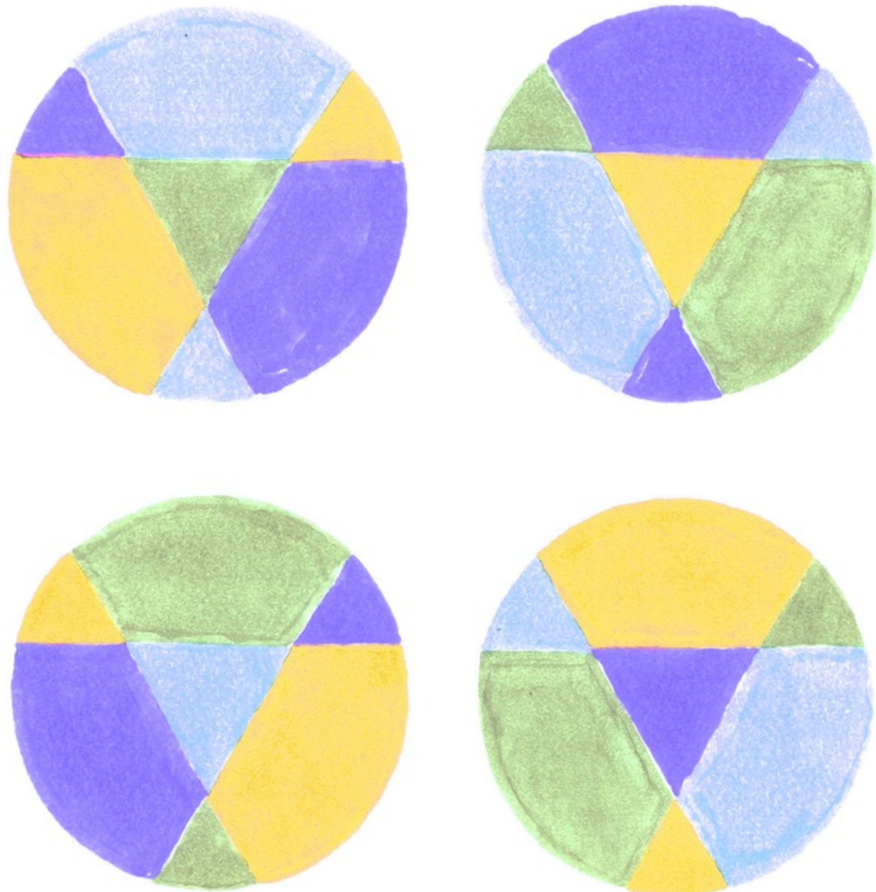
MATEMATIIKKA JA TAIDE:

# JOHDATUS PROJEKTIIVISEEN GEOMETRIAAN

Taneli Luotoniemi

LUMATIKKA 2020



Sekä matematiikkaa että taidetta kuvailtaessa väitetään usein, että niiden tarkoituksena on ympäröivän maailmamme ymmärtäminen.

Harvemmin huomattu tosia on, että kumpikin tiedonala eroaa merkittävällä tavalla humanistisista tieteistä ja luonnontieteistä juuri siinä, että niin matematiikan kuin taiteenkin alalla on täysin luvallista tutkia sellaisiakin asioita, joita ei ole lainkaan olemassa luonnollisessa todellisuudessamme.

Taiteen ja matematiikan luomat 'mahdolliset maailmat' haastavat arkikäsitystämme usein mielikuvituksella tavoilla. Yksi kiehtovimmista matematiikan ja kuvataiteen välimaastoon sijoittuvista, tilallista hahmotuskykyämme venyttävistä ilmiökentistä on projektiivinen geometria.

Viime vuosikymmeninä projektiivisen geometrian rooli on korostunut entisestään esimerkiksi tietokonegrafiikan kehityksen myötä. Myös monet nykymatematiikan osa-alueet rakentuvat juuri projektiivisissa avaruuksissa, joten aiheen intuitiivinen hahmottaminen on tärkeää myös matematiikan näkökulmasta.

Koulussa opitusta geometriasta se eroaa siten, että projektiivisessa geometriassa ei olla kiinnostuneita asioiden mittaamisesta, ja käsitteet kuten etäisyys, pinta-ala, tilavuus, tai kulman suuruus eivät näin ollen kuulu lainkaan projektiivisen geometrian sanastoon. Sen sijaan mielenkiinto kohdistuu sellaisiin kappaleiden ja kuvioiden ominaisuuksiin jotka säilyvät muuttumattomina katselupisteestä riippumatta, kuten sijaitsevatko jotkut pisteet jollakin suoralla, tai kulkevatko jotkut suorat jonkin pisteen kautta.

## KESKEISTÄ KÄSITTEISTÖÄ WIKIPEDIASSA:

Jos projektiivinen geometria ei ole sinulle tuttu aihe entuudestaan, tai jos kaipaat kertausta, lue *yleiskuvaus*-, *historia*-, ja *dualiteetti*-osiot suomenkielisestä wikipedia-artikkelista: https://fi.wikipedia.org/wiki/Projektiivinen_geometria

Tässä materiaalissa käsiteltävät ilmiöt tapahtuvat projektiivisissa avaruuksissa, jotka kiertyvät takaisin itseensä ympyrää tai pallopintaa muistuttavalla tavalla. Kertaa siis englanninkielisestä wikipediasta mitä tarkoitetaan:
projektiivisella suoralla (https://en.wikipedia.org/wiki/Projective_line),
projektiivisella tasolla (https://en.wikipedia.org/wiki/Real_projective_plane),
ja projektiivisilla avaruuksilla yleensä (https://en.wikipedia.org/wiki/Projective_space).

Käsiteltäviä projektiivisen geometrian rakenteita kutsutaan konfiguraatioiksi. Perustietoa konfiguraatioista löytyy täältä:
https://en.wikipedia.org/wiki/Configuration_(geometry)

# ALKEISOSAT:

Projektiivisen geometrian ilmiöt näyttäytyvät avaruuden alkeisosien – eli *pisteiden*, *suorien*, ja *tasojen* keskinäisessä vuorovaikutuksessa. Alkeisosia ei määritellä suoraan, vaan ne käsitetään keskinäisten vuorovaikutuksiensa perusteella.

Alkeisosien välisistä vuorovaikutuksista perustavanlaatuisin on *keskinäinen kuuluminen*:

Jokaiseen **pisteeseen** kuuluu loputon määrä **tasoja**. Näin ajateltuna piste näyttäytyy *tasokimppuna*.

Jokaiseen **tasoon** kuuluu loputon määrä **pisteitä**. Näin ajateltuna taso näyttäytyy *pistekenttänä*.

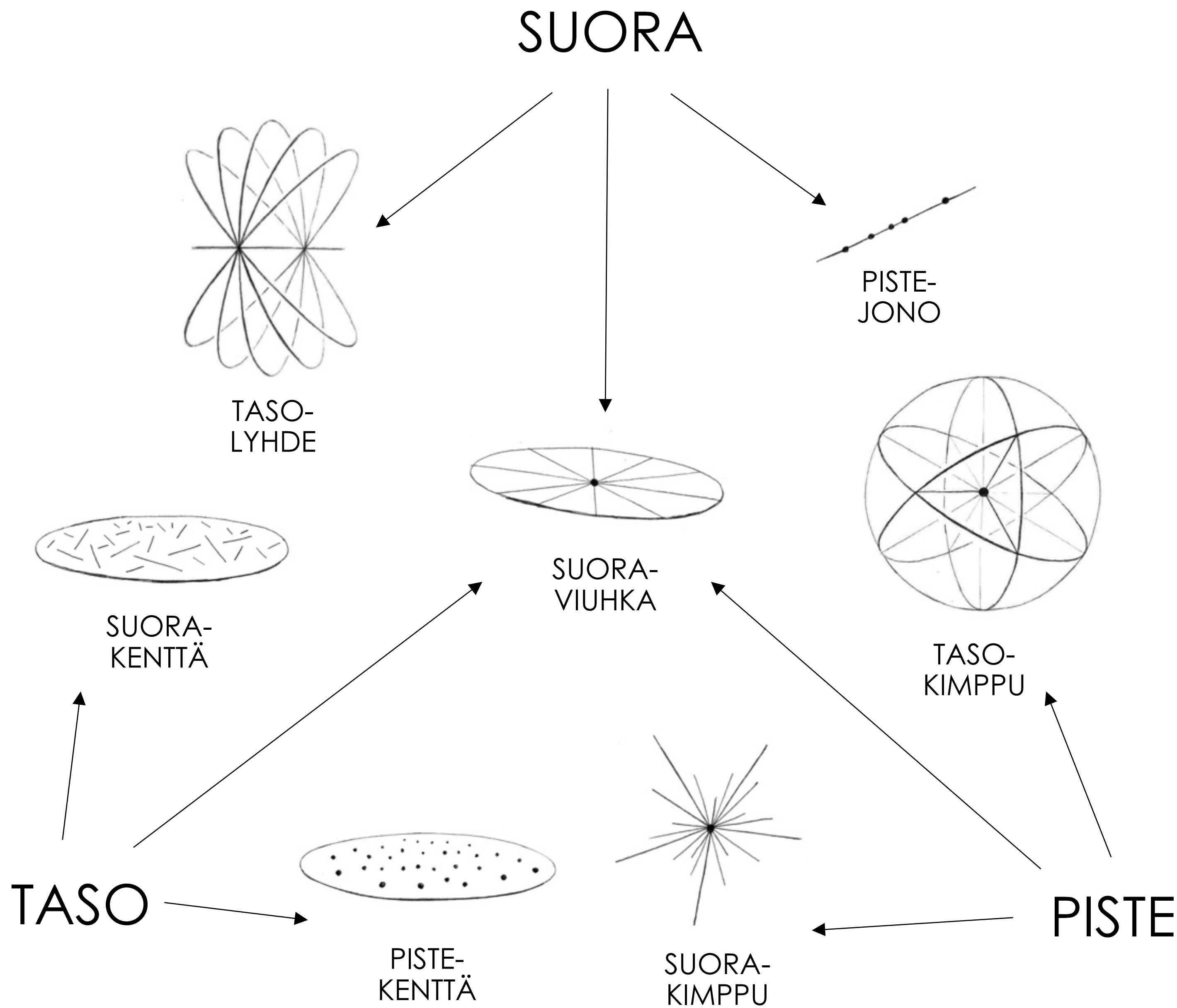
Jokaiseen **pisteeseen** kuuluu loputon määrä **suoria**. Näin ajateltuna piste näyttäytyy *suorakimppuna*.

Jokaiseen **tasoon** kuuluu loputon määrä **suoria**. Näin ajateltuna taso näyttäytyy *suorakenttänä*.

Jokaiseen **suoraan** kuuluu loputon määrä **tasoja**. Näin ajateltuna suora näyttäytyy *tasolyhteenä*.

Jokaiseen **suoraan** kuuluu loputon määrä **pisteitä**. Näin ajateltuna suora näyttäytyy *pistejonona*.

Jos **piste** ja **taso** kuuluvat toinen toisiinsa, silloin on olemassa loputon määrä **suoria** jotka kuuluvat kumpaankin. Ne muodostavat *suoraviuhkan*.


SUORA
TASO-
LYHDE
PISTE-
JONO
SUORA-
VIUHKA
SUORA-
KENTTÄ
TASO-
KIMPPU
TASO
PISTE-
KENTTÄ
SUORA-
KIMPPU
PISTE

# PAPPOKSEN LAUSE:

Varhaisen, luonteeltaan projektiivisen lauseen esitti 300-luvulla elänyt Pappos Aleksandrialainen:

**Tehtävä:** Piirrä kaksi suoraa, ja kummallekin niistä kolme pistettä.

Numeroi pisteet niin että parilliset pisteet ovat toisella suoralla, ja parittomat toisella.

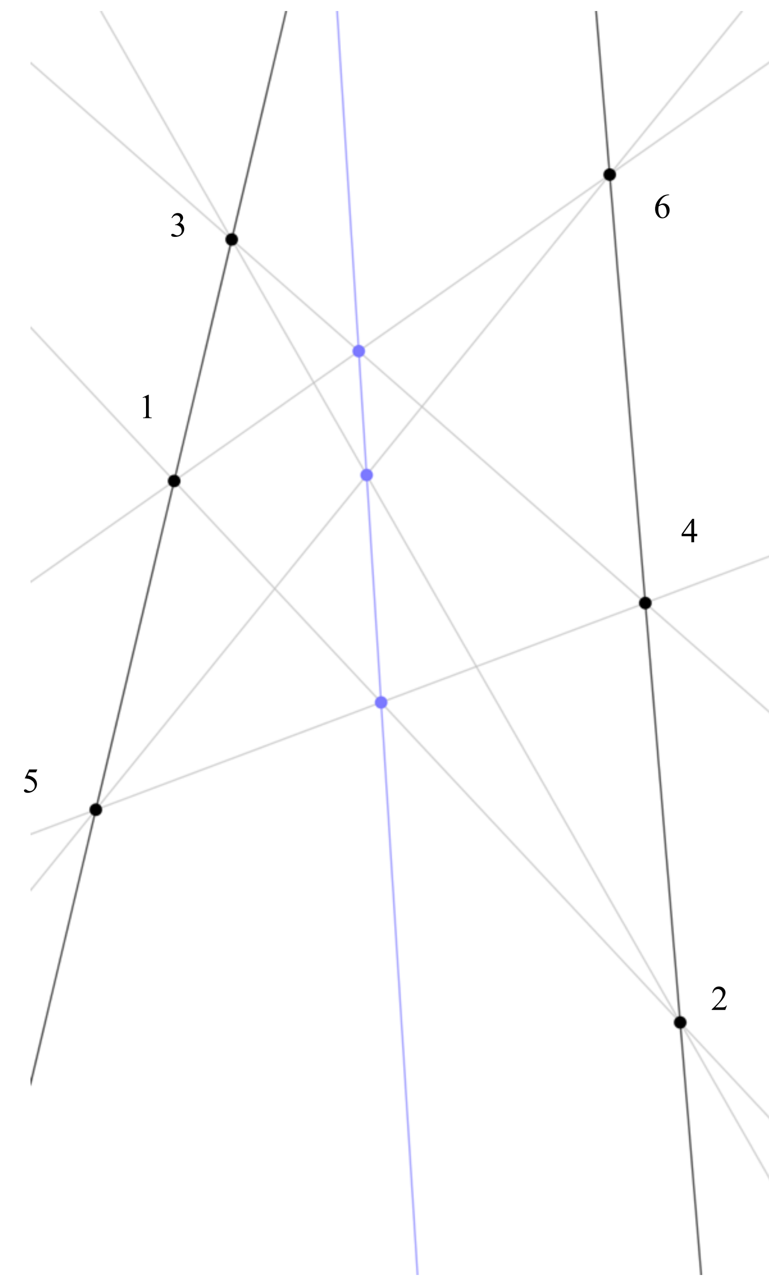
Yhdistä pisteet suorilla numerojärjestyksessä yhdestä kuuteen, ja kuudesta takaisin yhteen.

Paperilla on nyt kuudesta suorasta koostuvat kuusisivuinen sykli.

Etsi niiden suorien leikkauspisteet, jotka ovat syklin vastakkaisilla puolilla.

Nämä kolme pistettä ovat aina kaikki samalla suoralla!

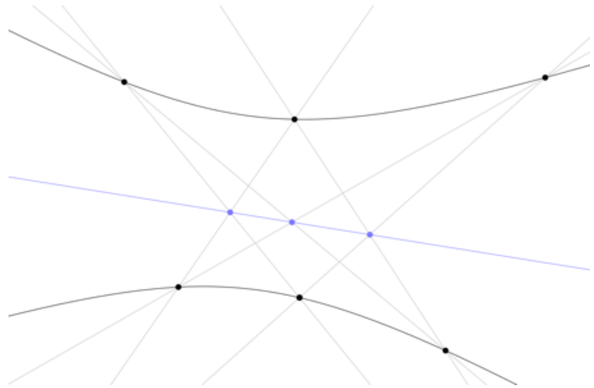
Kokeile erilaisia muunnelmia Pappoksen kuviosta ja vakuuta itsesi siitä että lause on totta joka tilanteessa.

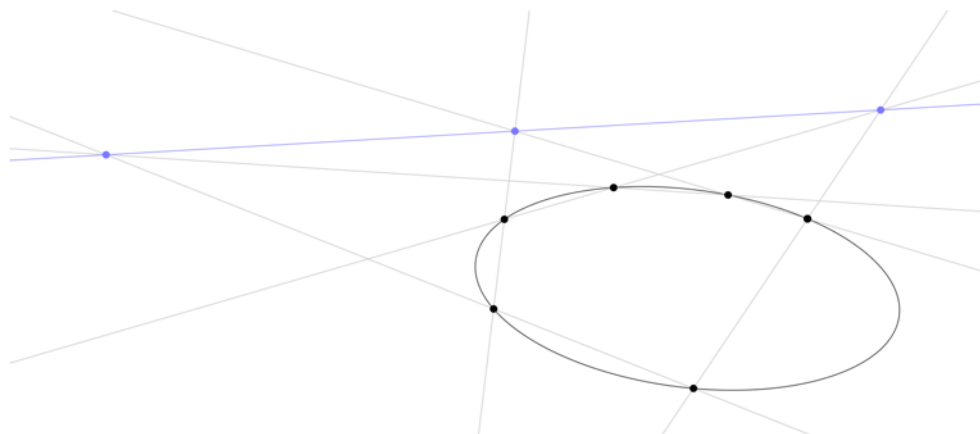


# PASCALIN LAUSE:

Ollessaan kuusitoistavuotias, Blaise Pascal huomasi että Pappoksen lause pätee myös mille tahansa jotakin kartioleikkausta sisustavalle kuusikulmiolle. (Itse asiassa Pappoksen lauseessa esiintyneet kaksi suoraa olivatkin eräänlainen degeroitunut kartioleikkaus)

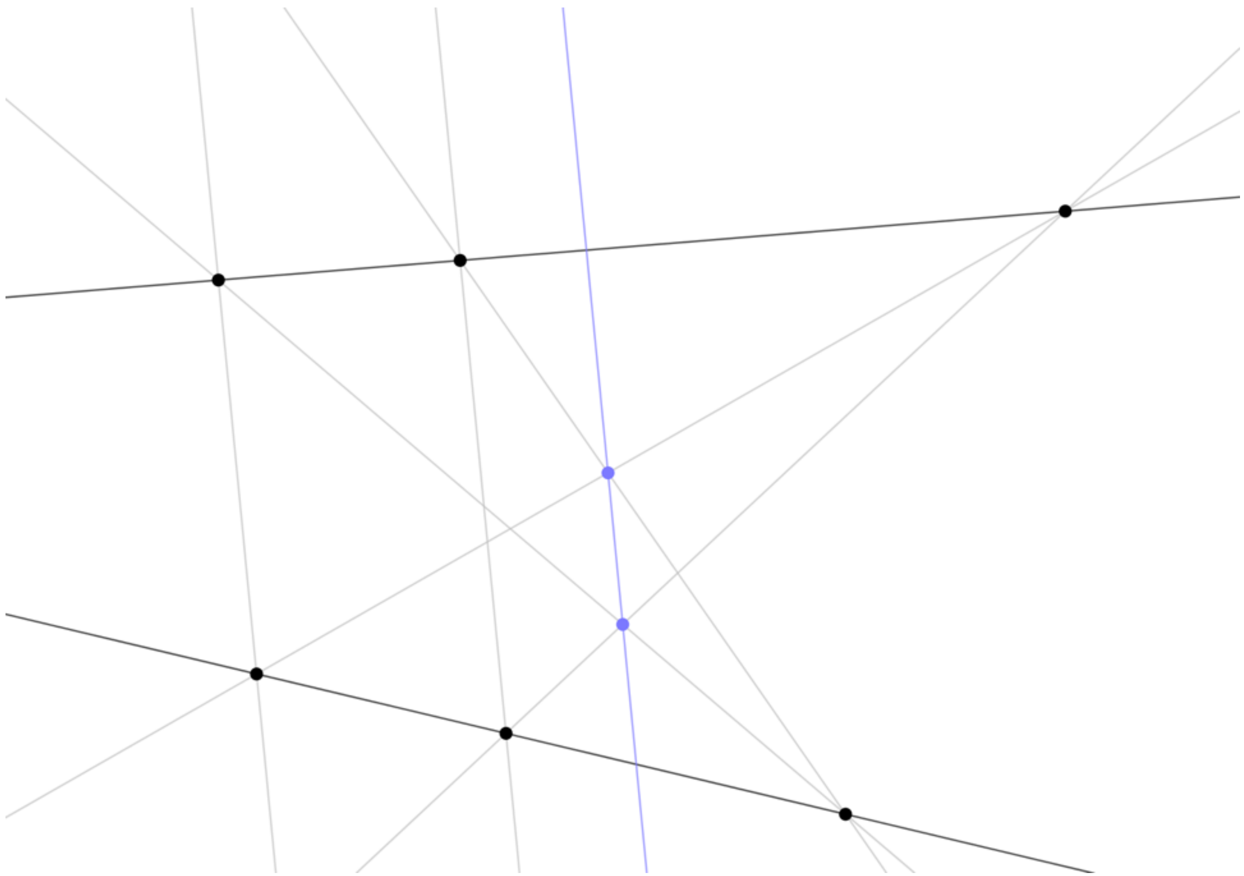
Blaise Pascal (1623-1662)





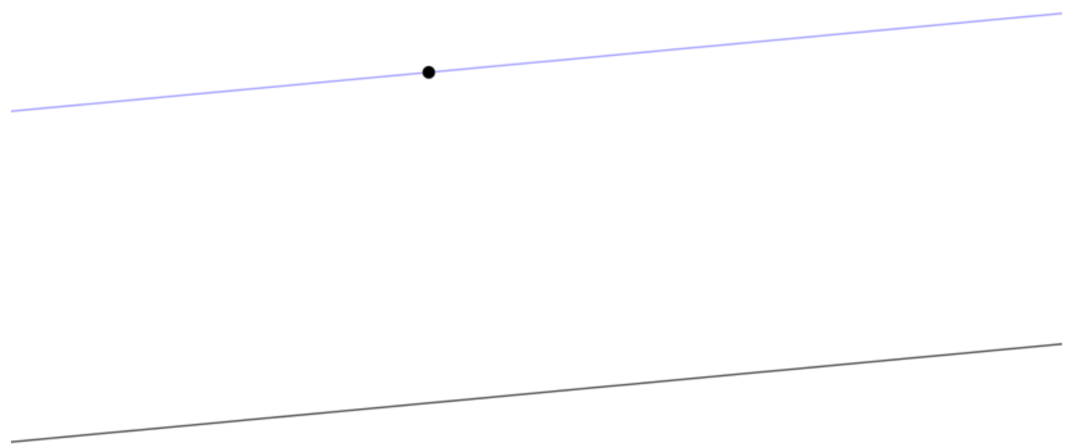
# PAPPOKSEN LAUSEEN ‘ERITYISTAPAUS’?

Jos piirrät Pappoksen kuvion niin, että kaksi kuusikulmion vastakkaisista sivuista onkin samansuuntaisia, on myös konstruktion tuloksena syntynyt ’Pappoksen suora’ samansuuntainen niiden kanssa. Projektiivisessa geometriassa tätä ei kuitenkaan pidetä erityistapauksena, vaan yhden leikkauspisteistä ajatellaan sijaitsevan ’äärettömyydessä’. Seuraavaksi käsittelemme tämän äärettömyyden roolia projektiivisessa geometriassa.



# EUKLIDEEN PARALLEELIAKSIOOMA:

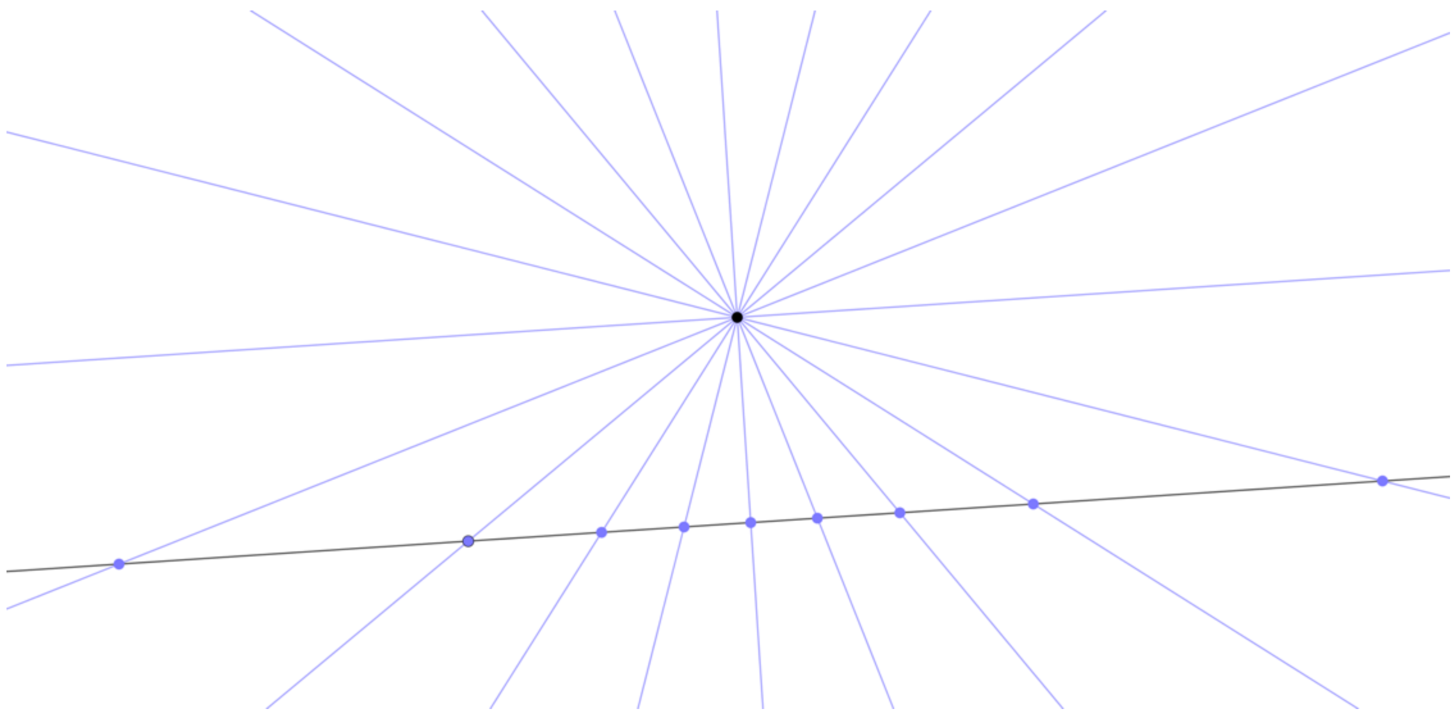
Euklideen kuuluisan viidennen postulaatin, eli paralleeliaksiooman mukaan jokaiseen tason suoraviuhkaan kuuluu yksi, ja vain yksi, sellainen suora, joka on *yhdensuuntainen* annetun viuhkaan kuulumattoman suoran kanssa. Nämä kaksi suoraa eivät siis leikkaa toisiaan missään.



# ÄÄRETTÖMYYSPISTE

Tutkitaanpa kuitenkin tilannetta tarkemmin, ja tarkastellaan kahta suoraa:
Toinen niistä on siis annettu, ja toinen pyörii tasaisella vauhdilla vastapäivään annetun pisteen pisteen ympäri.
Mitä suorien leikkauspisteelle tapahtuu?

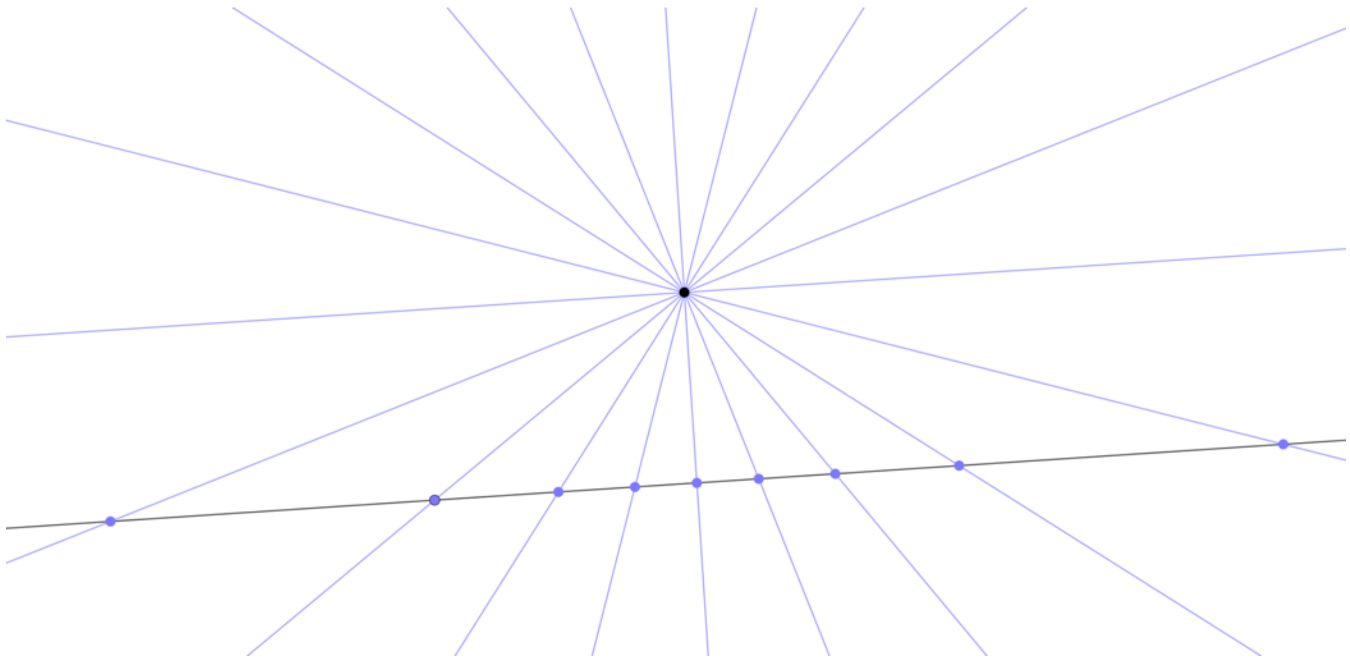
Leikkauspiste liikkuu annettua suoraa pitkin kiihtyvällä vauhdilla oikealle kunnes katoaa kaukaisuuteen. Mutta sitten piste ilmestyykin vasemmalta takaisin suoralle!



# PROJEKTIIVINEN SUORA

Projektiivisessa geometriassa ajatellaan, että suoralla on ns. ideaalipiste, joka sijaitsee äärettömän kaukana sekä oikealla ja vasemmalla. Koska tätä ’äärettömyyspistettä’ kohti voi matkustaa sekä kumpaankin suuntaan liikkuen, liimaa se suoran ikään kuin itseensä sulkeutuvaksi sykliksi.

Projektiivinen suora on siis luonteeltaan samanlainen objekti kuin pistekin:
Aivan kuten suora voi kiertyä pisteen ympäri kunnes saavuttaa alkuperäisen asemansa jälleen,
voi pistekin liikkua suoralla saapuen jälleen alkuperäiseen asemaansa.



Koska kaikki projektiivisen tason samansuuntaisena näyttäytyvät suorat leikkaavat toisensa yhdessä äärettömyyspisteessä, muodostuu kaikista näistä pisteistä ’äärettömyyssuora’ tasolle, kuin kauas taivaanrantaan.

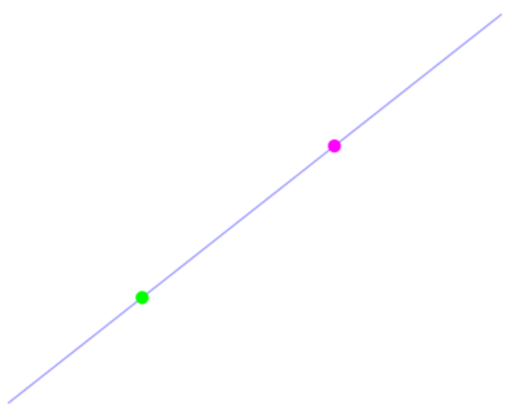
Myös projektiivisen avaruuden kaikki samansuuntaisena näyttäytyvät tasot leikkaavat toisensa yhdellä äärettömyyssuoralla, ja kaikista näistä suorista muodostuu ’äärettömyystaso’.

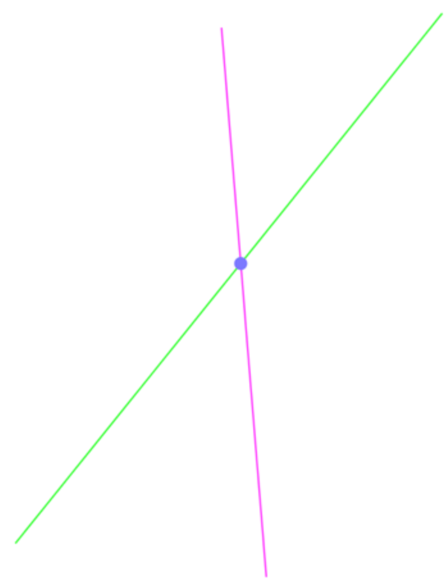
# PROJEKTIIVISEN TASON SUORAT LEIKKAAVAT TOISENSA AINA

Euklidisessa tasossa kaksi pistettä määrittää aina yksikäsitteisen suoran, mutta kaksi suoraa määrittää yksikäsitteisen pisteen vain silloin kun suorat eivät ole yhdensuuntaisia.

Projektiivisessa tasossa tätä kauneusvirhettä ei ole, sillä kaksi suoraa leikkaavat toisensa aina.

Projektiivisessa tasossa siis kaksi pistettä määrittää yksikäsitteisen suoran, ja kaksi suoraa määrittävät yksikäsitteisen pisteen – suorien leikkauksen.

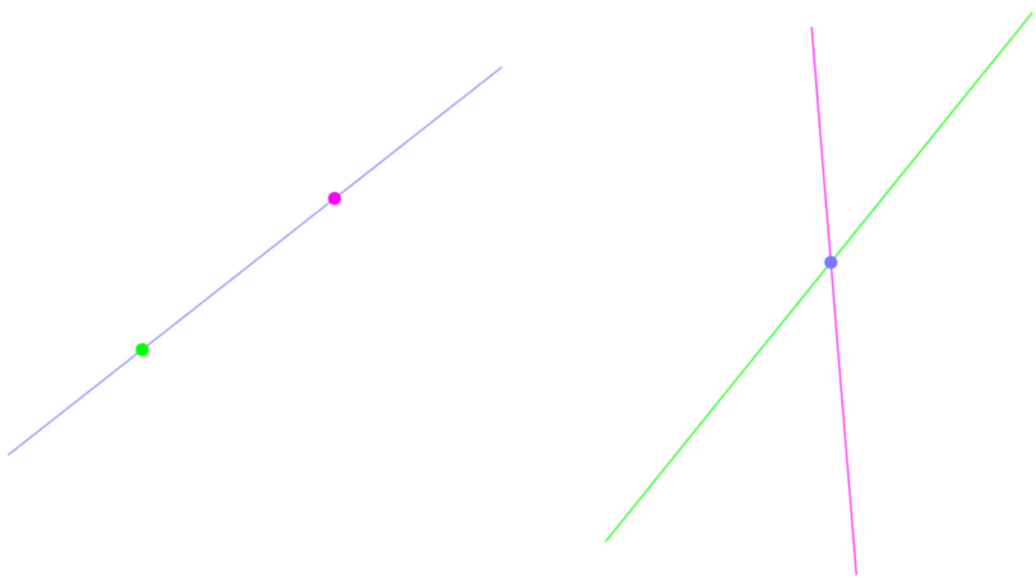




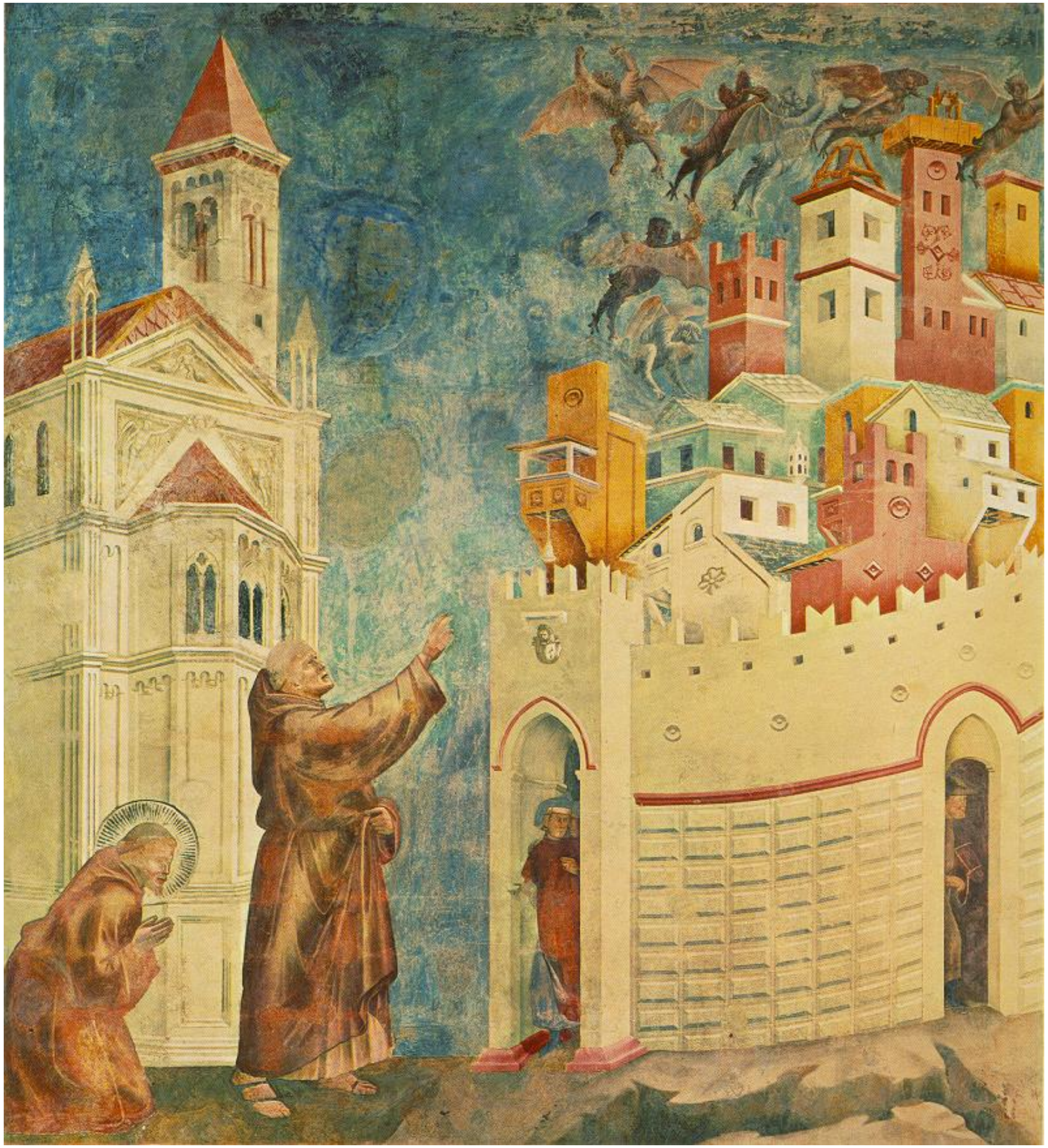
# PROJEKTIIVINEN KAHTALAISUUS

Projektiivisen geometrian tärkeimpiä ominaisuuksia onkin johdonmukainen kahtalaisuus – täydellinen symmetria, joka vallitsee tasossa pisteitä ja suoria koskevien lauseiden välillä, ja avaruudessa pisteitä ja tasoja koskevien lauseiden kesken.

Yksi projektiivisen dualismin keskeisiä hyötyjä on sen kyky haastaa atomistista ajattelutapaamme, jossa piste oletetaan aina jakamattomaksi perusosaksi, josta suorat ja tasot rakentuvat. Dualismin avulla voidaan avata uusia näkökulmia tilalliseen ajatteluun, jossa esimerkiksi toisiaan leikkaavat tasot olisivatkin avaruuden ’alkeishiukkasia’. Näin syntyvällä ’vasta-avaruudella’ (Gegenraum) on myös mielenkiintoisia kulttuurisia viittauksia muun muassa antroposofiseen mystiikkaan.



**Tehtävä**: Muodosta Pappoksen lauseen duaaliversio seuraten projektiivisen kahtalaisuuden periaatetta.
Vihje: Koska Pappoksen konstruktion lopputuloksena saatiin kolme samalla suoralla olevaa pistettä, tulisi Pappoksen lauseen duaalin lopputuloksena saada kolme saman pisteen kautta kulkevaa suoraa.



Giotto: *Esorcismo dei Demoni di Arezzo,* 1299

Vaikka löysimme luonteeltaan projektiivisia tutkimustuloksia jo Pappos Aleksandrialaiselta (300-luku), syntyi varsinainen projektiivinen geometria vasta renessanssimaalareiden perspektiivitutkimusten pohjalta.

Maalarit osasivat jo varhain kuvata erillisiä kohteita 'perspektiivissä', mutta haasteena oli ihmisten, esineiden, ja rakennuksien keskinäisten tilallisten suhteiden esittäminen siten, että kuvapinnalle syntyisi vaikutelma kohteiden jakamasta yhtenäisestä avaruudesta.

Renessanssimaalareiden patenttiratkaisu tähän ongelmaan oli kuvata hahmot laatoitetulla lattialla, mikä antoi näkymille yhtenäisen tilailluusion.

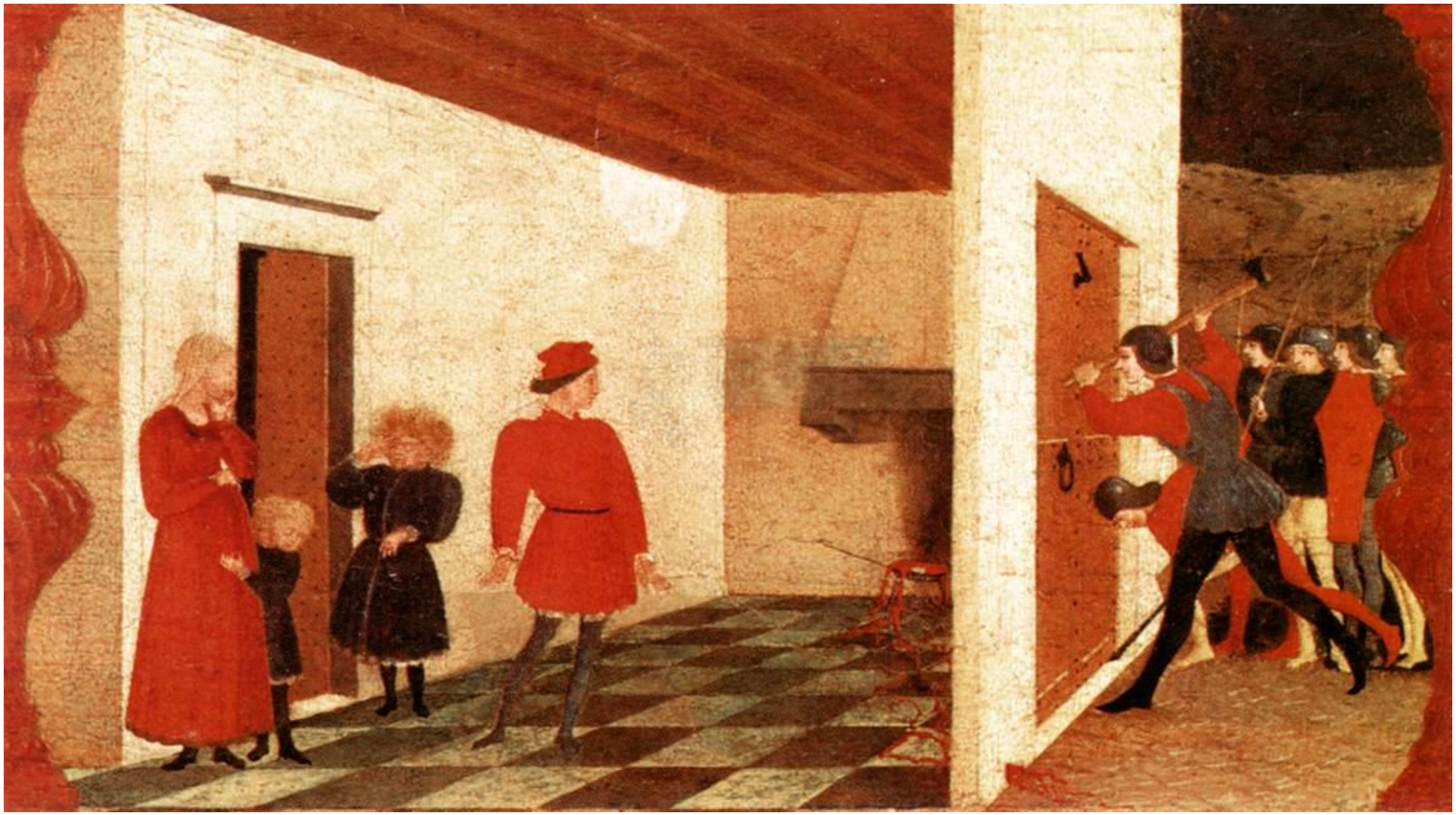
Piero della Francesca: *Flagellazione di Cristo*, n. 1455–1460

Yksi inspiraatio suorakaideruudukon käyttöön renessanssin perspektiivikuvissa saattoi olla Ptolemaioksen *Geographia* (noin vuodelta 150), jonka kopio saapui Firenzeen noihin aikoihin. Teos sisälsi geometrisen konstruktion, jolla maapallon leveys- ja pituuspiirit voitiin kuvata järjestelmällisesti tasossa.


Ptolemaioksen *Geographia*, noin vuodelta 150 (kuvassa 1300-luvulta peräisin oleva kopio)

Maalarit käyttivät lähes ainoastaan yhden pakopisteen sommitelmaa, jossa syvyyssuuntaiset suorat pakenivat katoamispisteeseen taivaanrannassa, ja muut kohtisuorat myötäilivät maalauspohjan reunoja.

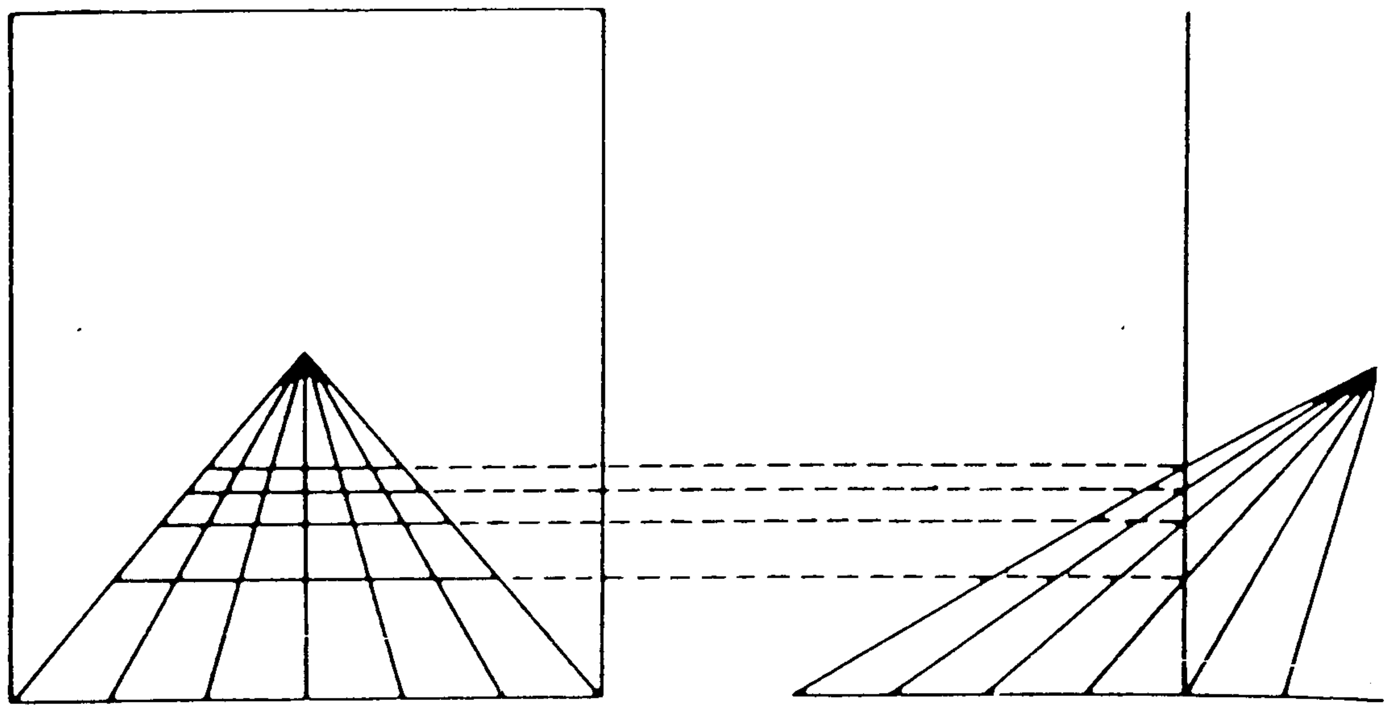
Haasteena oli kuitenkin lattian vaakasuorien linjojen tihentyminen kohti horisonttia, kuinka esittää se oikeaoppisesti?



Paolo Uccello: *Cattura dell'ebreo*, n.1467-1469

Leon Battista Alberti tarjosi ratkaisun teoksessaan *Della Pittura* (1435), hyödyntäen Filippo Brunelleschin 1420-luvulla tekemiä perspektiivikokeita.

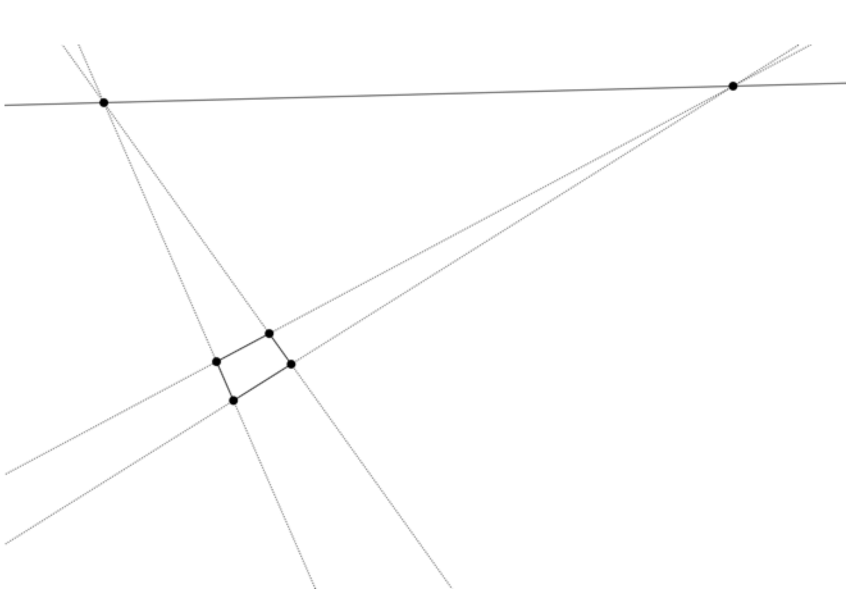
Konstruktioonsa Alberti käytti kuva-alueen ulkopuolelle, maalauspohjan reunaan merkittyä etäisyyspistettä, joka esitti katselupisteen etäisyyden kuvatasosta, kuvan kanssa samaan käännettynä.

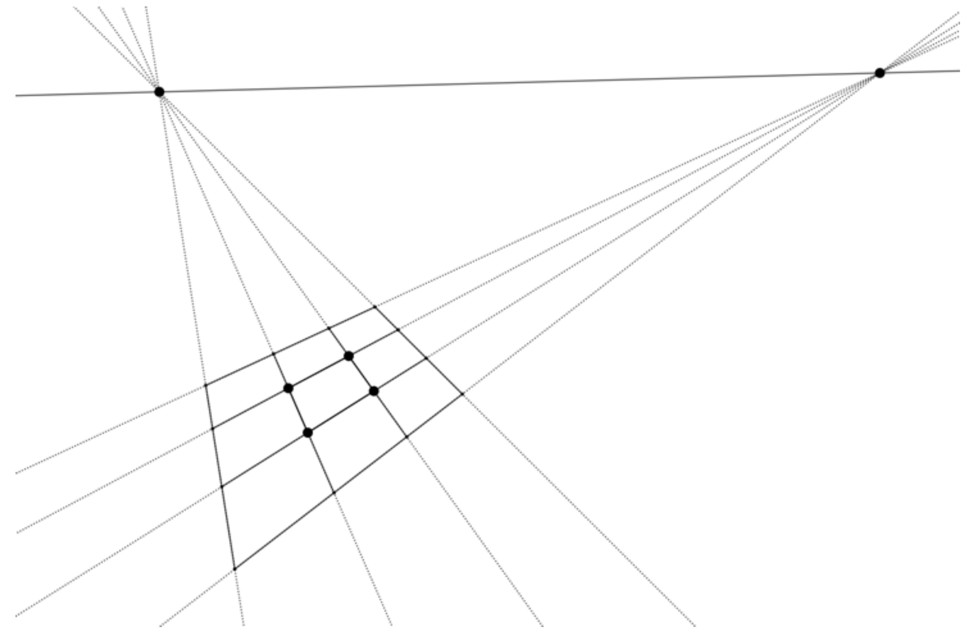


(a) (b)

# TEHTÄVÄ:

Keksitkö helpomman tavan piirtää paperille suorakaiteista koostuvan laattalattian, kahden pakopisteen perspektiivikuvana?





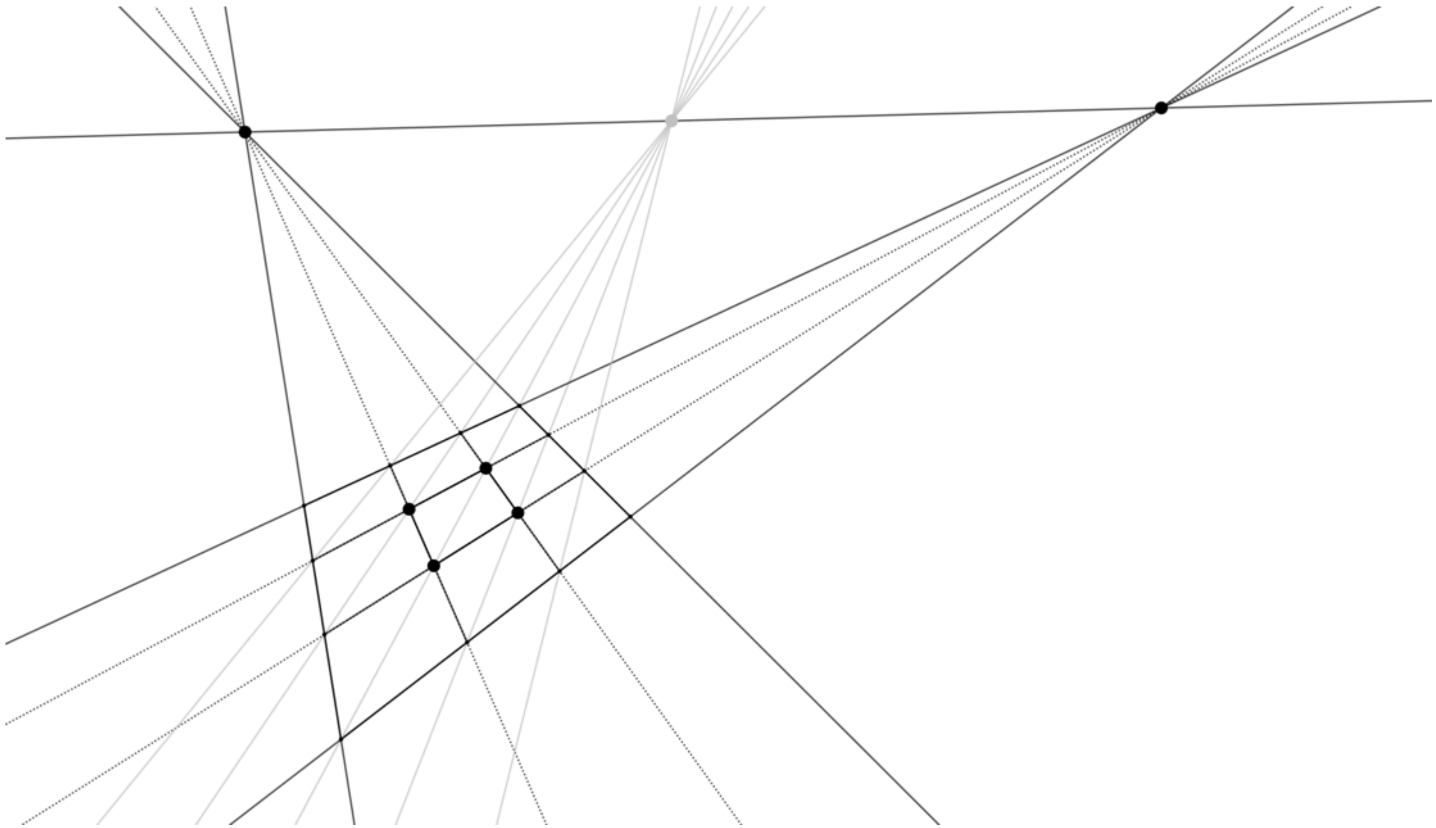
Aloita  yhdestä mielivaltaisesta nelikulmiosta, ja etsi sen sivujen leikkauspisteet, jotka yhdistämällä saat taivaanrantaa kuvaavan suoran.

Tiedät että myös ympäröivien nelikulmioiden tulee yhtyä samoihin pakopisteisiin, mutta miten löydät niiden kärkien oikeat sijainnit?

*VAROITUS: RATKAISU SEURAAVALLA SIVULLA!*

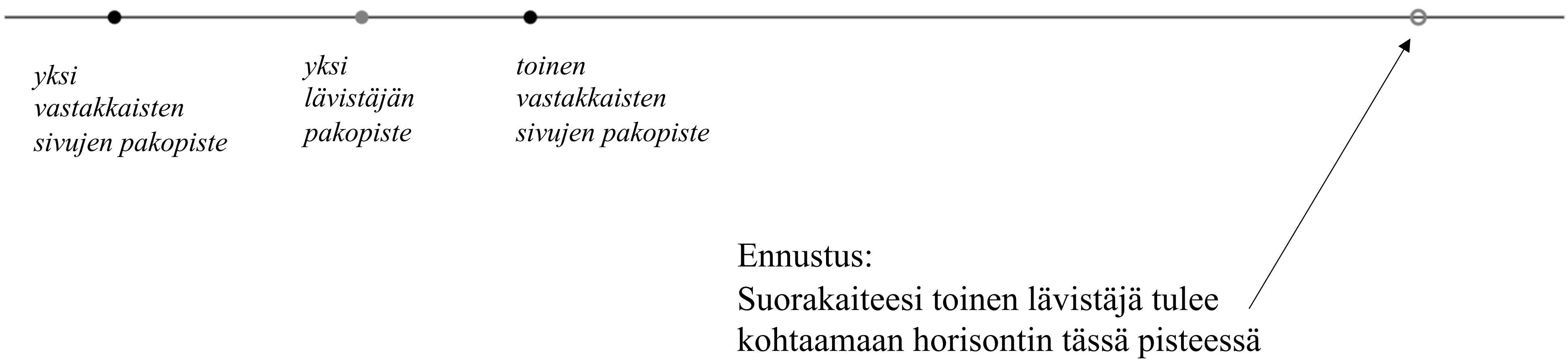
Ratkaiseva oivallus on, että myös suorakaiteiden lävistäjät ovat yhdensuuntaiset, joten ne yhtyvät taivaanrannassa omassa katoamispisteessään.

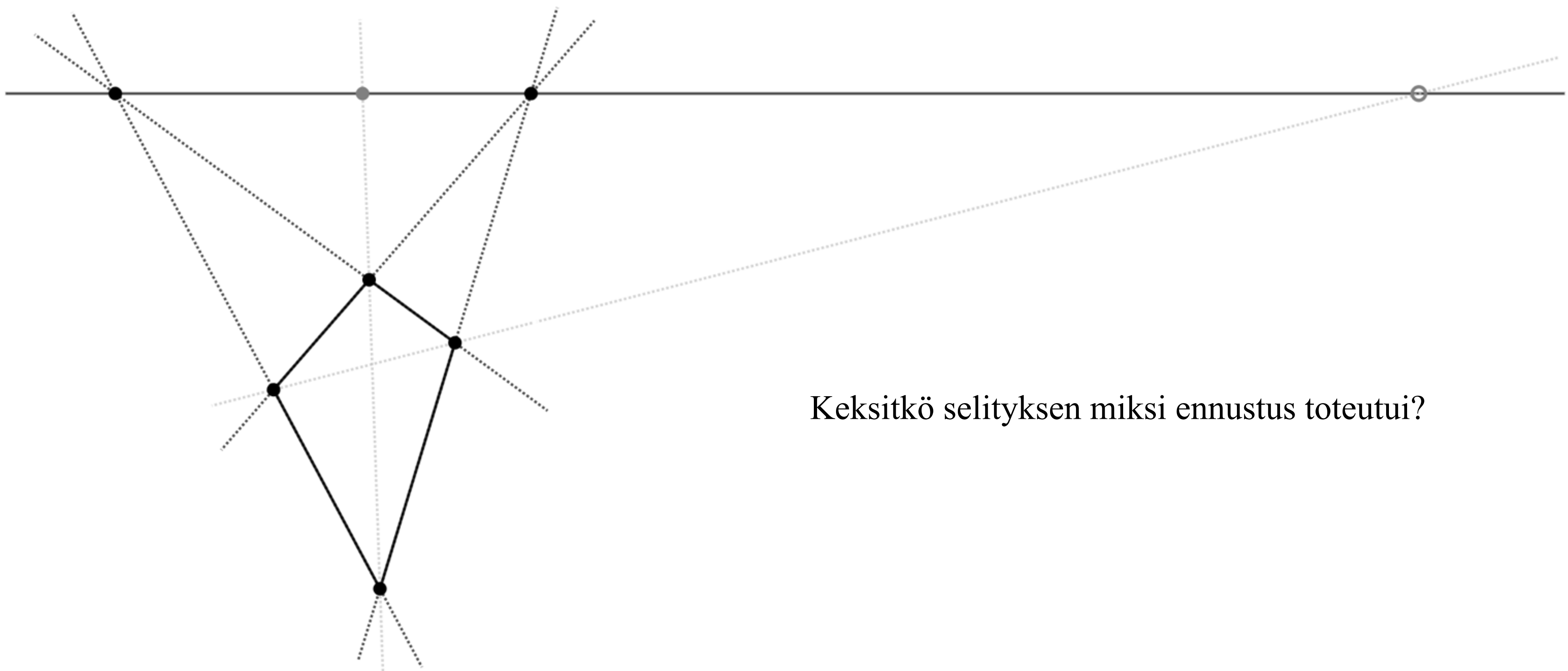
Näin perspektiivikuvan konstruointi onnistuu oikeaoppisesti!



PROJEKTIIVINEN TAIKATEMPPU:

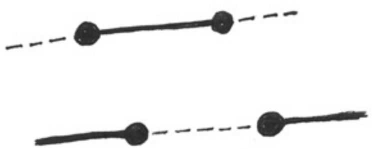
Tulosta tämä sivu, ja piirrä suorakaiteen perspektiivikuva minne tahansa paperille käyttäen annettua horisonttia, sekä vastakkaisille sivuille ja yhdelle lävistäjälle annettuja pakopisteitä.



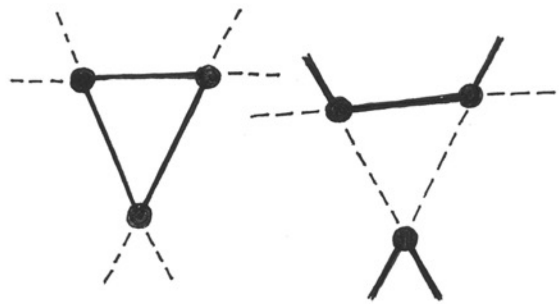


Keksitkö selityksen miksi ennustus toteutui?

Koska projektiiviset avaruudet kiertyvät itseensä pallopintaa muistuttavalla tavalla, on hyvä huomata että pisteiden, suorien ja tasojen rajaamat tilat eivät välttämättä aina piirry kuviimme ja malleihimme ’ehjinä’, vaan niiden osat saattavat kiertyä äärettömyyden kautta vastakkaisille puolille kuviota:

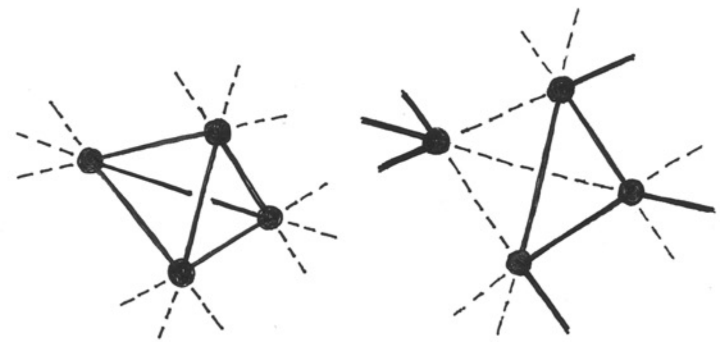


Kaksi tapaa miten kaksi pistettä voivat rajata janan projektiiviselta suoralta



Kaksi tapaa, joilla kolme suoraa voivat rajata kolmionmuotoisen alueen projektiiviselta tasolta

**Tehtävä** : Montako kolmionmuotoista aluetta kolme suoraa yhteensä määrittävät?

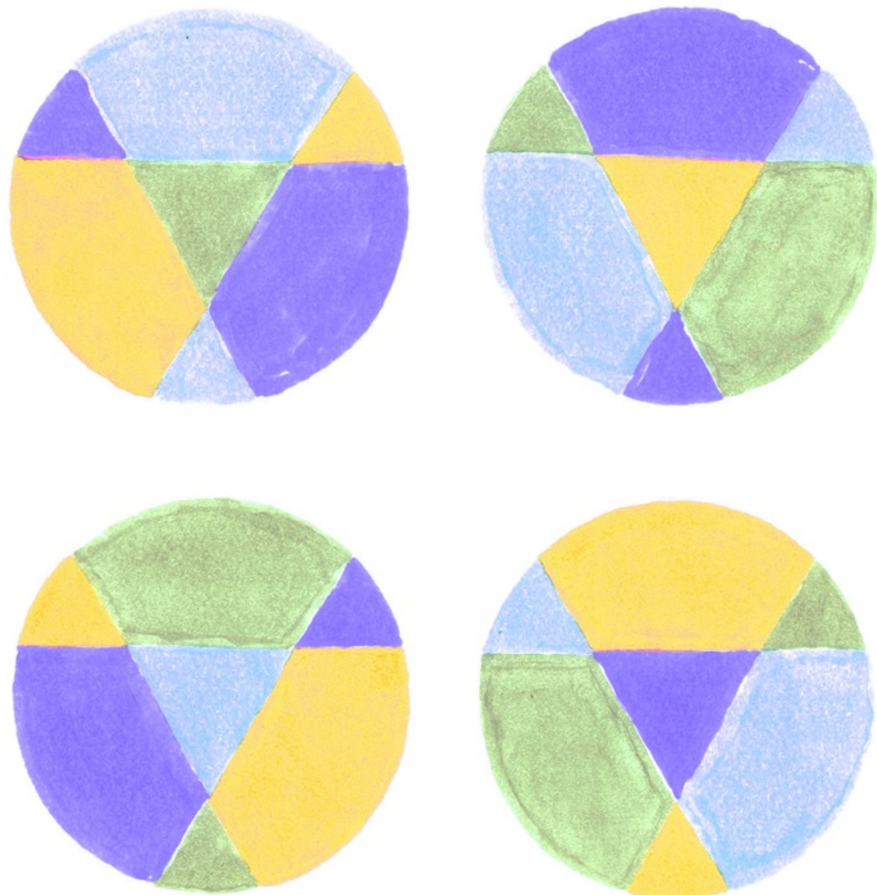


Kaksi esimerkkiä tavoista, joilla neljä tasoa voivat rajata tetraedrinmuotoisen tilan projektiivisessa avaruudessa

**Tehtävä** : Montako tetraedrinmuotoista tilaa neljä tasoa yhteensä määrittävät?

(ratkaisut/apua seuraavilla sivulla)

Kolme suoraa jakavat projektiivisen tason neljään osaan.
Alla olevissa kuvissa katse on kohdistettu vuorollaan kuhunkin alueeseen, siten että kukin näyttäytyy vuorollaan ’ehjänä’.
Vaikka kuviot näyttäytyvät euklidiseen silmäämme erilaisina, ovat ne yhteneviä projektiivisessa tasossa.



Entä montako tetraedrinmuotoista tilaa projektiivisessa avaruudessa neljä tasoa määrittävät?

Kokoa kuudesta tikusta (grillivartaista, kasvitukikepeistä, tms.) tetraedrin muotoinen asetelma.

- Käytä esimerkiksi pieniä kumilenkkejä tai rautalangan pätkiä risteyksissä
- Kiinnitä erityistä huomiota siihen millä tavoin tikut ohittavat toisensa risteyksissä.
- Jokaisen tikun tulisi olla täysin suorassa, ja toisiaan koskettavien tikkujen tulisi muodostaa mahdollisimman tiivis risteys.
- Liu'uttele ja säädä tikkujen asentoa rakennelmassa niin että kaikki risteykset ovat mahdollisimman etäällä naapureistaan, ja että rakennelman 'huoneet' ovat mahdollisimman selvästi piirtyviä.

Tällaiset tikkurakennelmat ovat hyödyllisiä paitsi projektiivisen geometrian itsenäisessä opiskelussa, myös havainnollinen askartelutehtävä tunnilla.

Kokeile ensin ratkaista tehtävä ilman muita ohjeita. Jos tarvitset apua, katso videota osoitteessa: https://youtu.be/fby53U_n4o8

Tällaisia pisteistä, suorista, tai pisteistä, suorista ja tasoista koostuvia taso- tai avaruuskuvioita kutsutaan projektiivisessa geometriassa *konfiguraatioiksi*.

Niissä jokainen osa näyttelee samanlaista roolia rakenteessa, esimerkiksi jokaisessa pisteessä kohtaa sama määrä suoria ja tasoja kuin kaikissa muissakin konfiguraation pisteissä.

Esimerkiksi aiemmin Pappoksen lauseen yhteydessä konstruoimamme kuvio on konfiguraatio, sillä jokainen yhdeksästä suorasta kulkee kolmen pisteen läpi, ja jokaisen yhdeksän pisteen läpi kulkee kolme suoraa. Pappoksen lause näyttäytyy kuviossa siis yhdeksällä eri tavalla!

**Tehtävä**: Selitä miksi tetraedrikin on konfiguraatio?

KIRJALLISUUTTA:


Coxeter, H.M.S. (1949). *The Real Projective Pla*ne. New York: McGraw–Hill Book Company, Inc.

Dorwart, Harold (1966). *The Geometry of Incidence*. New Jersey: Prentice–Hall, Inc.

Edgerton, Samuel Y (1976). *The Renaissance Rediscovery of Linear Perspective*, New York: Harper & Row.

Edwards, Lawrence (2003). *Projective Geo*metry. Edinborough: Floris Books.

Hilbert, David and Cohn-Vossen, Stephan (1990). *Geometry and the Imagination* [1932]. Chelsea Publishing Company.

Locher-Ernst, Louis (2003). *Space and Counterspace – An Introduction to Modern Geometry*. Fair Oaks, CA: AWSNA Publications. (https://archive.org/details/SpaceCounterspace)

Veblen, Oswald;& Young, John (1946). *Projective Geome*try, Vol I–II. New York: Blaisdell Publishing.