^4$, $y(1) = 0$.
Ratkaisu. Muokataan yhtälö ensin normaalimuotoon

$$y' + \frac{1}{x}y = x \quad (x \neq 0), \tag{9.25}$$

josta tunnistetaan $a(x) = 1/x$ ja $f(x) = x$. Nyt

$$A(x) = \int \frac{dx}{x} = \ln|x|.$$

Koska alkuehdossa $x = 1 > 0$, niin haetulle ratkaisulle $x > 0$. Niinpä $A(x) = \ln x$ ja integroivaksi tekijäksi saadaan $\mu(x) = e^{\ln x} = x$. Kerrotaan yhtälö (9.25) tällä puolittain:

$$\begin{aligned} y'(x)x + y(x) &= x^2 \\ D_x\left(y(x)x\right) &= x^2 \\ y(x)x &= \int x^2\,dx + C \\ y(x) &= \frac{1}{x}\left(\int x^2\,dx + C\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{3}x^3 + C\right) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{C}{x}. \end{aligned}$$

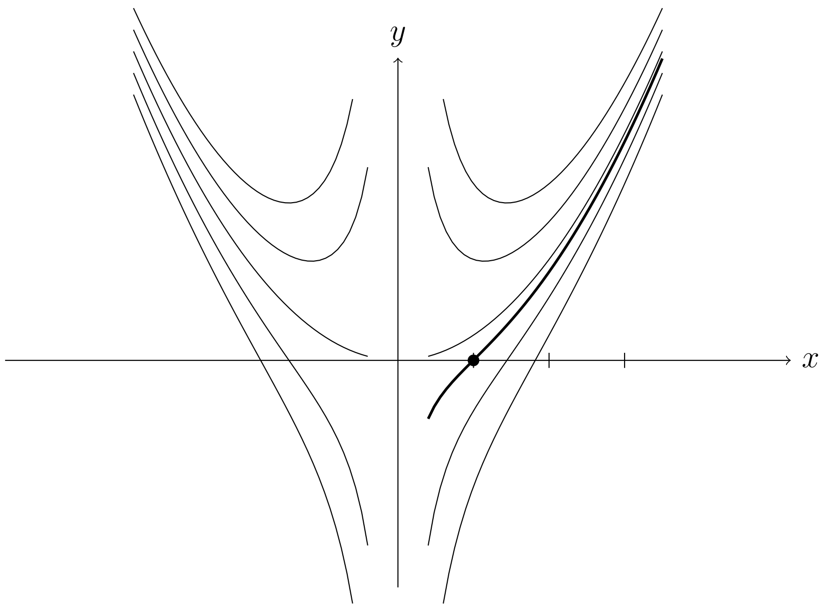
Alkuehto:

$$y(1) = \frac{1}{3} + C = 0,$$

josta $C = -1/3$. Kysytty alkuarvotehtävän ratkaisu on siis

$$y(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3x}.$$

Havainnollistetaan vielä olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslausetta tämän esimerkin tapauksessa. Nyt $x_0 = 1 \in (0, \infty)$. Kuvaan on piirretty alkuehdon $y(1) = 0$ toteuttava ratkaisu ($C = -1/3$) sekä muutama muu ratkaisu (C:n arvoilla $-2, -1, 0, 1$ ja 2) välillä $(0, \infty)$. Jokaisen pisteen (x_0, y_0), $x_0 > 0$, kautta kulkee täsmälleen yksi ratkaisukäyrä. Vastaavasti myös välille $(-\infty, 0)$ on piirretty muutama ratkaisu (C:n arvoilla $-2, -1, 0, 1$ ja 2). Jokaisen pisteen (x_0, y_0), $x_0 < 0$, kautta kulkee täsmälleen yksi ratkaisukäyrä.



Esimerkki 9.26. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' + 3x^2y = 6x^2$
Ratkaisu. Yhtälö muotoa (9.19). Integroivaksi tekijäksi saadaan $\mu(x) = e^{\int 3x^2\,dx} = e^{x^3}$. Kerrotaan yhtälö tällä puolittain:

$$\begin{aligned}
y'(x)e^{x^3} + y(x)3x^2e^{x^3} &= 6x^2e^{x^3} \\
D_x\left(y(x)e^{x^3}\right) &= 6x^2e^{x^3} \\
y(x)e^{x^3} &= \int 6x^2e^{x^3}\,dx + C \\
y(x) &= e^{-x^3}\left(\int 6x^2e^{x^3}\,dx + C\right) = e^{-x^3}\left(2e^{x^3} + C\right) \\
&= 2 + Ce^{-x^3}.
\end{aligned}$$

Huomautus 9.27. Kun differentiaaliyhtälölle on saatu laskettua ratkaisu, kannattaa vielä erikseen tarkastaa, että ratkaisu $y(x)$ toteuttaa sekä differentiaaliyhtälön että mahdollisen alkuehdon.

9.5 Suuntaelementtikenttä [5, 8.2]

Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä

$$\boxed{y' = f(x, y).} \tag{9.28}$$

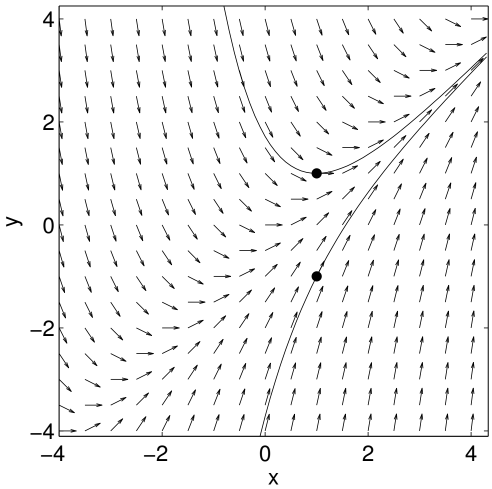
Jos ratkaisun $y = y(x)$ kuvaaja kulkee pisteen (x, y) kautta, niin ko. pisteessä kuvaajan tangenttisuoran kulmakerroin on $k = f(x, y)$. Kuvaajalla on siis tangenttivektori $(1, f(x, y))$. Normeeraamalla tämä ykkösen mittaiseksi saadaan yksikkötanttivektori pisteessä (x, y):

$$F(x, y) = \frac{(1, f(x, y))}{\sqrt{1^2 + f(x, y)^2}}.$$

Funktiota F sanotaan *suuntaelementtikentäksi (slope field, direction field)*. Piirretään xy-tasoon sopivin välein pisteisiin (x, y) vektoreita $F(x, y)$. Nyt jokainen ratkaisu $y = y(x)$ kulkee suuntaelementtikentässä kentän osoittamia suuntia noudattaen. Seuraavaan kuvaan on piirretty differentiaaliyhtälön

$$y' = x - y$$

suuntaelementtikenttä sekä alkuehdot $y(1) = 1$ ja $y(1) = -1$ toteuttavat ratkaisut. Vektoreiden pituuksiksi on selvyyden vuoksi skaalattu 0,5.



9.6 Numeerinen ratkaiseminen [5, 8.2]

Tarkastellaan alkuarvotehtävää

$$\boxed{y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.} \tag{9.29}$$

Ratkaisukäyrän $y = y(x)$ kulmakerroin pisteessä (x_0, y_0) on $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, joten ratkaisua $y(x)$ voidaan approksimoida pisteen x_0 lähellä lineaarisella approksimaatiolla $T(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$. Olkoon $h > 0$ ja merkitään $x_1 = x_0 + h$. Nyt

$$y(x_1) \approx y_0 + f(x_0, y_0)h =: y_1.$$

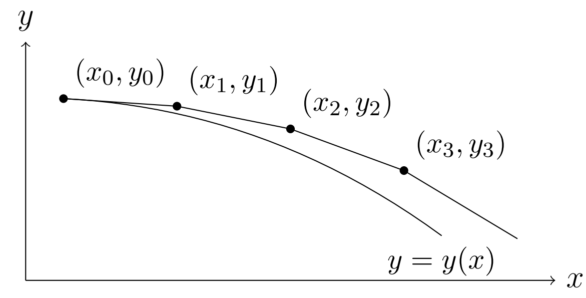
Päädytään pisteeseen (x_1, y_1), joka on likimain käyrällä $y = y(x)$. Tehdään pisteestä (x_1, y_1) vastaava siirtymä kuin edellä käyttäen kulmakertoimena lukua $f(x_1, y_1)$:

$$x_2 = x_1 + h, \quad y(x_2) \approx y_1 + f(x_1, y_1)h =: y_2.$$

Yleisesti asetetaan rekursiivisesti

$$\boxed{x_{n+1} = x_n + h, \quad y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)h, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.} \tag{9.30}$$

Tätä kutsutaan *Eulerin menetelmäksi askelpituudella* $h > 0$.



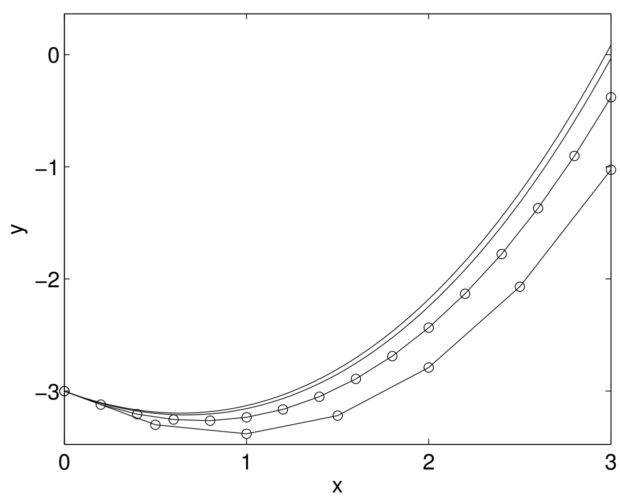
Esimerkki 9.31. Arvioi alkuarvotehtävän

$$y' = x + \frac{y}{5}, \quad y(0) = -3,$$

ratkaisua välillä $[0, 3]$ käyttämällä askelpituutta $h = 0{,}5$.
Ratkaisu.

$$\begin{aligned}
x_0 &= 0 & y_0 &= -3 \\
x_1 &= 0{,}5 & y_1 &= y_0 + (x_0 + y_0/5) \cdot 0{,}5 = -3{,}3 \\
x_2 &= 1{,}0 & y_2 &= y_1 + (x_1 + y_1/5) \cdot 0{,}5 = -3{,}38 \\
x_3 &= 1{,}5 & y_3 &= y_2 + (x_2 + y_2/5) \cdot 0{,}5 = -3{,}218 \\
x_4 &= 2{,}0 & y_4 &= y_3 + (x_3 + y_3/5) \cdot 0{,}5 = -2{,}7898 \\
x_5 &= 2{,}5 & y_5 &= y_4 + (x_4 + y_4/5) \cdot 0{,}5 = -2{,}0688 \\
x_6 &= 3{,}0 & y_6 &= y_5 + (x_5 + y_5/5) \cdot 0{,}5 = -1{,}0257
\end{aligned}$$

Kuvassa on ylimpänä tarkka ratkaisu ja alimpana edellä laskettu numeerinen ratkaisu askelpituudella $h = 0{,}5$. Välissä on askelpituuksilla $h = 0{,}2$ ja $h = 0{,}05$ lasketut numeeriset ratkaisut.



Askelpituutta pienentämällä Eulerin menetelmä antaa yleensä tarkempia ratkaisuja. Menetelmä on kuitenkin numeerisesti erittäin huono käytännössä käytettäväksi. Menetelmää voidaan parantaa esimerkiksi laskemalla kulmakerroin $f(x, y)$ useassa pisteessä välillä $[x_n, x_{n+1}]$ ja ottamalla ne sopivasti huomioon ennen arvon y_{n+1} määrittämistä. Eräs tällaisista menetelmistä on *Runge-Kutta-menetelmä*, jota käytetään mm. Matlabin `ode45`-funktiossa.

Esimerkki 9.32. Ratkaistaan esimerkin 9.31 alkuarvotehtävä numeerisesti Matlabilla.

```
odefun=@(x,y)x+y/5; % yhtälön oikea puoli x:n ja y:n funktiona
x0 = 0;             % x:n alkuarvo
xf = 3;             % x:n loppuarvo
y0 = -3;            % alkuehto
[x,y] = ode45(odefun,[x0 xf],y0);
% x:n arvot ja y:n likiarvot ovat nyt vektoreissa x ja y
plot(x,y)           % ratkaisun kuvaaja
```

9.7 Toisen kertaluvun lineaariyhtälö [5, 8.6]

Tässä luvussa tarkastellaan 2. *kertaluvun (normaalimuotoista) lineaarista differentiaaliyhtälöä (second-order linear equation)*

$$\boxed{y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x),} \tag{9.33}$$

missä $a(x)$, $b(x)$ ja $f(x)$ ovat jatkuvia avoimella välillä I. Jos $f(x)$ ei ole nolla kaikilla $x \in I$, niin yhtälöä (9.33) kutsutaan *epähomogeeniseksi yhtälöksi (nonhomogeneous equation)*, lyhyesti EY. Yhtälöä (9.33) vastaava *homogeeninen yhtälö (homogeneous equation)*, lyhyesti HY, on

$$\boxed{y'' + a(x)y' + b(x)y = 0.} \tag{9.34}$$

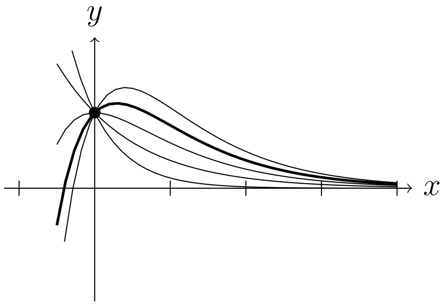
Lause 9.35 (Olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslause)**.** *Olkoon $x_0 \in I$ ja b_0 ja $b_1 \in \mathbb{R}$. Silloin yhtälöllä* (9.33) *on täsmälleen yksi alkuehdot $y(x_0) = b_0$ ja $y'(x_0) = b_1$ toteuttava ratkaisu $y(x)$ välillä I.*

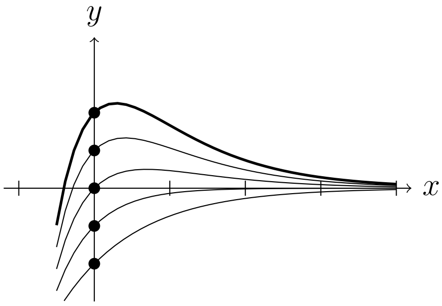
Todistus. Sivuutetaan. □

Esimerkki 9.36. Tutkitaan differentiaaliyhtälön $y'' + 3y' + 2y = 0$ ratkaisujen yksikäsitteisyyttä. Asettamalla pelkästään alkuehto $y(0) = 1$ kiinnitetään vain ratkaisun kuvaajan kauttakulkupiste. Kyseisen alkuehdon toteuttavia ratkaisuja on äärettömän monta. Vasemmanpuoleiseen kuvaan on piirretty tällaisia ratkaisuja kulmakertoimilla $y'(0) = -2$, -1, 0, 1 ja 2.

Toisaalta asettamalla pelkästään alkuehto $y'(0) = 1$ kiinnitetään vain ratkaisun kuvaajan kulmakerroin arvolla $x = 0$. Kyseisen alkuehdon toteuttavia ratkaisuja on äärettömän monta. Oikeanpuoleiseen kuvaan on piirretty tällaisia ratkaisuja kauttakulkupisteinä $y(0) = -1$, $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$ ja 1.

Kun asetetaan molemmat alkuehdot $y(0) = 1$ ja $y'(0) = 1$, saadaan yksikäsitteinen ratkaisu (paksu kuvaaja). Vertaa ensimmäisen kertaluvun lineaariyhtälön tapaukseen (esimerkki 9.24), jossa kunkin pisteen kautta kulkee täsmälleen yksi ratkaisu.





9.7.1 Homogeeninen yhtälö

Aloitetaan toisen kertaluvun lineaariyhtälön ratkaisumenetelmän tarkastelu homogeenisesta yhtälöstä (9.34).

Lause 9.37. *Olkoot y_1 ja y_2 homogeenisen yhtälön (9.34) ratkaisuja välillä I. Silloin myös lineaarikombinaatio*

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

on homogeenisen yhtälön ratkaisu välillä I.

Todistus. Nyt

$$y' = c_1 y_1' + c_2 y_2' \quad \text{ja} \quad y'' = c_1 y_1'' + c_2 y_2''.$$

Siten

$$\begin{aligned} y'' + a(x)y' + b(x)y &= (c_1 y_1'' + c_2 y_2'') + a(x)(c_1 y_1' + c_2 y_2') + b(x)(c_1 y_1 + c_2 y_2) \\ &= c_1(y_1'' + a(x)y_1' + b(x)y_1) + c_2(y_2'' + a(x)y_2' + b(x)y_2) \\ &= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

□

Määritelmä 9.38. Funktiot y_1 ja $y_2\colon I \to \mathbb{R}$ ovat *lineaarisesti riippumattomia (linearly independent, LI)* välillä I, jos

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = 0 \quad \text{kaikilla } x \in I \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = 0. \tag{9.39}$$

Muutoin y_1 ja y_2 ovat *lineaarisesti riippuvia, (linearly dependent, LD).*

y_1 ja y_2 ovat toisin sanoen lineaarisesti riippuvia täsmälleen silloin, kun on olemassa kertoimet c_1 ja c_2, $c_1 \neq 0$ tai $c_2 \neq 0$ siten, että $c_1y_1(x)+c_2y_2(x) = 0$ kaikilla $x \in I$. Jos $c_1 \neq 0$, niin $y_1(x) = (-c_2/c_1)y_2(x)$, ja jos $c_2 \neq 0$, niin $y_2(x) = (-c_1/c_2)y_1(x)$. Kaksi funktiota ovat siis lineaarisesti riippumattomia täsmälleen silloin, kun kumpikaan funktioista ei ole toisen monikerta.

Esimerkki 9.40. a) Olkoon $a \neq b$. Silloin $y_1(x) = x^a$ ja $y_2(x) = x^b$ ovat lineaarisesti riippumattomia, sillä

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b} \neq \text{vakio}.$$

b) Olkoon $a \neq b$. Silloin $y_1(x) = e^{ax}$ ja $y_2(x) = e^{bx}$ ovat lineaarisesti riippumattomia, sillä

$$\frac{e^{ax}}{e^{bx}} = e^{(a-b)x} \neq \text{vakio}.$$

c) $y_1(x) = \sin x$ ja $y_2(x) = \cos x$ ovat lineaarisesti riippumattomia, sillä

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x \neq \text{vakio}.$$

d) $y_1(x) = \sin(2x)$ ja $y_2(x) = \sin x \cos x$ ovat lineaarisesti riippuvia, sillä $y_1(x) = \sin(2x) = 2\sin x\cos x = 2y_2(x)$.

Määritelmä 9.41. Olkoot y_1 ja $y_2\colon I \to \mathbb{R}$ derivoituvia avoimella välillä I. Funktioiden y_1 ja y_2 *Wronskin determinantti (Wronskian)* on funktio

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}.$$

Esimerkki 9.42. Funktioiden $y_1(x) = e^x$ ja $y_2(x) = xe^x$ Wronskin determinantti on

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix} = e^{2x}.$$

Lause 9.43. *Olkoot y_1 ja y_2 homogeenisen yhtälön (9.34) ratkaisuja välillä I ja olkoon $W(x)$ niiden Wronskin determinantti. Silloin pätee:*

(1) *Jos y_1 ja y_2 ovat lineaarisesti riippuvia, niin $W(x) = 0$ kaikilla $x \in I$.*

(2) *Jos y_1 ja y_2 ovat lineaarisesti riippumattomia, niin $W(x) \neq 0$ kaikilla $x \in I$.*

Todistus. Derivoidaan yhtälö (9.39) puolittain ja muodostetaan yhtälöistä yhtälöpari pisteessä $x_0 \in I$:

$$\begin{cases} c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) = 0, \\ c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) = 0. \end{cases} \tag{9.44}$$

(1) Kiinnitetään nyt $x_0 \in I$. Tällöin (9.44) on muuttujien c_1 ja c_2 suhteen lineaarinen yhtälöpari, jonka kerroinmatriisin determinantti on funktioiden y_1 ja y_2 Wronskin determinantti $W(x_0)$. Koska y_1 ja y_2 ovat lineaarisesti riippuvia, niin on olemassa kertoimet c_1 ja c_2, $c_1 \neq 0$ tai $c_2 \neq 0$ siten, että $c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) = 0$. Silloin myös toinen yhtälö toteutuu, joten yhtälöparilla (9.44) on muitakin ratkaisuja kuin triviaaliratkaisu $c_1 = c_2 = 0$. Jos olisi $W(x_0) \neq 0$, niin muita ratkaisuja kuin triviaaliratkaisu ei olisi (Insinöörimatematiikka 2), joten on oltava $W(x_0) = 0$.
(2) Tehdään vastaoletus: $W(x_0) = 0$ jollakin $x_0 \in I$. Silloin yhtälöparilla (9.44) on muitakin ratkaisuja kuin triviaaliratkaisu $c_1 = c_2 = 0$. Valitaan tällainen ratkaisu, missä $c_1 \neq 0$ tai $c_2 \neq 0$, ja muodostetaan homogeenisen yhtälön ratkaisu

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x).$$

Tällöin (9.44):n mukaan $y(x)$ toteuttaa alkuehdot $y(x_0) = 0$ ja $y'(x_0) = 0$. Koska nollafunktio 0 toteuttaa homogeenisen yhtälön ja em. alkuehdot, niin lauseen 9.35 takaaman yksikäsitteisyyden nojalla $y(x) = 0$ kaikilla $x \in I$. Niinpä y_1 ja y_2 ovat lineaarisesti riippuvia. Tämä on vastoin oletusta, joten on oltava $W(x) \neq 0$ kaikilla $x \in I$. □

Lause 9.45. *Olkoot y_1 ja y_2 homogeenisen yhtälön (9.34) lineaarisesti riippumattomia ratkaisuja välillä I. Silloin lineaarikombinaatio*

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}) \tag{9.46}$$

on homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu välillä I.

Todistus. Olkoon z mikä tahansa homogeenisen yhtälön ratkaisu ja $y = c_1y_1 + c_2y_2$. On osoitettava, että $z = y$ joillakin c_1 ja c_2. Kiinnitetään $x_0 \in I$.

Derivoidaan y, lasketaan y ja y' pisteessä x_0 ja muodostetaan yhtälöpari

$$\begin{cases} c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) = z(x_0), \\ c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) = z'(x_0). \end{cases}$$

Tämä on muuttujien c_1 ja c_2 suhteen lineaarinen yhtälöpari, jonka kerroinmatriisin determinantti on funktioiden y_1 ja y_2 Wronskin determinantti $W(x_0)$. Lauseen 9.43 mukaan $W(x_0) \neq 0$, joten yhtälöparilla on ratkaisu $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Nyt funktiolle y pätee $y(x_0) = z(x_0)$ ja $y'(x_0) = z'(x_0)$. Olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseen 9.35 mukaan silloin $z = y$. $\square$

Esimerkki 9.47. Tarkastellaan yhtälöä

$$y'' - 4y = 0.$$

Funktiot $y_1(x) = e^{2x}$ ja $y_2(x) = e^{-2x}$ ovat ratkaisuja, sillä $y_1''(x) = 4e^{2x} = 4y_1(x)$ ja $y_2''(x) = 4e^{-2x} = 4y_2(x)$. Lisäksi y_1 ja y_2 ovat lineaarisesti riippumattomia, sillä $y_1(x)/y_2(x) = e^{4x}$ ei ole vakio. Niinpä yhtälön yleinen ratkaisu on

$$y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}.$$

Haetaan vielä alkuehdot $y(0) = 1$ ja $y'(0) = 1$ toteuttava ratkaisu. Nyt $y'(x) = 2c_1e^{2x} - 2c_2e^{-2x}$, joten vaaditaan

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 = 1, \\ y'(0) = 2c_1 - 2c_2 = 1. \end{cases}$$

Tästä yhtälöparista ratkaistaan $c_1 = 3/4$ ja $c_2 = 1/4$, joten alkuehdot toteuttava ratkaisu on

$$y(x) = \frac{3}{4}e^{2x} + \frac{1}{4}e^{-2x}.$$

Esimerkki 9.48. $x^2y'' + xy' - y = 0.$

Helposti keksitään ratkaisu $y_1 = x$. Etsitään toista ratkaisua yritteellä $y = u(x)x$. Nyt $y' = u'x + u$ ja $y'' = u''x + 2u'$. Sijoittamalla y, y' ja y'' yhtälöön saadaan se muotoon

$$x^3u'' + 3x^2u' = 0. \tag{9.49}$$

Merkitsemällä $z = u'$ saadaan $x^3z' + 3x^2z = 0$. Lauseen 9.22 mukaan tämän 1. kertaluvun yhtälön erääksi ratkaisuksi saadaan $z = 1/x^3$, joten

$$u = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2} \quad (+C).$$

Näin ollen tarkasteltavan yhtälön toiseksi ratkaisuksi voidaan ottaa $y_2 = 1/x$. Tarkasta vielä sijoittamalla! y_1 ja y_2 ovat selvästi lineaarisesti riippumattomia, joten yhtälön yleinen ratkaisu on

$$y = c_1 x + \frac{c_2}{x} \qquad (I = (-\infty, 0) \text{ tai } (0, \infty)).$$

Huomautus 9.50. Se, että yhtälössä (9.49) ei esiinny u:ta, ei ole sattumaa. Tässä menetelmässä päädytään aina sijoituksella $z = u'$ ensimmäisen kertaluvun lineaariyhtälöön.

Yleistä menetelmää toisen kertaluvun lineaarisen homogeeniyhtälön ratkaisemiseksi ei ole. Yhteenvetona:

- Jos pystytään arvaamalla tai kokeilemalla hakemaan kaksi lineaarisesti riippumatonta ratkaisua, niin lause 9.45 antaa yleisen ratkaisun (vrt. esimerkki 9.47).
- Jos yksi ratkaisu y_1 tiedetään tai arvataan, niin toista lineaarisesti riippumatonta ratkaisua voidaan hakea yritteellä $y = uy_1$ (vrt. esimerkki 9.48).
- Jos yhtälö on vakiokertoiminen, niin lause 9.54 antaa ratkaisumenetelmän.

Määritelmä 9.51. *Vakiokertoimiseen* toisen kertaluvun homogeeniseen lineaariyhtälöön

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (a, b \in \mathbb{R}) \tag{9.52}$$

liittyvä *karakteristinen yhtälö* on

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0. \tag{9.53}$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla karakteristiselle yhtälölle (9.53) lasketaan juuret

$$\lambda = \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\Big(- a \pm \sqrt{a^2 - 4b}\Big).$$

Lause 9.54. *Jos karakteristisella yhtälöllä* (9.53) *on*

(1) *kaksi erisuurta reaalista juurta* λ_1 *ja* λ_2*, niin* (9.52)*:n yleinen ratkaisu on*

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x},$$

(2) *reaalinen kaksoisjuuri* λ*, niin* (9.52)*:n yleinen ratkaisu on*

$$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x},$$

(3) *imaginaariset juuret* $\lambda = \alpha \pm \beta i$*, niin* (9.52)*:n yleinen ratkaisu on*

$$y = e^{\alpha x}\Big(c_1 \sin(\beta x) + c_2 \cos(\beta x)\Big).$$

Todistus. Suoraviivainen todistus olisi todeta sijoittamalla, että kussakin tapauksessa kyseiset kaksi funktiota ovat lineaarisesti riippumattomia ratkaisuja, jolloin niiden lineaarikombinaationa saadaan yleinen raktaisu. Rakennetaan kuitenkin hieman konstruktiivisempi todistus.
(1) Aloitetaan yritteellä $y = e^{\lambda x}$. Koska $y' = \lambda e^{\lambda x}$ ja $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$, niin sijoittamalla yhtälöön (9.52) saadaan

$$\Big(\lambda^2 + a\lambda + b\Big)\, e^{\lambda x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

$y = e^{\lambda x}$ on siis ratkaisu, jos λ on karakteristisen yhtälön reaalinen juuri. Jos karakteristisella yhtälöllä on kaksi erisuurta reaalista juurta λ_1 ja λ_2, niin $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ ja $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ ovat lineaarisesti riippumattomia ratkaisuja, mistä väite seuraa.
(2) Jos karakteristisella yhtälöllä on kaksoisjuuri $\lambda = -a/2$ (ts. $a^2 - 4b = 0$), niin kohdan (1) menetelmällä saadaan vain yksi ratkaisu $y_1 = e^{\lambda x}$. Haetaan toista ratkaisua yritteellä $y_2 = u(x)e^{\lambda x}$. Nyt

$$\begin{aligned} y_2' &= (u' + \lambda u)e^{\lambda x} \quad \text{ja} \\ y_2'' &= (u'' + 2\lambda u' + \lambda^2 u)e^{\lambda x}. \end{aligned}$$

Sijoitetaan nämä yhtälöön (9.52):

$$\begin{aligned} & \Big(u'' + (2\lambda + a)u' + \Big(\lambda^2 + a\lambda + b\Big)\, u\Big)\, e^{\lambda x} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & u'' + \underbrace{(2\lambda + a)}_{=0} u' + \underbrace{\Big(-a^2/4 + b\Big)}_{=0} u = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & u'' = 0 \end{aligned}$$

Tällä on ratkaisuna esimerkiksi $u = x$, joten yhtälön (9.52) toinen ratkaisu on $y_2 = xe^{\lambda x}$. y_1 ja y_2 ovat lineaarisesti riippumattomia, joten väite seuraa.
(3) Jos karakteristisella yhtälöllä on imaginaarinen juuri $\lambda = \alpha + \beta i$, niin kohdan (1) mukaan yhtälöllä (9.52) on imaginaarinen ratkaisu

$$z = e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x}\cos(\beta x) + ie^{\alpha x}\sin(\beta x),$$

kun kompleksisen eksponenttifunktion derivaatta x:n suhteen määritellään

$$z' = (\alpha + \beta i)e^{(\alpha+\beta i)x}.$$

Lemman 9.55 mukaan z:n reaali- ja imaginaariosat $y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ ja $y_2 = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ ovat myös yhtälön (9.52) (lineaarisesti riippumattomia) ratkaisuja. Väite seuraa. □

Lemma 9.55. *Jos $z(x) = u(x)+iv(x)$ on yhtälön (9.52) ratkaisu, niin myös reaali- ja imaginaariosat $u(x)$ ja $v(x)$ ovat ratkaisuja.*

Todistus. Nyt $z' = u' + iv'$ ja $z'' = u'' + iv''$. Sijoitetaan ratkaisu z yhtälöön:

$$\begin{aligned} & (u'' + iv'') + a(u' + iv') + b(u + iv) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (u'' + au' + bu) + i(v'' + av' + bv) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (u'' + au' + bu) = 0 \quad \text{ja} \quad (v'' + av' + bv) = 0 \end{aligned}$$

□

Esimerkki 9.56. a) $y'' - y' - 2y = 0$.

Karakteristisen yhtälön $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ juuret ovat $\lambda_1 = -1$ ja $\lambda_2 = 2$, joten yleinen ratkaisu on $y = c_1e^{-x} + c_2e^{2x}$.

b) $y'' + 4y' + 5y = 0$.

Karakteristisen yhtälön $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$ juuret ovat $\lambda = -2 \pm i$, joten yleinen ratkaisu on $y = e^{-2x}\big(c_1 \sin x + c_2 \cos x\big)$

c) $y'' - 2y' + y = 0$.

Karakteristisen yhtälön $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ ainoa juuri on $\lambda = 1$, joten yleinen ratkaisu on $y = c_1e^x + c_2xe^x$.

Huomautus 9.57. Sovelluksissa vakiokertoiminen yhtälö on yleensä muodossa, jossa y'':n kerroin ei ole 1:

$$\boxed{ay'' + by' + cy = 0 \qquad (a \neq 0).} \tag{9.58}$$

Muokataan perusmuotoon (9.52):

$$y'' + \frac{b}{a}y' + \frac{c}{a}y = 0.$$

Yhtälön (9.53) mukainen karakteristinen yhtälö on

$$\lambda^2 + \frac{b}{a}\lambda + \frac{c}{a} = 0,$$

josta

$$\boxed{a\lambda^2 + b\lambda + c = 0.} \tag{9.59}$$

9.7.2 Epähomogeeninen yhtälö

Lause 9.60. *Jos $y_h = c_1y_1 + c_2y_2$ on homogeenisen yhtälön (9.34) yleinen ratkaisu ja y_p on epähomogeenisen yhtälön (9.33) yksittäisratkaisu, niin epähomogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu on*

$$y = y_h + y_p = c_1y_1 + c_2y_2 + y_p. \tag{9.61}$$

Todistus. Jokainen muotoa (9.61) oleva y on ratkaisu, sillä (vrt. lauseen 9.37 todistus)

$$\begin{aligned} y'' + a(x)y' + b(x)y &= (y_h'' + a(x)y_h' + b(x)y_h) + (y_p'' + a(x)y_p' + b(x)y_p) \\ &= 0 + f(x) = f(x). \end{aligned}$$

Olkoon sitten y on mikä tahansa epähomogeenisen yhtälön ratkaisu. On osoitettaava, että y voidaan esittää muodossa (9.61). Nyt

$$\begin{aligned} &(y - y_p)'' + a(x)(y - y_p)' + b(x)(y - y_p) \\ &= (y'' + a(x)y' + b(x)y) - (y_p'' + a(x)y_p' + b(x)y_p) = f(x) - f(x) = 0, \end{aligned}$$

joten $y - y_p$ on homogeenisen yhtälön ratkaisu. Niinpä se voidaan esittää muodossa

$$y - y_p = c_1y_1 + c_2y_2,$$

josta väite seuraa. □

Epähomogeenisen yhtälön

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$$

yleisen ratkaisun etsimisen vaiheet ovat siis:

(1) Hae homogeenisen yhtälön

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

yleinen ratkaisu $y_h = c_1y_1 + c_2y_2$.

(2) Hae epähomogeeniselle yhtälölle yksittäisratkaisu y_p.

(3) Kirjoita yleinen ratkaisu

$$y = y_h + y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p.$$

Kohta (1) käsiteltiin edellä. Rajoitutaan seuraavassa tarkastelemaan kohtia (2) ja (3) vakiokertoimisen yhtälön tapauksessa.

Esimerkki 9.62. $y'' - y' - 2y = 2x^2$.

Vastaavan homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu on $y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$ (esimerkki 9.56 **a**). Yhtälön oikella puolella on polynomi $f(x) = 2x^2$. Kokeillaan, olisiko epähomogeenisella yhtälöllä muotoa $y_p = ax^2 + bx + c$ oleva ratkaisu. Nyt

$$y_p' = 2ax + b \quad \text{ja} \quad y_p'' = 2a,$$

joten sijoittamalla y_p yhtälöön saadaan

$$\begin{aligned}
& 2a - (2ax + b) - 2(ax^2 + bx + c) = 2x^2 \\
\Leftrightarrow \quad & -2ax^2 + (-2a - 2b)x + (2a - b - 2c) = 2x^2 \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} -2a & = 2 \\ -2a - 2b & = 0 \\ 2a - b - 2c & = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a & = -1 \\ b & = 1 \\ c & = -3/2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Yleinen ratkaisu on siten

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - x^2 + x - 3/2.$$

Esimerkin 9.62 periaatetta voidaan soveltaa yleisemminkin. Esimerkiksi jos $f(x) = \cos(\omega x)$, niin yritteeksi on perusteltua ottaa $y_p = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$, koska tällöin y_p, y_p' ja y_p'' sisältävät vain $\cos(\omega x)$:n ja $\sin(\omega x)$:n monikertoja, jolloin sinin ja kosinin kertoimia vertaamalla on mahdollista määrittää sellaiset kertoimet A ja B, että yhtälö toteutuu. Menetelmää kutsutaan *määräämättömien kertoimien menetelmäksi.*

Seuraavaan taulukkoon on koottu muutamassa yksinkertaisessa tapauksessa vakiokertoimiselle 2. kertaluvun lineaariyhtälölle

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

soveltuva yrite.

$f(x)$	y_p
polynomi (aste n)	Polynomi. Jos $b \neq 0$, niin y_p:n aste on n;
	jos $b = 0$ ja $a \neq 0$, niin y_p:n aste on $n+1$;
	jos $a = b = 0$, niin y_p:n aste on $n+2$.
$ce^{\alpha x}$	$Ae^{\alpha x}$, jos α ei ole karakteristisen yhtälön juuri
	$Axe^{\alpha x}$, jos α on karakteristisen yhtälön yksinkertainen juuri
	$Ax^2e^{\alpha x}$, jos α on karakteristisen yhtälön kaksinkertainen juuri
$c\cos(\omega x)$	$A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$, jos $i\omega$ ei ole karakteristisen yhtälön juuri
$c\sin(\omega x)$	$A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$, jos $i\omega$ ei ole karakteristisen yhtälön juuri

Polynomiyritteen aste (n, $n+1$ tai $n+2$) selvitetään käytännössä kokeilemalla.

Esimerkki 9.63. $y'' + y' = x^2 + x + 2$.

Vastaavan homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu on $y_h = c_1 + c_2e^{-x}$.

$f(x)$ on toisen asteen polynomi. Otetaan siten epähomogeenisen yhtälön ratkaisuyritteeksi polynomi. Nyt toisen asteen polynomi $y_p(x) = ax^2 + bx + c$ ei kelpaa, koska tällä yritteellä yhtälön vasemmalle puollelle tulisi vain ensimmäisen asteen polynomi. Kokeile! Yritetään polynomia $y_p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Sijoitettaessa tämä yhtälön vasemmalle puolelle y_p':sta jää kolmannen asteen termi $4ax^3$, eli a:n täytyy olla nolla. Neljännen asteen termiä on siis turha ottaa mukaan. Vakiotermin e derivaatta on nolla, joten vakiotermi voidaan valita vaikkapa nollaksi. Eli lopullinen yrite on $y_p(x) = bx^3 + cx^2 + dx$. Nyt

$$y_p' = 3bx^2 + 2cx + d \quad \text{ja} \quad y_p'' = 6bx + 2c,$$

joten sijoittamalla y_p yhtälöön saadaan

$$\begin{aligned} &3bx^2 + (2c+6b)x + (d+2c) = x^2 + x + 2 \\ \Leftrightarrow \quad &\begin{cases} 3b &= 1 \\ 2c+6b &= 1 \\ d+2c &= 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = 1/3 \\ c = -1/2 \\ d = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Yleinen ratkaisu on siten

$$y = c_1 + c_2e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x.$$

(Huomataan, että jos yritteen vakiotermi e pidettäisiin mukana, niin yleisen ratkaisun vakiot voitaisiin yhdistää vakioksi $c_3 = c_1 + e$.)

Esimerkki 9.64. $y'' - y' - 2y = 2e^{-2x}$.

Vastaavan homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu on $y_h = c_1e^{-x} + c_2e^{2x}$ (esimerkki 9.56 **a**). Otetaan epähomogeenisen yhtälön ratkaisuyritteeksi $y_p = ae^{-2x}$. Nyt

$$y_p' = -2ae^{-2x} \quad \text{ja} \quad y_p'' = 4ae^{-2x},$$

joten sijoittamalla y_p yhtälöön saadaan

$$4ae^{-2x} + 2ae^{-2x} - 2ae^{-2x} = 2e^{-2x} \quad \Leftrightarrow \quad 4ae^{-2x} = 2e^{-2x} \quad \Leftrightarrow \quad 4a = 2$$

$a = 1/2$, joten yleinen ratkaisu on $y = c_1e^{-x} + c_2e^{2x} + \dfrac{1}{2}e^{-2x}$.

Esimerkki 9.65. $y'' - y' - 2y = 3e^{-x}$.

Vastaavan homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu on $y_h = c_1e^{-x} + c_2e^{2x}$ (esimerkki 9.56 **a**). Nyt epähomogeenisen yhtälön ratkaisuyritteeksi ei voida ottaa funktiota $y_p = ae^{-x}$, sillä se on homogeeniyhtälön ratkaisu (-1 on karakteristisen yhtälön juuri) eikä siten voi ratkaista epähomogeenista yhtälöä. Otetaankin yritteeksi $y_p = axe^{-x}$, jolloin

$$y_p' = a(1-x)e^{-x} \quad \text{ja} \quad y_p'' = a(x-2)e^{-x}.$$

Sijoittamalla y_p yhtälöön saadaan

$$a(x-2)e^{-x} - a(1-x)e^{-x} - 2axe^{-x} = 3e^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad -3ae^{-x} = 3e^{-x},$$

josta $a = -1$. Yleinen ratkaisu on

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^{2x} - xe^{-x}.$$

Esimerkki 9.66. Ratkaise alkuarvotehtävä $y'' + 7y' + 6y = 100\sin(2x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

Ratkaisu. Vastaavan homogeeniyhtälön $y'' + 7y' + 6y = 0$ karakteristinen yhtälö on $\lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda = -1$ tai $\lambda = -6$, joten homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu on $y_h = c_1e^{-x} + c_2e^{-6x}$. Haetaan yhtälön yksittäisratkaisua yritteellä $y_p = a\cos(2x) + b\sin(2x)$, jolle

$$y_p' = -2a\sin(2x) + 2b\cos(2x) \quad \text{ja} \quad y_p'' = -4a\cos(2x) - 4b\sin(2x).$$

Sijoittamalla y_p yhtälöön saadaan

$$\begin{aligned}
& -4a\cos(2x) - 4b\sin(2x) + 7(-2a\sin(2x) + 2b\cos(2x)) \\
& \qquad + 6(a\cos(2x) + b\sin(2x)) = 100\sin(2x) \\
\Leftrightarrow \quad & (2a + 14b)\cos(2x) + (2b - 14a)\sin(2x) = 100\sin(2x) \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} 2a + 14b = 0 \\ 2b - 14a = 100 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = -7 \\ b = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Yleinen ratkaisu on siis

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-6x} - 7\cos(2x) + \sin(2x).$$

Haetaan alkuehdot $y(0) = 1$ ja $y'(0) = -1$ toteuttava ratkaisu.

$$y' = -c_1 e^{-x} - 6c_2 e^{-6x} + 14\sin(2x) + 2\cos(2x),$$

joten vaaditaan

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 - 7 = 1, \\ y'(0) = -c_1 - 6c_2 + 2 = -1. \end{cases}$$

Tästä yhtälöparista ratkaistaan $c_1 = 9$ ja $c_2 = -1$, joten alkuehdot toteuttava ratkaisu on

$$y = 9e^{-x} - e^{-6x} - 7\cos(2x) + \sin(2x).$$

Esimerkki 9.67. $y'' + y = \sin x$.

Vastaavan homogeeniyhtälön $y'' + y = 0$ karakteristinen yhtälö on $\lambda^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \pm i$, joten homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu on $y_h = a\sin x + b\cos x$. Nyt epähomogeenisen yhtälön ratkaisuyritteeksi ei voida ottaa funktiota $y_p = A\sin x + B\cos x$, sillä se on homogeeniyhtälön ratkaisu eikä siten voi ratkaista epähomogeenista yhtälöä. Menetellään seuraavasti: haetaan ratkaisua muodossa

$$y_p = a(x)\sin x + b(x)\cos x,$$

ts. tutkitaan, löytyisikö ratkaisu homogeeniyhtälön ratkaisusta korvaamalla vakiot a ja b sopivilla funktioilla $a(x)$ ja $b(x)$. Nyt

$$\begin{aligned} y_p' &= a'(x)\sin x + a(x)\cos x + b'(x)\cos x - b(x)\sin x \quad \text{ja} \\ y_p'' &= a''(x)\sin x + a'(x)\cos x + a'(x)\cos x - a(x)\sin x + b''(x)\cos x \\ &\quad - b'(x)\sin x - b'(x)\sin x - b(x)\cos x \end{aligned}$$

Sijoittamalla y_p yhtälöön saadaan

$$\begin{aligned} & (a''(x) - 2b'(x))\sin x + (2a'(x) + b''(x))\cos x = \sin x \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} a''(x) - 2b'(x) = 1 \\ 2a'(x) + b''(x) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Kokeilemalla erääksi tämän yhtälöparin ratkaisuksi nähdään $a(x) = 0$ ja $b(x) = -x/2$. Siten yksittäisratkaisuksi löydettiin

$$y_p = -\frac{x}{2}\cos x$$

ja yleiseksi ratkaisuksi

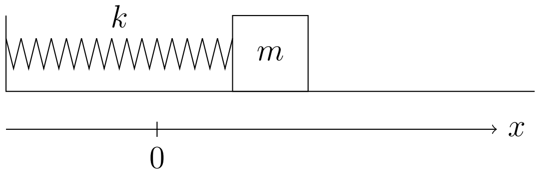
$$y = a\sin x + b\cos x - \frac{x}{2}\cos x.$$

Esimerkin 9.67 menetelmää yksittäisratkaisun hakemiseksi kutsutaan *vakioiden varioinniksi.*

9.8 Sovellus: Mekaaninen värähtely [5, 8.7]

9.8.1 Vaimentamaton vapaa värähtely

Tarkastellaan kuvan mukaista jousisysteemiä. Jousivakio on $k > 0$ ja x-akselin nollapiste on kiinnitetty siten, että tasapainotilassa $x = 0$. Jos kappale (massa m) liikkuu vapaasti ilman vastustavia voimia, niin x-suunnassa kappaleeseen vaikuttaa ainoastaan jousivoima $F = -kx$. Kuvassa F osoittaa vasemmalle, kun $x > 0$ ja oikealle, kun $x < 0$.



Merkitään kappaleen paikkaa $x(t)$:llä ajan t funktiona. Newtonin liikeyhtälön mukaan $F = ma(t) = mx''(t)$, missä $a(t)$ on kiihtyvyys. Siten kappaleen paikkaa kuvaa differentiaaliyhtälö $mx''(t) = -kx(t)$, ts.

$$\boxed{mx'' + kx = 0 \quad (m, k > 0).} \tag{9.68}$$

Tämä on vakiokertoiminen 2. kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö, jonka karakteristinen yhtälö on

$$m\lambda^2 + k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 = -\frac{k}{m} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Jos merkitään $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, niin ratkaisuksi saadaan

$$x(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t). \tag{9.69}$$

Ratkaistaan yhtälö alkuehdoilla $x(0) = x_0$ (alkusijainti) ja $x'(0) = v_0$ (alkuvauhti):

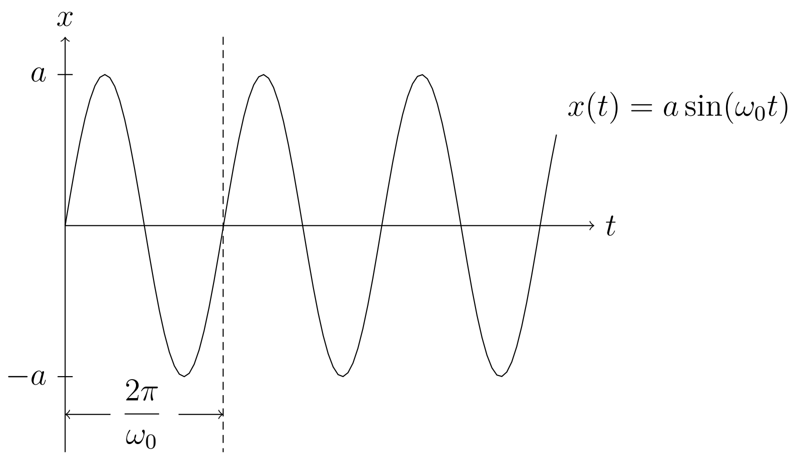
$$x'(t) = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t) + b\omega_0 \cos(\omega_0 t),$$

joten saadaan $x(0) = a \cdot 1 + b \cdot 0 = x_0$ ja $x'(0) = -a\omega_0 \cdot 0 + b\omega_0 \cdot 1 = v_0$, eli

$$a = x_0 \quad \text{ja} \quad b = \frac{v_0}{\omega_0}. \tag{9.70}$$

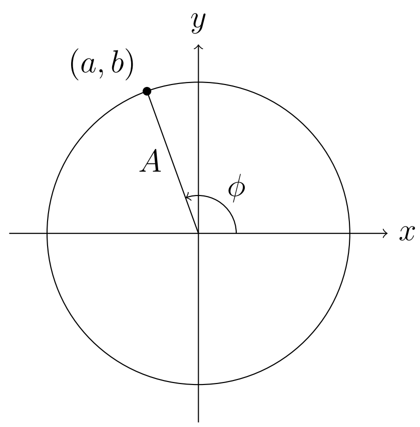
Jos esimerkiksi valitaan ajan t nollakohta siten, että $x(0) = 0$, ja x-akselin positiivinen suunta siten, että hetkellä $t = 0$ liikutaan positiiviseen suuntaan vauhdilla $v_0 > 0$, niin $b > 0$ ja

$$x(t) = b\sin(\omega_0 t).$$



Muilla alkuehdoilla voi olla $a \neq 0$ ja $b \neq 0$, jolloin paikan funktiossa (9.69) on sekä kosini- että sinikomponentti. Tällöinkin värähtely on kuitenkin sinimuotoista. Tämä nähdään tulkitsemalla (a, b) A-säteisen origokeskisen ympyrän kehäpisteeksi. Olkoon kehäpistettä vastaava kulma $\phi \in (-\pi, \pi]$. Silloin

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad a = A\cos\phi \quad \text{ja} \quad b = A\sin\phi. \tag{9.71}$$



Summakaavaa

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

käyttämällä saadaan

$$\begin{aligned} a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t) &= A\cos\phi\cos(\omega_0 t) + A\sin\phi\sin(\omega_0 t) \\ &= A\cos(\omega_0 t - \phi). \end{aligned} \tag{9.72}$$

Tätä kaavaa kutsutaan *harmoniseksi identiteetiksi*. Koska $\tan\phi = \sin\phi/\cos\phi = b/a$, niin kulmilla $-\pi/2 < \phi < \pi/2$ (ts. $a > 0$) on $\phi = \arctan(b/a)$. Muissa kahdessa neljänneksessä täytyy huomioida, että arkustangentin arvojoukko on $(-\pi/2, \pi/2)$:

$$\phi = \begin{cases} \arctan(b/a), & \text{jos } a > 0, \\ \arctan(b/a) + \pi, & \text{jos } a < 0 \text{ ja } b > 0, \\ \arctan(b/a) - \pi, & \text{jos } a < 0, \text{ ja } b < 0. \end{cases} \tag{9.73}$$

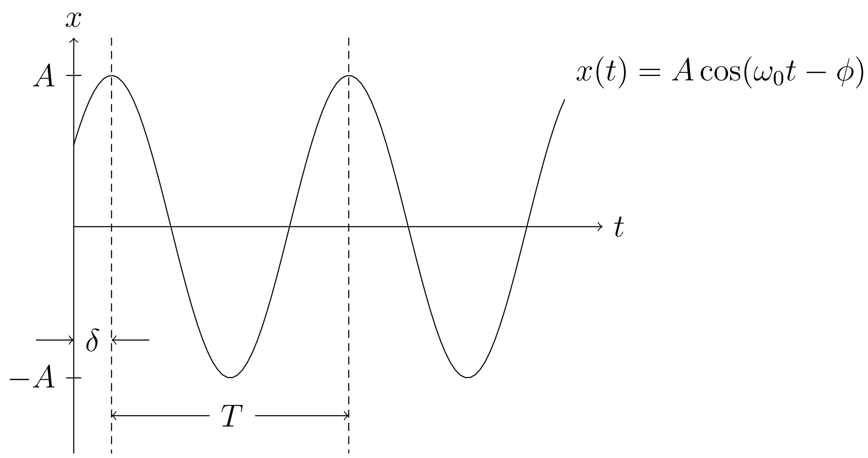
Ratkaisu (9.69) voidaan siis kirjoittaa muodossa

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega_0 t - \phi).} \tag{9.74}$$

Terminologiaa:

amplitudi	A
kulmanopeus	$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$
vaihe(kulma)	ϕ
jakso	$T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$
taajuus	$f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$

Seuraavassa kuvassa $\phi > 0$ ja merkitään $\delta = \dfrac{\phi}{\omega_0}$ (*aikaviive*).



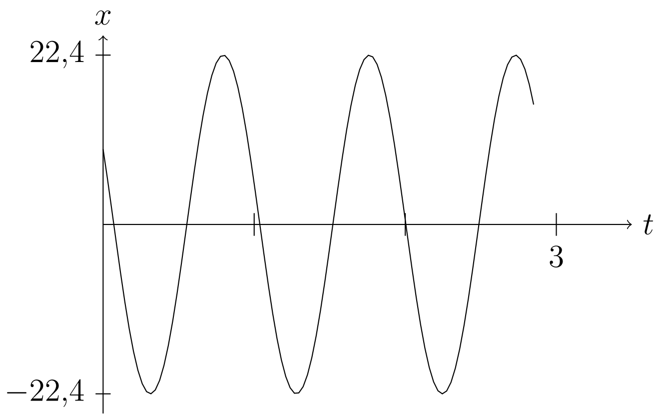
Esimerkki 9.75. Kappaleen massa on $m = 4$ kg ja jousivakio $k = 169$ kg/s^2. Jousta venytetään 10 cm ja sysätään liikkeelle kohti tasapainotilaa vauhdilla

130 cm/s hetkellä $t = 0$ s. Määritä kappaleen paikka $x(t)$ ajanhetkellä t.

Ratkaisu. Nyt $x_0 = 10$ cm, $v_0 = -130$ m/s, $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 6{,}5$ 1/s, $a = x_0 = 10$ cm, $b = v_0/\omega_0 = -20$ cm ja $A = \sqrt{a^2 + b^2} \approx 22{,}4$ cm. Kulma ϕ on neljännessä koordinaattineljänneksessä, joten $\phi = \arctan(b/a) = \arctan(-2) \approx -1{,}11$. Siten

$$x(t) \approx 22{,}4 \cos(6{,}5t + 1{,}11) \quad \text{cm.}$$

Jakso on $T = 2\pi/\omega_0 \approx 0{,}967$ s. Vastaako $x(t)$:n kuvaaja intuitiota siitä, miten kappaleen pitäisi tässä tilanteessa liikkua?



9.8.2 Vaimennettu vapaa värähtely

Jos jousisysteemin kappaleeseen vaikuttaa liikettä vastustavia voimia, ovat ne tyypillisesti suoraan verrannollisia vauhtiin. Kappaleeseen vaikuttava kokonaisvoima on siten $F = -kx(t) - cx'(t)$, missä $c > 0$ on *vaimennuskerroin*. Nyt kappaleen paikkaa kuvaa differentiaaliyhtälö $mx''(t) = -kx(t) - cx'(t)$, ts.

$$\boxed{mx'' + cx' + kx = 0 \quad (m, c, k > 0).} \tag{9.76}$$

Tämä on vakiokertoiminen 2. kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö, jonka karakteristinen yhtälö on

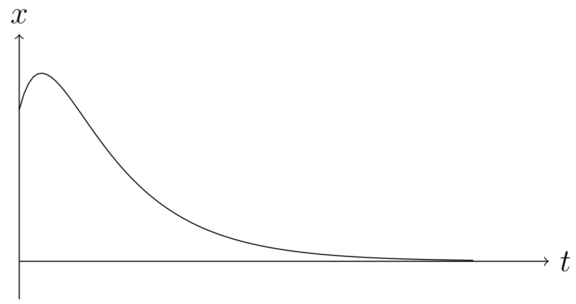
$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}. \tag{9.77}$$

Yhtälön (9.76) ratkaisun tyyppi riippuu diskriminantin $c^2 - 4km$ arvosta.

Ylivaimennettu tapaus $\mathbf{c^2 - 4km > 0}$. Karakteristisella yhtälöllä on kaksi erisuurta reaalista juurta λ_1 ja λ_2. $\sqrt{c^2 - 4km} < \sqrt{c^2} = |c|$, joten yhtälössä (9.77) $-c \pm \sqrt{c^2 - 4km} < 0$. Molemmat ratkaisut λ_1 ja λ_2 ovat siten negatiivisia ja yhtälön (9.76) yleinen ratkaisu on

$$\boxed{x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad (\lambda_1, \lambda_2 < 0).} \tag{9.78}$$

Tällöin $x(t) \to 0$, kun $t \to \infty$, eikä synny värähtelyliikettä. Funktiolla x on korkeintaan yksi nollakohta. Vaimennuskerroin c on suuri ja massa m pieni suhteessa jousivakioon k. Esimerkkinä ylivaimennetusta värähtelystä on kierrejousilla varustettu auton jousitus, jossa iskunvaimentimet ovat kunnossa.



Kriittisesti vaimennettu tapaus $\mathbf{c^2 - 4km = 0}$. Karakteristisella yhtälöllä on kaksinkertainen juuri $\lambda = -c/2m < 0$. Yhtälön (9.76) yleinen ratkaisu on

$$\boxed{x(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} \quad (\lambda < 0).} \tag{9.79}$$

Tällöin $x(t) \to 0$, kun $t \to \infty$, eikä synny värähtelyliikettä. Funktiolla x on korkeintaan yksi nollakohta.

Alivaimennettu tapaus $\mathbf{c^2 - 4km < 0}$. Karakteristisella yhtälöllä on imaginaarijuuret

$$\lambda = -\frac{c}{2m} \pm i\omega_1, \quad \text{missä} \quad \omega_1 = \frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m}.$$

Yhtälön (9.76) yleinen ratkaisu on

$$x(t) = e^{-ct/2m}(c_1 \cos(\omega_1 t) + c_2 \sin(\omega_1 t)).$$

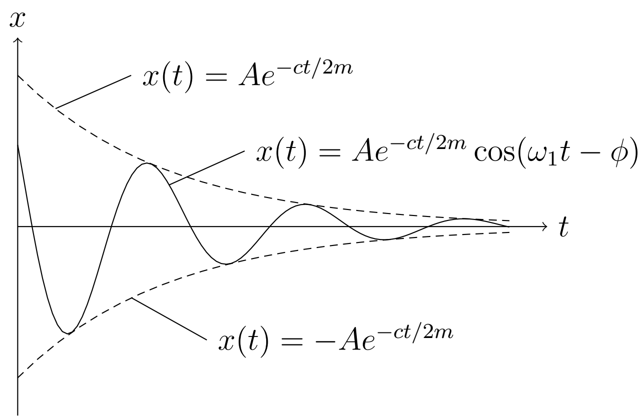
Harmonista identiteettiä (9.72) käyttämällä saadaan

$$\boxed{x(t) = Ae^{-ct/2m} \cos(\omega_1 t - \phi),} \tag{9.80}$$

missä

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad c_1 = A\cos\phi \quad \text{ja} \quad c_2 = A\sin\phi.$$

Tällöin $x(t) \to 0$, kun $t \to \infty$, mutta syntyy värähtelyliike, jonka kulmanopeus on ω_1 ja jossa amplitudi $Ae^{-ct/2m}$ vaimenee. $x(t)$:n kuvaaja heilahtelee *verhokäyrien* $x(t) = Ae^{-ct/2m}$ ja $x(t) = -Ae^{-ct/2m}$ välissä. Kulmanopeus ω_1 on (odotusten mukaisesti) pienempi kuin vaimentamattoman värähtelyn *luonnollinen kulmanopeus* $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Vaimennuskerroin c on pieni ja massa m suuri suhteessa jousivakioon k. Esimerkkinä alivaimennetusta värähtelystä on kierrejousilla varustettu auton jousitus, jossa on kuluneet iskunvaimentimet.



9.8.3 Vaimentamaton pakotettu värähtely

Oletetaan, että luvun 9.8.1 vaimentamattoman jousisysteemin kappaleeseen vaikuttaa jousivoiman $-kx$ lisäksi ulkoinen *pakkovoima* $F_0\cos(\omega t)$. Silloin kappaleen liikeyhtälö tulee muotoon

$$\boxed{mx'' + kx = F_0\cos(\omega t) \quad (m, k > 0).} \tag{9.81}$$

Vastaavan homoneegisen yhtälön ratkaisu on (ks. (9.69))

$$x(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t). \tag{9.82}$$

Haetaan yhtälön (9.81) yksittäisratkaisua $x_p(t)$.

Tapaus $\omega \neq \omega_0$. Haetaan yksittäisratkaisua määräämättömien kertoimien menetelmällä yritteellä

$$x_p = C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t). \tag{9.83}$$

Sijoittamalla yrite yhtälön (9.81) vasemmalle puolelle saadaan

$$\begin{aligned} mx_p'' + kx_p &= C(k - m\omega^2)\cos(\omega t) + D(k - m\omega^2)\sin(\omega t) \\ &= Cm(\omega_0^2 - \omega^2)\cos(\omega t) + Dm(\omega_0^2 - \omega^2)\sin(\omega t), \end{aligned}$$

sillä $\omega_0^2 = k/m$. Vertaamalla yhtälöön (9.81) nähdään, että $Cm(\omega_0^2-\omega^2) = F_0$ ja $D = 0$, joten

$$x_p = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t)$$

on eräs yksittäisratkaisu. Yleinen ratkaisu on siten (vrt. (9.74))

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega_0 t - \phi) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t).} \tag{9.84}$$

Esimerkki 9.85. Oletetaan, että esimerkin 9.75 systeemiin vaikuttaa pakkovoima $F(t) = 100\cos(13t)$ N. Määritä kappaleen paikka $x(t)$ ajanhetkellä t.

Ratkaisu. Nyt

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = a\cos(6{,}5t) + b\sin(6{,}5t) + \underbrace{\frac{100}{4(6{,}5^2 - 13^2)}}_{=:c\approx -0{,}197} \cos(13t),$$

jolle

$$x'(t) = -6{,}5a\sin(6{,}5t) + 6{,}5b\cos(6{,}5t) - 13c\sin(13t).$$

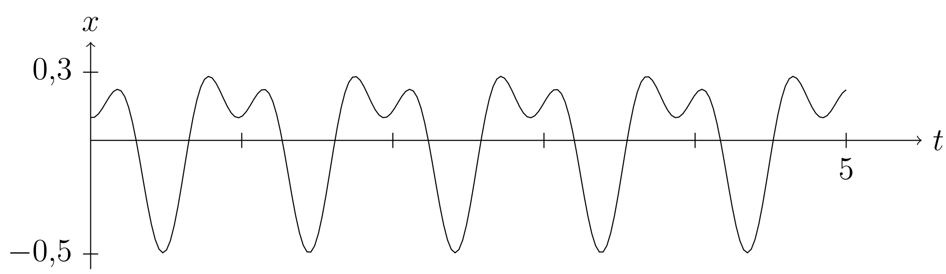
Alkuehdot ($F(t)$:n yksikkö on N, joten otetaan paikan yksiköksi m ja nopeuden yksiköksi m/s):

$$\begin{cases} x(0) = a + c = 0{,}1 \\ x'(0) = 6{,}5b = -0{,}2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 0{,}1 - c \approx 0{,}297 \\ b = -0{,}2/6{,}5 \approx -0{,}0308 \end{cases}$$

Lisäksi $A = \sqrt{a^2 + b^2} \approx 0{,}299$ ja $\phi = \arctan(b/a) \approx -0{,}103$, joten ratkaisu on

$$x(t) \approx 0{,}299\cos(6{,}5t + 0{,}103) - 0{,}197\cos(13t).$$

Ratkaisu on luonnollisella kulmanopeudella $\omega_0 = 6{,}5$ ja pakkovoiman kulmanopeudella $\omega = 13$ tapahtuvien harmonisten värähtelyjen summa. Näiden värähtelyjen jaksot ovat $2\pi/6{,}5$ ja $2\pi/13$, joten tässä esimerkissä $x(t)$ on jaksollinen, jaksona $2\pi/6{,}5 \approx 0{,}967$.



Tapaus $\omega = \omega_0$. Pakkovoiman kulmanopeus on sama kuin luonnollinen kulmanopeus, joten yrite (9.83) olisi homogeenisen yhtälön ratkaisu. Haetaan yksittäisratkaisua nyt yritteellä

$$x_p = t(C\cos(\omega_0 t) + D\sin(\omega_0 t)).$$

Sijoittamalla yrite yhtälön (9.81) vasemmalle puolelle saadaan

$$mx_p'' + kx_p = 2m\omega_0(D\cos(\omega_o t) - C\sin(\omega_0 t)),$$

sillä $\omega_0^2 = k/m$. Vertaamalla yhtälöön (9.81) nähdään, että $C = 0$ ja $D = F_0/(2m\omega_0)$, joten

$$x_p = \frac{F_0}{2m\omega_0} t\sin(\omega_0 t)$$

on eräs yksittäisratkaisu. Yleinen ratkaisu on siten (vrt. (9.74))

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega_0 t - \phi) + \frac{F_0}{2m\omega_0} t\sin(\omega_0 t).} \tag{9.86}$$

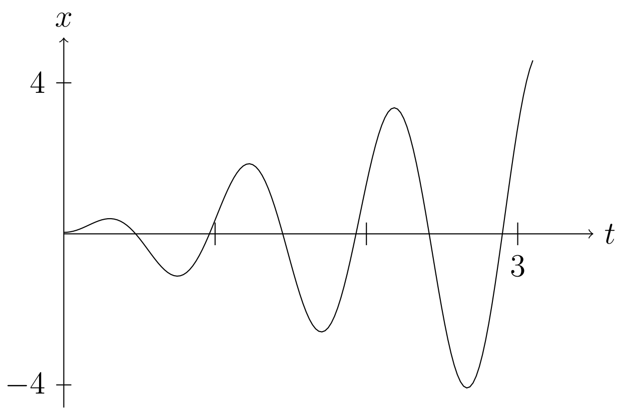
Esimerkki 9.87. Oletetaan, että esimerkin 9.75 systeemiin vaikuttaa pakkovoima $F(t) = 100\cos(6{,}5t)$ N. Määritä kappaleen paikka $x(t)$ hetkellä t.
Ratkaisu. Nyt

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = a\cos(6{,}5t) + b\sin(6{,}5t) + \frac{100}{2\cdot 4\cdot 6{,}5} t\sin(6{,}5t).$$

Vastaavalla tavoin kuin esimerkissä 3.71 saadaan

$$x(t) \approx 0{,}105\cos(6{,}5t + 0{,}298) + 1{,}923t\sin(6,5t).$$

Nähdään, että jälkimmäisen termin itseisarvo ei pysy rajoitettuna, kun $t \to \infty$. Kun pakkovoiman kulmanopeus on sama kuin luonnollinen kulmanopeus, syntyy *resonanssi*, jossa pienikin pakkovoima johtaa lopulta rajoittamattomaan värähtelyyn.



Kuuluisa esimerkki resonanssista on Tacoman silta.[3] Tuuli aiheutti siltaan pakkovoimia, joiden taajuudet olivat lähellä sillan tiettyjen värähtelyjen luonnollisia taajuuksia. Syntyneen voimakkaan värähtelyn seurauksena silta romahti.

9.8.4 Vaimennettu pakotettu värähtely

Oletetaan, että luvun 9.8.2 vaimennetun jousisysteemin kappaleeseen vaikuttaa jousivoiman $-kx$ ja vaimennusvoiman $-cx'$ lisäksi ulkoinen pakkovoima $F_0 \cos(\omega t)$. Silloin kappaleen liikeyhtälö tulee muotoon

$$\boxed{mx'' + cx' + kx = F_0 \cos(\omega t) \quad (m, c, k > 0).} \tag{9.88}$$

Edellä nähtiin, että vastaavan homoneegisen yhtälön ratkaisu $x_h(t) \to 0$, kun $t \to \infty$. Niinpä ajan kuluessa systeemi stabiloituu kohti tilaa $x(t) = x_p(t)$, missä $x_p(t)$ on yhtälön (9.88) yksittäisratkaisu. Nyt $i\omega$ ei ole karakteristisen yhtälön (9.77) juuri, joten yksittäisratkaisu löytyy yritteellä

$$x_p = C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t).$$

Sijoittamalla yrite yhtälön (9.88) vasemmalle puolelle ja vertaamalla sinin ja kosinin kertoimia yhtälön vasemmalla ja oikealla puolella saadaan

$$C = \frac{(k - m\omega^2)F_0}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} \quad \text{ja} \quad D = \frac{c\omega F_0}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}.$$

Harmonista identiteettiä (9.72) käyttämällä voidaan ratkaisu kirjoittaa

$$\boxed{x_p(t) = A \cos(\omega t - \phi),} \tag{9.89}$$

missä

$$A = \sqrt{C^2 + D^2} = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}$$

ja $C = A \cos \phi$ ja $D = A \sin \phi$. Voidaan osoittaa, että amplitudi $A = A(\omega)$ pysyy rajoitettuna joukossa $\omega > 0$, ts. rajoittamatonta resonanssi-ilmiötä ei esiinny.

9.8.5 Sähköinen värähtely

Tarkastellaan LRC-virtapiiriä.

[3] Videoita löytyy internetistä hakusanoilla *Tacoma bridge*.

komponentti	suure	tunnus	mittayksikkö
käämi	induktanssi	L	$\mathrm{H} = \mathrm{Vs/A}$
vastus	vastus	R	$\Omega = \mathrm{V/A}$
kondensaattori	kapasitanssi	C	$\mathrm{F} = \mathrm{C/V} = \mathrm{As/V}$
virtalähde	jännite	$E(t)$	V

Olkoon $Q = Q(t)$ kondensaattorin varaus (C = As) ja $I = I(t)$ sähkövirta (A) ajanhetkellä t (s). Käämissä, vastuksessa ja kondensaattorissa jännitehäviöt ovat

$$L\frac{dI}{dt}, \quad RI \quad \text{ja} \quad \frac{Q}{C},$$

joten

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = E. \tag{9.90}$$

Tiedetään, että $I = \dfrac{dQ}{dt}$. Sijoittamalla tämä yhtälöön (9.90) saadaan

$$LQ'' + RQ' + \frac{1}{C}Q = E. \tag{9.91}$$

Toisaalta derivoimalla yhtälö (9.90) ensin puolittain t:n suhteen saadaan

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E'. \tag{9.92}$$

Yhtälöt (9.91) ja (9.92) ovat sinimuotoisen vaihtojännitteen $E(t)$ tapauksessa samaa muotoa kuin mekaanisen värähtelyn liikeyhtälö (9.88) ja voidaan ratkaista samaan tapaan.

9.9 Korkeamman kertaluvun lineaariyhtälö

Tässä luvussa tarkastellaan n*. kertaluvun (normaalimuotoista) lineaarista differentiaaliyhtälöä (n:th order linear equation)*

$$\boxed{y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x),} \tag{9.93}$$

missä funktiot $p_i(x)$ ja $f(x)$ ovat jatkuvia avoimella välillä I. Jos $f(x)$ ei ole nolla kaikilla $x \in I$, niin yhtälöä (9.93) kutsutaan *epähomogeeniseksi yhtälöksi*. Jos $f(x) = 0$ kaikilla $x \in I$, niin kyseessä on *homogeeninen yhtälö*.

Myös n. kertaluvun yhtälöllä on yksikäsitteinen alkuehdot (joita on nyt n kappaletta) toteuttava ratkaisu.

Lause 9.94 (Olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslause)**.** *Olkoon* $x_0 \in I$ *ja* $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1} \in \mathbb{R}$. *Silloin yhtälöllä* (9.93) *on täsmälleen yksi alkuehdot*

$$y(x_0) = b_0, \quad y'(x_0) = b_1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1}$$

toteuttava ratkaisu $y(x)$ *välillä* I.

Luvun 9.7 tulokset ja niiden todistukset toisen kertaluvun yhtälölle yleistyvät melko suoraviivaisesti n. kertaluvun yhtälölle.

Lause 9.95. *Olkoot* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *homogeenisen yhtälön ratkaisuja välillä* I. *Silloin myös lineaarikombinaatio*

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n \qquad (c_i \in \mathbb{R})$$

on homogeenisen yhtälön ratkaisu välillä I.

Määritelmä 9.96. Funktiot $y_1, y_2, \ldots, y_n \colon I \to \mathbb{R}$ ovat *lineaarisesti riippumattomia* välillä I, jos

$$\begin{aligned} & c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) = 0 \quad \text{kaikilla } x \in I \\ \Rightarrow \quad & c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0. \end{aligned}$$

Muutoin $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ovat *lineaarisesti riippuvia.*

Funktiot $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ovat siis lineaarisesti riippuvia täsmälleen silloin, kun on olemassa kertoimet c_i, joista jokin $\neq 0$, siten että $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) = 0$ kaikilla $x \in I$.

Määritelmä 9.97. Olkoot $y_1, y_2, \ldots, y_n \colon I \to \mathbb{R}$ $n-1$ kertaa derivoituvia avoimella välillä I. Funktioiden $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *Wronskin determinantti* on funktio

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Lause 9.98. *Olkoot* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *homogeenisen yhtälön ratkaisuja välillä* I *ja olkoon* $W(x)$ *niiden Wronskin determinantti. Silloin pätee:*

(1) *Jos* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *ovat lineaarisesti riippuvia, niin* $W(x) = 0$ *kaikilla* $x \in I$.

(2) *Jos* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *ovat lineaarisesti riippumattomia, niin* $W(x) \neq 0$ *kaikilla* $x \in I$.

Lause 9.99. *Olkoot $y_1, y_2, \ldots, y_n$ homogeenisen yhtälön lineaarisesti riippumattomia ratkaisuja välillä I. Silloin lineaarikombinaatio*

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n \qquad (c_i \in \mathbb{R})$$

on homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu välillä I.

Lause 9.100. *Jos $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$ on homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu ja y_p on epähomogeenisen yhtälön jokin yksittäisratkaisu, niin epähomogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu on*

$$y = y_h + y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n + y_p.$$

Esimerkki 9.101. Osoita, että $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x \ln x$ ja $y_3(x) = x^2$ ovat yhtälön

$$y''' - \frac{1}{x} y'' + \frac{2}{x^2} y' - \frac{2}{x^3} y = 0$$

lineaarisesti riippumattomia ratkaisuja välillä $(0, \infty)$ ja hae alkuehdot

$$y(1) = 3, \quad y'(1) = 2 \quad \text{ja} \quad y''(1) = 1$$

toteuttava ratkaisu y.

Ratkaisu. Esimerkiksi y_2 on ratkaisu, sillä

$$y_2' = \ln x + 1, \quad y_2'' = \frac{1}{x} \quad \text{ja} \quad y_2''' = -\frac{1}{x^2}.$$

Sijoittamalla nämä yhtälöön vasemmalle puolelle saadaan 0. Vastaavalla tavoin y_1 ja y_3 todetaan ratkaisuiksi. Lasketaan Wronskin determinantti:

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & x \ln x & x^2 \\ 1 & \ln x + 1 & 2x \\ 0 & \frac{1}{x} & 2 \end{vmatrix} = \cdots = x.$$

$W(x) \neq 0$, joten y_1, y_2 ja y_3 ovat lineaarisesti riippumattomia ratkaisuja ja siten yleinen ratkaisu on

$$y = c_1 x + c_2 x \ln x + c_3 x^2,$$

jolle

$$\begin{aligned} y' &= c_1 + c_2(\ln x + 1) + 2c_3 x \quad \text{ja} \\ y'' &= \frac{c_2}{x} + 2c_3. \end{aligned}$$

Annetut alkuehdot toteuttavalle ratkaisulle pätee

$$\begin{aligned} y(1) &= c_1 + c_3 = 3, \\ y'(1) &= c_1 + c_2 + 2c_3 = 2, \\ y''(1) &= c_2 + 2c_3 = 1, \end{aligned}$$

josta ratkaistaan $c_1 = 1$, $c_2 = -3$ ja $c_3 = 2$. Haettu ratkaisu on siis

$$y(x) = x - 3x \ln x + 2x^2.$$

Keskitytään seuraavassa vakiokertoimiseen yhtälöön.

Määritelmä 9.102. *Vakiokertoimiseen* homogeeniyhtälöön

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad (a_i \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0) \tag{9.103}$$

liittyvä *karakteristinen yhtälö* on

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0. \tag{9.104}$$

Lause 9.105. *Karakteristisen yhtälön* (9.104) *juurten λ avulla löydetään yhtälön* (9.103) *n lineaarisesti riippumatontonta ratkaisua seuraavasti:*

(1) *Jos λ on yksinkertainen reaalijuuri, niin $e^{\lambda x}$ on ratkaisu.*

(2) *Jos λ on k-kertainen reaalijuuri, niin funktiot*

$$e^{\lambda x}, \quad x e^{\lambda x}, \quad x^2 e^{\lambda x}, \quad \ldots, \quad x^{k-1} e^{\lambda x} \tag{9.106}$$

ovat lineaarisesti riippumattomia ratkaisuja.

(3) *Jos $\lambda = \alpha \pm i\beta$ on yksinkertainen imaginaarijuuripari, niin*

$$e^{\alpha x} \sin(\beta x) \quad \textit{ja} \quad e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

ovat lineaarisesti riippumattomia ratkaisuja.

(4) *Jos $\lambda = \alpha \pm i\beta$ on k-kertainen imaginaarijuuripari, niin*

$$\begin{aligned} &e^{\alpha x} \sin(\beta x), \quad x e^{\alpha x} \sin(\beta x), \quad \ldots, \quad x^{k-1} e^{\alpha x} \sin(\beta x) \quad \textit{ja} \\ &e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad x e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad \ldots, \quad x^{k-1} e^{\alpha x} \cos(\beta x) \end{aligned}$$

ovat lineaarisesti riippumattomia ratkaisuja.

Todistus. Tehdään ratkaisuyrite $y = e^{\lambda x}$. Tällöin

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}, \quad \ldots, \quad y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}.$$

Sijoitetaan nämä yhtälöön (9.103):

$$\begin{aligned} &\left(a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0\right) e^{\lambda x} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0. \end{aligned} \tag{9.107}$$

Kompleksitasossa tällä n. asteen polynomilla on monikerrat huomioiden n kappaletta juuria λ. Koska polynomi on reaalikertoiminen, niin mahdolliset imaginaarijuuret esiintyvät konjugaattipareittain $\alpha \pm i\beta$, ts. jos $\alpha + i\beta$ on juuri, niin myös $\alpha - i\beta$ on juuri. Haetaan nyt differentiaaliyhtälölle lineaarisesti riippumattomia reaalisia ratkaisuja.
(1) Jos λ on yksinkertainen reaalijuuri, niin ekvivalenssin (9.107) mukaan $y = e^{\lambda x}$ on ratkaisu.
(2) Olkoon λ k-kertainen reaalijuuri. Funktiot (9.106) ovat selvästi lineaarisesti riippumattomia. Ratkaisuiksi ne nähdään periaatteessa suoraan sijoittamalla. Yleinen todistus tälle on tekninen ja se sivuutetaan. Kokeile kuitenkin esimerkin vuoksi funktiota $y = xe^{\lambda x}$ kolmannen kertaluvun yhtälölle.
(3) Jos $\lambda = \alpha \pm i\beta$ on yksinkertainen imaginaarijuuripari, niin (9.107):n mukaan

$$y = e^{\lambda x} = e^{\alpha x}\cos(\beta x) + ie^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

on differentiaaliyhtälön imaginaarinen ratkaisu. Sen reaali- ja imaginaariosat ovat myös (lineaarisesti riippumattomia) ratkaisuja (vrt. lemma 9.55).
(4) Sivuutetaan.
Lisäksi kohtien (1)–(4) yhteensä n kappaletta ratkaisuja ovat lineaarisesti riippumattomia. □

Esimerkki 9.108. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$9y^{(5)} - 6y^{(4)} + y^{(3)} = 0.$$

Ratkaisu. Yhtälö on 5. kertaluvun vakiokertoiminen homogeeniyhtälö. Karakteristinen yhtälö on

$$9\lambda^5 - 6\lambda^4 + \lambda^3 = \lambda^3\left(9\lambda^2 - 6\lambda + 1\right) = 0.$$

Tällä yhtälöllä on kolminkertainen juuri $\lambda = 0$ ja kaksinkertainen juuri $\lambda = 1/3$, joten differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on

$$\begin{aligned} y &= c_1e^{0\cdot x} + c_2xe^{0\cdot x} + c_3x^2e^{0\cdot x} + c_4e^{x/3} + c_5xe^{x/3} \\ &= c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{x/3} + c_5xe^{x/3}. \end{aligned}$$

Epähomogeenisen vakiokertoimisen yhtälön yksittäisratkaisua voidaan yrittää hakea samantapaisilla yritteillä kuin sivun 225 taulukossa.

Esimerkki 9.109. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y''' + 9y' = \sin x.$$

Ratkaisu. Yhtälö on 3. kertaluvun vakiokertoiminen lineaariyhtälö. Vastaavan homogeeniyhtälön karakteristinen yhtälö on

$$\lambda^3 + 9\lambda = \lambda\left(\lambda^2 + 9\right) = 0,$$

jolla on juuret $\lambda = 0$ ja $\lambda = \pm 3i$. Homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu on siten

$$y_h = c_1 + c_2 \sin(3x) + c_3 \cos(3x).$$

Haetaan epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisua yritteellä
$y_p = A\cos x + B\sin x$:

$$y_p' = -A\sin x + B\cos x,\;\; y_p'' = -A\cos x - B\sin x,\;\; y_p''' = A\sin x - B\cos x.$$

Sijoitetaan nämä yhtälöön:

$$A\sin x - B\cos x + 9(-A\sin x + B\cos x) = \sin x.$$

Saadaan $-8A = 1$ ja $8B = 0$, joten $y_p = -\frac{1}{8}\cos x$ on yksittäisratkaisu. Yhtälön yleinen ratkaisu on siis

$$y = y_h + y_p = c_1 + c_2 \sin(3x) + c_3 \cos(3x) - \frac{1}{8}\cos x.$$

Esimerkki 9.110. Ratkaistaan esimerkin 9.109 differentiaaliyhtälö kahdella eri sovelluksella. Vastaukset eivät aina ole kovin sievässä muodossa, joten niitä täytyy osata tulkita oikein. Lisäksi ratkaistaan kyseinen differentiaaliyhtälö alkuehdoilla $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ ja $y''(0) = 0$.

Matlab (jossa Symbolic Math Toolbox)

```
dsolve('D3y+9*Dy=sin(x)','x')
simplify(ans)
ans = cos(3*x)/8 - C2/9 - cos(x)/8 - (C2*cos(3*x))/9
      + C3*cos(3*x) + C4*sin(3*x)

dsolve('D3y+9*Dy=sin(x),y(0)=0,Dy(0)=1,D2y(0)=0','x')
simplify(ans)
ans = cos(3*x)/72 + sin(3*x)/3 - cos(x)/8 + 1/9
```

WolframAlpha (`http://www.wolframalpha.com/`)

```
y'''+9*y'=sin(x)
```

$$y(x) = \frac{1}{3}c_1 \sin(3x) - \frac{1}{3}c_2 \cos(3x) + c_3 + \frac{1}{72}(-9\cos(x) - 2\cos(3x))$$

```
y'''+9*y'=sin(x), y(0)=0, y'(0)=1, y''(0)=0
```

$$y(x) = \frac{1}{72}(24\sin(3x) - 9\cos(x) + \cos(3x) + 8)$$

9.10 Normaaliryhmä

Tässä luvussa luodaan silmäys useammasta differentiaaliyhtälöstä muodostuvaan differentiaaliyhtälöryhmään. Esimerkkien avulla pohditaan, kuinka käytännön ongelmasta muokataan normaalimuotoinen differentiaaliyhtälöryhmä ja kuinka se voidaan ratkaista numeerisesti Matlabilla. Varsinainen differentiaaliyhtälöryhmien teoria jätetään Differentiaaliyhtälöiden opintojaksolle.

Määritelmä 9.111. Olkoot $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tuntemattomia reaalifunktioita. Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöistä koostuvaa yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)), \\ x_2'(t) = f_2(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)), \\ \qquad \vdots \\ x_n'(t) = f_n(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)), \end{cases} \tag{9.112}$$

missä funktiot $f_i\colon I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ovat $n+1$ muuttujan reaaliarvoisia funktioita, kutsutaan *normaaliryhmäksi (first-order system)*. Välillä I derivoituvat funktiot $x_1, x_2, \ldots, x_n\colon I \to \mathbb{R}$ muodostavat normaaliryhmän *ratkaisun* välillä I, jos (9.112) pätee kaikilla $t \in I$.

Normaaliryhmään (9.112) liittyvällä *alkuarvotehtävällä* tarkoitetaan sellaisen ratkaisun hakemista, joka toteuttaa ennalta asetetut ehdot

$$x_1(t_0) = b_1, \quad x_2(t_0) = b_2, \quad \ldots, \quad x_n(t_0) = b_n \qquad (t_0 \in I).$$

Esimerkki 9.113. Differentiaaliyhtälöryhmä

$$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = x + 2y - e^{2t}, \end{cases}$$

on funktioiden x ja y normaaliryhmä, missä $f_1(t,x,y) = 2x+y$ ja $f_2(t,x,y) = x + 2y - e^{2t}$. Ryhmän eräs ratkaisu on

$$\begin{cases} x(t) = e^{2t} - e^t, \\ y(t) = e^t, \end{cases}$$

sillä näille funktioille pätee

$$\begin{cases} x'(t) = 2e^{2t} - e^t = 2\left(e^{2t} - e^t\right) + e^t = 2x(t) + y(t), \\ y'(t) = e^t = \left(e^{2t} - e^t\right) + 2e^t - e^{2t} = x(t) + 2y(t) - e^{2t}. \end{cases}$$

9.10.1 Ratkaiseminen eliminointimenetelmällä

Pieni normaaliryhmä ($n = 2$ tai 3) voidaan yrittää ratkaista palauttamalla se yhdeksi korkeamman kertaluvun yhtälöksi. Suurempien ryhmien tapauksessa tämä menetelmä ei useinkaan ole käyttökelpoinen (ks. huomautus 9.123).

Esimerkki 9.114. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 - 3x_2, & (1) \\ x_2' = 6x_1 - 7x_2, & (2) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 2, \\ x_2(0) = -1. \end{cases}$$

Ratkaisu. Menetellään seuraavasti:
(a) Ratkaistaan x_1 yhtälöstä (2) x_2':n ja x_2:n funktiona ja tämä derivoimalla lasketaan derivaatta x_1' x_2'':n ja x_2':n funktiona.
(b) Sijoitetaan nämä x_1 ja x_1' yhtälöön (1). Saadaan toisen kertaluvun yhtälö x_2:lle, josta x_2 ratkaistaan.
(c) x_1 saadaan nyt sijoittamalla kohdassa (b) saatu x_2 kohdan (a) yhtälöön x_1:lle.
Aloitetaan kohdasta (a):

$$\begin{aligned} (2) \quad &\Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{6}x_2' + \frac{7}{6}x_2 && (3) \\ &\Rightarrow \quad x_1' = \frac{1}{6}x_2'' + \frac{7}{6}x_2' && (4) \end{aligned}$$

(b) Sijoitetaan (3) ja (4) yhtälöön (1):

$$\frac{1}{6}x_2'' + \frac{7}{6}x_2' = 4\left(\frac{1}{6}x_2' + \frac{7}{6}x_2\right) - 3x_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_2'' + 3x_2' - 10x_2 = 0$$

Tämä on toisen kertaluvun lineaarinen homogeeniyhtälö funktiolle x_2. Karakteristinen yhtälö on $\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 2$ tai $\lambda = -5$. Yleinen ratkaisu on siis

$$x_2 = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-5t}. \qquad (5)$$

(c) Sijoitetaan (5) yhtälöön (3):

$$x_1 = \frac{1}{6}\left(2c_1 e^{2t} - 5c_2 e^{-5t}\right) + \frac{7}{6}\left(c_1 e^{2t} + c_2 e^{-5t}\right) = \frac{3c_1}{2}e^{2t} + \frac{c_2}{3}e^{-5t} \qquad (6)$$

(5) ja (6) ovat nyt alkuperäisen normaaliryhmän yleinen ratkaisu. Alkuehdot:

$$\begin{cases} x_1(0) = \dfrac{3c_1}{2} + \dfrac{c_2}{3} = 2, \\ x_2(0) = c_1 + c_2 = -2. \end{cases}$$

Tästä ratkaistaan $c_1 = 2$ ja $c_2 = -3$, joten alkuarvotehtävän ratkaisu on

$$\begin{cases} x_1(t) = 3e^{2t} - e^{-5t}, \\ x_2(t) = 2e^{2t} - 3e^{-5t}. \end{cases}$$

9.10.2 Korkeamman kertaluvun yhtälöiden palauttaminen normaaliryhmäksi

Määritelmä 9.115. Muotoa

$$x^{(n)}(t) = f\left(t, x(t), x'(t), x''(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)\right) \tag{9.116}$$

oleva differentiaaliyhtälö on funktion $x = x(t)$ n. kertaluvun *normaalimuotoinen differentiaaliyhtälö.*

(9.116) voidaan palauttaa normaaliryhmäksi asettamalla

$$x_1 = x,\ x_2 = x',\ x_3 = x'',\ \ldots,\ x_n = x^{(n-1)},$$

sillä tällöin

$$x_1' = x' = x_2,\ x_2' = x'' = x_3,\ x_3' = x^{(3)} = x_4,\ \ldots,\ x_n' = x^{(n)}.$$

Nyt (9.116):n ratkaisemiseksi riittää ratkaista normaaliryhmä

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = x_3, \\ \quad\vdots \\ x_{n-1}' = x_n, \\ x_n' = f(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{cases} \tag{9.117}$$

jonka ratkaisusta poimitaan $x(t) = x_1(t)$.

Esimerkki 9.118. Muokkaa alkuarvotehtävä

$$x''' = -(x')^2 - 3x + e^t, \quad x(0) = 1,\ x'(0) = 0,\ x''(0) = 0 \tag{9.119}$$

normaaliryhmäksi.
Ratkaisu. Asetetaan

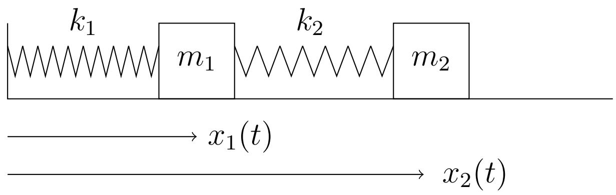
$$x_1 = x, \quad x_2 = x' \quad \text{ja} \quad x_3 = x''.$$

Silloin normaaliryhmäksi tulee

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = x_3, \\ x_3' = -x_2^2 - 3x_1 + e^t, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1, \\ x_2(0) = 0, \\ x_3(0) = 0. \end{cases} \tag{9.120}$$

Myös useamman muotoa (9.116) olevan differentiaaliyhtälön ryhmä voidaan palauttaa normaaliryhmäksi:

Esimerkki 9.121. Tarkastellaan oheisen kuvan mukaista kahden jousen systeemiä.



Paikkojen $x_1(t)$ ja $x_2(t)$ nollakohdat on kiinnitetty siten, että tasapainotilassa $x_1 = x_2 = 0$. Massaan m_1 vaikuttaa jousen 1 aiheuttaman jousivoiman $-k_1x_1$ lisäksi jousen 2 aiheuttama voima $k_2(x_2 - x_1)$, missä $x_2 - x_1$ on jousen 2 venymä. Jousen 2 aiheuttama voima osoittaa siten oikealle, jos jousi 2 on venynyt eli $x_2 - x_1 > 0$. Massaan m_2 vaikuttaa tämän vastavoima eli $-k_2(x_2 - x_1)$. Systeemin käyttäytymistä kuvaa siten differentiaaliyhtälöryhmä (vrt. (9.68))

$$\begin{cases} m_1x_1'' = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1), \\ m_2x_2'' = -k_2(x_2 - x_1). \end{cases} \tag{9.122}$$

Muunnetaan tämä normaaliryhmäksi merkitsemällä $x_3 = x_1'$ ja $x_4 = x_2'$:

$$\begin{cases} x_1' = x_3, \\ x_2' = x_4, \\ x_3' = (-k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1))/m_1, \\ x_4' = (-k_2(x_2 - x_1))/m_2. \end{cases}$$

Huomautus 9.123. Miksi normaaliryhmä? Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöiden ja normaaliryhmien ratkaisemiseksi on tehokkaita numeerisia menetelmiä. Käytännössä differentiaaliyhtälö tai yhtälöryhmä usein palautetaankin normaaliryhmäksi ja ratkaistaan numeerisesti. Muuttujien ja yhtälöiden lukumäärä voi sovelluksissa hyvin olla tuhansia.

9.10.3 Normaaliryhmän ratkaiseminen numeerisesti Matlabilla

Merkitään $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Tällöin normaaliryhmän (9.112) funktioita voidaan merkitä lyhyesti $f_i(t, x_1, \dots, x_n) = f_i(t, \mathbf{x})$. Muodostetaan reaaliarvoisista funktioista f_i vektoriarvoinen funktio

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = (f_1(t, \mathbf{x}), \dots, f_n(t, \mathbf{x})).$$

Myös alkuehdot $x_1(t_0) = b_1, \dots, x_n(t_0) = b_n$ voidaan antaa vektorimuodossa:

$$\mathbf{x}(t_0) = (b_1, \dots, b_n).$$

Tutkitaan esimerkiksi alkuarvotehtävää

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + tx_2, \\ x_2' = x_1 + 5x_2 + e^t, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(-1) = 1{,}5, \\ x_2(-1) = -0{,}5. \end{cases}$$

Funktio $\mathbf{f}$ on

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \left(x_1 + tx_2,\ x_1 + 5x_2 + e^t\right).$$

Matlabissa tämä voidaan syöttää seuraavasti:

```
f=@(t,x)[x(1)+t*x(2);x(1)+5*x(2)+exp(t)]
```

Tässä `x` on Matlabin vektori, jonka komponentteihin viitataan `x(1)` ja `x(2)`. Jos halutaan välillä $t \in [t_0, t_1]$ numeerinen arvio ratkaisulle, joka toteuttaa alkuehdon $\mathbf{x}(t_0) = (b_1, b_2)$, voidaan käyttää Matlabin `ode45`-funktiota:

```
[t,x] = ode45(f,[t0 t1],[b1 b2]);
```

Esimerkissämme alkuehto on $\mathbf{x}(-1) = (1{,}5,\ -0{,}5)$, joten

```
[t,x] = ode45(f,[-1 0],[1.5 -0.5]);
```

antaa approksimaation ratkaisulle välillä $[-1, 0]$. Nyt Matlabin vektorissa `t` on järjestyksessä t:n arvoja väliltä $[-1, 0]$, matriisin `x` ensimmäisessä sarakkeessa `x(:,1)` on vastaavilla paikoilla arviot arvoille $x_1(t)$ ja toisessa sarakkeessa `x(:,2)` arviot arvoille $x_2(t)$. $x_1(t)$:n ja $x_2(t)$:n kuvaajat voidaan siten piirtää komennolla

```
plot(t,x(:,1),t,x(:,2))
```

Matlabin ohjeissa funktiolle $\mathbf{f}$ käytetään nimeä `odefun`.

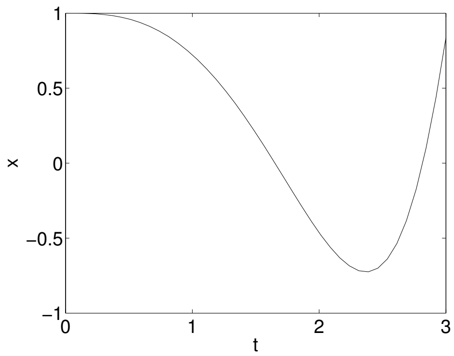
Esimerkki 9.124. Ratkaistaan esimerkki 9.118 Matlabilla. Matlab ei osaa ratkaista tätä alkuarvotehtävää symbolisesti:

```
x=dsolve('D3x=-(Dx)^2-3*x+exp(t),x(0)=1,Dx(0)=0,D2x(0)=0','t')
Warning: Explicit solution could not be found.
x = [ empty sym ]
```

Ratkaistaan vastaava normaaliryhmä (9.120) numeerisesti välillä $t \in [0, 3]$ funktiolla `ode45` ja tulostetaan ratkaisun $x(t) = x_1(t)$ kuvaaja:

```
% Normaaliryhmän oikea puoli t:n ja x:n funktiona.
% x on vektori, jonka komponentteihin viitataan x(1), x(2), x(3)
odefun=@(t,x)[x(2);x(3);-x(2)^2-3*x(1)+exp(t)]

t0 = 0;      % alkuajanhetki
t1 = 3;      % loppuajanhetki
x0 = [1 0 0] % alkuehdot
[t,x] = ode45(odefun,[t0 t1],x0);
% t:n arvot ovat vektorissa t
% xi:n likiarvot ovat matriisin x i:nnessä sarakkeessa
plot(t,x(:,1)) % x1:n kuvaaja
```

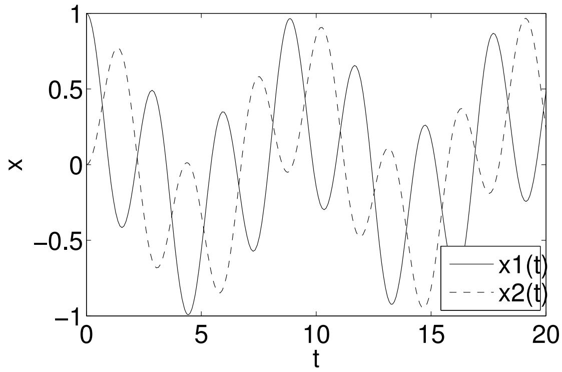


Esimerkki 9.125. Ratkaistaan esimerkin 9.121 kahden jousen systeemi Matlabilla tapauksessa $m_1 = m_2 = 1$, $k_1 = 1$ ja $k_2 = 2$ välillä $t \in [0, 20]$ funktiolla `ode45` ja tulostetaan ratkaisujen $x_1(t)$ ja $x_2(t)$ kuvaajat:

```
% Normaaliryhmän oikea puoli t:n ja x:n funktiona.
% x on vektori, jonka komponentteihin viitataan
% x(1), x(2), x(3) ja x(4).
odefun=@(t,x)[x(3);x(4);-x(1)+2*(x(2)-x(1));-2*(x(2)-x(1))]

t0 = 0;        % alkuajanhetki
t1 = 20;       % loppuajanhetki
x0 = [1 0 0 0] % alkuehdot
[t,x] = ode45(odefun,[t0 t1],x0);
```

```
% t:n arvot ovat vektorissa t
% xi:n likiarvot ovat matriisin x i:nnessä sarakkeessa
plot(t,x(:,1),t,x(:,2),'--') % x1:n ja x2:n kuvaajat
```



Matlab osaa ratkaista tämän myös symbolisesti:

```
s=dsolve('D2x=-x+2*(y-x),D2y=-2*(y-x)',...
'x(0)=1,y(0)=0,Dx(0)=0,Dy(0)=0','t')
s.x
s.y
```

9.10.4 Sovelluksia

Esimerkki 9.126. Peto–saalis -järjestelmä. Tarkastellaan *peto–saalis -järjestelmää (predator–prey system)*, jossa on yksi petolaji ja sillä yksi saalislaji, esimerkiksi pöllöt ja myyrät. Kun saaliin määrä kasvaa, niin petojen lukumääräkin kasvaa. Toisaalta petojen määrän kasvu hidastaa saalispopulaation kasvua ja lopulta kääntää saaliin määrän laskuun aiheuttaen ennen pitkää myös petopopulaation pienenemisen. Analysoidaan tätä kilpajuoksua tarkemmin. Merkitään $x(t)$:llä saaliseläinten lukumäärää ja $y(t)$:llä petojen lukumäärää. Tarkastellaan ensin kahta ääritapausta **a** ja **b** ja sitten yleistä tapausta **c**:
a) Jos petoja ei ole ($y = 0$), niin saalispopulaatio kasvaa eksponentiaalisesti: $x' = ax$, $a > 0$ (ks. esimerkki 9.13).
b) Jos saalista ei ole ($x = 0$), niin petopopulaatio vähenee eksponentiaalisesti: $y' = -by$, $b > 0$.
c) Jos $x, y > 0$, niin **a**-kohdassa petojen määrän kasvaminen vähentää saalispopulaation kasvunopeutta x'. Oletetaan, että vähennys kasvunopeuteen on suoraan verrannollinen petojen ja saaliseläinten kohtaamistaajuuteen. Oletetaan edelleen, että kohtaamistaajuus on suoraan verrannollinen tuloon xy.

Eli jos esimerkiksi petojen määrä kaksinkertaistuu, niin kohtaamistaajuus myös kaksinkertaistuu, tai jos esimerkiksi saaliin määrä puolittuu, niin kohtaamistaajuuskin puolittuu. Niinpä päädytään yhtälöön

$$x' = ax - pxy \qquad (a, p > 0). \tag{9.127}$$

Vastaavasti **b**-kohdassa saaliin määrän lisääntyminen kasvattaa petopopulaation kasvunopeutta y' suoraan verrannollisesti kohtaamistaajuuteen. Niinpä

$$y' = -by + qxy \qquad (b, q > 0). \tag{9.128}$$

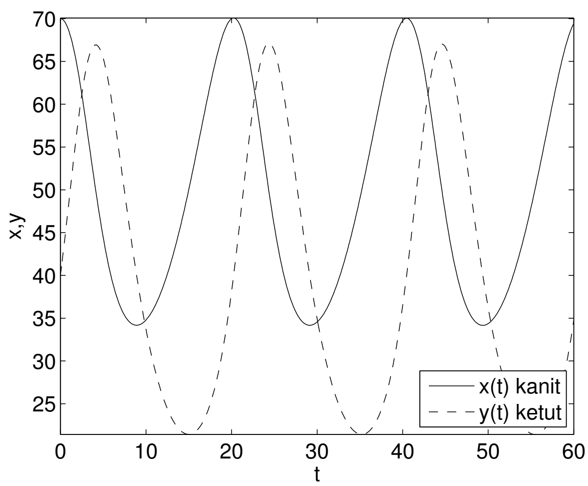
Yhtälöt (9.127) ja (9.128) muodostavat nyt (yksinkertaistetun) mallin peto–saalis -järjestelmästä.

Esimerkki 9.129. Olkoon nummella hetkellä $t = 0$ (kk) 70 kania ja 40 kettua. Merkitään kanien lukumäärää ajan t funktiona $x(t)$:llä ja kettujen lukumäärää $y(t)$:llä. Oletetaan, että lukumäärät noudattavat mallia

$$\begin{cases} x' = 0{,}2x - 0{,}005xy, \\ y' = -0{,}5y + 0{,}01xy. \end{cases} \tag{9.130}$$

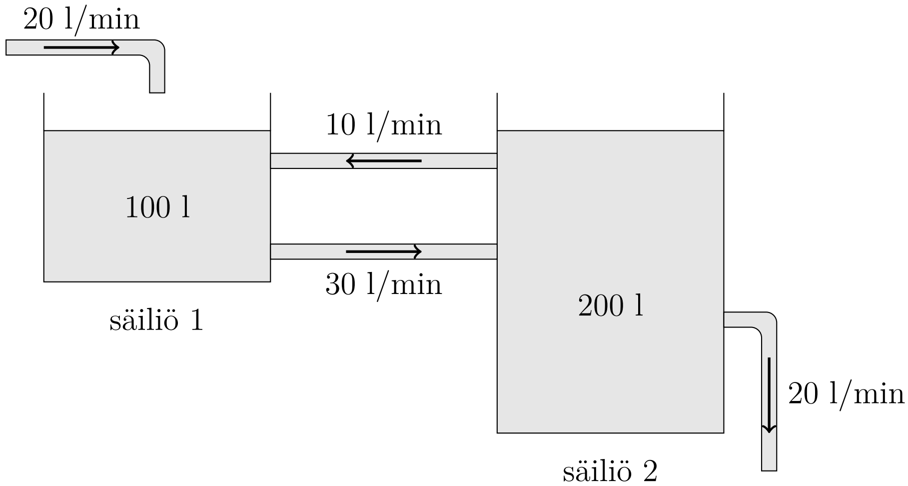
Ratkaistaan differentiaaliyhtälöpari numeerisesti ja piirretään kuva ratkaisuista $x(t)$ ja $y(t)$ Matlabilla.

```
odefun=@(t,x)[0.2*x(1)-0.005*x(1)*x(2); -0.5*x(2)+0.01*x(1)*x(2)]
[t,x]=ode45(odefun,[0:0.1:60],[70,40]);
figure
plot(t,x(:,1),t,x(:,2),'--')
set(gca,'fontsize',14)
hleg1=legend('x(t) kanit', 'y(t) ketut')
set(hleg1,'Location','SouthEast')
xlabel('t')
ylabel('x,y')
axis image
```



Nähdään, että populaatioiden koot $x(t)$ ja $y(t)$ ovat jaksollisia ja että syklin pituus (kahden huipun välinen etäisyys) on noin 20 kk ja kettujen maksimimäärä saavutetaan noin 5 kk kanien maksimimäärän jälkeen.

Esimerkki 9.131. Kahden säiliön ongelma. Säiliöissä 1 on 100 litraa ja säiliössä 2 on 200 litraa suolavettä. Merkitään $x(t)$:llä suolan määrää säiliössä 1 ja $y(t)$:llä suolan määrää (kg) säiliössä 2 ajan t (min) funktiona. Säiliöön 1 johdetaan suolatonta vettä 20 l/min ja säiliöstä 2 poistuu suolavettä 20 l/min. Lisäksi säiliöstä 1 johdetaan suolavettä säiliöön 2 30 l/min ja säiliöstä 2 säiliöön 1 10 l/min (eli säiliöissä 1 ja 2 on jatkuvasti 100 ja 200 litraa suolavettä). Oletetaan lisäksi, että kummassakin säiliössä suola on sekoittamisen ansiosta kunakin ajanhetkenä tasaisesti jakautunut.
a) Kirjoita differentiaaliyhtälöpari $x(t)$:lle ja $y(t)$:lle.
b) Tarkastele tilannetta siinä tapauksessa, että alkuhetkellä ($t = 0$) säiliössä 1 on 200 g suolaa ja säiliössä 2 on 100 g suolaa.



Ratkaisu. a) Säiliöön 1 tulee suolaa

$$\frac{y\ \mathrm{kg}}{200\ \mathrm{l}} \cdot 10\ \frac{\mathrm{l}}{\mathrm{min}} = 0{,}05y\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{min}}$$

ja sieltä poistuu suolaa

$$\frac{x\ \mathrm{kg}}{100\ \mathrm{l}} \cdot 30\ \frac{\mathrm{l}}{\mathrm{min}} = 0{,}3x\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{min}}.$$

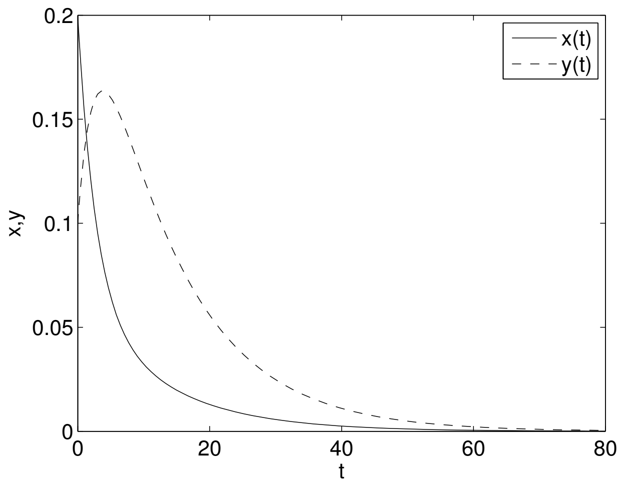
Koska $x'(t)$ on suolan määrän muutosnopeus (kg/min) säiliössä 1 hetkellä t, niin saadaan yhtälö $x' = -0{,}3x + 0{,}05y$. Vastaavalla tavoin säiliötä 2 tarkastelemalla päätellään $y' = 0{,}3x - 0{,}15y$.

b) On ratkaistava alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} x' = -0{,}3x + 0{,}05y \\ y' = 0{,}3x - 0{,}15y \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = 0{,}2 \\ y(0) = 0{,}1 \end{cases}$$

Ratkaistaan numeerisesti Matlabilla `ode45`-funktiolla ja piirretään kuva:

```
odefun=@(t,x)[-0.3*x(1)+0.05*x(2); 0.3*x(1)-0.15*x(2)];
[t,x]=ode45(odefun,[0 80],[0.2 0.1]);
plot(t,x(:,1),t,x(:,2),'--')
set(gca,'fontsize',14)
legend('x(t)','y(t)')
xlabel('t')
ylabel('x,y')
```



Säiliössä 1 on aluksi 200 g suolaa ja määrä vähenee monotonisesti kohti nollaa. Säiliön 2 suolapitoisuus aluksi nousee ja vähenee sitten kohti nollaa. Vaikuttaako ratkaisu järkevältä?

Yhtälöpari voidaan ratkaista myös symbolisesti `dsolve`-komennolla:

```
s=dsolve('Dx=-0.3*x+0.05*y, Dy=0.3*x-0.15*y, x(0)=0.2, y(0)=0.1')
s.x
s.y
```

Taulukoita

Taulukko 1: Kreikkalaiset aakkoset

Iso	Pieni	Kirjaimen nimi
A	α	alfa
B	β	beeta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
E	ϵ, ε	epsilon
Z	ζ	zeeta
H	η	eeta
Θ	θ, ϑ	theeta
I	ι	iioota
K	κ	kappa
Λ	λ	lambda
M	μ	myy

Iso	Pieni	Kirjaimen nimi
N	ν	nyy
Ξ	ξ	ksii
O	o	omikron
Π	π	pii
P	ρ	rhoo
Σ	σ	sigma
T	τ	tau
Υ, Y	υ	ypsilon
Φ	ϕ, φ	fii
X	χ	khii
Ψ	ψ	psii
Ω	ω	oomega

Taulukko 2: Derivoimissäännöt

$$\begin{aligned}
(cf(x))' &= cf'(x) \\
(f(x) \pm g(x))' &= f'(x) \pm g'(x) \\
(f(x)g(x))' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \qquad (g(x) \neq 0) \\
(f \circ g)'(x) &= f'(g(x))g'(x) \\
D_y f^{-1}(y) &= \frac{1}{f'(x)} \qquad (y = f(x))
\end{aligned}$$

Taulukko 3: Derivointikaavoja

$f(x)$	$f'(x)$
x^a	ax^{a-1}
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\dfrac{1}{\cosh^2 x}$
$\operatorname{ar}\sinh x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{ar}\cosh x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{ar}\tanh x$	$\dfrac{1}{1-x^2}$

Taulukko 4: Derivointikaavoista johdetut perusintegraalit.

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$	I
$x^n,\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	$(-\infty, 0)$ tai $(0, \infty)$, kun $n < 0$ $\mathbb{R}$, kun $n \geq 0$
$x^a,\ a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$	$(0, \infty)$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert + C$	$(-\infty, 0)$ tai $(0, \infty)$
e^x	$e^x + C$	$\mathbb{R}$
$a^x,\ a > 0$ ja $a \neq 1$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$-\ln \lvert \cos x \rvert + C$	$\Big(-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\Big),\ n \in \mathbb{Z}$
$\cot x = \frac{1}{\tan x}$	$\ln \lvert \sin x \rvert + C$	$(n\pi, (n+1)\pi),\ n \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$	$\Big(-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\Big),\ n \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$	$(n\pi, (n+1)\pi),\ n \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$	$(-1, 1)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{ar\,sinh} x + C$ $= \ln\Big(x + \sqrt{x^2+1}\Big) + C$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{ar\,cosh} x + C$ $= \ln\Big\lvert x + \sqrt{x^2-1}\Big\rvert + C$	$(-\infty, -1)$ tai $(1, \infty)$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{ar\,tanh} x + C$ $= \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} + C$	$(-1, 1)$

Lähteitä ja kirjallisuutta

[1] R. Adams, C. Essex: *Calculus, a complete course (7th ed.)*. Pearson Education, 2010.

[2] Anonyymi: *Euclid's lemma*. http://en.wikipedia.org/wiki/Euclid's_lemma. Luettu 18.5.2016.

[3] Anonyymi: *Kunta*. http://fi.wikipedia.org/wiki/Kunta_(matematiikka). Luettu 18.5.2016.

[4] Anonyymi: *Pendulum*. http://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum. Luettu 18.5.2016.

[5] C. Edwards, D. Penney: *Calculus, early transcendentals, matrix version (6th ed.)*. Prentice-Hall, 2002.

[6] C. Edwards, D. Penney: *Differential equations. Computing and modeling (3rd ed.)*. Pearson Education, 2004.

[7] T. Hytönen: *Algebran peruslause lukiolaisille*. Matematiikkalehti Solmu 3/2011. http://solmu.math.helsinki.fi/2011/3/

[8] R. Gordon: *Real analysis, a first course (2nd ed.)*. Pearson Education, 2002.

[9] G. James: *Modern engineering mathematics (4th ed.)*. Pearson Education, 2008.

[10] S. Lay: *Analysis with an introduction to proof (4th ed.)*. Pearson Education, 2005.

[11] O. Martio, J. Sarvas: *Tavalliset differentiaaliyhtälöt (3. painos)*. Yliopistopaino, 1987.

[12] J. Polking, A. Bogges, D. Arnold: *Differential equations (2nd ed.)*. Pearson Education, 2006.

[13] D. Poole: *Linear algebra, a modern introduction (2nd ed.)*. Thomson Brooks/Cole, 2006.

[14] M. Saarimäki: *Reaalifunktion analyysia*. Jyväskylän yliopiston Avoimen yliopiston julkaisusarja, 2003.

[15] G. Thomas, M. Weir, J. Hass, F. Giordano: *Thomas' Calculus (11th ed.)*. Pearson Education, 2005.

Hakemisto