Joustavat ja adaptiiviset aritmeettiset taidot alakoulussa

Joustavaan matematiikkaan -täydennyskoulutushanke

Tähän materiaaliin on koottu maistiaisia Joustavat ja adaptiiviset aritmeettiset taidot alakoulussa -verkkokurssin sisällöistä. Verkkokurssilla perehdytään joustavien aritmeettisten taitojen tukemiseen alakoulun aikana sekä harjoitellaan ja kehitetään joustavien aritmeettisten taitojen oppimista tukevia opetustapoja ja oppimisympäristöjä. Kurssilla on runsaasti uutta tutkimustietoa matematiikan oppimisesta, paljon käytännön kokeiluja sekä esimerkkitehtäviä luokkatilanteisiin ja innostava taustatiimi. Jos tämä materiaali herättää kysymyksiä, innostusta tai mielenkiintoa, niin voit tutustua kurssiin tarkemmin sekä ilmoittautua mukaan Joustavaan Matematiikkaan -hankkeen kotisivuilla osoitteessa www.flexibility.fi. Verkkokurssi on osallistujille maksuton ja se on opiskeltavissa 30.11.2023 asti.

Materiaali on tuotettu osana Joustavaan matematiikkaan -hanketta (JoMa). JoMa on vuosina 2018–2023 toiminut valtakunnallinen matematiikan opetuksen täydennyskoulutushanke varhaiskasvatukseen, esiopetukseen, alakouluun, yläkouluun ja lukioon. Hankkeessa tuotettiin 19 verkkokurssia. Kursseilla kehitettyä materiaalia löytyy täältä Avointen oppimateriaalien kirjastosta. Opetushallituksen rahoittaman hankkeen toteuttamiseen osallistuivat Turun yliopisto, Åbo Akademi, Jyväskylän yliopisto ja Oulun yliopisto.

Materiaalin tekijät: Erno Lehtinen, Teija Laine

Sisällys

Tervetuloa kurssille!

Tämän kurssin tehtävät koostuvat pienistä kirjallisista tehtävistä sekä muutamasta oppilaiden kanssa suoritettavasta tehtävästä omassa luokassa tai muulla tavoin toteutettuna. Näillä luokassa toteutettavilla tehtävillä on aivan keskeinen rooli. Laajamittaisia kirjallisia töitä kurssilla ei ole.

Koko kurssin sisällöt näet alla olevasta taulukosta. **Tähän materiaaliin on koottu osa kurssin sisällöistä, koko kurssi on opiskeltavissa verkossa 30.11.2023 asti.**

Kurssin sisällöt
Tervetuloa kurssille
Joustava ajattelu alakoulussa
Joustavat aritmeettiset strategiat
Joustavan toiminnallisuuden ja konkretian periaatteet
Käsitteen opettaminen, joustavoittaminen ja syventäminen
Sanalliset tehtävät ja tarinatehtävät
Arkielämän ongelmanratkaisua - sanallisia tehtäviä

Taustatiimi

Joustavaan matematiikkaan -täydennyskoulutuksen suunnittelusta ja toteutuksesta vastaa kolmen yliopiston ja koulun kentän toimijoista koostuva tiimi, jolla on monipuolinen kokemus ja koulutustausta.

Erno Lehtinen

Turun yliopiston kasvatustieteen professori Erno Lehtinen on pitkän linjan opettajankouluttaja. Hän on tutkinut 1970-luvun lopulta lähtien oppimista, oppimisvaikeuksia, oppimisympäristöjä ja asiantuntijuutta keskittyen erityisesti matemaattisen ajattelu pitkän aikavälin kehittymiseen.

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Teija Laine

Alakoulun osuudesta vastaava luokanopettaja Teija Laine on Turun Matikkamaasta ja sivistystoimialalla tunnettu matematiikan opetuksen kehittäjä ja opettajien täydennyskouluttaja.

Teija on kiinnostunut erityisesti ongelmakeskeisestä opettamisesta ja sen avulla oppilaiden matemaattisen ajattelun kehittämisestä. Matematiikan sanallisten tehtävien kehittäminen mielekkäämmiksi on ollut hänen tutkimuksensa ja kehittelynsä aihe jo usean vuoden ajan. Laine on kouluttanut Turun Matikkamaassa opettajia käyttämään konkreettisia, arkielämän liittyviä tilanteita sekä matematiikan välineitä omassa opetuksessaan.

Teija menehtyi vakavaan sairauteen keväällä 2021. Teijan ja hänen perheensä toivomuksesta kaikki Teijan upeat opetusvideot, tehtävät ja ideat ovat käytettävissä JoMa-kursseilla ja matematiikan opetuksen kehittämisessä.

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Anu Tuominen

Anu Tuominen on työskennellyt opettajankoulutuksen parissa vuodesta 2006 lähtien. Koulutukseltaan Tuominen on matematiikan aineenopettaja. Opettajakokemusta hänellä on yliopiston lisäksi yläkoulusta, lukiosta ja ammattikorkeakoulusta. Tuominen on myös tietokirjailija. Hän on kirjoittanut Matematiikan tietokirjan yhdessä kahden alakoulun matematiikkaluokan opettajan kanssa. Tuominen on väitellyt kasvatustieteen tohtoriksi aiheenaan murtolukujen oppiminen alakoulun 3. luokalla.

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Kalle Karjalainen

Kalle Karjalainen on luokanopettajaopiskelija Turun yliopistosta. Hän puhkuu motivaatiota päästyään mukaan JoMa-tiimiin ja tuo mukanaan kurssille nuoruuden intoa. Karjalaisen erityisenä kiinnostuksen kohteena on matemaattisten tarinatehtävien kehittäminen, historiaa ja matematiikkaa yhdistäen. Ratkaisukeskeisten tehtävien suorittamista tärkeämpänä hän pitää oppilaan saamia ahaa-elämyksiä.

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Kansainväliset asiantuntijat apuna

Joustava matematiikka on tällä hetkellä kuuma aihe kansainvälisessä matematiikan opetusta koskevassa keskustelussa. Olemme onnistuneet saamaan tämän täydennyskoulutusohjelman taustajoukkoihin myös joukon maailman johtavia matemaattisen ajattelun asiantuntijoita.

Jon Star

Professori Jon Star Harvardin yliopistosta on entinen matematiikan opettaja, joka on tehnyt uraauurtavaa tutkimustyötä joustavien matemaattisten strategioiden tutkijana. Hänen viimeaikainen tutkimuksensa on kohdistunut erityisesti ratkaisustrategioihin algebrassa.

Video ei ole tekstitetty, mutta tästä linkistä löytyy esityksen suomenkielinen sisältö (ei sanasta sanaan käännös): https://seafile.utu.fi/f/c62596d585764e2ab684/

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Lieven Verschaffel

Professori Lieven Verschaffel on kansainvälisesti erittäin tunnettu matematiikan oppimisen ja opetuksen tutkija, joka on tutkinut sekä joustavien aritmeettisten taitojen kehittymistä ja opettamista että matemaattisen ajattelun käyttöä realistisissa ongelmanratkaisutilanteissa.

Video ei ole tekstitetty mutta tästä linkistä löytyy esityksen suomenkielinen sisältö (ei sanasta sanaan käännös): https://seafile.utu.fi/f/bab725546d6f44219a21/

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Robert Siegler

Professori Robert Siegler Carnegie Mellon yliopistosta on tämän hetken maailman tunnetuimpia kognitiivisen kehityksen tutkijoita, joka on tutkinut monipuolisesti matemaattisen ajattelun kehitystä. Tällä hetkellä hän tekee yhteistyötä kanssamme hankkeessa, jossa tutkitaan joustavan rationaalilukukäsitteen opettamista.

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Douglas Clements

Douglas Clements on Denverin yliopiston professori ja kansainvälisesti tunnettu varhaisen matematiikan oppimisen ja opetuksen tutkija. Varsinaisen tutkimustyönsä ohella hän on osallistunut aktiivisesti matematiikan opetuksen käytännön kehittämiseen ja on julkaissut monia varhaiskasvattajille ja opettajille suunnattuja teoksia.

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Joustava ajattelu alakoulussa

Jakson tavoite

Tämän jakson aikana opitaan ymmärtämään **millainen ymmärrys luvuista ja aritmetiikan käsitteistä tekee mahdolliseksi joustavan matemaattisen ajattelun kehittymisen.** Lisäksi jakson aikana opitaan käyttämään opetuksessa menetelmiä ja tehtäviä, jotka tukevat tällaisen ymmärryksen kehittymistä oppilaissa.

Kysymyksiä ja keinoja, jotka auttavat alkuun:

- Mitä yhtäsuuruusmerkki tarkoittaa?
- Miten eri laskutoimitukset ovat yhteydessä toisiinsa?
- Millaisten polkujen kautta eri luvut ovat yhteydessä toisiinsa?
- Miten pelillinen ympäristö voi tukea joustavan matemaattisen ajattelun perustan rakentamisessa?

Joustava matemaattinen osaaminen osoittaa matemaattista **ymmärrystä.**

Joustava matematiikka kehittää oppilaan matemaattista **luovuutta.**

Jakson sisällöt
Kokonaiskuva jaksosta
Mitä on joustava matemaattinen ajattelu alakoulussa?
Professorin pohdinta - professori Erno Lehtinen
Number Navigation Game ja Number Talk
Tehtävät opettajille

Mitä on joustava matemaattinen ajattelu alakoulussa?

Tällä kurssilla pyrimme huomaamaan, miten matematiikan luokkaopetukseen ja samalla myös sanallisten tehtävien opetukseen voisi tuoda lisää mielekkyyttä ja kiinnostavuutta. Kurssi alkaa numerokeskusteluilla matemaattisen ajattelun joustavoittamiseksi. Tämän jälkeen siirrytään murtolukujen kautta rationaaliluvun käsitteeseen ja lopuksi keskitytään matematiikan sanallisiin ongelmatehtäviin. Kaikkia aiheita lähestytään joustavan matemaattisen ajattelun näkökulmasta.

Aloitusvideolla Erno, Anu ja Teija keskustelevat siitä, kuinka tärkeää on, että matemaattinen ajattelu ei jäisi luokan seinien sisälle, vaan sitä pyrittäisiin siltaamaan aitoihin arkielämän tilanteisiin. Kurssilla myöhemmin käsitellään matematiikan sanallisia tehtäviä. Niiden tehtävien tarkoituksena on ollut tuoda arkielämän tilanteita luokkaan, mutta tässä ei olla täysin onnistuttu.

Tilannemallin rakentaminen tehtävästä olisi myös tärkeä osata. Sen avulla voidaan mallittaa tehtävä ratkaisun löytämiseksi ja samalla tilannemallista näkyy, onko tehtävä ymmärretty oikein.

Arkielämän tilanteet ovat monenlaisia ja niitä voidaan ratkaista monella tavalla oikein, tämän takia joustavan matemaattisen ajattelun opettamisessa ja opetuksen siltaamisessa arkielämän tilanteisiin erityisesti matematiikan sanalliset ongelmatehtävät toimivat hyvin.

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Professorin pohdinta

Taustaksi

Joustavaan Matematiikkaan -täydennyskoulutuksen ensimmäisessä vaiheessa (3 opintopisteen laajuisella johdantokurssilla) käsiteltiin laajasti sitä, miksi joustavan matematiikan oppiminen on tärkeää. Ensinnäkin tutkimukset osoittavat, että varhaisempina kouluvuosina opitut joustavat matemaattiset taidot auttavat myöhempien monimutkaisempien matemaattisten sisältöjen oppimisessa (McMullen ym. 2017). Mahdollisesti tätäkin tärkeämpi edellisessä osuudessa esitetty havainto oli se, että digitalisoituvassa työelämässä ja arjessa matemaattisen ymmärryksen merkitys kasvaa ja tässä korostuu erityisesti taito käyttää joustavasti matemaattista ajattelua vaihtelevissa ja usein täysin uusissa tilanteissa (Gravemeijer ym., 2017).

Tässä alakoulun 3-6 luokkia opettaville tarkoitetussa osuudessa keskitymme niihin matematiikan kysymyksiin, jotka ovat olennaisia näillä luokka-asteilla ja jotka muovaavat olennaisesti oppilaille muodostuvaa kuvaa matematiikasta. Se kuva voi perustua mekaaniseen matemaattisten laskutoimitusten tekemiseen ulkoa annettujen toimenpideohjeiden mukaan tai se voi avata oppilaalle kokemuksen osallisuudesta matemaattiseen ajatteluun ja ymmärryksen siitä, että matematiikka auttaa näkemään monia maailman ilmiöitä uudella tavalla.

Tiivistelmä tämän osuuden sisällöistä

Alakoulun aivan keskeinen tehtävä on auttaa oppilaita kehittämään sellainen ymmärrys luvuista ja lukujen systeemistä, joka luo pohjan kaikelle muulle matematiikalle ja matematiikkaan perustuvalle tavalle ymmärtää luonnon ja yhteiskunnan ilmiöitä. Tässä alakoulun 3-6 luokkien osuuden ensimmäisessä jaksossa otetaan käyttöön pelillinen ympäristö (Number Navigation Game), joka on kehitetty Turun yliopiston matematiikan oppimisen tutkimusryhmässä tukemaan juuri tällaisen lukujen systeemin ymmärtämistä.

Alakoulun matematiikan keskeinen sisältö on oppia aritmeettiset peruslaskutoimitukset. Niiden sujuva osaaminen onkin joustavan matematiikan kannalta olennaista. Ongelmana kuitenkin on, että hyväkään sujuvuus (hyvin muistetut vastaukset pienen lukualueen laskutoimituksiin) ei vielä takaa joustavuutta. Hyvin tärkeää on oppia ymmärtämään, miten laskutoimitukset ovat yhteydessä toisiinsa ja miten tätä voi käyttää sujuvasti eri tilanteissa.

Oppilaat oppivat käyttämään yhtäsuuruusmerkkiä jo alkuopetuksen aikana. Tämä ei kuitenkaan tarkoita, että he olisivat oppineet yhtäsuuruuden käsitteen. Yhtäsuuruuden kehittyneempi ymmärtäminen on kuitenkin keskeinen tekijä kaikelle myöhemmälle matematiikan oppimiselle ja välttämätön edellytys joustavalle ajattelulle.

Matemaattisen ajattelun kehitys

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Lukujen järjestelmä

Tämän koulutuksen toisessa jaksossa tullaan käsittelemään joustavien aritmeettisten strategioiden oppimista ja opettamista. Tulemme näkemään, että on joukko tarkoituksenmukaisia standardioperaatioista poikkeavia strategioita, jotka helpottavat olennaisesti tietynlaisten tehtävien ratkaisemista. Näiden strategioiden oppimisesta on tehty erittäin paljon tutkimusta ja sen perusteella kehitetty menetelmiä, joita on otettu käyttöön eri maissa. Suora strategioiden opettaminen ei kuitenkaan tuota toivottua tulosta, jos se ei samalla tue sellaisen lukujen systeemin ja eri lukujen ja operaatioiden välisten rikkaiden verkostojen syntymistä, jonka avulla voidaan nähdä, milloin kyseisiä strategioita on järkevä käyttää, ja jotka tekevät tarvittaessa mahdolliseksi kokonaan uusien strategioiden keksimisen.

Klassinen tutkimus asiasta on englantilaisen matemaattista ajattelua tutkineen professori Ann Dowkerin (1992) tutkimus, jossa hän antoi 44 ammattimatemaatikolle ratkaistavaksi joukon aritmeettisia arviointitehtäviä. Nämä olivat tehtäviä, joissa ei tarvinnut antaa täsmällistä vastausta, vaan arvioida nopeasti tuloksen suuruusluokka. (Esimerkiksi 145 · 37; 482 · 5,2 tai 66 : 0,86). Koehenkilöt eivät käyttäneet standardiproseduuria tai –algoritmia kuin aivan muutamassa tapauksessa. Olennaista oli myös se, etteivät koehenkilöt käyttäneet vain joitain tyypillisiä tai ennalta tuttuja strategioita, vaan hyvin erilaisia ratkaisuja. Mm. yhden tehtävän ratkaisemisessa nämä matematiikan ammattilaiset käyttivät jopa 23 erilaista strategiaa. Tämä tarkoittaa sitä, ettei heidän suorituksensa ollut riippuvainen ennalta opitusta strategiasta, vaan he loivat tarkoituksenmukaisen yksilöllisen strategian tehtävän ominaisuuksien perusteella.

Käytettyjen strategioiden tarkempi analysointi osoitti, että ne perustuivat hyvin kehittyneeseen lukukäsityksen ymmärtämiseen ja rikkaiden lukujen ja operaatioiden välisten yhteyksien hyväksikäyttöön. Tällaisten rikkaiden lukujen välisten verkostojen hyväksikäyttöön perustuu esimerkiksi Dowkerin mainitsema ”mukavien lukujen” (nice numbers) strategia. Esimerkiksi tehtävässä 9208 : 32 suuruusluokka oli nopeasti arvioitavissa, kun muutti tehtävän muotoon 9600 : 32. Koska 3 32 on 96 ja 32 menee 400 vähän yli 10 kertaa, niin tulos on vähän alle 290. Teknologian käytön lisääntyessä tällainen kyky nopeasti arvioida matemaattisten operaatioiden suuruusluokka on tulossa entistä tärkeämmäksi.

Keskeiseksi pedagogiseksi haasteeksi muodostuukin tällöin se, miten oppilaat oppivat näkemään lukujen järjestelmän verkostona, jossa luvut ovat monin erilaisin tavoin ja monien erilaisten polkujen kautta yhteydessä toisiinsa. Lehtisen johtama tutkimusryhmä Turun yliopistossa on keskittynyt tutkimaan sitä, millainen taustalla oleva tieto luvuista tekee mahdolliseksi havaita mahdollisuuksia käyttää tai luoda joustavasti yksilöllisiä strategioita uusissa tehtävissä (McMullen ym, 2016). Tällaista lukujärjestelmää koskevaa tietoa kutsutaan adaptiiviseksi lukutiedoksi. Esimerkiksi jossain tehtävässä oleva luku 143 voidaan ajatella monella tapaa: se on lähellä lukua 144, joka on 12 · 12, tai lähellä lukua 140, joka on 2 · 70 tai 7 · 20 jne.

Tulosten mukaan adaptiivisen lukutiedon välttämättömänä mutta ei riittävänä edellytyksenä on hyvä käsitteellinen ymmärrys ja myös peruslaskutoimituksien sujuvuus. Ne eivät kuitenkaan ole riittävä selittäjä adaptiiviselle lukutiedolle. Joustavien strategioiden tutkijat ovat korostaneet, että joustavan aritmetiikan edellyttämän adaptiivisen lukutiedon kehittämiseksi oppilaiden pitäisi voida tutkiskella erilaisia lukujen yhdistelmiä ja keksiä omia strategioitaan, joilla tehtävät voi ratkaista eri tavoin. Luokkaopetuksessa voidaan tukea adaptiivisen lukutiedon kehittymistä avoimilla tehtävillä ja matematiikkapuheella. Esimerkiksi voidaan esittää yhteisesti tarkasteltavaksi tehtäviä, jossa on käytettävissä kaikki peruslaskutoimitukset (+, −, ·, :) ja annetaan luvut 6, 14, 2, 3, 22 ja oppilaiden tehtävänä on yhteisessä keskustelussa miettiä, millä kaikilla aritmeettisilla lausekkeilla näistä luvusta saadaan tulokseksi 24.

Esim.

$24 = 22 + 2$

$24 = 6 + 14 + 2 + 2$

$24 = 2 \cdot 14 - 6 + 2$

$24 = 2 \cdot 22 - 14 - 6$

Alkuopetuksessa luvut voivat olla hyvin pieniä ja myöhemmillä kouluasteilla voidaan käyttää suurempia lukuja, sulkuja ja potensseja.

Aritmeettisten operaatioiden yhteydet ja niiden joustava käyttö

Aritmeettisten perusoperaatioiden sujuva hallinta on tärkeää, mutta erillisten operaatioiden sujuva hallinta voi tarkoittaa myös melko mekaanista osaamista, joka ei tue joustavaa matemaattista ajattelua. Yksi tärkeä ehto joustavalle matemaattiselle ajattelulle on operaatioiden välisten yhteyksien ymmärtäminen ja taito käyttää niitä joustavasti hyväksi ongelmien ratkaisussa. Oxfordin yliopiston professori Terezinha Nunes (Nunes, Bryant, Evans, Bell & Barros, 2012) on työtovereittensa kanssa osoittanut, että operaatioiden käänteisyyden ymmärtäminen on tärkeä tekijä kehittyneemmän matemaattisen ajattelun muodostumisessa. Käänteisyydellä tarkoitetaan yhteen- ja vähennyslaskun ja toisaalta kerto- ja jakolaskun yhteyttä toisiinsa: jos $a + b = c$, niin $c - a = b$ ja $c - b = a$. Vastaavasti jos $a \cdot b = c$, niin $c : a = b$ ja $c : b = a$. Käänteisyyden sujuva ymmärtäminen erilaisissa tilanteissa on tärkeä osa korkeampitasoiseen matemaattiseen ajatteluun johtavaa kehitystä, koska sen avulla oppilas voi siirtyä operaatioiden jonoajattelusta lukumäärien suhteiden monipuoliseen näkemiseen. Mitä tämä tarkoittaa käytännössä:

Tyypillisen aritmetiikan harjoittelun kautta oppilas oppii usein hyvinkin sujuvasti antamaan vastauksia yhden operaation sisältämiin tehtäviin, kuten 12 + 7 = 19. Usein tämä oppiminen johtaa kuitenkin varsin jäykkään lineaariseen ajatteluun. Vaikka oppilas osaa tämän laskun, niin hänelle ei ole välttämättä välittömästi selvää, että myös 7 + 12 = 19, eikä hän välttämättä heti ymmärrä mitä saadaan, jos 19:sta vähennetään 7. Kehittyneempi matemaattinen ajattelu perustuu näiden lukumäärien keskinäisten suhteiden ymmärtämiseen (Nunes ym., 2012). Ero jäykän lineaarisen ja joustavan lukumäärien suhteiden ymmärtämisen välillä näkyy esimerkiksi seuraavan kaltaisessa tehtävässä:

$7 + 12 + 22 - 12 - 7 = ?$ tai $18 \cdot (21 + 15) : 18 = ?$

Oppilas, joka ajattelee tehtävää vastaukseen johtavana lineaarisena operaatioiden jonona, suorittaa järjestyksessä kaikki laskutoimitukset. Sen sijaan oppilas, jolla on hyvin kehittynyt ymmärrys operaatioiden käänteisyydestä ja joka on siirtynyt lukumäärien suhteiden joustavaan tarkasteluun, näkee heti tehtävän vastauksen (22 tai 36). Myöhemmin algebraan ja yhtälöihin siirryttäessä tämä ero jäykän lineaarisen ja joustavan lukumäärien suhteiden ymmärtämisen välillä on hyvin tärkeä.

Perinteisessä opetuksessa operaatioiden käänteisyys kyllä yleensä tulee esille, mutta käänteisyyteen perustuvan lukumäärien suhteiden joustava ajattelu edellyttää harjoittelua ja myös tietoista huomion kiinnittämistä siihen, miten tarkastellaan laskulausekkeita.

Yhtäsuuruuden ymmärtäminen

Yhtäsuuruusmerkki otetaan käyttöön jo alkuopetuksessa ja oppilaille kerrotaan mitä se tarkoittaa. Siksi opettajat eivät aina tule edes ajatelleeksi, kuinka heikosti oppilaat itse asiassa ymmärtävät yhtäsuuruuden. Eri puolilla maailmaa (mm. Suomessa, Yhdysvalloissa, Australiassa) tehdyt tutkimukset osoittavat, että yhtäsuuruusmerkin jatkuvasta käytöstä huolimatta yhtäsuuruuden matemaattinen ymmärtäminen jää monilla oppilailla heikoksi ja tämä vaikeuttaa vähänkään monimutkaisten aritmeettisten tehtävien joustavaa ymmärtämistä ja on erityisen ongelmallista yhtälönratkaisun opiskelussa.

Aivan tuoreessa amerikkalaisessa pitkäaikaisessa seurantatutkimuksessa (Hatthews & Fuchs, 2018) havaittiin, että toisella luokalla testattu yhtäsuuruuden ymmärtäminen oli kaikkein voimakkain ennustaja neljännellä luokalla opetetun esialgebran oppimiselle. Yhtäsuuruuden ymmärtäminen ennusti alkavia algebran taitoja enemmän kuin muut matemaattiset taidot, älykkyys, sosiaalinen tausta ja tarkkaavaisuus yhteensä. Yhtäsuuruus onkin yksi niistä avainkäsitteistä tai suurista ideoista (big ideas, Hatthews & Fuchs, 2018), jotka tekevät mahdolliseksi myöhemmän matematiikan oppimisen mutta, joka on kriittisen tärkeä myös joustavan aritmeettisen taidon kehittymiselle. Tämä on yksi niitä matematiikan sisältöjä, joissa alaluokilla tapahtunut oppiminen vaikuttaa aivan olennaisesti matematiikan oppimiseen myöhemmillä kouluasteilla.

Mikä yhtäsuuruuden ymmärtämisessä sitten on niin vaikeaa?

Standardi aritmetiikan opetus johtaa helposta tahtomattaan siihen, että varsinainen yhtäsuuruuden matemaattinen ymmärtäminen jää saavuttamatta ja yhtäsuuruusmerkki ymmärretään merkkinä, joka edeltää vastausta (tai joskus myös merkkinä joka tarvitaan väliin, kun mennään laskuissa eteenpäin). Hyvä esimerkki tästä on se, että kun tutkimuksissa oppilaille on annettu seuraava tehtävä: 8 + 4 = __ + 5, niin vastaukseksi tarjotaan usein joko 12 tai 17. Tämä yhtäsuuruuden puutteellinen ymmärtäminen liittyy edellä esitettyyn mekaaniseen lineaariseen ajatteluun, jossa järjestyksessä toteutettavat operaatiot tuottavat vastauksen, joka merkitään yhtäsuuruusmerkillä (McNeil, Rittle-Johnson, Hattikudur & Petersen, 2010).

Yhtäsuuruuteen liittyvän ajattelun vaikeuden syvyydestä saa käsityksen McNeilin ja kollegoiden tutkimuksesta, jossa yliopisto-opiskelijat osallistuivat kokeeseen, jossa yksi ryhmä harjoitteli ensin suuren määrän yksinkertaisia aritmetiikan tehtäviä, jotka oli esitetty normaalissa muodossa *a* + *b* = *?*. Sen jälkeen heidän piti niin nopeasti kuin mahdollista ratkaista esialgebratehtäviä kuten 7 + 9 + 6 = 7 + __. Yleisesti ottaen opiskelijat osasivat näitä esialgebra tehtäviä melko heikosti. Yksinkertaisia aritmetiikkatehtävillä harjoitellut ryhmä selvisi esialgebratehtävien testistä erittäin huonosti ja selvästi huonommin kuin algebraharjoitusta saanut ryhmä mutta myös huonommin kuin ryhmä, joka ei saanut mitään matematiikkaharjoitusta ennen testiä. Tulokset viittaavat siihen, että yhtäsuuruuden ymmärrys ei ollut automatisoitunut vielä yliopisto-opiskelijoillakaan ja mekaaninen aritmetiikkaharjoittelu voi vaikuttaa jopa negatiivisesti vaativampaan matemaattiseen ajatteluun.

Kaikki matematiikan oppiminen vaatii paljon harjoittelua. Olennaista kuitenkin on, että samalla kun harjoittelu lisää suoritusten sujuvuutta, se myös vahvistaa matemaattista ymmärrystä ja joustavaa matemaattista ajattelua. Yhtäsuuruuden käsitteeseen liittyvä matematiikkapuhe on yksi esimerkki tällaisesta ymmärrystä ja joustavaa ajattelua kehittävästä harjoituksesta.

Mitkä pohdinnassa esitetyt asiat kiinnostivat sinua eniten?

Miten voisit hyödyntää esitettyjä näkökulmia omassa opetuksessasi?

Number Navigation Game

NNG-peli kehitettiin tukemaan kaikkia edellä esitettyjä aritmeettisen ajattelun piirteitä. Erityisesti sillä pyritään tarjoamaan ympäristö, jossa oppilaalla on mahdollisuus kokeilla monipuolisesti lukujen ja operaatioiden erilaisia verkostoja visuaalisessa ympäristössä, joka auttaa hahmottamaan lukujen muodostamaa systeemiä. Pelissä oppilaille ei anneta valmiita aritmeettisia tehtäviä standardimuodossa, vaan heidän tehtävänänsä on aritmetiikan käyttäminen välineenä, jolla voi navigoida lukujen systeemissä. Peli johdattelee oppilaat koko ajan tarkastelemaan operaatioita myös käänteisesti ja näin vahvistamaan huomion kiinnittämistä lukumäärien suhteisiin.

Pelissä on pyritty myös tekemään mahdolliseksi niin sanotun tarkoituksellisen harjoittelun (deliberate practice) ajatuksia (katso HARJOITTELUN MERKITYS –jakso JoMan 3 opintopisteen johdantokurssilla). Ensinnäkin peli tarjoaa massiivisen määrän harjoitusta vähitellen vaativammaksi muuttuvissa tilanteissa. Hyvällekin laskijalle pelin edetessä eteen tulevat tilanteet ovat haasteellisia. Niissä ensimmäinen suoritus on harvoin tavoitteen kannalta optimaalinen ja ideana on ohjata oppilaita siihen, että samankin tehtävän toistamalla voi koko ajan yrittää parantaa suoritustaan. Jos koko pelin pelaa läpi niin, että koko ajan pyrkii lähelle optimaalista suoritusta, niin pelaaja joutuu mielessään ratkomaan ja keskenään vertailemaan useita tuhansia aritmeettisia operaatioita.

Erityisesti pelin niin sanotut energiakartat saattavat vaikuttaa hyvinkin vaikeilta. Tässä on kuitenkin olennaista, että opettaja tukee oppilaita sellaisten ajattelutapojen kehittämisessä, joilla he oppivat etsimään kartoilta sellaisia lukuja, jotka tarjoavat tehokkaita tapoja edetä pelissä. NNG-pelin esittelyvideossa on mallitettu tällaisia etsintästrategioita. Niitä voidaan käsitellä myös yhdessä koko luokan keskusteluna tai pienryhmissä. Erityisesti suurempien lukujen kerto- ja jakolaskut, joita energiakartoissa tarvitaan saattavat olla hyvin vaikeita osalle oppilaita. Pelissä ei kuitenkaan ole mitään aikapainetta ja oppilaalla on mahdollisuus ensin testailla erilaisia laskutoimituksia ja aina ottaa suoritus uusiksi, jos jokin ei mennyt toivotulla tavalla.

Koska peli edetessään vaatii oppilailta merkittävää ponnistelua, olemme kehittäneet peliin motivoivia elementtejä. Pelillisenä tarkoituksena on rakentaa majakkasaarelle hieno kaupunki. Ensinnäkin oppilaan on yritettävä suorittaa jokainen kartta loppuun, koska materiaalit kaupungin rakentamiseen saadaan kotiutettua vain tällä tavoin. Karttoja pitää selvittää mahdollisimman monta, koska vain näin saa riittävästi rakennusmateriaaleja. Lisäksi kartoista saa rahaa sen mukaan kuinka hyvin sen on suorittanut (askelkartassa mahdollisimman vähin askelin ja energiakartoissa mahdollisimman vähillä energiapisteillä). Kun rahaa on riittävästi, sillä voi ostaa parempia laivoja, jotka ovat tärkeitä pelin myöhemmissä vaiheissa, jolloin isommalla laivalla voi yhdellä matkalla käydä noutamassa useampia materiaaleja samalla kertaan. Pienemmällä laivalla jokainen materiaali on kuljetettava erikseen satamaan ja vasta sitten voi lähteä hakemaan seuraavaa.

Ernon peliohjeet Number Navigation -peliin

Seuraavalla videolla Erno kertoo pelin idean, mitä pelin avulla pyritään kehittämään, miten peli etenee ja tulee koko ajan haastavammaksi.

Number Navigation -artikkelin esitykseen pääset tutustumaan tästä.

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Number Talk

Uudet kolmasluokkalaiset ja Number Talk

Seuraavalla videolla Teija opettaa ensimmäisen kerran uusia kolmasluokkalaisia oppilaita. Yhtäsuuruuden käsite on jo opittu alkuluokilla, joten opettaja lähtee testaamaan tutun käsitteen ymmärrystä ja hallintaa. Tämän jälkeen opettaja pyrkii laajentamaan oppilaiden omaa ajattelua ja vahvistamaan käsitteen ymmärrystä.

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Number Talk 5.-6.-luokkalaisten kanssa

Teija opettaa 5-6 -luokkalaisia. Ensimmäinen Number Talk-tunti.

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Mitä ajatuksia Number Talk herätti?

Ota kantaa seuraaviin väitteisiin. (1= ei juuri ollenkaan, 5 = huomattavasti)

a) Videolla esitetty asia on täysin tuttua minulle. 1 — 5

b) Esitetyt tehtävätyypit vaikuttivat kiinnostavilta 1 — 5

c) Video herätti ideoita omaan opetukseeni. 1 — 5

Miten voisit hyödyntää videolla esitettyjä asioita omassa opetuksessasi?

Minkälaisia ajatuksia videoista heräsi?

- ❑ Videot antoivat minulle uutta ajattemisen aihetta.
- ❑ Videoilla esitetetyt ideat ovat toteuttamiskelpoisia luokkaan.
- ❑ Ymmärsin hyvin esitetyt ideat.
- ❑ En saanut videoista omaan opetukseeni mitään uutta.

Tehtävät opettajille

Valitse toteutettavaksi omassa luokassasi:

- Videoissa mallinnetun number talk-opetuksen kokeilu luokassa, **uusien ratkaisustrategioiden keksiminen oppilaiden kanssa.** (Lisää pohdittavaa on Kallen tehtävissä, voit ladata ne itsellesi: https://seafile.utu.fi/f/3ce1ad5ed17246e1b8e0/)
- Tai **Number Navigation Game -** pelin kokeilu luokassa.

Ohjeistus Number Navigation Game -pelin kokeiluun

1. Lataa oppilaiden koneille Number Navigation peli. Lataa peli Play Kaupasta Windows-koneilla sekä Android-tableteilla ja -puhelimille tai App Storesta iPadeilla.
2. Kuuntele peliohjeet Ernon videolta.
3. Kokeilkaa oppilaiden kanssa pelaamista. (HUOM. tätä peliä on tarkoitus pelata ainakin koko kurssin ajan. Taidot karttuvat kokemuksen myötä.)

Pohdintatehtävä

Pohdi, miten itse olet hyödyntänyt joustavaa matemaattista ajattelua luokassasi.

Sanalliset tehtävät ja tarinatehtävät

Jakson tavoite

Opitaan pysähtymään ennen laskemista. Kerro omin sanoin, mistä tehtävässä on kyse. Piirretään tilannemalli tehtävästä. Pilkotaan tehtävä osiin laskemalla asia kerrallaan, lauseke ei ole päämäärä vaan ymmärrys. Tärkeintä on ***ajattelun näkyväksi tekeminen*** (piirroksin, sanallisesti, laskuin).

Kysymyksiä ja keinoja, jotka auttavat alkuun:

- Mistä tehtävässä on kysymys?
- Missä voisit törmätä vastaavaan tilanteeseen arkielämässä?
- Mitä suuruusluokkaa vastauksen pitäisi olla?
- Voisiko ratkaisun ajatella eri tavalla?
- Kuinka monella eri tavalla voisit ajatella ratkaisevasi tämän ongelman?

Jakson sisällöt
Kokonaiskuva jaksosta
Professorin pohdinta - Sanalliset tehtävät matematiikassa
Sanallisen tehtävän ymmärrys
Miten voidaan kehittää oppilaiden matemaattista ajattelua - videoita
Tehtävät opettajille

Professorin pohdinta

Tutkimukset joustavasta matematiikasta painottavat erilaista tavoitetta. Joustava strategioiden käyttö tekee matemaattisten operaatioiden käytön tehokkaaksi, koska joustavuus tekee mahdolliseksi valita se strategia, joka on tilanteen ja tehtävän kannalta kaikkein tarkoituksenmukaisin. Toisaalta aiempien matemaattisten sisältöjen oppiminen joustavalla ja ymmärrykseen perustuvalla tavalla tekee myöhemmin opiskeltavien vaativampien matemaattisten sisältöjen oppimisen helpommaksi. Kolmanneksi joustava matemaattinen ajattelu antaa oppijalle kokemuksen omasta mahdollisuudesta osallistua matemaattiseen ajatteluun, joka vahvistaa ”omistajuuden” kokemusta ja motivaatiota. Ehkä kaikkien tärkein tavoite joustavalle matematiikalle on kuitenkin mahdollisuus käyttää matemaattista ajattelua joustavasti erilaisten ongelmatilanteiden mallittamiseen ja ratkaisemiseen. Tämä on tärkeä matematiikan opiskelun tavoite kaikille, ei vain niille jotka myöhemmin pyrkivät korkeampaa matematiikkaa edellyttäviin opintoihin.

Alun perin matematiikan sanalliset tehtävät on otettu mukaan matematiikan opiskeluun juuri sellaisina harjoituksina, jotka valmentavat oppilaita käyttämään matemaattista ajattelua käytännön ongelmien ratkaisemiseen. Valitettavasti opetuskäytännöt ja oppikirjat ovat myöhemmin kokonaan muuttaneet sanallisten tehtävien luonteen aivan muuksi. Niistä on tullut välineitä laskuoperaatioiden mekaaniseen harjoitteluun ja pahimmillaan ne ovat jopa vieraannuttaneet oppilaita mahdollisuudesta käyttää matematiikkaa mielekkäiden ongelmien ratkaisemiseen. Matematiikan oppikirjojen sanallisia tehtäviä kartoittaneessa kansainvälisessä vertailututkimuksessamme havaitsimme, että valtaosa kirjojen sanallisista tehtävistä ei ole oikeastaan ongelmanratkaisutehtäviä sanan varsinaisessa mielessä ja enemmänkin kielellisessä muodossa esitettyjä mekaanisia tehtäviä. Tämä ei ole tyypillistä vain suomalaisille oppikirjoille, vaan sama piirre on havaittavissa monien muiden maiden matematiikan oppikirjoissa.

Sen sijaan suomalaisten oppikirjojen erityinen piirre oli se, että osassa kirjoja tehtävät oli suoraan sidottu aina yhden laskuoperaation harjoitteluun. Esimerkiksi kaikki aukeaman sanalliset tehtävät ratkaistaan vähentämällä tehtävästä annetusta suuremmasta luvusta ja pienempi luku. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että oppilaiden ei lainkaan tarvitse lukea tehtäviä, vaan ainoastaan poimia niistä annetut luvut ja vähentää suuremmasta pienempi. Tällainen tapa esittää sanallisia tehtäviä vahvistaa edelleen sitä piirrettä, joka tutkimuksissa on havaittu oppilaiden suhtautumisessa sanallisiin tehtäviin. Esimerkiksi silmänliiketutkimusten avulla on voitu osoittaa, että monille oppilaille on tyypillistä tehtävää kokonaan lukematta poimia tekstin joukosta luvut ja tehdä niillä jotain.

Tässä menetetään mahdollisuus käyttää sanallisia tehtäviä välineenä, joilla koulun ulkopuolisen maailman merkityksellisiksi koetut ongelmat voitaisiin tuoda matematiikan tunneille. tyypilliset tehtävät eivät myöskään tue matemaattisen ajattelun joustavaa käyttöä, koska tehtävät ovat käytännössä aina juuri tiettyjen laskujen sanalliseen muotoon puettuja versioita. Tämän vuoksi joustavan matematiikan täydennyskoulutusohjelmassa pannaan paljon painoa toisenlaiseen tapaan käyttää sanallisia tehtäviä ja yleensäkin arjen merkityksellisiä ongelmia matemaattisen ajattelun kohteina.

Miten tällainen aito ongelmanratkaisu poikkeaa tyypillisistä kouluopetuksen sanallisista tehtävistä. Edellä kuvatuissa tehtävissä on taustalla aina yksi ennalta määrätty matemaattinen operaatio tai monimutkaisemmissa tapauksissa pari toisiaan ennalta suunnitellulla tavalla seuraavia operaatioita. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että oppilas tunnistaa sanallisen tehtävät vihjesanoista ja muista selvästi näkyvissä olevista elementeistä, mitä matemaattista operaatioita häneltä odotetaan. Tehtävät ovat tällöin ratkaistavissa ilman, että oppilaalle muodostuu mitään käsitystä itse siitä tilanteesta, jota tehtävässä kuvataan. Kun oppilas on oppinut tällaisen lähestymistavan sanallisiin tehtäviin, hän saattaa olla hyvinkin nopeasti saada oikeita vastauksia saman tyyppisiin sanallisiin tehtäviin. Tällainen lähestymistapa ei kuitenkaan toimi vaativampien sanallisten tehtävien eikä tyypillisten arjen ongelmien ratkaisemisessa. Niissä keskeistä on se, että oppilas luo mielessään mahdollisimman tarkan mielikuvan ongelmatehtävän kuvaamasta tilanteesta (keitä osallistuu, mitä tapahtuu jne.)

Tällainen mielikuva, tilannemalli, tekee mahdolliseksi hallita monimutkaisiakin ongelmatilanteita. Tilannemallin pohjalta voidaan esimerkiksi miettiä niitä muutoksia, joita tekstin kuvaamassa ongelmatilanteessa tapahtuu ja sen jälkeen pohtia millaisilla matemaattisilla välineillä näitä muutoksia voidaan kuvata, millaisia vaihtoehtoisia matemaattisia ratkaisuja voidaan käyttää ja missä järjestyksessä operaatioita kannattaa suorittaa. Olennaista on, että ei kiirehditä tekemään mitä tahansa laskutoimituksia tai kokoamaan laskulauseketta ymmärtämättä tilannetta. Tilannemallin merkitys korostuu vielä senkin jälkeen, kun on saatu tehtävä matemaattisesti ratkaistua. Aina ei ole niin, että laskutoimitusten tuottama tulos olisi suoraan järkevä ratkaisu käsillä olevaan ongelmaan. Tästä on esimerkkinä tunnettu linja-autotehtävä. (Esim. jos pitää kuljettaa 100 henkeä retkelle ja tilausajobussiin mahtuu 40 henkeä, niin kuinka monta bussia pitää tilata. Tässä 2,5 tai 2 jää 20 ovat mahdollisia matemaattisia ratkaisuja, mutta ei mitenkään järkeviä vastauksia itse tehtävään.). Jos oppilas on perusteellisesti ajatellut mistä tehtävän kuvaamassa tilanteessa on kysymys, niin hänen pitäisi myös ymmärtää millainen vastaus tilanteessa on järkevä.

Oppikirjan mekaanisissa sanallisissa tehtävissä oppilaan suorituksen arviointi on hyvin suoraviivaista. Useimmiten riittää, että tarkistetaan saiko oppilas juuri sen vastauksen, jota tehtävään odotetaan. Joissain tapauksissa voidaan myös arvioida, onko oppilas tuottanut juuri odotetun laskulausekkeen. Tyypillisessä arjen tilanteita käsittelevissä monimutkaisemmissa ongelmissa samaankin lopputulokseen voidaan päätyä erilaisia matemaattisia reittejä pitkin. Siksi tehtävissä ei ole mitään yhtä laskulauseketta, joka oppilaan pitäisi tuottaa. Osassa realistisia tehtäviä voi olla myös useampia tarkoituksenmukaisia ratkaisuja. Tällöin oikeastaan keskeistä onkin se, miten oppilas on osannut tulkita kohteena olevan ongelmatilanteen ja luoda siitä riittävän tarkan tilannemallin. Toisinaan voi olla hyvä pedagoginen keino, että ennen laskutoimitusten aloittamista oppilaat kertovat kielellisesti, miten ymmärtävät tehtävässä kuvatun tilanteen.

Joustavan matematiikan ja matemaattisen oppimisen kannalta on tärkeää, että oppilaat miettivät monipuolisesti sitä, millaisilla matemaattisilla operaatioilla tilannemallin kuvaamia muutoksia tai suhteita voitaisiin kuvata. Tästä näkökulmasta nopea yhden matemaattisen ratkaisun esittäminen ei ole välttämättä se paras suoritus. Ehkä jopa tärkeämpää on se, että oppilas varmistaa huolellisesti luomansa tilannemallin järkevyyden, suunnittelee vaihtoehtoja tilannemallin osittamiseksi ratkaisuvaiheiksi sekä pohtii ja mahdollisesti testaa niitä vaihtoehtoisia matemaattisia operaatioita, joilla ongelman eri vaiheita voidaan selvittää. Tällöin yksittäisen lopputuloksen arvioinnin lisäksi keskeiseksi nousee prosessin arviointi.

Mitkä pohdinnassa esitetyt asiat kiinnostivat sinua eniten?

Miten voisit hyödyntää esitettyjä näkökulmia omassa opetuksessasi?

Sanallisen tehtävän ymmärrys -materiaalipaketti

> ”Eripuolilta maailmaa saadut tutkimustulokset viittaavat siihen, että opittu matemaattinen ongelmanratkaisu helposti mekanisoituu ja sulkee ulkopuolelleen arkipäivän tiedon käytön.
>
> Monista oppilaista on täysin järkevää antaa vastaukseksi 2,5 linja-autoa tehtävään, jossa kysytään tietyn henkilömäärän kuljettamiseen tarvittavien linja-autojen määrää.”
>
> ”-Mä en oikeen tiiä, et kerronko mä vai jaanko sen? …On se ehkä sit kertolasku… Tää on oikeestaan aika vaikee…”

Professorin alustus "Sanallisen tehtävän ymmärrys" -materiaaliin

On vaikea opettaa oppilaille syvällisempää ongelmanratkaisua ja tilannemallin luomisen tärkeyttä, jos tarjolla on vain yksinkertaisia mekaanisten tehtävien harjoitteluun tarkoitettuja sanallisia tehtäviä. Siksi onkin tärkeää, että opettajilla on käytössään monipolvisempia ja todellisista käytännön tilanteista kumpuavia tehtäviä. Toisaalta esimerkiksi oppikirjoissa valmiina olevia tehtäviä on mahdollisuus rikastaa lisäämällä niihin ongelmanratkaisua monipuolistavia ja tehtävien kiinnostavuutta lisääviä elementtejä.

Mekaanisessa laskutoimitusten harjoittelussa tehtävien suurella määrällä on merkitystä. Sen sijaan syvällisempää ongelmanratkaisua voidaan harjoitella paljon vähäisemmällä määrällä tehtäviä, joihin keskitytään kunnolla. Jos opettajilla on käytettävissään käytännön koulutilanteissa kehitettyjä ja testattuja vaativampia tehtävätyyppejä, niin niistä saatavien ideoiden perusteella on helppo laatia myös omia tehtäviä. Hyviä kokemuksia on saatu myös siitä, että vaativampia sanallisia tehtäviä tehdään yhdessä oppilaiden kanssa. Yhteinen tehtävien laadinta tuo konkreettisesti esille tilannemallin tärkeyden, koska tällaisia tehtäviä laadittaessa tehdään ensin ikään kuin tapahtumien käsikirjoitus ja sitä täydennetään niillä numeerisilla arvoilla, joita tarvitaan tehtävän ratkaisuun liittyvissä laskutoimituksissa. Käsillä oleva materiaali on syntynyt hyvin käytännöllisen kehittämistyön yhteydessä. Sen tarkoituksena on antaa opettajille vihjeitä siitä, miten matematiikan sanallisen tehtävät voitaisiin saada palvelemaan nykyistä paremmin sekä matematiikan että yleisen ongelmanratkaisun oppimista.

Erno Lehtinen
Akatemiaprofessori
Turun yliopisto

Seuraava materiaali syntyi sen jälkeen, kun opettajille pidettiin sanallisten ongelmatehtävien kurssi Turussa. Tuolloin nousi esille paljon tärkeitä kysymyksiä, joihin pyrittiin löytämään toimivia ratkaisukeinoja. Materiaali on koottu seuraavalla ajatuksella.

1. **Teoriataustaa sanallisiin tehtäviin liittyen.**
2. **Oppilaiden ja opettajien laatimia sanallisia ongelmatehtäviä.**
3. **Näkökulmia sanallisten ongelmatehtävien arviointiin liittyen.**
4. **Professorit Erno Lehtinen, Jorma Joutsenlahti ja Erkki Pehkonen vastaavat kysymykseen: "Miten oppilaan matemaattista ajattelua voidaan kehittää?"**

(Ernon osuudessa opastetaan, miten oppikirjojen sanallisista tehtävistä voidaan saada ongelmallisempia, mielenkiintoisempia, monipolvisempia ja haastavampia.)

Oppilaiden sanalliset tehtävät ovat todella tapahtuneet arkielämässä.

Olisi hyvä, että nämä kaikki tehtävät luetaan ääneen ensin koko luokan kanssa yhdessä, keskustellen ja pohtien. Tehtävät voidaan sen jälkeen joko ratkaista koko luokan kesken tai antamalla oppilaiden ratkaista niitä pareittain tai ryhmissä. Muutamaan tehtävään on liitetty mukaan ratkaisumalli, joka voidaan monistaa oppilaille. Niillä pääsee paremmin alkuun.

Matematiikan sanalliset tehtävät -materiaalin voit ladata itsellesi täältä: https://seafile.utu.fi/f/13c263c65e26401f86f4/.

Mitkä koosteessa esitetyt asiat kiinnostivat sinua eniten?

Miten voisit hyödyntää esitettyjä ideoita omassa opetuksessasi?

Miten voidaan kehittää oppilaiden matemaattista ajattelua?

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

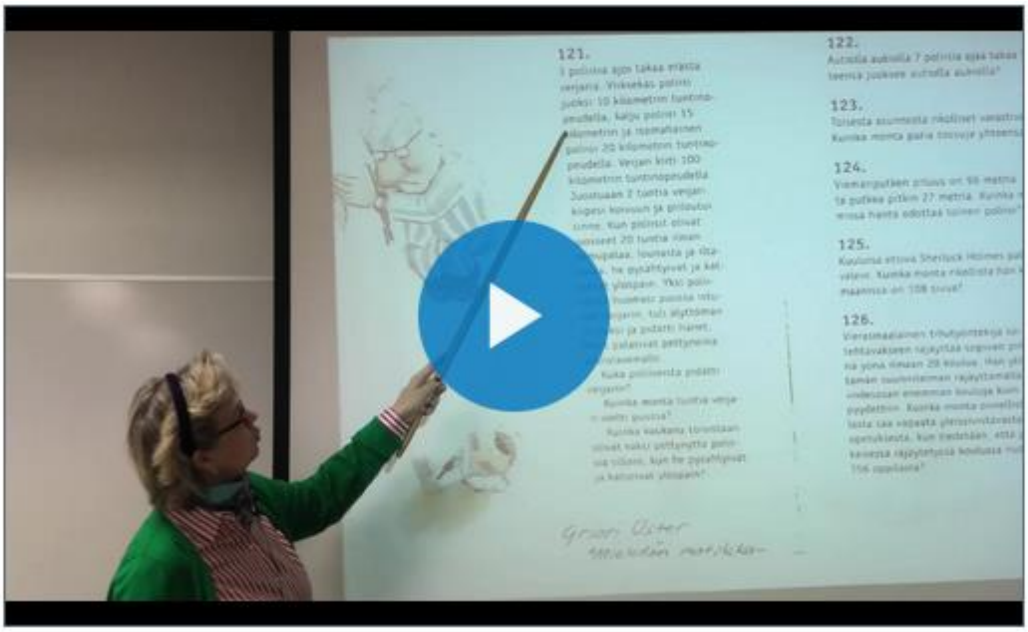
Mitä ajatuksia video herätti?

- ❑ Videot antoivat minulle uutta ajattemisen aihetta.
- ❑ Videoilla esitetyt ideat ovat toteuttamiskelpoisia luokkaan.
- ❑ Ymmärsin hyvin esitetyt ongelmat
- ❑ En saanut videoista omaan opetukseeni mitään uutta.
- ❑ Muu, mikä?

Koko oppitunnin kestävän sanallisen tehtävän ratkaiseminen

Seuraavassa on esitetty kaksi matematiikan sanallisen tarinatehtävän opetustuntia, joiden ratkaisemiseen kuluu koko oppitunti. Ensimmäisellä videolla nähdään, kun kolmasluokkalaisille opetetaan ensimmäistä kertaa ongelmallisen tarinatehtävän ratkaisemista. Toinen oppitunti pidettiin melko pian ensimmäisen jälkeen. Molemmat tehtävät ovat "Mieletön Matikka"-kirjasta.

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.



Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Mitä ajatuksia videot herättivät?

Ota kantaa seuraaviin väitteisiin. (1= ei juuri ollenkaan, 5 = huomattavasti)

a) Videolla esitetty asia on täysin tuttua minulle. 1 5

b) Esitetyt tehtävätyypit vaikuttivat kiinnostavilta 1 5

c) Video herätti ideoita omaan opetukseeni. 1 5

Miten voisit hyödyntää videolla esitettyjä asioita omassa opetuksessasi?

Tarinatehtäviä

Seuraavaan ladattavaan pakettiin olemme suurimmaksi osaksi tehneet täysin uusia tarinatehtäviä, joita ei ole julkaistu missään ennen tätä hetkeä. Olemme Kallen kanssa tehneet alkuosan tehtäviä. Työnjakomme oli suunnilleen seuraava: Kalle ideoi ja minä siivosin ronskeimmat juonenkäänteet koulukelpoiseen asuun.

Anun tehtävät alkavat alkavat Tipeistä ja Topeista.

Lopussa on muutama HoPE 1-tehtävä Turun yliopiston kuuluisasta matematiikan sanallisten tehtävien oppimispelistä: **"Hopeisen pöllön etsintä Salaisten Lukujen valtakunnassa"**. Kiitämme tekijöitä Marja Vauras, Riitta Kinnunen, Anu Kajamies ja Tuike Iskala, että saamme julkaista otteita heidän pelistään.

Voit ladata tarinatehtävät itsellesi täältä: https://seafile.utu.fi/f/49a11455d4fb41f68128/

Tehtävät opettajille

1) Tee oppikirjan sanallisesta tehtävästä mielenkiintoisempi

(Käytä apuna Professori Erno Lehtisen osuutta julkaisusta ”Matematiikan sanalliset tehtävät - Tehtävän ymmärrys " (s.41 on Ernon osuus)

TAI

2) Tee avoin sanallinen tehtävä (avoimen tehtävän määrittely alla)

LISÄKSI kokeile tätä:

3) **Ratkaise koko luokan kanssa** tässä jaksossa esitetty tai itse tehty sanallinen tehtävä mallittaen ja osissa laskien. Voit käyttää valmiita tehtäviä tästä osiosta. Mikä tahansa tarinatehtävä käy.

Avoin ja suljettu ongelma

Avoimelta ongelmalta voi puuttua sekä alku- että lopputilat tai toinen niistä. Ongelman määrittäminen jätetään tällöin epämääräiseksi. Edellisestä johtuen avoimissa tehtävissä on tavallisesti useita oikeita ratkaisuja tai ratkaisuteitä. Tällaiset tehtävät tarjoavat oppilaille enemmän harkintavapautta ratkaisemisvaiheessa, mutta haastavat samalla käyttämään matematiikkaa monipuolisemmin. Tämä tarjoaa aineksia oppilaiden metakognitiivisten taitojen harjaannuttamiseen. Avoimien tehtävien käyttäminen opetuksessa näyttää myös aktivoivan ja motivoivan oppilaita. (Pehkonen 1994, 62; Pehkonen 1997, 20.) Avoimien ongelmien pohtiminen ryhmässä on tuloksellisempaa kuin yksin. Tämä korostuu mm. erilaisten ratkaisuvaihtoehtojen pohdinnoissa. Keskinäinen kommunikointi ja vuorovaikutus ryhmässä näyttää antavan suoraa palautetta oppilaille heidän ratkaisuistaan. (Sorvari & Pehkonen 2001,5.)

Esimerkki 1: Avoin ongelma - alkutila on avoin, lopputila on määrätty

Tee 10m pitkä valkoinen aita, jonka korkeus on 1m.

Esimerkki 2: Avoin ongelma - alkutila on määrätty, lopputila on avoin

Tee ruokaostossuunnitelma 2-henkiselle perheelle viikoksi. Rahaa on käytössäsi vain 100€.

Ernon ohjeet dioina, kuinka kirjan sanallisesta tehtävästä saadaan melko pienellä lihavoittamisella paljon haastavampi ja kiinnostavampi: https://seafile.utu.fi/f/7d6ca4cf55d4485bbb93/