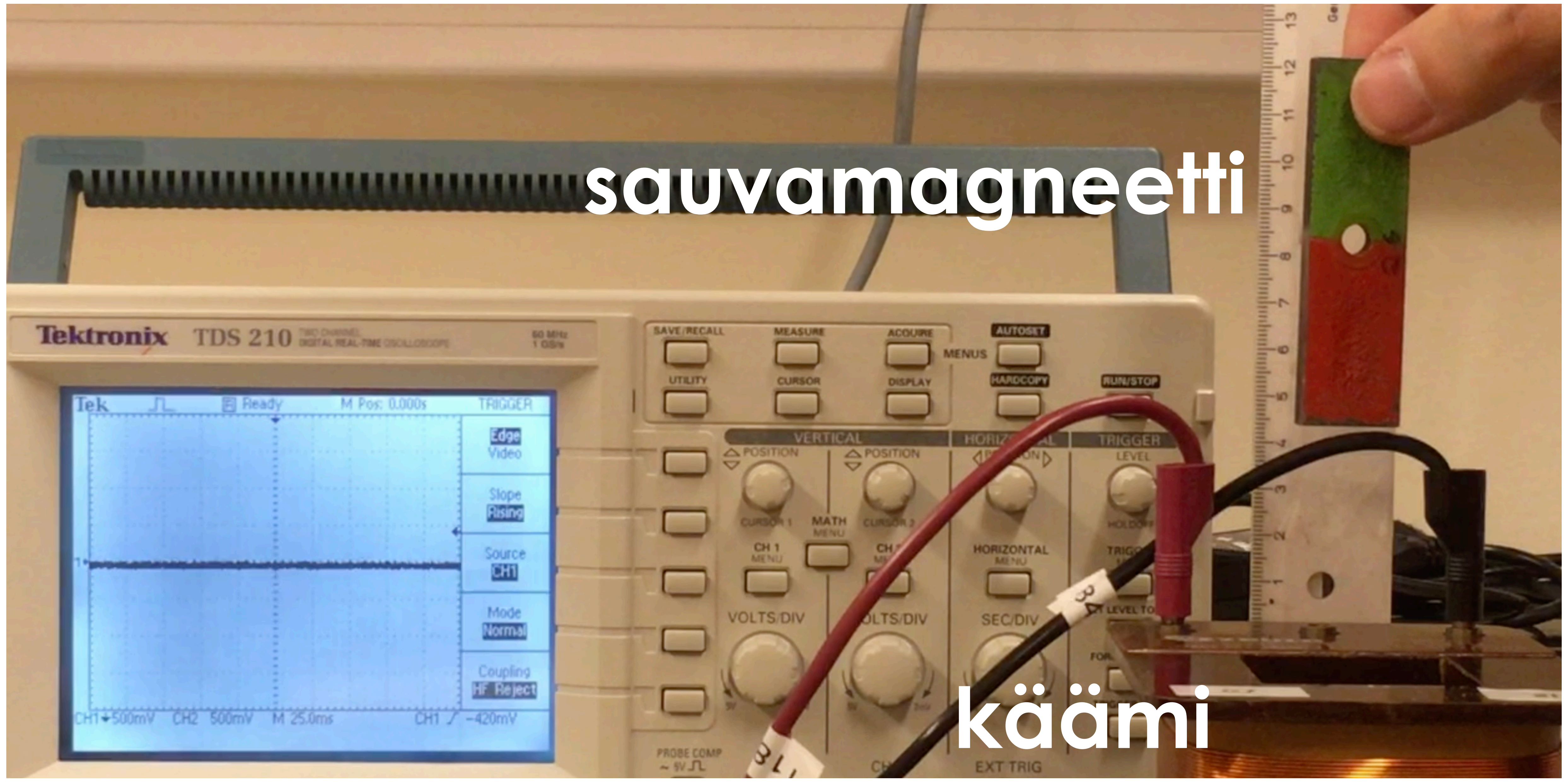
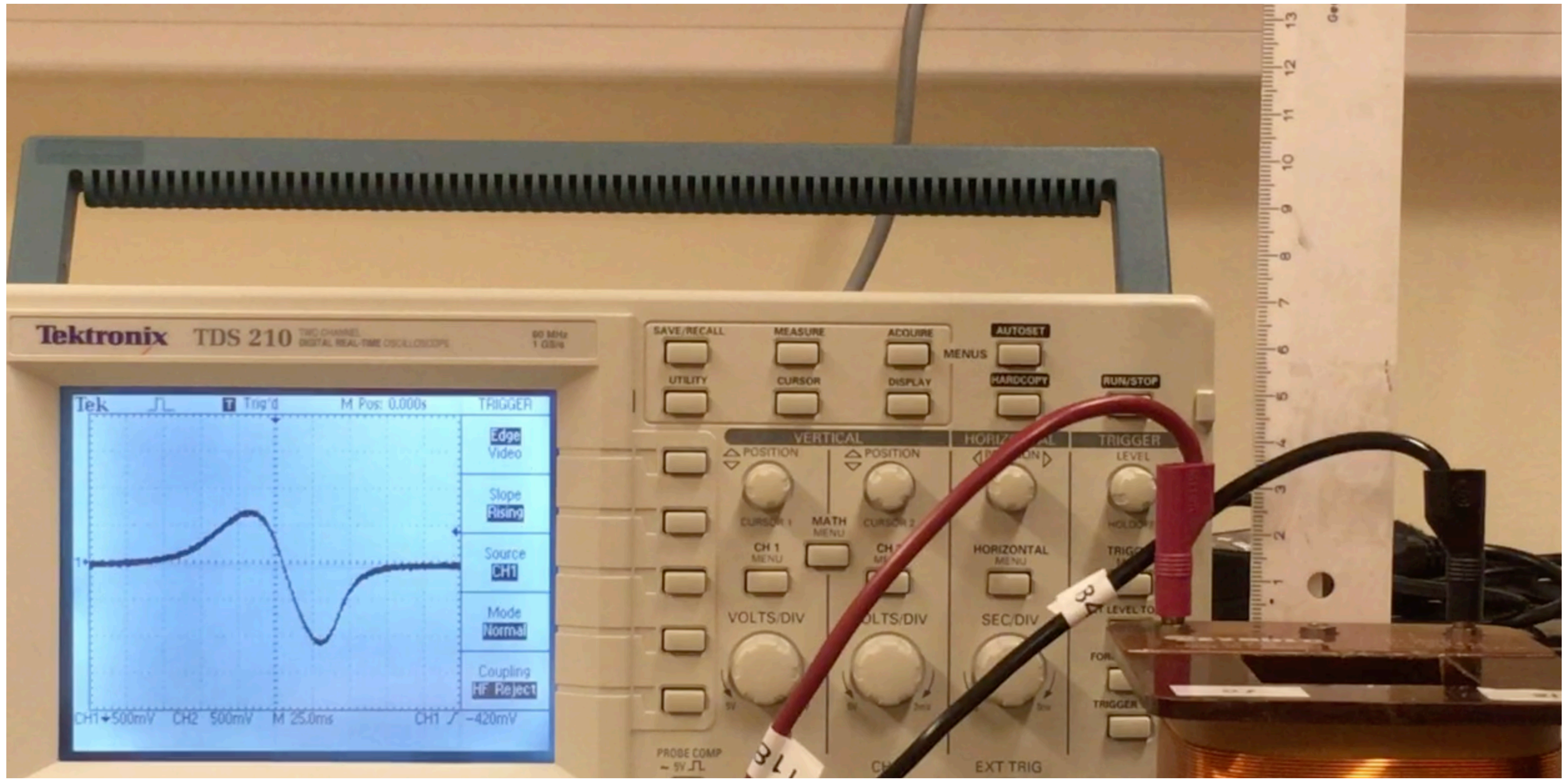
Sähkömagneettinen induktio





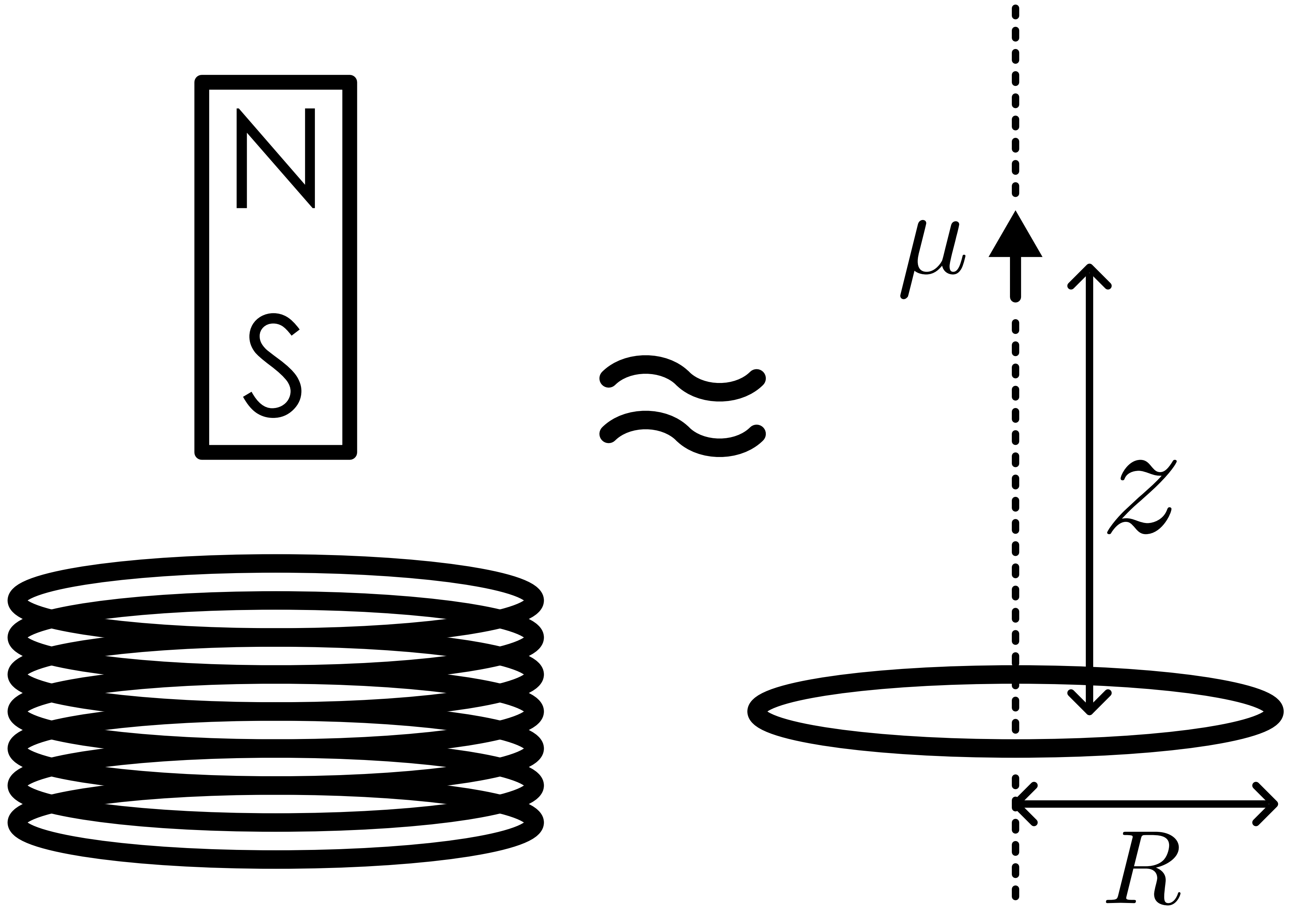
Tässä materiaalissa on videoitu magneetin putoaminen käämin läpi ja sen synnyttämän sähkömagneettisen induktion mittaus oskilloskoopilla.

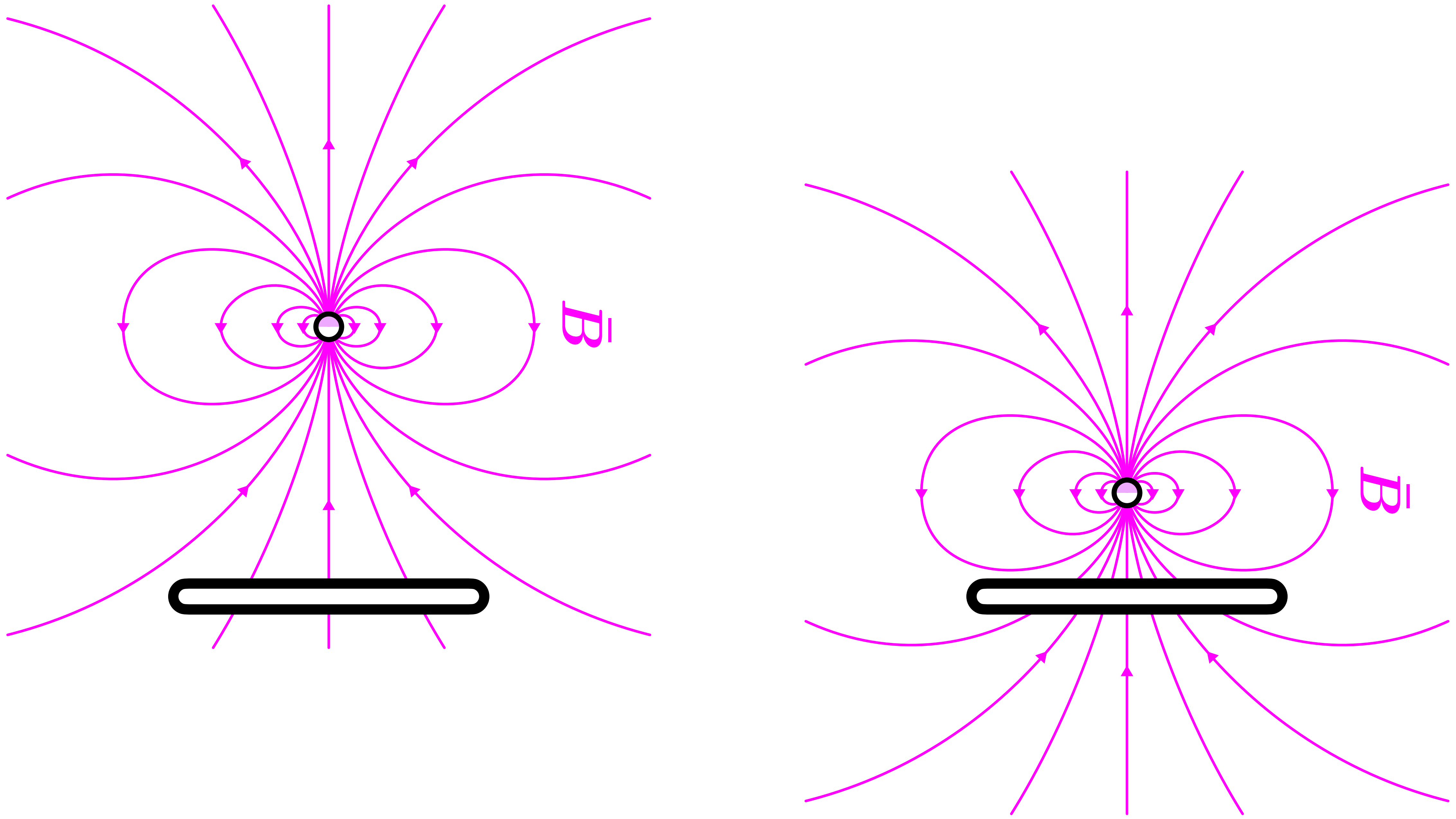
Materiaaliin kuuluu kolme pudotuskoetta, joissa magneetti pudotetaan eri korkeuksilta. Mitä korkeammalta magneetti putoaa, sitä suuremman vauhdin se käämin kohdalla saa ja sitä suurempi hetkellinen induktiojännite havaitaan.

Videoilla voi yksinkertaisimmillaan demonstroida, miten liikkuva magneetti saa aikaan jännitteen. Materiaalia voi käyttää myös pohjana tehtävälle, jossa lasketaan indusoitunut jännite ajan funktiona.

Materiaalin tueksi on pyynnöstä saatavissa myös opettajan opas, jossa johdetaan indusoituneen jännitteen lauseke ajan funktiona usealla eri tasoisella mallilla.

- Yksinkertaisimmillaan magneettia voi kuvata magneettisena dipolina ja käämiä N kpl ympyrän muotoisia johdinsilmukoita.
- Kun magneetti lähestyy silmukkaa, silmukan läpi kulkeva magneettivuo muuttuu.
- Muuttuva magneettivuo indusoi Faradayn induktiolain mukaisesti jännitteen.





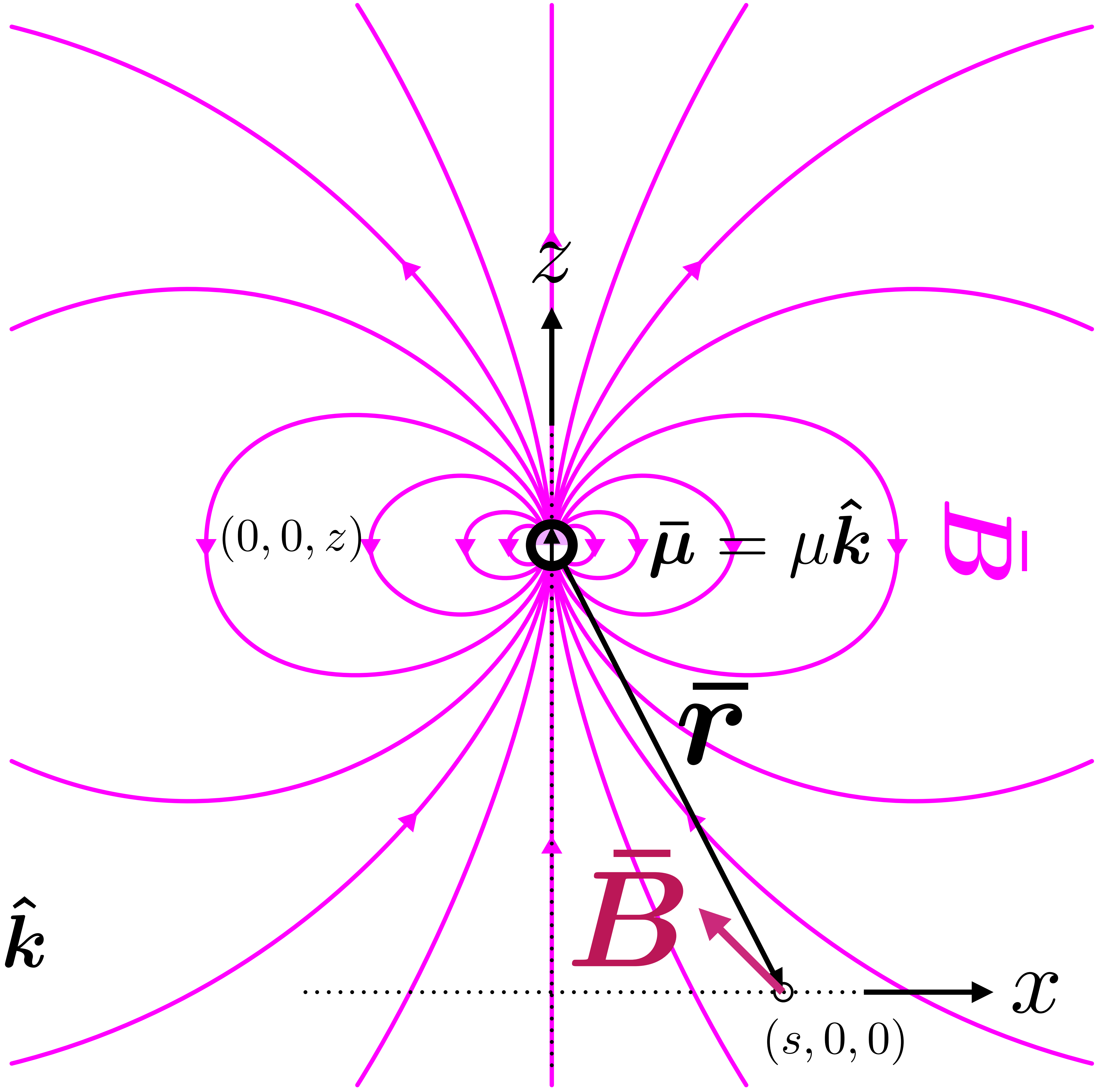
- johdetaan magneettisen dipolin vuo renkaan läpi
- käytetään sylinterikoordinaatistoa
- dipolin kenttää kuvaa lauseke

$$\bar{\boldsymbol{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\bar{\boldsymbol{\mu}}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})\hat{\boldsymbol{r}} - \bar{\boldsymbol{\mu}}}{r^3}$$

$$\bar{\boldsymbol{r}} = s\hat{\boldsymbol{i}} - z\hat{\boldsymbol{k}}$$

$$r = \sqrt{s^2 + z^2}$$

$$\hat{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{r}\bar{\boldsymbol{r}} = \frac{s}{\sqrt{s^2+z^2}}\hat{\boldsymbol{i}} + \frac{-z}{\sqrt{s^2+z^2}}\hat{\boldsymbol{k}}$$



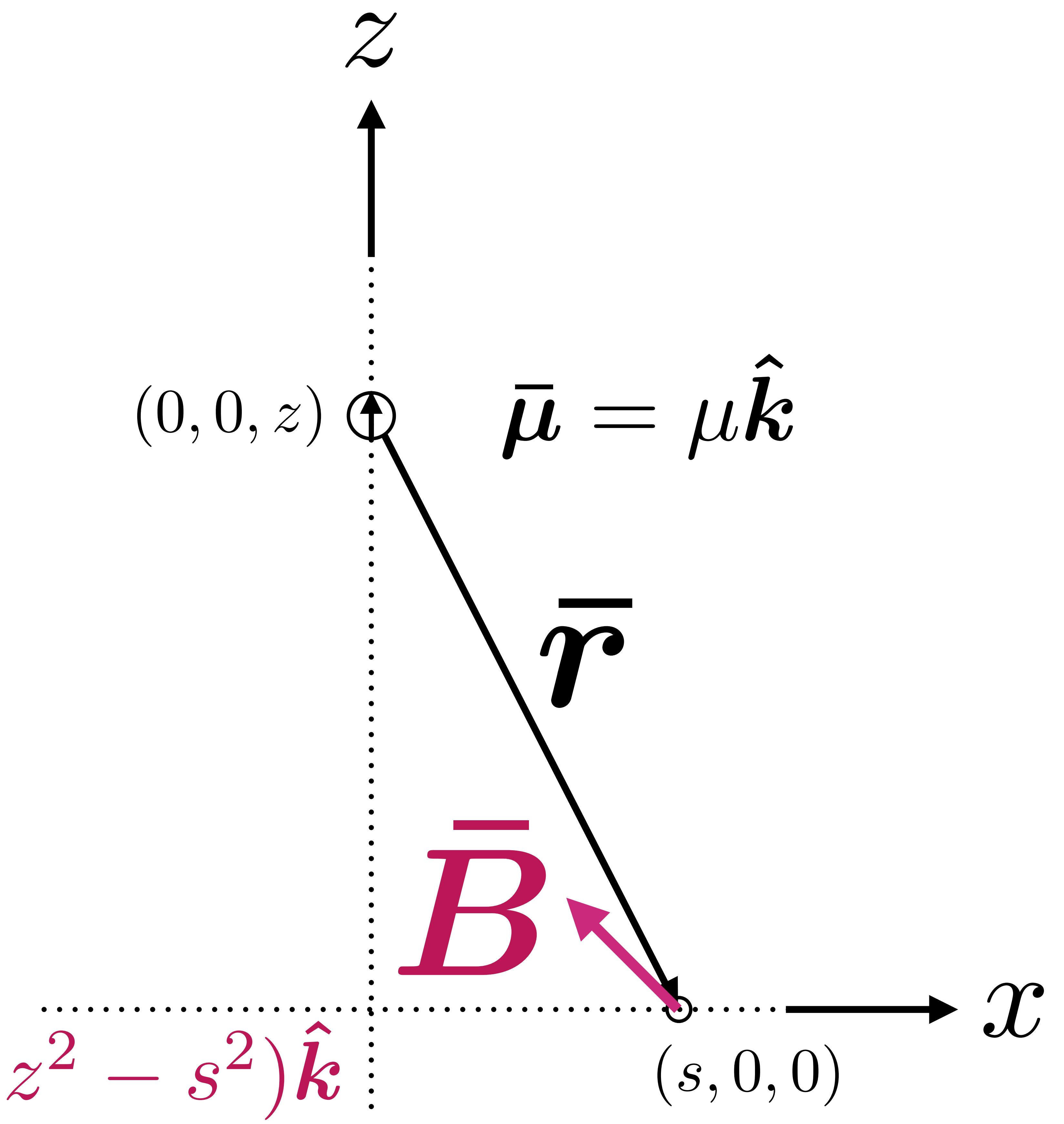
$$\bar{\boldsymbol{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\bar{\boldsymbol{\mu}}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})\hat{\boldsymbol{r}} - \bar{\boldsymbol{\mu}}}{r^3} \quad r = \sqrt{s^2+z^2} \quad \hat{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{r}\bar{\boldsymbol{r}} = \frac{s}{\sqrt{s^2+z^2}}\hat{\boldsymbol{i}} + \frac{-z}{\sqrt{s^2+z^2}}\hat{\boldsymbol{k}}$$

$$\bar{\boldsymbol{\mu}}\cdot\hat{\boldsymbol{r}} = \frac{-z\mu}{\sqrt{s^2+z^2}}$$

$$\bar{\boldsymbol{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3\left(\frac{-z\mu}{\sqrt{s^2+z^2}}\right)\left(\frac{s}{\sqrt{s^2+z^2}}\hat{\boldsymbol{i}} + \frac{-z}{\sqrt{s^2+z^2}}\hat{\boldsymbol{k}}\right) - \mu\hat{\boldsymbol{k}}}{(s^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\bar{\boldsymbol{B}} = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{\left[\frac{-3zs}{s^2+z^2}\hat{\boldsymbol{i}} + \left(\frac{3z^2}{s^2+z^2} - 1\right)\hat{\boldsymbol{k}}\right]}{(s^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\bar{\boldsymbol{B}} = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{\left(\frac{-3zs}{s^2+z^2}\hat{\boldsymbol{i}} + \frac{2z^2-s^2}{s^2+z^2}\hat{\boldsymbol{k}}\right)}{(s^2+z^2)^{3/2}}$$



$$\bar{\boldsymbol{B}} = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{(-3zs)\hat{\boldsymbol{i}} + (2z^2 - s^2)\hat{\boldsymbol{k}}}{(s^2+z^2)^{5/2}}$$

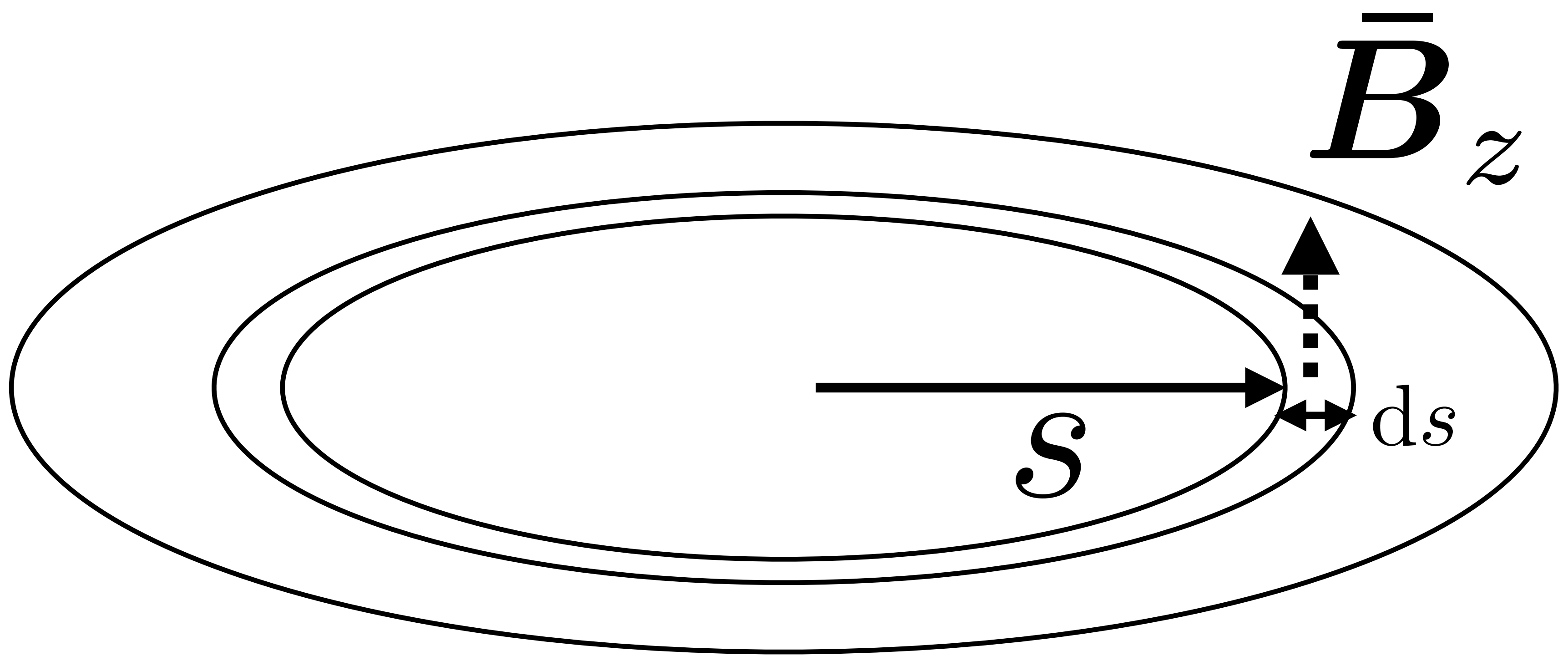
- vuo riippuu vain pintaa vasten kohtisuorasta komponentista

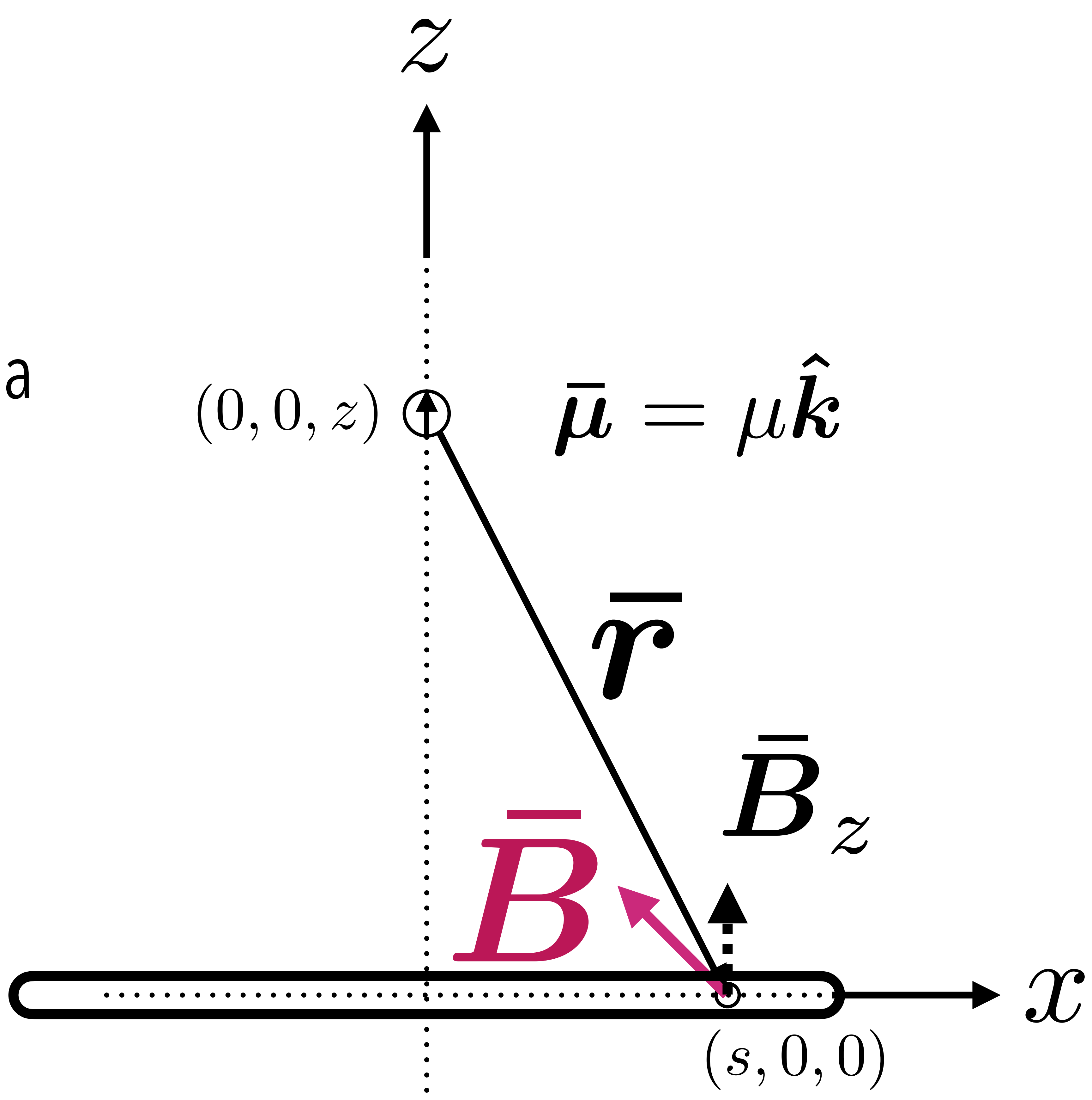
$$\bar{\boldsymbol{B}} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{(-3zs)\hat{\boldsymbol{i}} + (2z^2 - s^2)\hat{\boldsymbol{k}}}{(s^2 + z^2)^{5/2}}$$

$$B_z = \bar{\boldsymbol{B}} \cdot \hat{\boldsymbol{k}} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2z^2 - s^2}{(s^2 + z^2)^{5/2}}$$

- tämä ei ole silmukan sisällä vakio, joten vuota **ei voi** laskea vain kertomalla tätä silmukan sisään jäävällä pinta-alalla

- mutta voimme jakaa silmukan sisään jäävän ympyrän s-säteisiin ja ds-levyisiin renkaisiin – kussakin renkaassa magneettikenttä on likimain vakio





- renkaan pinta-ala on

$$\mathrm{d}A = 2\pi s \mathrm{d}s$$

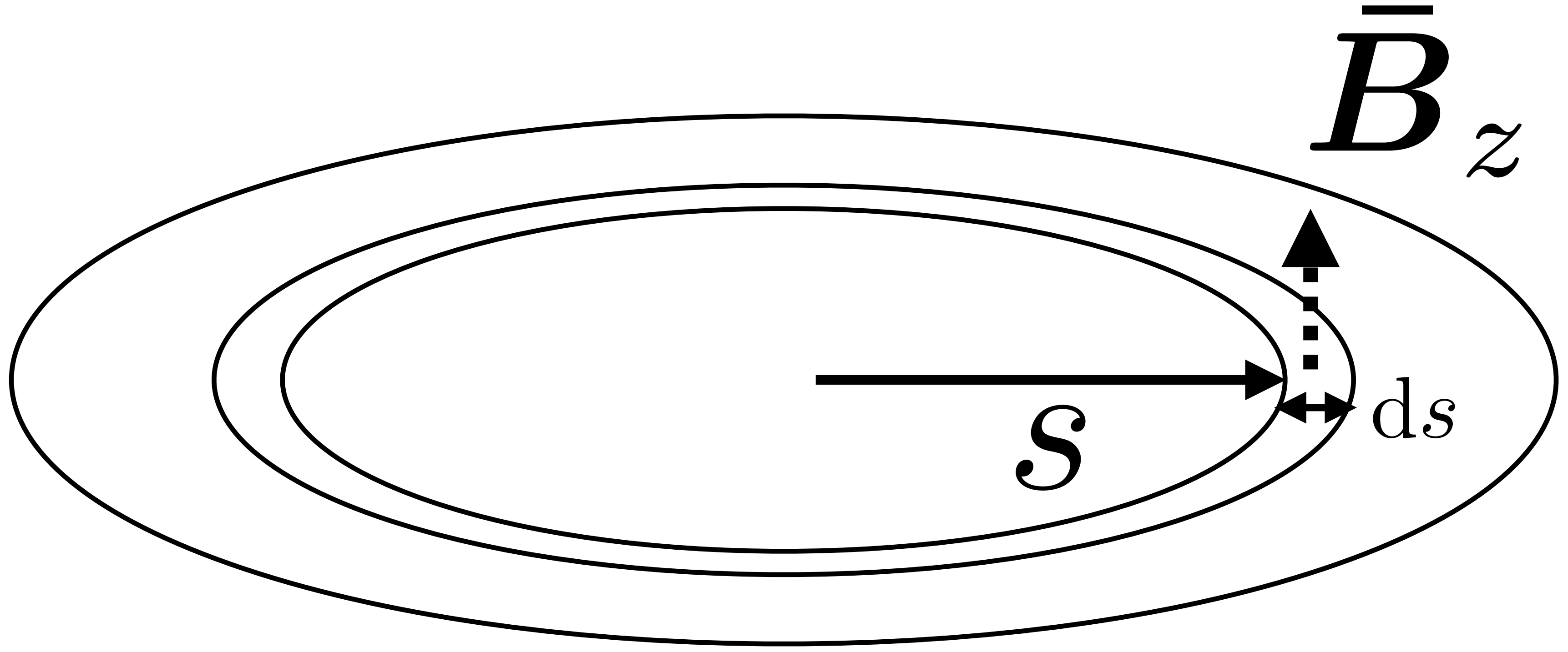
$$B_z = \bar{\boldsymbol{B}} \cdot \hat{\boldsymbol{k}} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2z^2 - s^2}{(s^2 + z^2)^{5/2}}$$

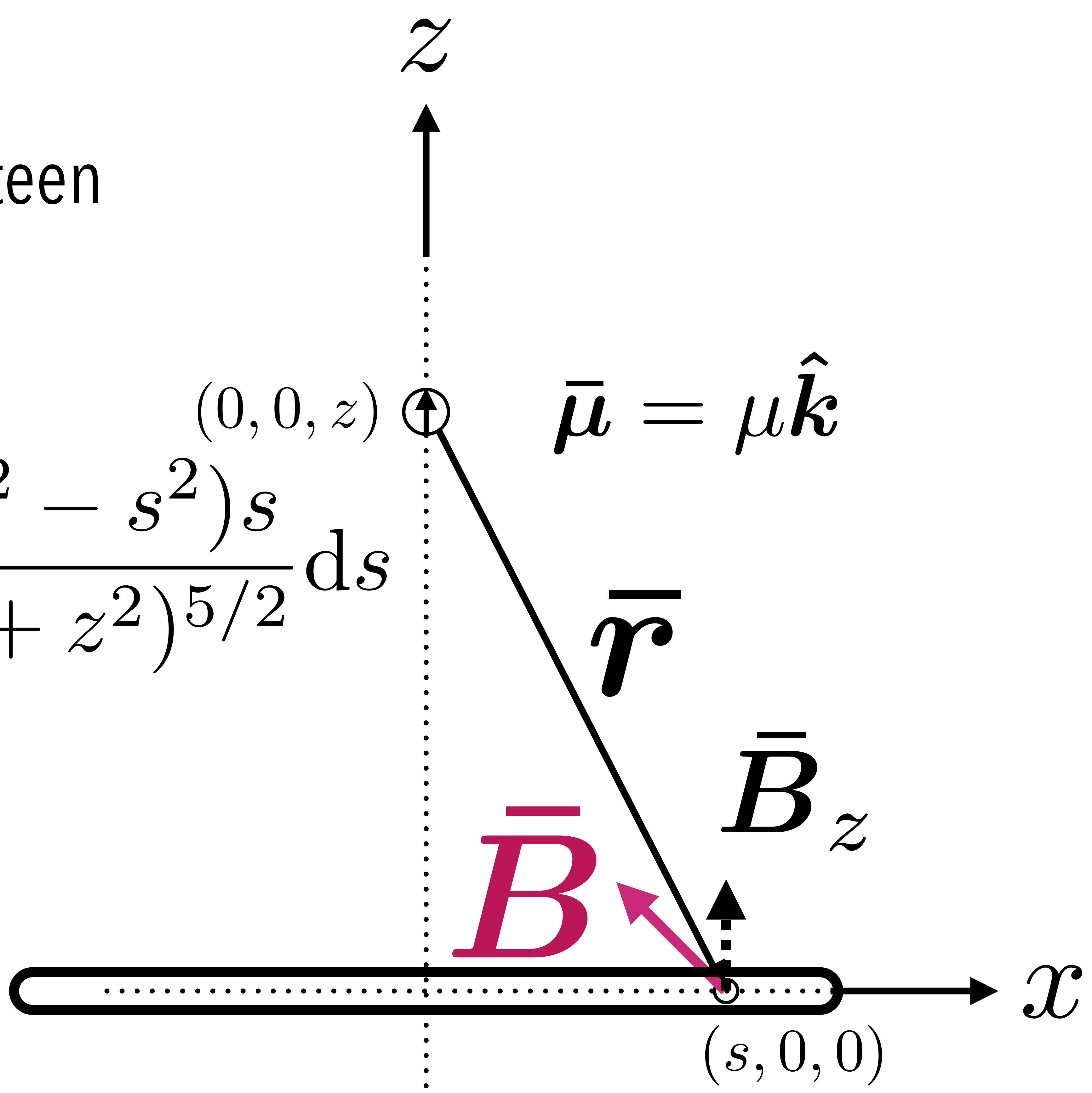
- vuo renkaan läpi on

$$\mathrm{d}\Phi_B = B_z \mathrm{d}A$$

- vuo silmukan rajaaman koko ympyrän läpi saadaan laskemalla yhteen kaikkien renkaiden läpi kulkevat vuot

$$\Phi_B = \int B_z \mathrm{d}A = \int_0^R B_z 2\pi s \mathrm{d}s = \frac{\mu_0 \mu}{2} \int_0^R \frac{(2z^2 - s^2)s}{(s^2 + z^2)^{5/2}} \mathrm{d}s$$





$$\Phi_B = \int B_z \mathrm{d}A = \int_0^R B_z 2\pi s \mathrm{d}s = \frac{\mu_0 \mu}{2} \int_0^R \frac{(2z^2 - s^2)s}{(s^2 + z^2)^{5/2}} \mathrm{d}s$$

$$= \frac{\mu_0 \mu}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

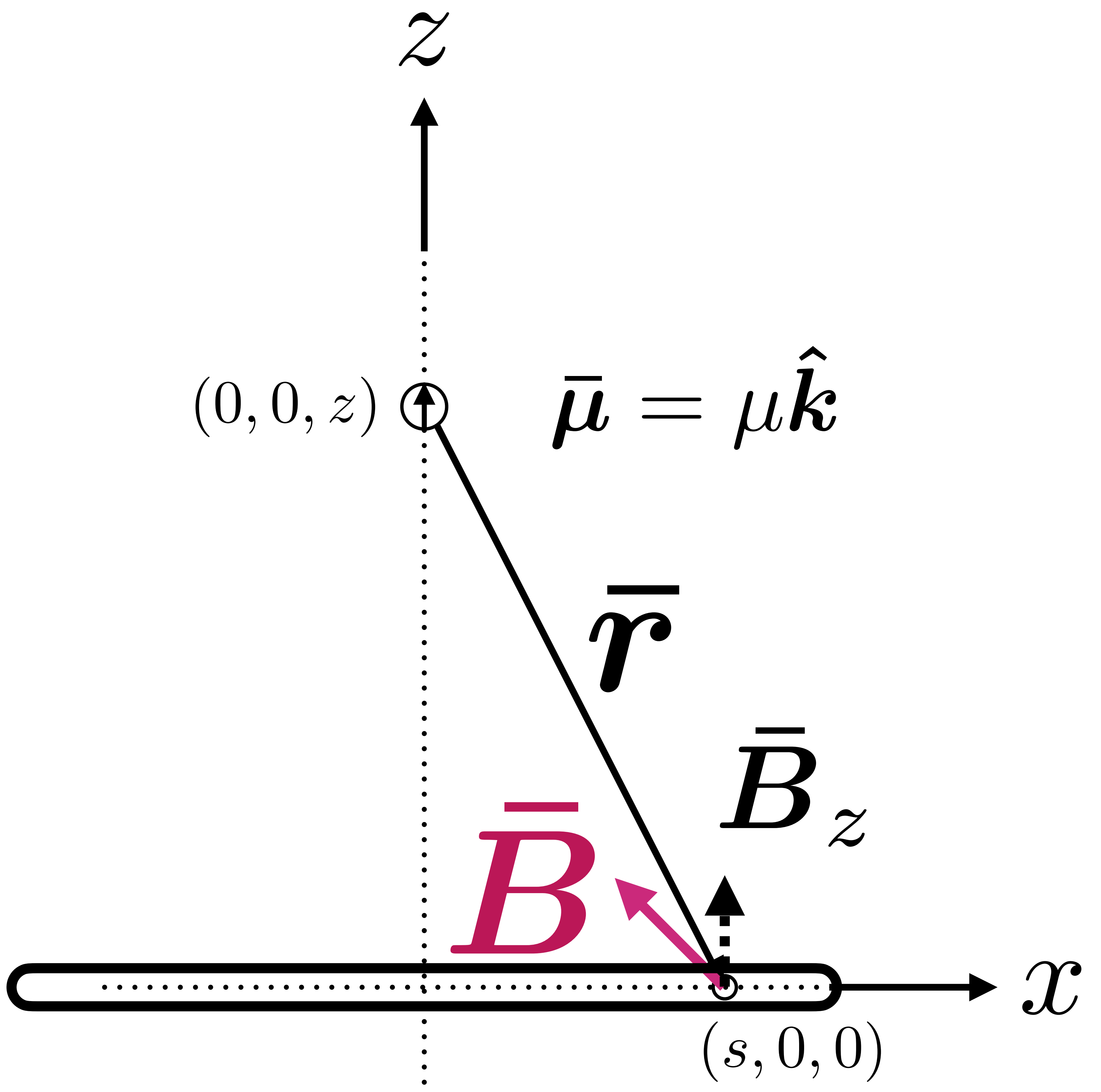
- Tässä lasku Mathematicalla:

```
rvec = {s, -z};
r = Sqrt[rvec.rvec];
runit = rvec / r;
muvec = {0, mu};
bvec = mu0 / (4 Pi) (3 (muvec.runit) runit - muvec) / r^3;
bz = bvec.{0, 1} // Simplify
```

$$-\frac{\text{mu mu0} \left(s^2 - 2 z^2\right)}{4 \pi \left(s^2 + z^2\right)^{5/2}}$$

```
Integrate[bz 2 Pi s, {s, 0, R}, Assumptions → {z > 0, mu0 > 0, mu > 0, R > 0}]
```

$$\frac{\text{mu mu0 } R^2}{2 \left(R^2 + z^2\right)^{3/2}}$$



$$\Phi_B = \int B_z \mathrm{d}A = \int_0^R B_z 2\pi s \mathrm{d}s = \frac{\mu_0 \mu}{2} \int_0^R \frac{(2z^2 - s^2)s}{(s^2 + z^2)^{5/2}} \mathrm{d}s$$

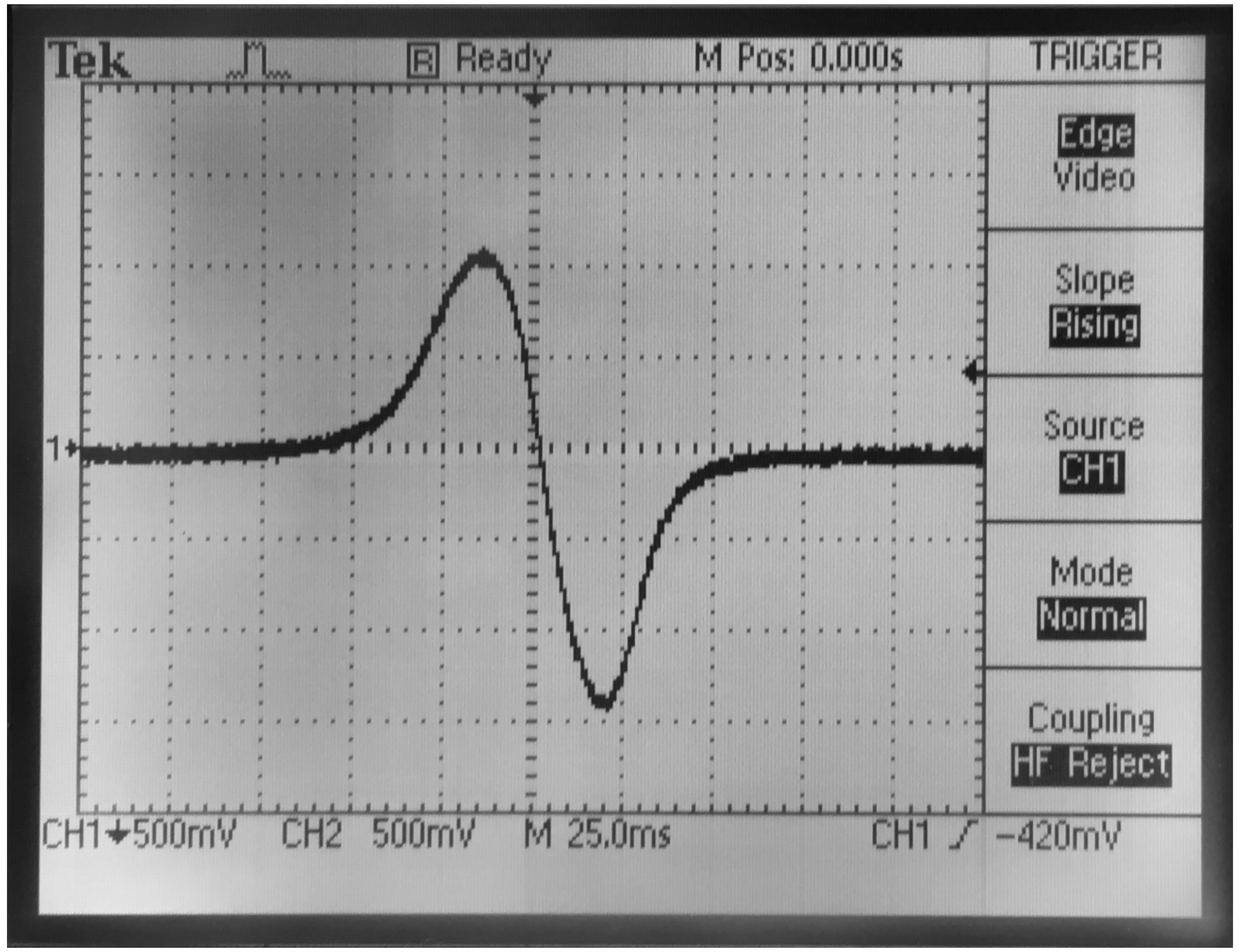
$$= \frac{\mu_0 \mu}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

- Induktiojännite voidaan laskea induktiolailla U = -$\Phi_B'(t)$.
- Magneetti on likimain vapaassa pudotuksessa, joten korkeuden z paikalle voi sijoittaa tasaisesti kiihtyvän liikkeen lausekkeen ajan funktiona.
- Jännite selviää derivoimalla saatu tulos ajan suhteen.

- Huom. tämä malli kuvaa oikein jännitteen kuvaajan kaksi piikkiä, mutta ei täsmälleen kuvaajan muotoa.
- Piikkien muodon ja suhteellisen korkeuden laskeminen oikein edellyttää magneetin ja käämin käsittelyä pistemäistä suurempina kappaleina.

malli: pistemäinen magneetti ja litteä käämi

mitattu jännite



malli: pitkä magneetti ja käämi

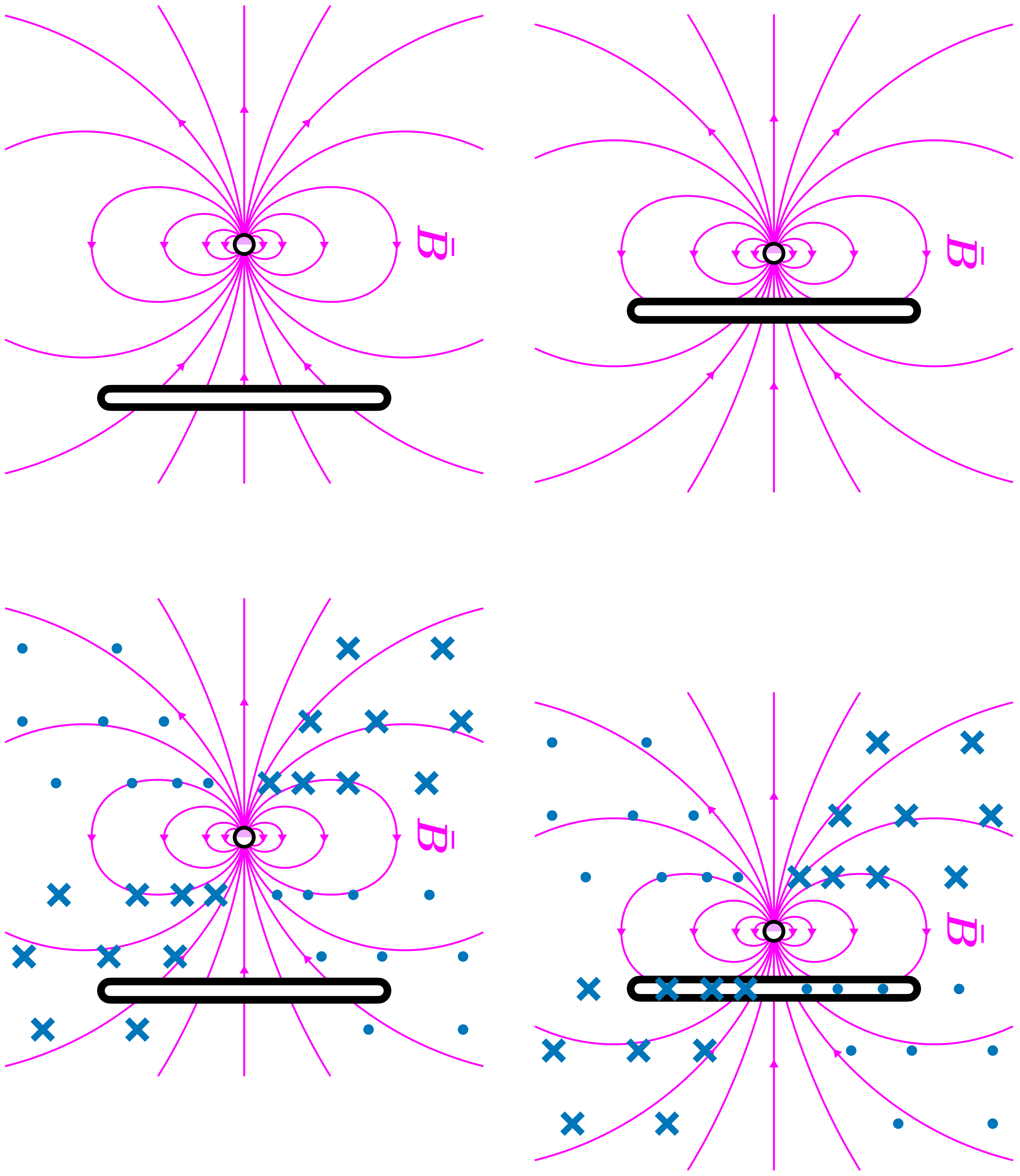
- Jännitteen voi laskea myös hyödyntämällä sähkömagneettisen kentän suhteellisuutta.
- Magneetin koordinaatistossa (A) ei ole sähkökenttää vaan pelkkä magneettikenttä.
- Kun siirrytään käämin (laboratorion) koordinaatistoon (B), voimme laskea sähkökentän tässä koordinaatistossa kentän muunnosyhtälöllä

$$\bar{\boldsymbol{E}}_{(B)} = \bar{\boldsymbol{E}}_{(A)} + \bar{\boldsymbol{v}}_{B(A)} \times \bar{\boldsymbol{B}}_{(A)}.$$

- Tulos on pyörteinen kenttä, ja induktiojännite saadaan sen viivaintegraalina silmukkaa pitkin.

(A)

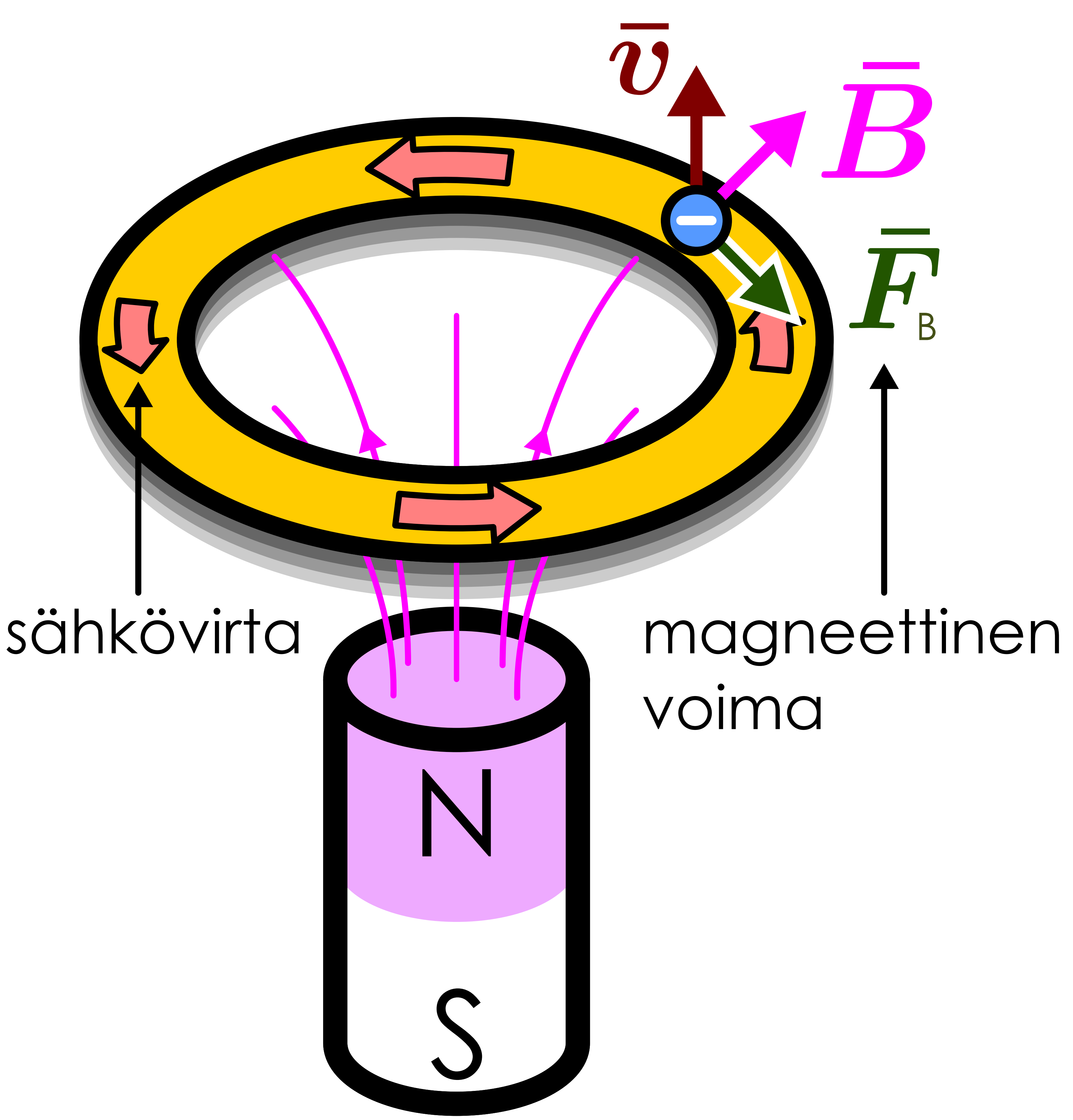
(B)



- Magneetin koordinaatistossa (A) elektronit liikkuvat ja jännite syntyy siitä, että magneettikenttä vetää liikkuvia elektroneja johtimen suunnassa.

- Käämin koordinaatistossa (B) magneetti liikkuu ja jännite syntyy siitä, että pyörteinen sähkökenttä vetää paikoillaan olevia elektroneja johtimen suunnassa.

(A)



(B)