

ajattelun kuvaileminen ääneen
jumissa olemisen arvostaminen
virheiden arvostaminen
vastaus päättely ja perustelut
käsitteiden pohtiminen
erilaisten ratkaisujen arvostaminen
itsearviointi



Opetus- ja
kulttuuri-
ministeriö



JOUSTAVA YHTÄLÖN- RATKAISU

$$a + 3 = 2a + 1$$

$$2(x - 3) = 16$$

Yhtälö

Lausekkeiden vertailua
Lauseke = Lauseke
Tosi, epätosi, joskus tosi?

vaakamalli
muunnokset

vapaus tutkia
ratkaisun etsiminen

Opettajan opas

Opettaja: _____

Koulu: _____

Tämä teos on lisensoitu Creative Commons Nimeä 4.0 Kansainvälinen -käyttöluvalla. Tarkastele käyttöilupaa osoitteessa
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.fi>.



Joustava yhtälönratkaisu - Sisällys

ALKUSANAT OPETTAJALLE	2
TAVOITTEET KAPPALEITTAIN	4
POHJUSTAVA TUNTI	5
MATEMAATTISEN RYHMÄTYÖSKENTELYN TAVOITTEET	9
1.1 Mikä on yhtälö?	10
1.2 Mikä on yhtälön ratkaisu?	15
Luku 2 Muunnoksiin tutustuminen	19
HUOM. Kappale 2.1. käydään joko lähestymistavalla a tai b.	20
2.1 a) Muunnokset ja vaakamalli.....	20
2.1 b) Muunnokset ja vaakamalli	22
2.2 Muunnosten käyttöön tutustumista	27
2.3 Virheitä muunnosten käytössä.....	35
Luku 3 Yhtälön ratkaiseminen	44
3.1 Yhtälön luominen ja ratkaiseminen.....	44
3.2 Yhtälönratkaisutehtäviä	50
Luku 4 Joustava yhtälönratkaisu	54
4.1 Sulkausekkeet	54
4.2 Sulkuyhtälöt ja joustavuus.....	58
4.3 Lisää joustavia yhtälöitä	64
Luku 5 Kertaus	71

Joustava yhtälönratkaisu –työryhmä:

Peter Hästö (2015-2019), Dimitri Tuomela (2015-2019), Riikka Palkki (2015-2019), Virpi Kostama (2015-2017), Marko Leinonen (2016), Hannu Suvanto (2015), Juha Jaako (2015)

Materiaalissa esiintyvien Kalle ja Leena -tehtävien idea pohjautuu Jon R. Starin ja kollegoiden materiaaleihin <http://scholar.harvard.edu/contrastingcases/>

Opettajan ohje

ALKUSANAT OPETTAJALLE

Joustava yhtälönratkaisu (JYR) on LUMA SUOMI –kehittämishanke, joka toteutettiin Oulun yliopiston matematiikan opetuksen tutkimusryhmässä. JYR –materiaalissa painotetaan ymmärrystä, oman ajattelun kertomista ääneen, eri ratkaisutapojen käyttöä ja virheistä oppimista. Tässä opettajan materiaalissa kuvataan tavoitteidenasettelua, tehtävien ratkaisuja ja toteuttamisvinkkejä.

JYR –menetelmässä matematiikka nähdään mahdollisuutena **oppia ajattelemaan, perustelemaan ja ymmärtämään**. Käsitteiden oppiminen ja ymmärtäminen ajatellaan laskurutiinien painotusta tärkeämpänä. Ratkaisuprosessi on vastausta tärkeämpi. Yhtälöiden ratkaisemiseen tarvittavat muunnokset (puolittain lisääminen, vähentäminen, kertominen, jakaminen ja lausekkeen muokkaaminen) esitellään yhtenä kokonaisuutena, jolloin oppilas saa kokonaisnäkömyksen ja vapautta yhtälöiden opiskeluun. Eri ratkaisutapojen tuottaminen ja vertaileminen on niin ikään tärkeää käsitteellisen ymmärryksen kehittymiselle.

JYR:ssä kukin oppilas täyttää omaa monistettaan, mutta useimmissa tehtävissä työskennellään ryhmässä. Kaikilla tunneilla työskennellään 3–5 hengen pienryhmissä; pienryhmätyöskentelyn lomassa on myös koko luokan koonteja (ks. alla). Materiaalissa käytetään pääsääntöisesti seuraavia osioita:

- **Tehtävä** –osioissa pääpaino on pienryhmätyöskentelyssä. Opettajan on hyvä kannustaa ryhmäläisiä tehtävien tekemiseen yhdessä tai ainakin keskustelemaan keskenään eri oppilaiden tuottamista ratkaisuista (ei ainoastaan vastauksesta). Tärkeää on kuvata omaa ajattelua sekä ymmärtää muiden ajattelua, sekä varmistaa, että kaikki ymmärtävät, mitä on tehty.
- **Esimerkki** –osiossa käydään materiaalia läpi opettajajohtoisesti keskustellen. Oppilaille kannattaa antaa aikaa (0,5–2 min) pohtia kutakin esimerkkitehtävää ryhmissä ennen koko luokan keskustelua tai keskustelun välissä.
- **Uusi käsite** –osiossa käydään myös materiaalia läpi opettajajohtoisesti keskustellen. Nimensä mukaisesti osiossa esitellään (eli määritellään) uusi käsite jota myöhemmin käytetään esimerkeissä ja tehtävissä. Uuden käsitteen osalta voi olla perusteltua antaa aikaa pienryhmäkeskustelulle vasta opettajan esityksen jälkeen, koska uusia käsitteitä ei voi päätellä (matemaattisesti).

Rakentava pienryhmässä työskenteleminen

Opettajan on tärkeää valita pienryhmät huolella sovittaen oppilaiden heikkouksia ja vahvuuksia yhteen (johtaja, ideoija, innostaja, kokoaja, jne.). Jos luokka ei ole tottunut pienryhmätyöskentelyyn matematiikan tunneilla, voi sen käyttämisen aloittaa esimerkiksi pari viikkoa ennen yhtälönratkaisuun siirtymistä. Luokan kanssa on hyvä keskustella, millaista on hyvä ryhmätyöskentely, mitä haasteita siihen liittyy ja antaa heidän tottua ryhmässä olemiseen. Tunneilla opettaja kiertele neuvomassa ryhmiä, mutta kannustaa oppilaita kysymään ensin toisiltaan ja ottamaan aktiivisen osan sekä omasta että ryhmän tekemisestä.

Opettajajohtoinen koonti

Opettajan rooli on tärkeä paitsi pienryhmien ohjaajana, myös uusien käsitteiden esittämisessä ja ryhmien ajatusten kokoajana (tunnin alussa, aikana ja lopussa). Siirtymää opettajajohtoiseen työskentelyyn voi nopeuttaa esim. kellon ki-
linällä. Esimerkiksi kysymykset ”Mitä ajatuksia muilla tulee tästä?”, ”Kerrotko vielä omin sanoin.”, ”Miksi?” edistävät luokahuonekeskustelua sekä oppilaiden ajattelun ja virhekesitysten esiintuloa. Opettajan rooli on ohjata keskustelua, ei niinkään selittää itse tai kertoa vastauksia. Erityisen tärkeää on ohjata oppilaita kuuntelemaan ja kommentoimaan **toistensa** puheenvuoroja. Jos asia uhkaa jäädä epäselväksi, opettaja auttaa olennaisen löytämisessä.

Erityyppisiä tehtäviä ja itsearviointia

Materiaali koostuu viidestä luvusta, joihin menee 10 tuntia. Jos aikaa on niukalti, niin kolmannen luvun jälkeen on mahdollista pitää tauko ja jatkaa esimerkiksi 8. luokalla. Lukujen sisällön perustelua on niiden alussa. Tehtäviä sekä analysoidaan, ratkaistaan että luodaan itse. **Kalle ja Leena –tehtävissä** vertaillaan kahta eri ratkaisutapaa. Saman tehtävän eri ratkaisutapojen vertailun on yhdysvaltalais tutkimuksissa todettu kehittävän matematiikan käsitteellistä osaamista ja joustavuutta kaiken tasoilla oppilailla. Tehtävään voi sisältyä tarkoituksellinen virhe, mitä analysoimalla voidaan korjata tyypillisimpiä virheitä, pohtia perusteluja ja paljastaa muita virheellisiä käsityksiä. **Jokeritehtäviksi** merkityt tehtävät lasketaan, jos aikaa jää ennen seuraavan esimerkkiin siirtymistä tai ennen oppitunnin päättymistä. **Kotitehtävissä** pääosin kerrataan edellisen tunnin asiaa. Tuntien päätteeksi oppilaat arvioivat lyhyesti ryhmänsä työskentelyä. Lukujen lopuksi he arvioivat matemaattista osaamistaan.

Tervetuloa mukaan kehittämään itseäsi, oppilaitasi ja matematiikan opetusta!

Oulussa helmikuussa 2016, Joustava yhtälönratkaisu –työryhmä

TAVOITTEET KAPPALEITTAIN

LUKU	KAPPALE	Sisältö
LUKU 1 JOHDATUS YHTÄ- LÖIHIN	1.1 Mikä on yhtälö?	- Pohjustetaan yhtälöiden käsitteellistä ymmärrystä. - Opitaan näkemään ero lausekkeen ja yhtälön välillä. - Pohditaan yhtälön totuusarvoa.
	1.2 Mikä on yhtälön ratkaisu?	- Kokeilemalla tutkitaan, onko jokin luku yhtälön ratkaisu. - Tutkitaan yhtälöiden totuusarvoa. - Ymmärretään, mitä tarkoitetaan yhtälön ratkaisulla.
LUKU 2 MUUNNOKSIIN TUTUSTUMINEN	2.1 Muunnokset ja vaakamalli	- Tutustutaan muunnoksiin keinona muuttaa yhtälön ratkaisua niin, että ratkaisu (tasapaino) pysyy samana.
	2.2 Muunnoksien käyttöön tutustumista	- Täydennetään tehtäviä ja pohditaan muunnosten käyttöä.
	2.3 Virheitä muunnosten käytössä	- Analysoidaan tyypillisiä virheitä ja verrataan niitä oikeisiin ratkaisutapoihin.
LUKU 3 YHTÄLÖN RAT- KAISEMINEN	3.1 Yhtälön luominen ja ratkaiseminen	- Harjoitellaan muunnosten käyttöä ja luovuutta luomalla yhtälöitä itse ja ratkaisemalla toisten laatimia yhtälöitä. - Analysoidaan ja luokitellaan yhtälöitä. - Opetellaan ryhmässä työskentelyä.
	3.2 Yhtälönratkaisutehtäviä	- Opetellaan ratkaisemaan eri tyyppisiä yhtälöitä ja tarkistamaan ratkaisu.
LUKU 4 JOUSTAVA YHTÄ- LÖNRATKAISU	4.1 Sulkulausekkeet	- Tutkitaan ja opitaan sulkujen avaamista mm. säkkin mallin avulla.
	4.2 Sulkuyhtälöt ja joustavuus	- Analysoidaan ja tuotetaan useita ratkaisutapoja samoille yhtälöille.
	4.3 Lisää joustavia yhtälöitä	- Analysoidaan lisää erilaisia ratkaisutapoja. - Ratkaistaan erilaisia yhtälöitä. - Kehitetään joustavuutta.
LUKU 5 KERTAUS *	5.1 Kertaustehtäviä	- Harjoitella yhtälönratkaisua kerraten kurssilla käytyjä asioita.

POHJUSTAVA TUNTI

1) Kerrotaan lyhyesti käynnistyvästä opetuskokeilusta materiaalin kansilehden avulla.

- Opetuskokeilun aikana oppilaat eivät tarvitse kirjaa tai laskinta ja materiaalin he saavat monisteina, joita he täydentävät sekä keräävät omaan kansioonsa.
- Pienryhmätyöskentely ja koko luokan keskustelu vuorottelevat.
- Kantavana ideana on, että ratkaisua tärkeämpi asia on perustelu ja idea menetelmästä tai tavasta, kuinka on päätytty ratkaisuun.
- Kuunnellaan ja otetaan kantaa muiden ratkaisuihin ja ideoihin.

2) Pohditaan mitä hyötyä ja haittaa ryhmätyöskentelystä ja keskustelusta on matematiikan oppimisessa.

Oppilaat voivat tutkia ajan kanssa Matemaattisen ryhmätyöskentelyn taitoja (s.2) ja pohtia ryhmissä, mitä mieltä niistä ovat. Oppilaat voi laittaa pohtimaan jo ennen koosteen näyttämistä, että mikä on tärkeintä ja haastavinta ryhmätyöskentelyssä. Oppilaat on tärkeä saada pohtimaan, miten luokan toimintakulttuuria ja ilmapiiriä voi kehittää.

3) Ryhmätyöskentelyn tavoitteiden asettaminen

- Keksitään ryhmälle nimi ja pohditaan yhteiset ryhmän tavoitteet esimerkiksi matemaattisen ryhmätyöskentelyn taidot – koosteen avulla.
- Jokainen oppilas pohtii vielä itsenäisesti omat tavoitteet ryhmätyöskentelyyn.

Opettajalle taustatietoa ryhmätyöskentelyn sujuvoittamiseksi

Oppilaat ja ryhmät ovat hyvin erilaisia. Siksi tarvitaan oppilaantuntemusta ja tilannetajua rohkaista oikealla tavalla oppilaita luomaan pienryhmiinsä rakentava ilmapiiri. Tilanteen haastavuuden voi ilmaista oppilaillekin esimerkiksi seuraavasti: ”Ryhmässä työskenteleminen on haastavaa, koska ihmiset ovat niin erilaisia. Luotan siihen, että osaatte luoda ryhmäänne hyvän ilmapiirin, jossa jokaisella on mahdollisuus osallistua ilman virheiden tai nauramisen pelkoa. Hyvän ilmapiirin luominen voi vaatia esimerkiksi sitä, että hiljaisempien täytyy rohkaistua esittämään ajatuksiaan ja puheliiden tulee oppia antamaan tilaa ja huomioimaan muita.” Taustatieto on jaettu viiteen aiheeseen:

- A) Luokan toimintakulttuurin arviointi (apukysymyksiä)
- B) Ryhmätyöskentelyn haasteita ja hyötyjä
- C) Neljä askelta kohti rakentavia keskusteluja
- D) Rakentavien koko luokan keskustelujen virittäminen

A) Luokan toimintakulttuurin arviointi

Millainen on luokan toimintakulttuuri?

JYR-materiaalista hyötyy erityisesti luokka, jossa on turvallinen ja ei-kilpailullinen ilmapiiri. Hyvä onnistumisen lähtökohta on, jos luokassa on seuraavia toimintatapoja:

- 1) Uskaletaan yrittää ja erehtyä. Tehdyille virheille ei virnuilla.
- 2) Uskaletaan kuvailla omaa ajattelua toisille ja opettajalle.
- 3) Uskaletaan kysyä.

Millaiset ovat oppijoiden vuorovaikutustaidot?

Vuorovaikutustaidot ovat tärkeitä JYR-materiaalin käytössä. Seuraavien kysymysten avulla voidaan arvioida oppilaiden vuorovaikutustaitoja:

- Tekevätkö oppijat toisilleen kysymyksiä ja kuuntelevatko oppijat toisiaan?
- Auttavatko oppijat toisiaan?
- Esittävätkö oppijat väitteensä asiallisesti ja käsitelläänkö erimielisyyksiä rakentavasti?
- Hyväksyvätkö oppijat asiallisen kritiikin?
- Pysyvätkö oppijat asiassa keskustellessaan?
- Käyttävätkö oppijat toistoa? "Selittäisitkö uudestaan..." "Tarkoitatko, että..."
- Pystyvätkö oppijat toimimaan muiden kuin kavereidensa kanssa?

Mikä on asenne matematiikan opiskeluun?

Jaksavatko oppilaat tehdä aivotyötä ja uskovatko he voivansa oppia matematiikkaa? Aivot kehittyvät ajattelemalla ihan samoin kuin kunto kasvaa juoksemalla. Tämän aukiselittämiseen voi käyttää esimerkiksi Growth Mindset [posteria](#) tai [TED-talkia](#) aiheesta.

Posterit: <https://chrishildrew.files.wordpress.com/2014/03/fixedgrowth-copy.jpg>

TED-talk: <https://www.youtube.com/watch?v=pN34FNbOKXc>

B) Ryhmätyöskentelyn haasteita ja hyötyjä:

Haasteita:

- Keskustelun sopiva määrä ja ajoitus
- Aiheessa pysyminen
- Keskustelemaan ja yksin rauhassa pohdiskelemaan yhteensovittaminen
- Hyökkäävän ja rohkean sekä varovaisen ja vetäytyvän yhteensovittaminen
- Auktoriteettihaasteet: Kuka on pomo? Kuka on oikeassa?
- "Minä tiedän paremmin" -asenne,
- Vapaamatkustaminen tai toisten varjoon jääminen
- Jännittäminen
- Kiusaaminen

Hyötyjä (kun ryhmä toimii):

- Helpottaa tehtävien haastavuuden aiheuttamaa ahdistusta
- Ryhmä pystyy yhdessä paljon enempään kuin sen jäsenet yksin
- Mahdollistaa useiden lähestymistapojen ja virheiden analysoimisen
- Tukee käsitteellistä ymmärrystä (joka muodostuu nimenomaan vuorovaikutuksessa)
- Kehittää korkeamman tason ajattelutaitoja (esim. arviointi, analysointi)
- Vastaa tosielämän ongelmanratkaisutilanteita ja työyhteisöjä

Halutessasi voit tulostaa Matemaattisen ryhmätyöskentelyn taidot -julisteen luokan seinälle tai pienryhmille:

<https://drive.google.com/file/d/0BwtLKBmE9AYBajhzblRxeFRvamc/view?usp=sharing>

C) Neljä askelta kohti rakentavia keskusteluja:

- 1) Ohjataan yksittäisiä oppilaita jakamaan ja selkiyttämään ajatteluaan
- 2) Ohjataan oppilaita kiinnittämään huomiota toisten oppilaiden ajatteluun
- 3) Ohjataan oppilaita syventämään päättelyään
- 4) Ohjataan oppilaita osallistumaan toisten päättelyyn rakentavasti

1) Autetaan yksittäisiä oppilaita jakamaan ja selkiyttämään ajatteluaan

Rohkaise oman ajattelun ääneen kuvailemiseen. Myös sen voi yrittää paikallistaa ääneen mitä tarkalleen ottaen ei ymmärrä. Kehota oppijoita selittämään toisilleen ääneen, mitä ovat ratkaisuissaan tehneet. "Miten olet aloittanut tehtävän?" "Mitä aiot seuraavaksi tehdä?" "Miten päädyit tähän lopputulokseen?"

2) Autetaan oppilaita kiinnittämään huomiota toisten oppilaiden ajatteluun

"Voisitko toistaa omin sanoin Elinan ajatuksen?"

"Mitä mieltä olet Matin sanomasta?"

Näitä kysymyksiä saattaa hyvin seurata vastaus "emmä kuullu" tai "emmä tiä", jolloin voi kehoittaa

"Jos et kuullut, niin pyydä Elinaa toistamaan ajatuksensa"

"Mieti ihan rauhassa, samalla muutkin saavat aikaa miettiä mitä mieltä ovat"

"Kysy jonkun toisen mielipidettä tai apua".

Voidaan myös ottaa jokin esine (vaikkapa pehmolelukissa), jonka pitäjällä on puheenvuoro ja jonka kuljettamisesta oppilaat vastaavat.

3) Autetaan oppilaita syventämään päättelyään

"Voitko olla varma, että ideasi toimii? Mistä tiedät?" "Miten päädyit tähän?" Rohkaise oppijoita muotoilemaan myös kysymyksiä; hyvä kysymys on monesti vastausta arvokkaampi oppimisen kannalta. Toimiiko idea muunlaisissakin tilanteissa?

4) Autetaan oppilaita haastamaan toisten päättelyä

Joskus on tärkeää olla paljastamatta ilmeillään oliko oppilaan sanoma oikein vai väärin, jotta oppilaat joutuvat keskenään päästelemään. Opettaja voi kysyä: "Millainen tämä ratkaisu teidän mielestä on?" tai "Mietityttääkö tuossa ideassa/ratkaisussa jokin?"

Oppilaita voi opettaa kysymään toisiltaan kysymyksiä, jotka vaativat perustelua. Esim. Kavereilta voi aina kysyä "Miksi ratkaisit tuolla tavalla?" tai "Miksi noin saa tehdä?" tai "Mitä tuo tarkoittaa?" tai "Voitko selittää minkä virheen teit ja miksei se sinusta ollutkaan hyvä?" Kerro oppijoille, että eteenpäin pyrkivä ihmettely on oppimisen lähtökohta!

Jos asia tuntuu ristiriitaiselta, se on sitä mielenkiintoisempi! Kehottamalla oppilaita **ottamaan kantaa**: Olen samaa/eri mieltä, koska... "Kuullessasi sanan, jota et ymmärrä, kysy mitä se tarkoittaa." (Ei ole noloa, vaan merkki hyvistä ajattelutaidoista ja aktiivisesta kuuntelusta.)

D) Rakentavien koko luokan keskustelujen virittäminen

Smithin ja Steinin työhön pohjautuva vaiheistus helpottaa matemaattisesti rakentavien koko luokan keskustelujen virittämistä:

1 Ennakointi (Anticipating)

- Ratkaise tehtävä itse ja ennakoi oppilaan näkökulmaa.
- Millaisia ongelmia oppilaat kohtaavat?
- Millaisia tuotoksia oppilailta todennäköisesti syntyy?
- Mitkä kysymykset ja tehtävät vievät parhaiten matemaattisten pohdintojen äärelle?

2 Tarkkailu (Monitoring)

- Kuuntele, tarkkaile, tunnista keskeisiä ratkaisutapoja.
- Pysy kärryllä oppijoiden lähestymistavoista.
- Kysy kysymyksiä auttaaksesi ja syventääksesi pohdintoja.

3 Valinta (Selecting)

- RATKAISEVA VAIHE - Mitä haluat korostaa?
- Valikoi siten, että matemaattiset ideat pääsevät kehittymään.

4 Järjestäminen (Sequencing)

- Missä järjestyksessä haluat ottaa esille oppijoiden tuotoksia?
- Yleisimmin esille noussut asia? Väärinkäsitykset ensin?
- Miten oppijat jakavat työnsä? Suullisesti? Taululla? Dokumenttikameralla?

5 Koonti (Connecting)

- Kiinnitä huomio sopivilla kysymyksillä olennaisiin ideoihin.
- Vertaile oppijoiden tuotoksia. Miten ne suhtautuvat matemaattisesti toisiinsa?
- Miten aiheet liittyvät aiemmin opittuun? Mitä tästä voi oppia tulevaa varten?

Koonnissa varmistetaan yhteisymmärrys keskeisistä käsitteistä, vertaillaan erilaisia ratkaisutapoja (myös virheellisiä), luodaan yhteyksiä aiemmin opittuun ja pohditaan työskentelyn aikana heränneitä kysymyksiä. Kun oppijat ovat vertaillleen vastuussa omasta työskentelystään, heidän täytyy ottaa aktiivisempi rooli matematiikan pohdintaan. Syvällisen käsitteellisen ymmärryksen on todettu muodostuvan vuorovaikutuksessa.

Smithin ja Steinin ohjeiden vaiheissa 3 ja 4 korostuu opettajan kontrolli siitä, mihin suuntaan ollaan menossa. Joskus on tarpeen myös antaa arvoa oppijoiden itsensä valitsemalle suunnalle vapauden tunteen ja ideoiden omistamisen ilon lisäämiseksi.

Lue lisää ja perehdy konkreettiseen esimerkkiin lukemalla Margaret Smithin esitys:

<https://drive.google.com/file/d/0BwtLKBmE9AYBU1U3YnFwZnFit00/view?usp=sharing>

Lähde: *Practices for Orchestrating Productive Math Discussions*, M. S. Smith & M. K. Stein, NCTM & Corwin Press, 2011, <http://www.mctm.org/mespa/5Practices.pdf> (katsottu 13.10.2015)

MATEMAATTISEN RYHMÄTYÖSKENTELYN TAVOITTEET

Ryhmän nimi: _____

Tutustukaa ryhmänne kanssa alla oleviin matemaattisen ryhmätyöskentelyn taitoihin. **Poimikaa kaksi kohtaa, joissa ryhmänne aikoo tulla hyväksi.**

1)	
2)	

Omat ryhmätyöskentelyn tavoitteeni

1)	
2)	

MATEMAATTISEN RYHMÄTYÖSKENTELYN TAIOT

AUTA JA PYYDÄ APUA:

- Pyydä apua ja auta toisia.
- Myös toisesta ryhmästä voi hakea apua.
- Kuvaile ajatteluasi. Kerro mitä et ymmärrä.
- Vaikuta ilmapiiriin myönteisesti. Rohkaise, kiitä ja kehu.

KESKUSTELE JOUSTAVASTI

- Ota kantaa: Oletko samaa vai eri mieltä? Miksi?
- Ole kohtelias. Kritisoi väitteitä, älä henkilöitä.
- Liitä ajatuksesi toisten puheenvuoroihin.
- Pyydä miettimisaikaa.

TOISTO ON TÄRKEÄÄ

- Usein kerta ei riitä asian ymmärtämiseen.
- "Selittäisitkö uudestaan...?"
- "Tarkoitatko, että...?"
- "Voisiko joku toinen selittää saman asian?"

KESKITY VASTAUKSEN SIJAAN PÄÄTTELYYN

- Vertaile erilaisia ratkaisutapoja.
- Tutki virheellistä päättelyä ja opi siitä.
- Kysele ja ihmettele! "Miksiköhän...?"
- Etsi lisää näkökulmia. Ole luova! "Entä jos...?"
- Etsi hyviä kysymyksiä ja kirjoita ne ylös.

Luku 1 Johdatus yhtälöihin

1.1 Mikä on yhtälö?

Tunnin rakenne:

- Yhtälön rakenne ja tunnistaminen (tehtävä 1) ja yhtälön ja lausekkeen vertailua (n. 10min)
- Yhtälö väitteenä – Jokeri 3 (n. 30 min)
- Tunnin idean koonti ja ryhmäarviointi (n. 5 min)

Tunnin tavoitteet

- Erotetaan yhtälö ja lauseke toisistaan.
- Hahmotetaan yhtälön rakenne: lauseke = lauseke (yhtälöitä on hyvin, hyvin erilaisia)
- Huomataan, että yhtälö voi olla tosi, epätosi tai ehdollisesti tosi.
- Saadaan ensikosketus muuttujan sisältäviin yhtälöihin

Toimintaohje: Rohkaistaan oppilaita keskustelemaan matematiikasta. Keskiössä on perusteleminen, muiden ratkaisujen kuunteleminen ja kommentoiminen.

Yhtälön rakenne ja tunnistaminen

Opettaja esittelee yhtälön: Keksitään oppilaiden kanssa kaksi lauseketta ja yhdistetään ne yhtäsuuruusmerkillä.

Yhtälö on esimerkiksi $x + 3 = 1$ tai $6 = 2 + 2 + 2$

Yhtälössä on kaksi lauseketta, joita vertaillaan. Lausekkeiden välissä on yhtäsuuruusmerkki.

Huom. Tässä vaiheessa opettaja näyttää tarkoituksella vain yhden yhtälön, jotta oppilaat voivat pohtia Tehtävässä 1 itse, mikä on tai ei ole yhtälö.

Taustatieto; ”Yhtälö on kahden lausekkeen merkitty yhtäsuuruus. Lauseke on yhdistelmä numeroita, operaattoreita ja ryhmittelymerkkejä. Lausekkeissa voi olla yksi tai useampi muuttuja. Yhtälön ratkaisemisella tarkoitetaan sen selvittämistä, millä muuttujien arvoilla lausekkeiden arvot ovat samat. Yhtälölle ei välttämättä ole ratkaisua, tai on myös mahdollista, että yhtälö on voimassa kaikilla muuttujien arvoilla.”

Tehtävä 1 Selvitä mitkä seuraavista ovat yhtälöitä ja mitkä puolestaan lausekkeita. Ympyröi yhtälöt.

a) $8 = 10 - 2$

tosi

f) $1745 + 31 = 103 - 20$

epätosi

b) $74 - 5$

g) $8 \cdot 14 = 4 \cdot 14 + 4 \cdot 14$

tosi

c) $-4 = -2 + 2$

epätosi

h) $2a = a$

tosi, kun $a = 0$

d) $10 \cdot 5 + 5 \cdot 10$

i) $-2 + 4 = -(2 + 4)$

epätosi

e) $3 = 3$

tosi

j) $\square + 1 = 5 \cdot \square$

Riippuu laatikon sisällöstä

Kommentteja tehtävän 1 eri kohtiin:

c) näyttää ensivilkaisulta todelta ja nostaa esille yleisen virheen.

f) Voi perustella laskematta suuruusluokan avulla epätodeksi.

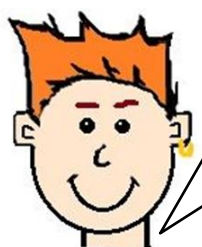
g) kannattaa pohtia laskematta kuinka monta "neljäätoista" kummallakin puolella on (vasemmalla 8 ja oikealla kaksi neljän kasaa).

h) voi verrata a:ta tietyn kokoiseen säkkiin: vasemmalla puolella kaksi säkkiä ja oikealla puolella yksi. Vain jos säkit ovat tyhjiä, niin molemmilla puolilla on yhtä paljon.

j) on tarkoituksena linkittää alakoulussa käytyjä laatikkotehtäviä nyt opiskeltavaan. Luokan innokkuuden mukaan voi pohtia: Ovatko kummatkin laatikot samat luvut? Mitkä luvut laatikkojen tilalle tulee, jos ne voivat olla eri luvut? Entä löytyisikö muualta kuin kokonaislukujen joukosta ratkaisu, jossa laatikot ovat samat luvut. Jos laatikot oletetaan samoiksi, oikea vastaus on $\frac{1}{4}$, jos eriksi niin esim. 4 ja 1.

Yhtälön ja lausekkeen vertailua

Pohditaan yhdessä luokan kanssa ja kirjataan johtopäätös, johon yhdessä tultiin.

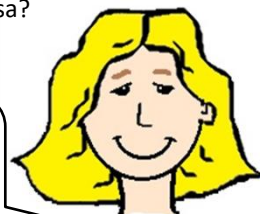


Esimerkiksi: "Molemmissa voi olla numeroita, muuttujia ja laskutoimituksia, joita voi laskea." TAI "Molemmissa on lauseke; yhtälössä jopa kaksi." TAI "Molempiin sisältyy lauseke (yhtälössä on kaksi lauseketta) ja kaikki mistä lauseke muodostuu."

Mitä erilaista on yhtälöissä ja lausekkeissa?

"Vain yhtälössä on yhtäsuuruusmerkki." Kun yhtälö väitteenä on käyty, voidaan lisätä: "Yhtälö on väite, joka voi olla tosi, epätosi tai joskus tosi. Lauseke on vain eräänlainen rakennuspalikka."

Mitä samanlaista on yhtälöissä ja lausekkeissa?



Yhtälö väitteenä

Ideaan johdatteluna oppilaita voi kehottaa ottamaan kantaa Esimerkin 1 väitteisiin. Yhtälö voidaan ajatella väitteenä, joka huutaa: "Nämä kaksi lauseketta ovat yhtä suuria!" Väitteeseen voi ottaa kantaa usealla tavalla.

Esimerkki 1 Ovatko seuraavat väitteet tosia vai epätosia.

a) Niili on joki.

tosi

b) $2 + 5 + 1 = 8$ *tosi*

c) Maapallo on litteä kuin lettu.

epätosi

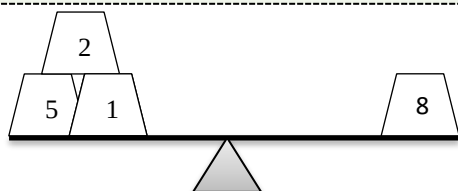
d) $8 + 2 = 7 + 5$ *epätosi*

e) Pöydässä on neljä jalkaa. *ehdollisesti tosi, riippuu pöydästä* f) $x = 4$ *tosi tai epätosi, riippuen x:n arvosta*

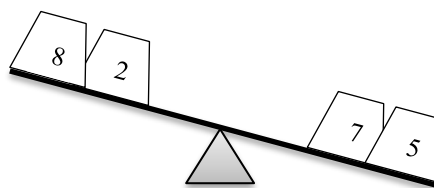
Yhtälö vaa'an avulla esitettynä

Vaa'an tasapaino vertauskuvana yhtälön totuusarvosta

Esitellään vaa'an käyttö yhtälöillä ilman muuttujia. Kun vaaka on tasapainossa, on molemmilla puolilla yhtä paljon painoja. Tätä ideaa voidaan myös kuvata yhtälöillä. Silloin tarkoitetaan, että yhtälön molemmat puolet ovat yhtä suuret eli yhtälö on "tasapainossa".



$$2 + 5 + 1 = 8$$



$$8 + 2 < 7 + 5$$

Esimerkki 2 Ovatko seuraavat väitteet tosia vai epätosia? Perustele.

a) $\frac{6}{2} = 1 + 2$ *tosí (3=3)*

b) $4567 + 1000 = 5500 + 67$ *tosí (5567 = 5567)*

c) $7x + 3 - 5$ *lauseke, ei voi tarkastella totuusarvoa*

d) $3x + 8 = 3x + 8$ *tosí kaikilla x:n arvoilla ("molemmilla puolilla kolme samankokoista sakkia ja kahdeksan")*

e) $3a + 7 = b - 1$ *rüppuua:n ja b:n arvosta ("a ja b voivat olla erikokoisia sákkejä", esim. a = 1 ja b = 11 tekevät yhtälöstä toden. Itse asiassa yhtälö on tosí aina, kun b = 3a + 8. Tähän ei kannata takertua: se on vain esimerkki, että yhtälössä voi olla useampiakin muuttujia.)*

f) $7 < 3$ *epätosí (ei ole yhtälö, epäyhtälö väittää toista puolta pienemmäksi kuin toista, 7 ei ole pienempi kuin 3)*

Oppilaat täydentävät laatikoihin selityksen, mikä on yhtälö ja milloin yhtälö on tosí.

Mikä on yhtälö?

*Yhtälö on kahden lausekkeen merkitty yhtäsuuruus.
Lauseke = Lauseke
Yhtälö väittää "Nämä kaksi lauseketta ovat yhtä
suuria!"*

Milloin yhtälö on tosí?

Yhtälö on tosí silloin, kun yhtälön vasen ja oikea puoli ovat samanarvoiset. Tämä tarkoittaa samaa kuin "yhtälö on tasapainossa" (vrt. vaaka).

Tehtävä 2 Tarkastele uudestaan **tehtävää 1**. Selvitä, ovatko ympyröimäsi yhtälöt tosia vai epätosia.

Jokeri 3 Muodosta alla olevista

Jokerissa 3 ryhmien on tarkoitus selvittää, ovatko yhtälöt tosia vai epätosia ja kuinka ovat päätyneet ratkaisuunsa. Perusteleminen on tärkeintä (voi olla sanallista)!

Jokeri 3 koonti

- Käydään tehtävä läpi yhdessä keskustellen ja kootaan taululle, jos kaikki ehtivät tehdä tehtävän.
- Kun ryhmät ovat saaneet yhtälönsä valmiiksi, ne voidaan koota taululle omiin sarakkeisiinsa: "todet yhtälöt", "epätodet yhtälöt" ja "muuttujayhtälöt". Opettaja voi sujauttaa oman yhtälön väärään paikkaan ja katsoa herättääkö se keskustelua.
- Taululle koottua yhtälöiden kirjoa kannattaa analysoida ja luokitella yhdessä: Mitkä ovat monimutkaisia/yksinkertaisia ja miksi? Ovatko jotkut yhtälöt selvästi erilaisia kuin toiset, miksi?

1001

9y

-10

$\frac{11}{5}$

4

$\frac{4}{5}$

x

0,2

3

1

-

+

.

÷

=

a) yhtälö, joka on tosi.

Esimerkiksi $\frac{11}{5} + \frac{4}{5} = 3 \cdot 1$

b) yhtälö, joka on epätosi.

Esimerkiksi $1001 - 1 = -10^2$

c) yhtälö, joka sisältää muuttujan.

Esimerkiksi $9y + 1001 = \frac{4}{5}$

Huomautus!

- Tyhjen laatikkojen ja ympyrän sisällöistä voit päättää itse.
- Samaa laatikon sisältöä tai merkkiä voi käyttää yhtälössä useammin kuin kerran, kunhan lopputulos on edelleen tehtävänannon mukainen yhtälö.

OPPITUNNIN IDEAN KOONTI (2-3min): Oppilaita voi kehottaa hetken (30 s) kertaamaan ryhmässä: ”Mikä on yhtälö?” ja ”Milloin yhtälö on tosi?” ja sen jälkeen koota oppilaiden kertomana tunnin idean. (Tarvittaessa luokan aktivoimiseksi voi koittaa heiteltävää pehmolelua, joka osoittaa kenellä on puheenvuoro ja jonka kulkua oppilaat ohjaavat.)

OHJEISTUS RYHMÄARVIOINTEIHIN OPPITUNTIEN PÄÄTTEEKSI (2-3min): Jokaisen oppitunnin päätteeksi tehtävässä ryhmäarvioinnissa pohditaan ryhmän onnistumista ryhmätaitojen neljässä kohdassa. (Materiaalin ensimmäisellä tunnilla tarkemmin). Oppilaat rastittavat tai värittävät heidän ryhmäänsä kuvaavan hymiön.

RYHMÄARVIOINTI (ryhmätaidot selitetty tarkemmin sivulla 2)					
Ryhmätaito	Onnistuminen				
Autoimme ja rohkaisimme toisiamme					
Keskustelimme toisemme huomioiden					
Toistimme asioita tarvittaessa					
Keskityimme perusteluihin vastausten sijaan					
Hyödynsimme virheitä oppiaksemme					

Kotitehtävä 1

a) Selvitä, mitkä laatikossa ovat lausekkeita ja mitkä yhtälöitä. Ympyröi yhtälöt.

b) Selvitä, ovatko ympyröimäsi yhtälöt tosia vai epätosia. Kirjoita yhtälön viereen tosi/epätosi.

$-7 = x$

$3 \cdot 8 - 3 \cdot 7 - 3$

$7 + 3 = 8 + \frac{10}{5}$

$3 \cdot (9 - x)$

$\frac{8}{4}$

$15037 - 138 = 15036 - 137$

$u + 1 = 2u - u$

$5 = -5$

w

$-7 = x$ on tosi, kun muuttujan arvo on -7 , muulloin epätosi.

$u + 1 = 2u - u$ eli $u + 1 = u$ on epätosi ($1 = 0$).

$5 = -5$ on epätosi.

$7 + 3 = 8 + \frac{10}{5}$ eli $10 = 10$ on tosi.

$15037 - 138 = 15036 - 137$ eli $14899 = 14899$ on tosi.

Kotitehtävä 2

Kerro jokin asia, minkä olet oppinut yhtälöistä.

Esimerkiksi: Yhtälö sisältää aina yhtäsuuruusmerkin.

Yhtälö voi koostua pelkistä luvuista tai sisältää myös jonkun tuntemattoman eli muuttujan, jota merkitään usein kirjaimella.

1.2 Mikä on yhtälön ratkaisu?

Tunnin rakenne:

- Kotitehtävät ja edellisen kertaus (n. 10 min)
- Tehtävä 1 (20 min)
- Mitä tarkoittaa yhtälön ratkaisu, Esimerkki 1, Tehtävä 2 (10 min)
- Tehtävä 3 ja loppuyhteenveto (5min)

Tunnin tavoitteet

- Opitaan selvittämään, onko yhtälö tosi vai epätosi tietyllä muuttujan arvolla.
- Yhtälön ratkaisun määritelmän ymmärtäminen.
- Luodaan tarve muunnoksille.

Toimintaohje: Tunnilla työskennellään ryhmässä (tehtävä 1), pohditaan yhtälön totuusarvoa ja määritellään yhtälön ratkaisu. Tunnin lopuksi (erityisesti tehtävä 3 c) luodaan tarvetta saada työkaluja (muunnokset) yhtälön helpottamiseksi.

Tehtävä 1 Tutki laskemalla, ovatko taulukon yhtälöt tosia vai epätosia annetuilla muuttujan arvoilla. Mitä huomaat taulukosta?

		$x = 2$	$x = 5$	$x = -1$	$x = 3$	$x = 7$	$x = \frac{1}{2}$	$x =$
A	$x + 2 = 7$	E	T	E	E	E	E	
B	$x + 1 = x$	E	E	E	E	E	E	
C	$x - 5 = 2x - x - 5$	T	T	T	T	T	T	
D	$10 - x = 3$	E	E	E	E	T	E	
E	$1 + x$	3	6	0	4	8	$\frac{3}{2}$	
F	$5x - 3 = 2x + 3$	T	E	E	E	E	E	
G	$x^2 + 6 = 5x$	T	E	E	T	E	E	

Tehtävän 1 toteutus:

- Opettaja jakaa kullekin ryhmälle 2-3 saraketta (muuttujan arvoa). Ryhmät käyvät täydentämässä opettajan tyhjää taulukkoa edessä kirjoittaen TOSI/EPÄTOSI. Ajatuksena on, että joillain ryhmillä on samat arvot.
- Esimerkiksi jokaiselle ryhmälle voi antaa "vastuusarakkeen", jonka käyvät edessä täyttämässä ja "tarkistussarakkeen", jonka tarkistavat toisen ryhmän täytettyä sen.

Huomautus!

- Oppilailla on taulukossa enemmän vastaustilaa väitteen perustelulle.
- Nopealle ryhmälle voi antaa uuden muuttujan arvon esim. $x = 1$, joka tuo kiinnostavan näkökulman yhtälöön (G).

Tehtävän 1 koonti: Mitä havaitsitte?

- Kootaan havainnot taulukosta yhdessä keskustellen lävitse. Ovatko ryhmät samaa mieltä toistensa täyttämistä sarakkeista? Miksi?
- Matemaattinen idea **A- G** kohtien taustalla:
 - o **A, D** ja **F** ovat tosia tasan yhdellä muuttujan arvolla.
 - o **B** ei ole tosi millään muuttujan arvolla. (Sievennyksellä yhtälön saa muotoon $1 = 0$.)
 - o **C** on tosi kaikilla muuttujan arvoilla. (Sievennyksellä yhtälön saa muotoon $x - 5 = x - 5$.)
 - o **E** on lauseke, josta sijoituksen jälkeen saadaan laskettua lausekkeen arvo, eikä totuusarvoa.
 - o **G** on tosi kahdella muuttujan arvolla kun $x = 2$ tai $x = 3$ (Lisätieto: toisen asteen yhtälö).

Lisätieto: Jos oppilaille on koordinaatisto tuttu, niin tehtävän ideaa voi havainnollistaa kolmen ensimmäisen yhtälön ja PAN BALANCE – sivun (<http://illuminations.nctm.org/activity.aspx?id=3529>) avulla ja samalla pohjustaa funktiokäsitettä (vaikka itse funktio-sanaa ei kannata mainita).

Uusi käsite (Yhtälön ratkaisu)

Yhtälön ratkaisu tarkoittaa lukua, joka sijoitettuna muuttujan paikalle tekee yhtälöstä toden eli toteuttaa yhtälön.

Vaihtoehtoisesti: Yhtälön ratkaisulla tarkoitetaan muuttujan arvoa, joka sijoitettaessa yhtälöön toteuttaa ehdon, että yhtälön vasen ja oikea puoli saavat saman arvon eli yhtälö on tosi.

Huomioita:

- Tällä kurssilla tutkitaan pääosin yhtälöitä, joilla on vain yksi ratkaisu. Hyvä on kuitenkin ymmärtää, että yhtälöllä voi olla ratkaisuja nollasta rajattomaan määrään ratkaisuja (Vertaa Tehtävä 1 kohdat B, C, G).
- Jatkossa ollaan erityisesti kiinnostuneita siitä, milloin yhtälö on tosi (eli yhtälön ratkaisusta). Tosielämän ongelmassa halutaan tietää, milloin tietyt ehdot ovat voimassa. (Näytä tosielämän yhtälö esim. tuotteen hinnan määrittäminen, voiton maksimoimiseksi tai tarvittavan materiaalin määrä uuden talon harjakattoa varten.)

Lisätieto: Oppilaille voi näyttää joitakin tärkeitä yhtälöitä: <http://www.businessinsider.com/the-17-equations-that-changed-the-world-2012-7?IR=T#the-pythagorean-theorem-1>.

Esimerkki 1 Onko muuttujan arvo $x = 3$ yhtälön ratkaisu, kun yhtälö on

a) $11 = 5 + 2x$

b) $5x + 5 = 3x - 8$

Tutkitaan yhdessä opettajan kanssa.

a) Kyllä on, koska oikean puolen arvoksi saadaan laskettua $2 \cdot 3 + 5 = 11$, joka on yhtä suuri yhtälön vasemman puolen kanssa.

b) Ei ole, koska vasemman puolen arvoksi voidaan laskea $5 \cdot 3 + 5 = 20$ ja oikean puolen arvoksi $3 \cdot 3 - 8 = 1$, jotka eivät ole yhtä suuret, eli muuttujan arvo 3 ei ole b) yhtälön ratkaisu.

Tehtävä 2 Mitkä seuraavista vaihtoehtoista ovat tai eivät ole yhtälön $2x - 6 = x - 8$ ratkaisuja?

a) $x = 3$ b) $x = -2$ c) $s = 1$ d) $x = \frac{1}{2}$

Vastaus: $x = -2$ on yhtälön $2x - 6 = x - 8$ ratkaisu. Sijoittaessa tämä muuttujan arvo yhtälöön saadaan vasemmalle puolelle $2 \cdot (-2) - 6 = -4 - 6 = -10$ ja oikealle puolelle $-2 - 8 = -10$. Yhtälön vasen ja oikea puoli saavat siis saman arvon.

a) ja d) kohdan arvot muuttujalle eivät toteuta yhtälöä eli vasemmasta ja oikeasta puolesta yhtälössä ei tule yhtä suuria sijoituksen jälkeen.

c) ei kelpaa ratkaisuksi yhtälölle, koska tässä annetaan arvo muuttujalle, jota ei edes yhtälössä esiinny.

Tehtävä 3 Päättele yhtälön ratkaisu

Huomautus!

- Kootaan opettajan johdolla.
- Viimeisen kohdan tarkoituksena on luoda tarve apuvälineille (muunnoksille), joilla yhtälöt saadaan muunnettua helpompaan muotoon. Arkielämän ongelmista muodostuu yleensä vaikeita yhtälöitä, joista on vaikea päättellä ratkaisua.

a) $2p = 6$

b) $4x = 2 + 2x$

c) $4x + 2 = 9 - x$

a) $p = 3$

b) $x = 1$

c) $x = \frac{7}{5}$

Jokeri 4 Onko yhtälö tosi vai epätosi, muuttujan arvolla -4 ?

a) $3x + 8 = -2x - 4$

b) $-5b + 6 = 3b + 38$

Vasen puoli: $3 \cdot (-4) + 8 = -12 + 8 = -4$

Vasen puoli: $-5 \cdot (-4) + 6 = 20 + 6 = 26$

Oikea puoli: $-2 \cdot (-4) - 4 = 8 - 4 = 4$

Oikea puoli: $3 \cdot (-4) + 38 = -12 + 38 = 26$

Yhtälön vasen ja oikea puoli eivät ole yhtä suuret.

Vastaus: Yhtälö on epätosi, kun $x = -4$.

Vastaus: Yhtälö on tosi, kun $b = -4$.

Jokeri 5 Millä muuttujan k arvolla yhtälön ratkaisu on $x = 3$?

a) $2x + k = 8$

Vasen puoli: $2 \cdot 3 + k = 6 + k$

Oikea puoli: 8

Vastaus: muuttujan k arvo on oltava 2, jotta oikean ja vasemman puolen arvoksi tulee 8.

b) $k - 3x = 7$

Vasen puoli: $k - 3 \cdot 3 = k - 9$

Oikea puoli: 7

Vastaus: muuttujan k arvo on oltava 16, jotta oikean ja vasemman puolen arvoksi tulee 7.

c) $x + 2k = k - 9$

$3 + 2k = k - 9$

$3 - 3 + 2k = k - 9 - 3$

$2k - k = k - k - 12$

$k = -12$

Vastaus: muuttujan k arvo on -12.

d) $6x - k = 9 - 2$

Vasen puoli: $6 \cdot 3 - k = 18 - k$

Oikea puoli: $9 - 2 = 7$

Vastaus: muuttujan k arvo on oltava 11, jotta oikean ja vasemman puolen arvoksi tulee 7.

OPPITUNNIN KOONTI: "Selittäkää ryhmässä toisillenne omin sanoin mikä on yhtälön ratkaisu ja antakaa esimerkki." (1min) Sitten pyydetään jotakuta selittämään koko luokalle ja testataan ymmärretäänkö asia samalla tavalla. (2min) Lopuksi pohditaan ryhmissä vielä 1min Tehtävää 3c, jonka jälkeen "Mikä on yhtälön ratkaisu?" ...hiljaisuus. "No, eipä opettajakaan kyllä kieltämättä osaa ratkaista tätä päässä ilman apuvälineitä. Me tarvitaan joku keino, miten yhtälöt saadaan muunnettua helpompaan muotoon!"

RYHMÄARVIOINTI (ryhmätaidot selitetty tarkemmin sivulla 2)

Ryhmätaito	Onnistuminen				
Autoimme ja rohkaisimme toisiamme					
Keskustelimme toisemme huomioiden					
Toistimme asioita tarvittaessa					
Keskityimme perusteluihin vastausten sijaan					
Hyödynsimme virheitä oppiaksemme					

Kotitehtävä 1 Kertaa (ei tarvitse kirjoittaa), mitä ovat

a) yhtälö

b) yhtälön ratkaisu.

Opettajalle muistutuksena:

a) Yhtälö on kahden lausekkeen merkitty yhtäsuuruus, esimerkiksi $x+x=5-1$ on yhtälö.

b) Yhtälön ratkaisu on muuttujan arvo, joka toteuttaa yhtälön. Toisin sanoen arvon sijoittamisen jälkeen yhtälön vasen ja oikea puoli ovat arvoltaan yhtä suuret.

Kotitehtävä 2 Yhtälö on $5x - 6 = 3 + x$. Vastaa seuraaviin kysymyksiin ja perustele vastauksesi.

a) Onko yhtälö tosi, kun $x = 2$?

Vasen puoli: $5 \cdot 2 - 6 = 10 - 6 = 4$

Oikea puoli: $3 + 2 = 5$

eli luku 2 ei ole yhtälön $5x - 6 = 3 + x$ ratkaisu.

b) Onko muuttujan arvo 3 yhtälön ratkaisu?

Vasen puoli: $5 \cdot 3 - 6 = 15 - 6 = 9$

Oikea puoli: $3 + 3 = 6$

eli luku 3 ei ole yhtälön $5x - 6 = 3 + x$ ratkaisu.

Kotitehtävä 3 Osoita, että luku 4 on seuraavien yhtälöiden ratkaisu:

a) $3x + 1 = 13$

Vasen puoli: $3 \cdot 4 + 1 = 12 + 1 = 13$

Oikea puoli: 13

eli luku 4 on yhtälön $3x + 1 = 13$ ratkaisu

b) $\frac{x}{2} - 14 = 9x - 48$.

Vasen puoli: $\frac{4}{2} - 14 = 2 - 14 = -12$

Oikea puoli: $9 \cdot 4 - 48 = 36 - 48 = -12$

eli luku 4 on yhtälön $\frac{x}{2} - 14 = 9x - 48$ ratkaisu.

Itsearviointi (täytetään yksin aina luvun päätteeksi)

EOS = En osaa sanoa

1=Erittäin heikosti

7=Erinomaisesti

Miten hyvin osaat seuraavat asiat

- | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|
| • Lausekkeen ja yhtälön ero | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |
| • Yhtälön tasapaino | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |
| • Tutkia, onko yhtälö tosi/epätosi | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |
| • Olen oppinut tunneilla käsitellyt asiat. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |
| • Onnistuin keskittymään perusteluihin vastausten sijaan. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |
| • Onnistun löytämään ja esittämään kysymyksiä. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |
| • Onnistuin kuvailemaan ajatteluani muille. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |
| • Onnistuin hyödyntämään virheitä oppiakseni. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |

Luku 2 Muunnoksiin tutustuminen

Opettajalle tietoa luvusta 2

Tämän luvun tavoitteena on auttaa oppilaita hahmottamaan yhtälönratkaisun ydin eli se, että muunnoksia ovat mitkä tahansa tavat muuttaa yhtälöä, siten että uusi yhtälö on edelleen tosi juuri samalla muuttujan arvolla. Muunnosten ymmärtäminen antaa oppilaille vapauden tutkia yhtälönratkaisua. Tällöin rutiineja ja mekaanista ulkoa opettelua ei tarvita niin paljon. Muunnoksien avulla löydetään muuttujalle arvo, jolla yhtälö ratkeaa. Lopuksi saadaan yksinkertainen yhtälö, josta nähdään milloin se on tosi.

Yhtälöitä lähestytään kokonaisuutta hahmottaen esittelemällä muunnoksia (lisääminen, vähentäminen, kertominen, jakaminen, muokkaaminen) kerralla sen sijaan, että ne pilkottaisiin yksittäisiin tapauksiin, jotka hetkeksi jäävät mieleen toistamalla niitä yhden oppitunnin ajan. Jos oppilaista tuntuu haastavalta nähdä erilaisia yhtälöitä kerralla, voi kertoa että asian ymmärtämiselle on varattu aikaa useita oppitunteja.

Vaakamallin avulla yhtälön totuusarvoa verrataan tasapainoon. Vaakamallia käytetään vain yhdellä oppitunnilla, mutta oppilaita voi tarvittaessa kehottaa palaamaan tähän mielikuvaan myöhemminkin. Eri esitysmuotojen (vaakamalli, matemaattinen, sanallinen ja lyhennys) kuljettaminen rinnakkain syventää ja monipuolistaa oppimista. Yleinen käsitys yhtälönratkaisusta on, että on kokoelma erilaisia temppuja joita tehdään allekkain tietyissä tilanteissa ja seurauksena saadaan alimmaiseksi yhtälön ratkaisu.

Kappaleen 2.1. voi toteuttaa joko tutkimuksellisella otteella (2.1.a)) tai vaakamallin avulla (2.1.b)).

Kappaleessa 2.1.b) muunnokset esitellään vajaiden esimerkkien (ei laskettu loppuun) avulla, jotta päähuomio kiinnittyy itse muunnoksiin. Muunnoksista käytetään lyhenteitä esim. V8 tarkoittamaan, että vähennetään puolittain 8. Tässä korostuu sanallistamisen ja laskutoimituksen yhteys. **Lausekkeen muokkaaminen on luokiteltu yhdeksi muunnokseksi (M), joka sisältää kaikki aiemmin opitut keinot lausekkeiden muokkaamiseen.**

Kappaleessa 2.2. syvennetään muunnosten ymmärtämistä, täydennetään ja analysoidaan tehtäviä. Kappaleessa nähdään, miten yhtälö saadaan ratkaistua.

Kappaleessa 2.3. virheen sisältävissä esimerkkipareissa oppilaat saavat toimia opettajana virheitä etsien, tutkien muunnoksia ja selittäen auki, miten asia olisi pitänyt tehdä. **Tarkoituksellisten virheiden käytöllä on tutkittu olevan positiivisia vaikutuksia matematiikan (käsitteelliselle) osaamiselle erityisesti esitettäessä niitä oikeiden ratkaisutapojen rinnalla.** Oppilaat pääsevät näkemään tyypillisiä virheitä jo ennen kuin itse ratkaisevat yhtälöitä alusta loppuun, millä voisi olettaa olevan virheitä ennakoiva vaikutus. Virheiden näkeminen auttaa hyväksymään virheet luonnollisena osana oppimista.

HUOM. Kappale 2.1. käydään joko lähestymistavalla a tai b.

2.1 a) Muunnokset ja vaakamalli

Esimerkki 1. Huomautus! Tämän esimerkin pohtimiseen voi halutessaan käyttää reilummin aikaa, sillä uudet käsitteet on sen idean avauduttua mahdollista käydä lyhyesti läpi.

Esimerkin 1 koonti:

- Oppilaat pohtivat hetken ryhmissä ennen esimerkin läpikäyntiä opettajan johdolla.
- **Apukysymyksiä**
 - o Mitä yhteistä näissä yhtälöissä on?
 - o Voiko jonkun laskutoimituksen molemmilla puolilla tekemällä muokata jonkun näistä yhtälöistä toiseksi? (johdattelu muunnoksiin)

Lisäväite: Tekemällä saman laskutoimituksen yhtälön molemmille puolille, yhtälön ratkaisu muuttuu.

Väite ei pidä paikkaansa yleensä. Yhtälön ratkaisu ei muutu, jos molemmille puolille tehdään sama laskutoimitus. Ainoa poikkeus on, jos kertoo nolalla.

Esimerkki 1 Tarkastellaan seuraavia yhtälöitä.

$$\begin{array}{cccc} y + 2y = 3 & \frac{y}{10} = \frac{1}{2} & 3y = 3 & 3y - 4 = -1 \\ 2y = 10 & 3y + 2 = 5 & 2y = 5 \cdot 2 & y = 5 \end{array}$$

- Millä näistä yhtälöistä on sama ratkaisu?
- Mitä laskutoimituksia tekemällä yhtälö saadaan muutettua toiseksi yhtälöksi, jolla on sama ratkaisu?
- Kirjoita taululle keksimäsi yhtälö, jolla on sama ratkaisu kuin joillain laatikon yhtälöistä.

Ratkaisu: a) Kaikilla seuraavilla yhtälöillä on sama ratkaisu, joka yksinkertaisimmassa muodossaan on $y = 5$.

$$y = 5 \qquad 2y = 5 \cdot 2 \qquad 2y = 10 \qquad \frac{y}{10} = \frac{1}{2}$$

Seuraavilla on sama ratkaisu, joka yksinkertaisimmassa muodossaan on $y = 1$:

$$3y = 3 \qquad y + 2y = 3 \qquad 3y + 2 = 5 \qquad 3y - 4 = -1$$

b) Voidaan muokata yhtälön eri puolia (esim. $5 \cdot 2 = 10$ ja $y + 2y = 3y$). Yhtälöt voidaan muuttaa toisikseen kertomalla tai jakamalla yhtälön molempia puolia samalla luvulla tai lisäämällä ja vähentämällä sama luku.

c) Esim. $9y = 9$ ja $y + 3 = 8$

Esimerkki 2 (Yhteenvedo muunnoksista)

Muunnos on sellainen tapa muuttaa yhtälöä, että yhtälön tasapaino/ totuusarvo / ratkaisu säilyy samana kuin alkuperäisen. Toisin sanoen uusi yhtälö on tosi samalla muuttujan arvolla kuin alkuperäinen.

Huom! Esimerkiksi luvun lisääminen vain toiselle puolelle ei ole muunnos, koska ratkaisu muuttuu.

MUUNNOKSIA

Muunnos **L**: saman termin lisääminen yhtälön molemmille puolille.

Muunnos **V**: saman termin _____ yhtälön molemmilta puolilta.

Muunnos **J**: molempien puolien _____ samalla nolasta eroavalla luvulla.

Muunnos **K**: molempien puolien _____ samalla nolasta eroavalla luvulla.

Muunnos **M**: Yhtälössä olevan lausekkeen _____.

RYHMÄARVIOINTI (ryhmätaidot selitetty tarkemmin sivulla 2)

Ryhmätaito	Onnistuminen				
Autoimme ja rohkaisimme toisiamme					
Keskustelimme toisemme huomioiden					
Toistimme asioita tarvittaessa					
Keskityimme perusteluihin vastausten sijaan					
Hyödynsimme virheitä oppiaksemme					

Kotitehtävä: Katso animaatio: <https://ouluma.fi/wp-content/uploads/2016/11/yhtalo1-1.gif>

2.1 b) Muunnokset ja vaakamalli

Tunnin rakenne:

- Kotitehtävät ja edellisen kerta (10 min)
- Uudet käsitteet ja esimerkit 2 ja 3 (25 min)
- Loppukoonti ja ryhmäarviointi (10 min)

Tunnin tavoitteet:

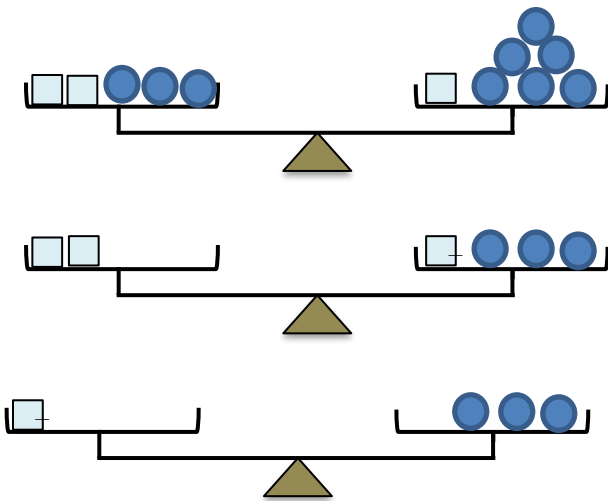
- Tutustutaan muunnoksiin keinoina muuttaa yhtälöä niin, että ratkaisu (tasapaino) pysyy samana.
- Vaakamallia käytetään alussa konkretisoimaan yhtälön totuusarvoa tasapainoon vertaamalla.
- Hahmotellaan yhtälönratkaisua prosessina, mutta ei vielä ratkaista yhtälöitä itsenäisesti.

Toimintaohje: Muunnokset käydään läpi kerralla, jotta ymmärretään, miten yhtälöä voi muokata. Usean muunnoksen tunteminen mahdollistaa useat lähestymistavat ja niiden vertailemisen keskenään.

Esimerkissä 1 lähestytään vaakamallia. Mitä eri vaiheissa on tehty? Miksi vaaka pysyy tasapainossa?

Aluksi molemmilta puolilta on otettu kolme palloa pois. Seuraavassa vaiheessa molemmilta puolilta on vähennetty yksi laatikko. Vastaus: Yksi laatikko vastaa kolmea palloa. Laatikon tilalla voisi olla muuttuja, esim. x ja pallot voisivat vastata yksiköitä eli vastaus $x=3$.

Esimerkki 1. Vaakamalli. Mitä on yksi laatikko (pallon avulla ilmaistuna)?

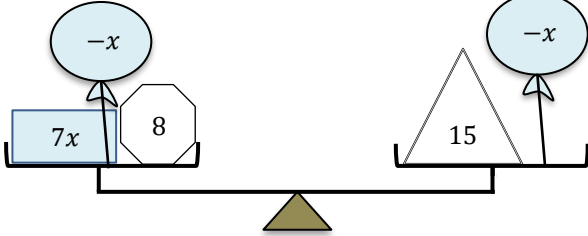
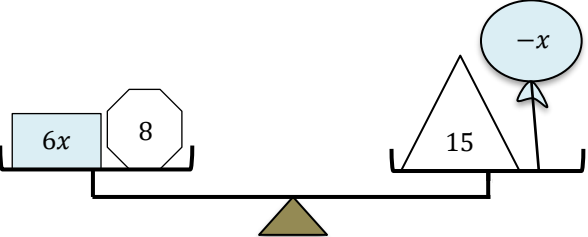


MUUNNOSTEN KÄSITTELY, uudet käsitteet, esimerkit 2 ja 3

- Eri kohdissa on sama alkuperäinen yhtälö (paitsi kohdassa Uusi käsite (kertominen)), jota lähdetään muokkaamaan eri muunnoksella kussakin kohdassa. Aina on mahdollista käyttää erilaisia muunnoksia, mutta toisista on enemmän hyötyä.
- Kahden eri esitystavan näyttäminen rinnakkain on todettu hyödyllisemmäksi kuin esitystapojen esittäminen peräkkäin tai vain toisen esitystavan esittäminen.
- Kannattaa tähdentää oppilaille, että kun kerralla tulee paljon asiaa, niin kannattaa keskittyä yhteen osaan kerrallaan eikä yrittää katsoa kaikkea kerralla. Esimerkiksi: **Ensin kannattaa linkittää vaaka viereiseen yhtälöön ja sen jälkeen miettiä miten ylemmästä vaa'asta päästään alempaan vaakaan ja miten ylemmästä yhtälöstä päästään alempaan yhtälöön.**
- Mikä on **yhteys asioiden tekemiseen puolittain ja vaa'an tasapainon kanssa?**
- **Huom!** Negatiivinen luku/termi on vaakamallissa esitetty ilmapallon avulla. Lisättäessä siis puolittain ilmapallon arvon suuruinen punnus, niin ilmapallo ja samanarvoinen punnus kumoavat toisensa.
- Kootaan yhdessä uusissa käsitteissä esitellyt muunnokset. Oppilaat kirjoittavat muunnokset ylös (Esimerkki 3).

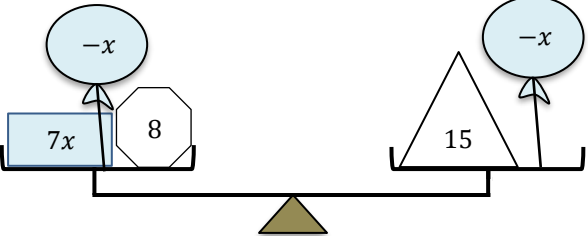
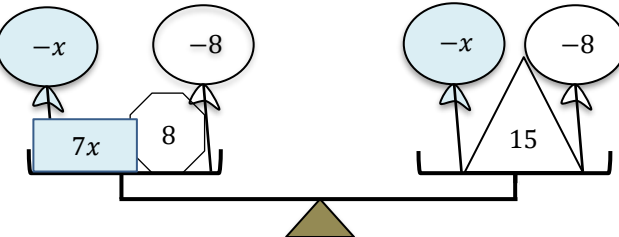
Uusi käsite (Lausekkeen muokkaaminen)

Vaa'an molemmilla puolilla on edelleen yhtä paljon, vaikka yhtälön lausekkeita muokattaisiin. Tässä muokataan yhtälön vasemman puolen lauseketta.

Vaakamalli	Matemaattinen esitys	Muunnos
	$-x + 7x + 8 = 15 - x$	
	$6x + 8 = 15 - x$	M

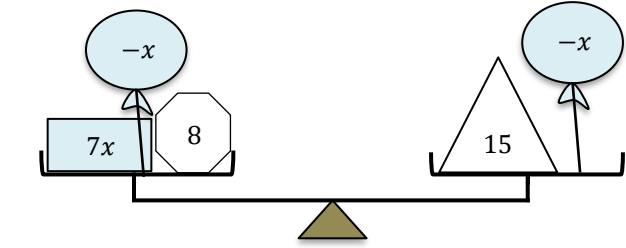
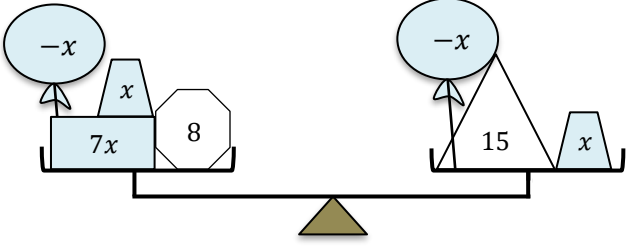
Uusi käsite (Vähentäminen)

Jos aluksi molemmilla puolilla oli yhtä paljon, niin täytyy olla edelleen yhtä paljon, kun molemmilta puolilta otetaan pois 8. Vaakaa katsomalla huomataan, että tämä on sama asia kuin luvun -8 lisääminen.

Vaakamalli	Matemaattinen esitys	Muunnos
	$-x + 7x + 8 = 15 - x$	
	$-x + 7x + 8 - 8 = 15 - x - 8$	V8

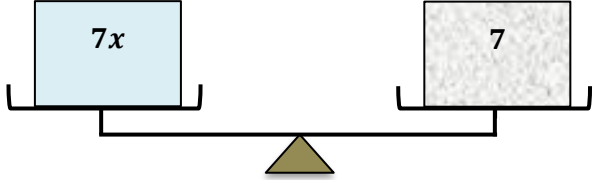
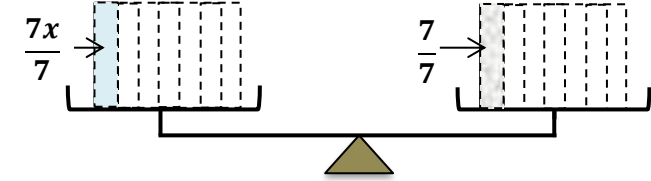
Uusi käsite (Lisääminen)

Jos molemmilla puolilla oli yhtä paljon, niin samansuuruisen punnuksen lisäämisen jälkeen täytyy myös olla yhtä paljon.

Vaakamalli	Matemaattinen esitys	Muunnos
	$-x + 7x + 8 = 15 - x$	
	$-x + 7x + 8 + x = 15 - x + x$	Lx

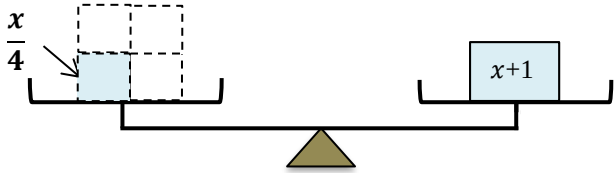
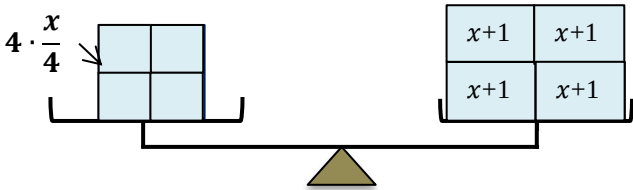
Uusi käsite (Jakaminen)

Jos molemmille puolille jätetään seitsemäsosa alkuperäisestä, niin yhtälön molemmilla puolilla täytyy olla yhtä paljon, mikäli aiemminkin oli.

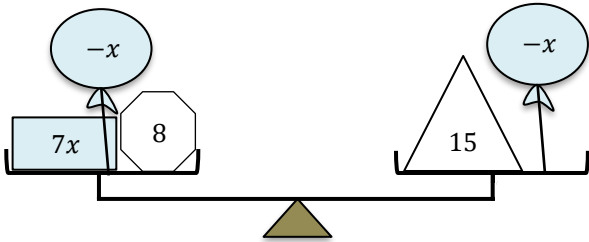
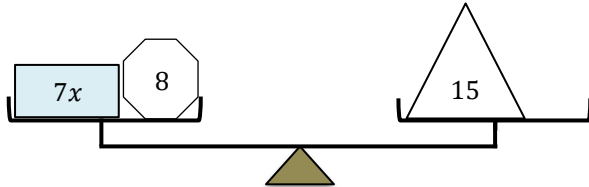
Vaakamalli	Matemaattinen esitys	Muunnos
	$7x = 7$	
	$\frac{7x}{7} = \frac{7}{7}$	$J7$

Uusi käsite (Kertominen)

Jos molemmat puolet nelinkertaistetaan, on molemmilla puolilla yhtä paljon vain, jos aiemminkin oli.

Vaakamalli	Matemaattinen esitys	Muunnos
	$\frac{x}{4} = x + 1$	K4
	$4 \cdot \frac{x}{4} = 4 \cdot (x + 1)$	

Esimerkki 2 (Lisääminen ja Muokkaaminen)

Vaakamalli	Matemaattinen esitys	Muunnos
	$-x + 7x + 8 = 15 - x$	Lx M M
	$7x + 8 = 15$	

Esimerkki 3 (Yhteenvedo muunnoksista)

Oppilaat täydentävät muunnokset omiin monisteisiinsa.

Muunnos on sellainen tapa muuttaa yhtälöä, että yhtälön tasapaino/ totuusarvo / ratkaisu säilyy samana kuin alkuperäisen. Toisin sanoen uusi yhtälö on tosi samalla muuttujan arvolla kuin alkuperäinen.

Huom! Esimerkiksi luvun lisääminen vain toiselle puolelle ei ole muunnos, koska ratkaisu muuttuu.

MUUNNOKSIA

Muunnos **L**: saman termin lisääminen yhtälön molemmille puolille.

Muunnos **V**: saman termin vähentäminen yhtälön molemmilta puolilta.

Muunnos **J**: molempien puolien jakaminen samalla nollasta eroavalla luvulla.

Muunnos **K**: molempien puolien kertominen samalla nollasta eroavalla luvulla.

Muunnos **M**: Yhtälössä olevan lausekkeen muokkaaminen.

RYHMÄARVIOINTI (ryhmätaidot selitetty tarkemmin sivulla 2)

Ryhmätaito	Onnistuminen				
Autoimme ja rohkaisimme toisiamme					
Keskustelimme toisemme huomioiden					
Toistimme asioita tarvittaessa					
Keskityimme perusteluihin vastausten sijaan					
Hyödynsimme virheitä oppiaksemme					

2.2 Muunnosten käyttöön tutustumista

Tunnin rakenne:

- Esimerkki 1 (15min)
- Tehtävä 1-5, jokerit tarvittaessa (25 min)
- Loppukoonti ja ryhmäarviointi (5 min)

Tunnin tavoitteet:

- Analysoidaan ja pohditaan valmiiksi annettuja ratkaisuja ja ratkaisupareja.
- Hahmotellaan yhtälönratkaisua prosessina, mutta ei vielä ratkaista yhtälöitä itsenäisesti.
- Ymmärtää, että yhtälönratkaisussa pyritään saamaan yhtälö mahdollisimman yksinkertaiseen muotoon, josta näkyy ratkaisu (esim. $t = 3$).

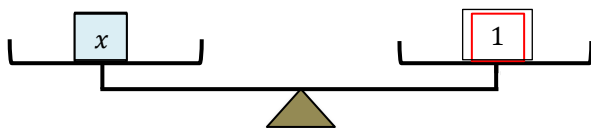
Esimerkki 1 Tutki kuinka muunnosten avulla voi selvittää haastavan yhtälön ratkaisun.

Esimerkin 1 tarkoituksena on tutkia yhtälön totuusarvoa, muunnosten vaikutusta sekä eri esitystapoja yhtälölle.

Opettajan on hyvä kiinnittää huomio siihen, että oppilaat huomaavat, että kaikissa vaiheissa on eri muodossa oleva yhtälö ja kaikilla näillä yhtälöillä on samat ratkaisut.

	Vaakamalli	Matemaattinen esitys	Muunnos
1		$-x + 7x + 8 = 15 - x$ $-1 + 7 \cdot 1 + 8 = 15 - 1$ $14 = 14$	Lx M M
2		$7x + 8 = 15$ $7 \cdot 1 + 8 = 15$ $15 = 15$	V8
3		$7x + 8 - 8 = 15 - 8$ $7 \cdot 1 + 8 - 8 = 15 - 8$ $7 = 7$	M M
4		$7x = 7$ $7 \cdot 1 = 7$ $7 = 7$	J7 M M

5



$$\begin{aligned} x &= 1 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

- a) Täydennä puuttuvat välivaiheet vaakamalliin, matemaattiseen esitykseen ja muunnos sarakkeelle.
 b) Millä muuttujan arvolla viimeinen yhtälö (numero 5) on tosi? (Kun $x = 1$.) Sijoita tämä muuttujan arvo muihin yhtälöihin (1-4). Merkitse sijoitukset näkyviin matemaattisen esityksen alapuolelle. Mitä huomaat? **Yhtälöt 1-4 ovat tosia, kun muuttujan paikalle sijoittaa arvon 1. Toisin sanoen luku 1 on jokaisen (1-5) yhtälön ratkaisu.**
 c) Kerro lyhyesti mikä muuttuu tai säilyy, kun muunnoksia käytetään yhtälöön.

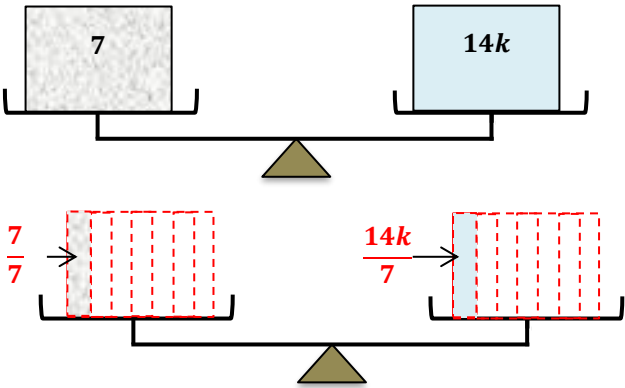
MUUTTUU**SÄILYY**

- Yhtälön ulkomuoto eli yhtäsuuruusmerkin molemmilla puolilla olevat lausekkeet.

- a) Yhtälön ratkaisu: Jos yhtälö oli tosi (tiettyä muuttujan arvolla), niin se on edelleen tosi. Jos yhtälö oli epätosi, niin se on edelleen epätosi.

Tehtävä 1 Tee pyydetty muunnos yhtälölle ja kirjoita muunnoksen jälkeinen tilanne sekä vaakamallin että matemaattisen esityksen avulla.

a)	Vaakamalli	Matemaattinen esitys	Muunnos
		$2x - 1 = 5$	L1
		$2x - 1 + 1 = 5 + 1$	
b)	Vaakamalli	Matemaattinen esitys	Muunnos
		$2x - 1 = 5$	L1 M M
		$2x = 6$	
c)	Vaakamalli	Matemaattinen esitys	Muunnos

	$7 = 14k$ $\frac{7}{7} = \frac{14k}{7}$	<i>J14</i>
---	--	-------------------

Tehtävissä 3 ja 4 täydennetään yhtälönratkaisun vaiheita: matemaattinen esitys ja termi sanalliseen selitykseen.
Huom. Opettaja voi mainita, että muunnoksen voi joustavasti merkitä eri kohtaan muunnettavaa lauseketta.

Tehtävä 2

Matemaattinen esitys	Muunnos	Sanallinen selitys
$\frac{b}{9} - 11 = -8$	<i>L11</i>	Lisään yhtälön molemmille puolille luvun <u>11</u> .
$\frac{b}{9} - 11 + 11 = -8 + 11$	<i>M M</i>	Muokkaan yhtälön puolia, laskemalla yhtälön vasemmalla puolella yhteen <u>-11</u> ja <u>11</u> . Oikealla puolella lasken yhteen luvut <u>-8</u> ja <u>11</u> .
$\frac{b}{9} = 3$	<i>K9</i>	Kerron yhtälöä puolittain luvulla <u>9</u> .
$9 \cdot \frac{b}{9} = 9 \cdot 3$	<i>M M</i>	Muokkaan yhtälöä suorittamalla vasemmalla kertolaskun $\frac{9}{1} \cdot \frac{b}{9}$ ja oikealla kertolaskun <u>9</u> · <u>3</u> .
$b = 27$		Nyt näen, että alkuperäinen yhtälö on tosi, kun <u>b = 27</u> eli yhtälön ratkaisu on <u>27</u> .

Tehtävä 3 Täydennä matemaattinen esitys ja sanallinen esitys

Matemaattinen esitys	Muunnos	Sanallinen selitys
$5y = 4y - 20$		
$5y - 4y = 4y - 4y - 20$	V4y	Vähennän <u>4y</u> molemmilta puolilta yhtälöä.
$y = -20$	M M	Muokkaan yhtälöä puolittain laskemalla laskun <u>5y - 4y</u> vasemmalla ja <u>4y - 4y</u> oikealla puolella. Nämä yhtälöt ovat siis tosia, kun <u>y = -20</u> .

Tehtävä 4 Täydennä muunnos ja sanallinen esitys

Matemaattinen esitys	Muunnos	Sanallinen selitys
$17 + 1 = 17 + 2a$		
$17 + 1 - 17 = 17 + 2a - 17$	V17	Vähennän puolittain luvun <u>17</u> .
$1 = 2a$	M M	Muokkaan yhtälöä puolittain laskemalla laskun <u>17 + 1 - 17</u> vasemmalla ja <u>17 - 17</u> oikealla puolella.
$\frac{1}{2} = \frac{2a}{2}$	J2	Jaan yhtälöä puolittain luvulla <u>2</u> .
$\frac{1}{2} = a$	M	Muokkaan yhtälön oikeaa puolta suorittamalla jakolaskun $\frac{2a}{2}$. Nyt näen, että alkuperäisen yhtälön ratkaisu on $a = \frac{1}{2}$.

Huomautuksia tehtävästä 4!

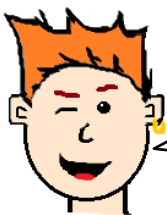
- Luvun 2 merkitseminen jakajaksi voi olla haastava kohta, johon kannattaa kiinnittää huomiota.
- Sanallisen selityksen viimeiseen kohtaan täydennetään vaihtoehtoisiksi ratkaisuiksi $1/2 = a$ tai $\frac{1}{2}$.

Tehtävä 5 Täydennä yhtälön ratkaisutapaan 1 matemaattinen esitys ja ratkaisutapaan 2 käytetty muunnos.

Tapa 1		Tapa 2	
Matemaattinen esitys	Muunnos	Matemaattinen esitys	Muunnos
$4a = 2a + 2$	$J2$	$4a = 2a + 2$	$V2a$
$\frac{4a}{2} = \frac{2a}{2} + \frac{2}{2}$		$4a - 2a = 2a - 2a + 2$	$M M$
$2a = a + 1$	$M M$	$2a = 2$	
$2a - a = a - a + 1$	Va	$\frac{2a}{2} = \frac{2}{2}$	$J2$
$a = 1$	$M M$	$a = 1$	$M M$

Jokeri 6 Mitä muunnosta Kalle tai Leena on käyttänyt yhtälöön? Kirjoita ratkaisu sanallisesti **tai** lyhenteellä.

Harjoitellaan muunnoksia kielentämisen näkökulmasta.



$$5x - 3 - 2x - 3 = 0$$

$$3x - 6 = 0$$

Kalle laski vasemmalla puolella luvut -3

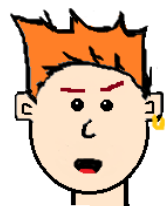
ja -3 yhteen. (Muunnos: M)

Leena lisäsi molemmille puolille

luvun 6. (Muunnos: $L6$)

$$3x - 6 = 0$$

$$3x - 6 + 6 = 0 + 6$$



$$62 = 62 + 17x$$

$$0 = 17x$$

Kalle vähensi molemmilta puolilta luvun 62 ja

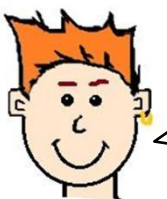
laski mahdolliset laskut puolittain. (Muunnos $L62$ MM)

Leena jakaa yhtälöä molemmilta puolilta

luvulla 17. (Muunnos $J17$)

$$0 = 17x$$

$$\frac{0}{17} = \frac{17x}{17}$$



$$\frac{5}{4} + \frac{b}{2} = 2$$

$$\frac{5}{4} - \frac{5}{4} + \frac{b}{2} = 2 - \frac{5}{4}$$

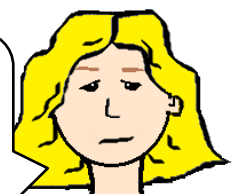
Kalle vähentää puolittain luvun $\frac{5}{4}$.

(Muunnos: $V\frac{5}{4}$)

Leena kertoo molempia puolia luvulla 2. (Muunnos: $K2$)

$$\frac{b}{2} = \frac{3}{4}$$

$$2 \cdot \frac{b}{2} = \frac{3}{4} \cdot 2$$



Jokeri 7 Täydennä matemaattinen ja sanallinen esitys

Matemaattinen esitys	Muunnos	Sanallinen selitys
$15x + 10 = 5x + 30$		
$15x + 10 - 10 = 5x + 30 - 10$	V10	Vähennän <u>10</u> molemmilta puolilta yhtälöä.
$15x = 5x + 20$	M M	Muokkaan yhtälöä puolittain laskemalla laskun <u>+10 - 10</u> vasemmalla ja <u>30 - 10</u> oikealla puolella.
$15x - 5x = 5x + 20 - 5x$	V5x	<u>Vähennän termin 5x puolittain.</u>
$10x = 20$	M M	Muokkaan yhtälöä puolittain laskemalla laskun <u>15x - 5x</u> vasemmalla ja <u>5x - 5x</u> oikealla puolella.
$\frac{10x}{10} = \frac{20}{10}$	J10	<u>Jaon yhtälöä puolittain luvulla 10.</u>
$x = 2$	M M	Muokkaan yhtälöä puolittain suorittamalla jakolaskut $\frac{10}{10}$ ja $\frac{20}{10}$. Nyt näen, että alkuperäisen yhtälön ratkaisu on <u>x = 2</u> .

RYHMÄARVIOINTI (ryhmätaidot selitetty tarkemmin sivulla 2)

Ryhmätaito	Onnistuminen				
Autoimme ja rohkaisimme toisiamme					
Keskustelimme toisemme huomioiden					
Toistimme asioita tarvittaessa					
Keskityimme perusteluihin vastausten sijaan					
Hyödynsimme virheitä oppiaksemme					

Kotitehtävä 1

i) Täydennä yhtälön $3x = 2 - x$ ratkaisutavan

a) matemaattinen esitys

b) sanallisesti osio, johon kirjoitat, mitä yhtälölle tehdään ja mitä muunnosta käytetään.

ii) Tarkista lopuksi ovatko muunnettu (alimmainen) ja alkuperäinen yhtälö $3x = 2 - x$ tosia samalla muuttujan arvolla.

Ratkaisu: Alimmainen yhtälö $x = \frac{1}{2}$ on tosi, kun muuttujan paikalle sijoitetaan luku $\frac{1}{2}$.

Sijoitetaan $\frac{1}{2}$ myös alkuperäiseen yhtälöön $3x = 2 - x$, jolloin saadaan

$$3 \cdot \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Alimmainen ja alkuperäinen yhtälö ovat molemmat tosia muuttujan arvolla $\frac{1}{2}$ eli luku $\frac{1}{2}$ on yhtälön ratkaisu.

vaakamalli	matemaattinen esitys	sanallisesti
	$3x = 2 - x$	Lisään x molemmille puolille. Muunnos: Lx
	$3x + x = 2 + x - x$	Lasken $3x$ ja x yhteen. Toisella puolella lasken x ja $-x$ yhteen. Muunnokset: MM
	$4x = 2$	Jaan molemmat puolet luvulla 4. Muunnokset: $J4$
	$\frac{4x}{4} = \frac{2}{4}$	Sievennän jakolaskut molemmilla puolilla. Muunnokset: MM
	$x = \frac{1}{2}$	Muunnoksia käytettyäni näen, että muuttujan x arvolla $\frac{1}{2}$ alkuperäinen yhtälö on tosi.

Kotitehtävä 2 Täydennä yhtälön ratkaisutapaan 1 matemaattinen esitys ja ratkaisutapaan 2 käytetty muunnos.

Tapa 1		Tapa 2	
Matemaattinen esitys	Muunnos	Matemaattinen esitys	Muunnos
$\frac{1}{4}x + 2 = 6$		$\frac{1}{4}x + 2 = 6$	
	V2		K4
$\frac{1}{4}x + 2 - 2 = 6 - 2$		$4 \cdot \frac{1}{4}x + 4 \cdot 2 = 6 \cdot 4$	
	M M		M M
$\frac{1}{4}x = 4$		$x + 8 = 24$	
	K4		V8
$4 \cdot \frac{1}{4}x = 4 \cdot 4$		$x + 8 - 8 = 24 - 8$	
	M M		M M
$x = 16$		$x = 16$	

2.3 Virheitä muunnosten käytössä

Tunnin rakenne:

- Edellisen idean kertaus ja kotitehtävä (5min)
- Esimerkki 1 (10 min)
- Virheiden analysointia, Tehtävä 1 – Jokeri 11 (25min)
- Tunnin koonti ja ryhmäarviointi (5min)

Tavoitteet:

- Analysoidaan ja pohditaan valmiiksi annettuja ratkaisuja ja ratkaisupareja.
- Huomataan, että virheet ovat luonnollinen osa oppimista ja tärkeä voimavara, ja että niistä on hyödyllistä keskustella.

Toimintaohje: Oppilaita voi ohjata eteenpäin sopivilla kysymyksillä. Kiinnittää huomiota käyttämiisi kysymystyyppeihin: **avoimet kysymykset** auttavat oppilaita kuvailemaan ideoitaan ja kehittämään joustavuutta (esim. ”Mitä mieltä olette tästä ideasta?”), **”miksi” – kysymykset** auttavat tuomaan esiin käsitteellisen ymmärtämisen puutteita ja **”miten” – kysymykset** voivat paljastaa proseduraalisen (menetelmällisen) ymmärtämisen heikkouksia.

Lisätieto: Virheiden näyttämisellä on tutkittu olevan positiivisia vaikutuksia matematiikan oppimiselle erityisesti, kun virheellisen ratkaisutavan rinnalla on oikea ratkaisutapa. Oppilaat pääsevät näkemään tyypillisiä virheitä jo ennen kuin ovat itse perehtyneet yhtälönratkaisuprosessiin, millä pitäisi olla virheitä vähentävä (tai virhekesityksiä korjaava) vaikutus. Lisäksi virheiden näkeminen painettuna voi auttaa hyväksymään virheet luonnollisena osana oppimista.

Esimerkissä 1 yhtälönratkaisuprosessi näytetään kokonaisuudessaan. Yhtälön rinnalla ovat muunnokset ja sanallinen selitys, johon oppilaat täydentävät esimerkissä käytetyt luvut.

Esimerkin 1 koonti

- Käy aluksi läpi tehtävän ratkaisuvaiheet ja käytetyt muunnokset.
- Kiinnitä lopuksi huomio yhtälöön kokonaisuutena,
 - o miltä näyttää kokonainen ratkaisu.
 - o Mikä on alkuperäinen yhtälö.
 - o Mihin muotoon yhtälö on muokattu muunnoksien avulla, josta nähdään yhtälön ratkaisu.
- Voit myös kysyä, mikä on jonkin välivaiheena olevan yhtälön ratkaisu (sama kuin lopussa). Tällä korostetaan sitä, että yhtälön ratkaisu säilyy, kun muunnoksia käytetään yhtälön ratkaisussa oikein.

Virheellisen ja oikean ratkaisun sisältävät tehtävät

Lopputunnin ”Kalle ja Leena” – tehtävissä on esitetty vierekkäin kaksi ratkaisutapaa, joissa yleensä toinen sisältää tarkoituksellisen virheen. Oppilaan tehtävä on etsiä virheitä, tarkistaa ratkaisuja, tutkia muunnoksia ja selittää auki, miten asia olisi pitänyt tehdä. Opettajan on hyvä muistaa kysyä ”miksi”, kun oppilaat esittävät ajatuksiaan

Esimerkki 2 koonti

- Oppilaat vertailevat tehtäviä aluksi pienen hetken pienryhmissä, sitten käydään opettajajohtoinen keskustelu luokan kanssa.
- Muistuta, että yhtälönratkaisussa muutetaan yhtälöä muunnosten avulla siten, että ratkaisu pysyy samana.

Apukysymyksiä:

- Kohdassa a) Mitä voi päätellä siitä, että ratkaisut ovat erilaiset? Oppilaille ei välttämättä ole selvää, että eri ratkaisut tarkoittavat, että toinen ratkaisutavoista olisi virheellinen.
- Kohdassa c) Kysy tarkemmin, mitä ”samanmuotoiset termit” tarkoittavat. Omin sanoin kuvailu on tärkeää.

Toimintaohje tehtävästä 3 eteenpäin

- Tehtävissä oppilaat tutkivat virheellistä ja oikeaa ratkaisutapaa pienryhmissä.
- Jos tehtävät käydään yhdessä lävitse, ei oppilaiden kannata kirjoittaa pitkiä ja tarkkoja malliratkaisuja. (Eri-tyisesti tehtävien 4,6,7,9 ja 10 a) - kohdat). Tärkeämpää on varmistaa, että virheet ovat löytyneet ja ymmärretään, mistä virhe johtuu ja miten se voidaan välttää tulevaisuudessa.

Esimerkki 1 Kalle ja Leena ovat ratkaisseet yhtälön $45y + 90 = 60y$ seuraavilla tavoilla:

Aluksi yhdistän vasemman puolen termit keskenään.

Tämän jälkeen vähennän molemmilta puolilta 60y.

Lopuksi jaan yhtälöä puolittain luvulla 75 ja saan vastauksen.



Kallen ratkaisu

$$\begin{aligned} 45y + 90 &= 60y \\ 135y &= 60y \\ 135y - 60y &= 60y - 60y \\ 75y &= 0 \\ \frac{75y}{75} &= \frac{0}{75} \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Leenan ratkaisu

$$\begin{aligned} 45y + 90 &= 60y \\ 45y - 45y + 90 &= 60y - 45y \\ 90 &= 15y \\ \frac{90}{15} &= \frac{15y}{15} \\ 6 &= y \end{aligned}$$

Aluksi vähennän molemmilta puolilta 45y.

Muokkaan yhtälön molempia puolia suorittamalla yhteenlaskut.

Lopuksi jaan yhtälöä puolittain luvulla 15.

Suoritan jakolaskut puolittain ja saan yhtälön ratkaisun.



a) Kuvaile mitä eroa Kallen ja Leenan ratkaisuissa on.

Kalle ja Leena ovat aloittaneet eri muunnoksilla. Kallella ja Leenalla on eri ratkaisut, joten ainakin toisen heistä on täytynyt tehdä virhe. Toisella heistä toisen rivin ratkaisu on eri kuin ensimmäisen rivin ratkaisu.

b) Kumpi on oikeassa? Miksi? Miten tarkistat tämän?

Kalle on yhdistänyt virheellisesti erimuotoiset termit, joten hän ei ainakaan voi olla oikeassa. Leena on käyttänyt muunnoksia oikein, joten hänen ratkaisunsa täytyy olla oikea.

Tämä voidaan tarkistaa sijoittamalla Leenan vastaus $y = 6$ alkuperäiseen yhtälöön. Tällöin saadaan $360 = 360$, joten yhtälö on tosi ja ratkaisu oikea. Jos puolestaan sijoitetaan Kallen ratkaisu $y = 0$, saadaan $90 = 0$.

Lisätietoa: Vasen ja oikea puoli eivät ole yhtä suuret, joten yhtälö ei ole tosi. Kallen toiselle riville sijoittamalla saadaan $0 = 0$, joten yhtälö on tosi. Tästä voidaan päätellä, että yhtälön ratkaisu on muuttunut ensimmäiseltä riviltä toiselle, joten ei ole käytetty muunnosta (muunnos säilyttää ratkaisun samana).

c) Mikä virhe on tehty? Kirjoita omin sanoin sääntö, jolla virhe voidaan välttää.

On virheellisesti yhdistetty erimuotoiset termit. Yhdistä vain samanmuotoisia termejä.

Kalle ja Leena ovat ratkoneet yhtälöitä ja vertailevat nyt ratkaisujaan samoille yhtälöille. Vastaa annettuihin kysymyksiin ja toimi opettajana tarkistaen Kallen ja Leenan ratkaisut yhtälöille.

Tehtävä 1



Kallen ratkaisu

$$\begin{aligned} 4a &= 20 \\ \frac{4a}{20} &= \frac{20}{20} \end{aligned}$$

$$a = 1$$

Leenan ratkaisu

$$\begin{aligned} 4a &= 20 \\ \frac{4a}{4} &= \frac{20}{4} \end{aligned}$$

$$a = 5$$



a) Kerro suullisesti, mitä Kalle ja Leena ovat tehneet yrittäessään ratkaista yhtälön $4a = 20$.

Sekä Kalle ja Leena ovat ajatelleet, että haluavat jakaa puolittain yhtälöä, jotta saadaan vastaus muotoa $a = \text{jotain}$. Kalle on kuitenkin jakanut luvun 4 luvulla 20, mistä EI tule ratkaisuksi yksi. Leena on jakanut luvun a kertoimella 4 molemmat puolet ja saanut ratkaisuksi $a = 5$. Kumpi ratkaisi oikein? Leena.

- b) Ympyröi virheellisestä ratkaisusta kohta, jossa virhe on tapahtunut.
c) Muotoile omin sanoin lyhyt ohje, miten kyseisen virheen voi yhtälöä ratkaistaessa välttää.

Yhtälön toiselle puolelle tulee saada pelkästään muuttujia, jotta ratkaisu voidaan nähdä helposti. Yhtälöä on jaettava puolittain muuttujan kertoimella.

Tehtävä 2 Kalle on tehnyt virheen yrittäessään ratkaista yhtälöä. Leena sen sijaan tietää, miten välttää tämä virhe. Kirjoita Leenan ratkaisu välivaiheineen näkyviin.

	Kallen ratkaisu	Leenan ratkaisu	
	$a + 8 + 12 = 20$	$a + 8 + 12 = 20$	
	$20a = 20$	$a + 20 = 20$	
	$\frac{20a}{20} = \frac{20}{20}$	$a + 20 - 20 = 20 - 20$	
	$a = 1$	$a = 0$	

Vain samanmuotoisia termejä saa yhdistää. Kalle on yhdistänyt termit a , 8 ja 20 , mikä ei ole mahdollista, sillä $a + 20$ ei ole sama asia kuin $a \cdot 20$. (Tämän jälkeen Kalle olisi osannut jatkaa oikein, mutta ratkaisu on jo muuttunut eikä $a = 1$ ole alkuperäisen yhtälön ratkaisu.)

Tehtävä 3

	Kallen ratkaisu	Leenan ratkaisu	
	$x + 5 = 10$	$x + 5 = 10$	
	$x + 5 - 5 = 10 - 5$	$5x = 10$	
	$x = 5$	$x = 10 - 5$	
		$x = 5$	

- a) Kerro, mitä Kalle ja Leena ovat tehneet ratkaistessaan yhtälön $x + 5 = 10$. Kumpi ratkaisi oikein? Kalle.
Kalle on vähentänyt puolittain luvun 5 ja muokannut lausekkeita saaden vastauksensa. Leena on yhdistänyt termit $x + 5$ mikä ei ole mahdollista, sillä ne ovat erimuotoisia. Leena on tehnyt toisenkin virheen, sillä hän on vähentänyt puolittain luvun 5, vaikka laskua $5x - 5$ ei voi laskea.
b) Ympyröi virheellisestä ratkaisusta kohta, jossa virhe on tapahtunut.
c) Muotoile omin sanoin lyhyt ohje, miten kyseisen virheen voi yhtälöä ratkaistaessa välttää.

Vain samanmuotoisia termejä saa yhdistää eli laskea yhteen tai vähentää keskenään. Jos haluat saada kertoimen pois muuttujan edestä, se ei lähde vähentämällä vaan jakamalla, sillä $5x - 5$ ei voi laskea.

Tehtävä 4



Kallen ratkaisu	Leenan ratkaisu
$-y + 7 = 12$	$-y + 7 = 12$
$-y + 7 - 7 = 12 - 7$	$-y + 7 - 7 = 12 - 7$
$-y = 5$	$-y = 5$
$y = -5$	$y = 5$



- a) Kerro, mitä Kalle ja Leena ovat tehneet ratkaistessaan yhtälön $-y + 7 = 12$. Kumpi ratkaisi oikein? **Kalle.**
Kalle on vähentänyt puolittain luvun 7 ja kertonut puolittain luvulla -1 tai päätellyt, että jos $- = 5$, niin $y = -5$. Leena on vähentänyt puolittain luvun 7. Lopuksi Leena on unohtanut miinusmerkin.
- b) Ympyröi virheellisestä ratkaisusta kohta, jossa virhe on tapahtunut.
- c) Muotoile omin sanoin lyhyt ohje, miten kyseisen virheen voi yhtälöä ratkaistaessa välttää.

*Saadakseen miinusmerkin pois muuttujan edestä, tulee kertoa tai jakaa luvulla -1, sillä $-1 \cdot (-1) = 1$.
 Voi myös päätellä, että jos $- = 5$, niin y :n täytyy olla -5.*

Tehtävä 5 Leena ja Kalle ovat ratkaisseet yhtälöitä. Heiltä on jäänyt yksi välivaihe merkitsemättä...

Leenan ratkaisu	Kallen ratkaisu
$5 = k - 15$	$5 = k - 15$
$\textcircled{-10} = k$	$5 + 15 = k - 15 + 15$
	$20 = k$

- a) Kumpi on kiireestä huolimatta saanut tehtävän ratkaistua oikein? Kalle.
 b) Täydennä puuttuva välivaihe viivalle siihen ratkaisuun, jossa ratkaisu oli oikein.

Tehtävä 6



Kallen ratkaisu	Leenan ratkaisu
$6 = \frac{x}{10} - 2$	$6 = \frac{x}{10} - 2$
$10 \cdot 6 = 10 \cdot \frac{x}{10} - 10 \cdot 2$	$10 \cdot 6 = 10 \cdot \frac{x}{10} - 2$
$60 = x - 20$	$60 = x - 2$
$80 = x$	$62 = x$



- a) Kerro, mitä Kalle ja Leena ovat tehneet ratkaistessaan yhtälön $6 = \frac{x}{10} - 2$. Kumpi ratkaisi oikein? Kalle.
Kalle on kertonut yhtälöä aluksi puolittain luvulla 10. Leena on yrittänyt aloittaa samalla muunnoksella, mutta unohtanut kertoa lukua -2 luvulla 10. Kertomisen jälkeen on pyritty selvittämään x:n lukuarvo.
 b) Ympyröi virheellisestä ratkaisusta kohta, jossa virhe on tapahtunut.
 c) Muotoile omin sanoin lyhyt ohje, miten kyseisen virheen voi yhtälöä ratkaistaessa välttää.

Jos kerrot (tai jaat) yhtälöä puolittain, muista toteuttaa laskutoimitus kaikille termeille.

Kertominen sulkuja käyttäen tulee materiaalissa myöhemmin, mutta tätä voi olla hyvä pohjustaa tässä ajatellen seuraavaa tuntia, jolla oppilaat luovat itse yhtälöitä muunnoksia käyttäen.

Jokeri 7



Kallen ratkaisu

$$-2 + y + 10 = 40$$

$$y + 8 = 40$$

$$\frac{y + 8}{8} = \frac{40}{8}$$

$$y = 5$$

Leenan ratkaisu

$$-2 + y + 10 = 40$$

$$y + 8 = 40$$

$$y + 8 - 8 = 40$$

$$y = 40$$



a) Kerro, mitä Kalle ja Leena ovat tehneet ratkaistessaan yhtälön $-2 + y + 10 = 40$. Kumpi ratkaisi oikein? *Ei kumpikaan. Kalle on aloittanut oikein yhdistämällä termit -2 ja 10 . Hän on yrittänyt sitten jakaa yhtälöä puolittain termillä 8 . Jakaminen ei tässä tilanteessa auttaisi ratkaisemista, sillä sekä y että 8 tulisi jakaa 8 :lla. Leena puolestaan on unohtanut vähentää termin 8 oikealta puolelta yhtälöä.*

b) Ympyröi virheellisestä ratkaisusta kohta, jossa virhe on tapahtunut.

c) Muotoile omin sanoin lyhyt ohje, miten kyseisen virheen voi yhtälöä ratkaistaessa välttää.

- 1) Jakaminen täytyy suorittaa kaikille termeille.
- 2) Muunnokset täytyy suorittaa molemmien puolin yhtälöä.

Jokeri 8



Kallen ratkaisu

$$15 + 2 = 17 - 10a$$

$$17 = 17 - 10a$$

$$17 - 17 = 17 - 17 - 10a$$

$$0 = 0 - 10a$$

$$10 = -10a + 10$$

$$10 = a$$

Leenan ratkaisu

$$15 + 2 = 17 - 10a$$

$$17 = 17 - 10a$$

$$17 - 17 = 17 - 17 - 10a$$

$$0 = 0 - 10a$$

$$0 = -10a$$

$$\frac{0}{-10} = \frac{-10a}{-10}$$

$$0 = a$$



a) Kerro, mitä Kalle ja Leena ovat tehneet ratkaistessaan yhtälön $15 + 2 = 17 - 10$. Kumpi ratkaisi oikein? Leena.

b) Ympyröi virheellisestä ratkaisusta kohta, jossa virhe on tapahtunut.

c) Muotoile omin sanoin lyhyt ohje, miten kyseisen virheen voi yhtälöä ratkaistaessa välttää.

Jos haluaa saada $10a$ muotoon a , tulee jakaa 10 :llä, ei lisätä sitä puolittain.

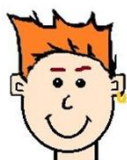
RYHMÄARVIOINTI (ryhmätaidot selitetty tarkemmin sivulla 2)

Ryhmätaito	Onnistuminen				
Autoimme ja rohkaisimme toisiamme					
Keskustelimme toisemme huomioiden					
Toistimme asioita tarvittaessa					
Keskityimme perusteluihin vastausten sijaan					
Hyödynsimme virheitä oppiaksemme					

Huomioita kotitehtävistä:

- Kotitehtävän 1 yhtälöitä ei ole tarkoituksella ratkaistu pitemmälle, sillä tutkitaan vain ensimmäistä muunnosta.
- Kotitehtävä 2 voi olla melko haastava.
- Kotitehtävien lisäksi oppilaat täyttävät luvun ITSEARVIOINNIN.

Kotitehtävä 1 Kalle ja Leena ovat lähteneet ratkaisemaan yhtälöä $15a = 10a + 30$.



Kallen ratkaisu	Leenan ratkaisu
$15a = 10a + 30$	$15a = 10a + 30$
$15a - 10a = 10a - 10a + 30$	$15a = 10a - 10a + 30$
...	...



- a) Mitä muunnosta kumpikin on lähtenyt käyttämään ensimmäisenä? *Kumpikin on ajatellut vähentää puolittain termin $10a$.*
- b) Kumpi on käyttänyt muunnosta oikein? *Kalle.*
- c) Mistä tiedät, että toinen ratkaisu ei ole oikein? *Leenan ratkaisussa termi on vähennetty vain toiselta puolelta yhtälöä, jolloin yhtälön ratkaisu muuttuu eli alkuperäisellä yhtälöllä enää ole sama ratkaisu.*
- d) Muotoile omin sanoin lyhyt ohje, miten tällaisen virheen voi yhtälöä ratkaistaessa välttää.

Muunnokset tulee muistaa tehdä molemmille puolille yhtälöä.

Itsearviointi (täytetään yksin aina luvun päätteeksi)

EOS = En osaa sanoa

1=Erittäin heikosti

7=Erinomaisesti

Miten hyvin osaat seuraavat asiat

- | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|
| • Lausekkeen ja yhtälön ero | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |
| • Yhtälön tasapaino | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |
| • Tutkia, onko yhtälö tosi/epätosi | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |
| | | | | | | | | |
| • Olen oppinut tunneilla käsitellyt asiat. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |
| • Onnistuin keskittymään perusteluihin vastausten sijaan. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |
| • Onnistun löytämään ja esittämään kysymyksiä. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |
| • Onnistuin kuvailemaan ajatteluani muille. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |
| • Onnistuin hyödyntämään virheitä oppiakseni. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |

Luku 3 Yhtälön ratkaiseminen

Luvussa 3 syvennetään ymmärrystä siitä, mitä muunnokset ovat ja harjoitellaan itse ratkaisemaan yhtälöitä. Ensimmäisen tunnin jälkeen voi valita, jatketaanko harjoittelua oppilaiden itse kotitehtävänään luomien yhtälöiden vai tässä vihkossa valmiina olevien tehtäväsarjojen avulla. Yhtälöitä ratkaistessa tullaan myös huomaamaan, että muunnokset soveltuvat eri yhtälöiden ratkaisuun eri tavoin. Esimerkiksi joskus kannattaa jakaa aluksi, joskus taas siitä ei ole mitään hyötyä.

3.1 Yhtälön luominen ja ratkaiseminen

Tiesitkö, että toisen maailmansodan tapahtumien kulkuun vaikuttivat merkittävästi salausta ja salakuuntelumenetelmät? Nykyään digitaalisen tiedon salaaminen on yhä tärkeämpää. Tällä tunnilla yhtälöitä salataan ja hakkeroidaan käyttämällä erilaisia muunnoksia yhtälön haastavoittamiseksi (salaaminen) tai helpottamiseksi (hakkerointi).

Opettaja voi halutessaan maalata tehtävälle kehyskertomuksen liittyen toisen maailmansodan tapahtumiin tai FBI:n salapoliisien ja hakkerien väliseen konfliktiin. Yhteistyötä voi tehdä historian opettajan kanssa.

MUUNNOKSIA

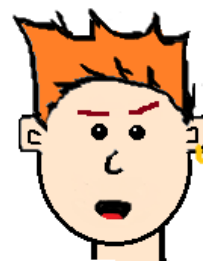
Muunnos L: saman termin lisääminen yhtälön molemmille puolille

Muunnos V: saman termin **vähentäminen** yhtälön molemmilta puolilta

Muunnos J: molempien puolien **jakaminen** samalla nollasta eroavalla luvulla

Muunnos K: molempien puolien **kertominen** samalla nollasta eroavalla luvulla

Muunnos M: Yhtälössä olevan lausekkeen/lausekkeiden **muokkaaminen**.



Tunnin rakenne:

- Kotitehtävät ja kertaus (10min)
- Yhtälön luominen, Tehtävä 1 (10min)
- Taulun analysointi, Tehtävä 2 (5min)
- Yhtälöiden ratkaisu ja vertailuvaihe, Tehtävä 3 (10min)
- Pohdinta (Jokeri 4), tunnin koonti ja ryhmäitsearviointi (10min)

Tunnin tavoitteet:

- Harjoitellaan muunnosten käyttöä ja luovuutta yhtälöitä luomalla
- Opitaan analysoimaan ja luokittelemaan erilaisia yhtälöitä. (esim. Mikä tekee yhtälöstä haastavan?)
- Harjoitellaan yhtälönratkaisua toisten oppilaiden luomia yhtälöitä ratkaisemalla
- Huomataan, että sopivan muunnoksen valintaan liittyy usein jonkin laskutoimituksen kumoaminen
- Harjoitellaan mielekkään ilmapiirin luomista ja vastuun ottamista omasta oppimisesta

Toimintaohje: Tällä tunnilla oppilaat luovat alkutunnista ryhmissään yhtälöitä. Käytetään siis muunnoksia, mutta käänteisessä järjestyksessä verrattuna, jos luotua yhtälöä ratkaistaisiin. Lopputunti käytetään ryhmien luomien yhtälöiden ratkaisemiseen ja näiden analysointiin.

BONUS: Ennen tehtävää opettaja voi rohkaista luovuuteen lukujen keksimisessä (alussa ja muunnosten yhteydessä keksitään lukuja) antamalla oppilaille hetken aikaa (30 s) pohtia "Millaisia erilaisia lukuja on olemassa?" ja kokoamalla oppilaiden ideoita taululle.

Tehtävä 1 Luokaa ryhmässä yhtälö alhaalta ylöspäin. (Myöhemmin ryhmät ratkaisevat toistensa yhtälöitä.)

Opettaja voi rohkaista oppilaita käyttämään luovuutta muuttujan valinnassa. Esimerkiksi kysymällä ”Millä muuttujaa voi merkitä?” Oppilaat: ”x:llä?” ”Tai?”...hiljaisuus... Oppilaat: ”t:llä?” ”Tai..?” Oppilailta alkaa sadella muitakin ehdotuksia. ”Olette ehkä tottuneet käyttämään x:ää, vaan nyt voitte itse valita vapaasti, millä merkitsette muuttujaa.”

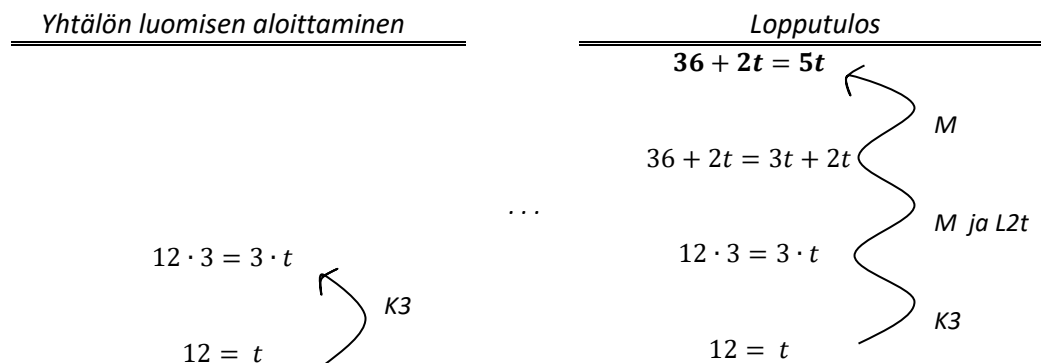
Huomautus! Kaikkien kannattaa **kirjoittaa** omalle paperilleen ryhmän yhteinen yhtälö tai muuten on vaikea ymmärtää, mitä ollaan tekemässä.

a) Keksikää ryhmässä luku ja muuttuja, jotka merkitsette yhtä suuriksi (Seuraavalla sivulla on tilaa kirjoittaa).

Esimerkissä $12 = t$.

b) Tehkää tälle yhtälölle yhdessä valitsemianne muunnoksia. Edetkää alhaalta ylös.

Esimerkissä on kerrottu puolittain luvulla 3 (K3), lisätty molemmille puolille $2t$ (L $2t$) ja laskettu $3t$ ja $2t$ yhteen (M).



Yhtälön luomisessa täytyy keskittyä oikean vastauksen sijaan **päättelyyn** eli siihen ”miksi näin saa tai ei saa tehdä”. Kaikki ideat voidaan perustella tarkistamalla pysyykö yhtälön ratkaisu samana. Mikä tahansa menetelmä muuttaa yhtälöä on toimiva muunnos, jos ratkaisu pysyy samana.

Luomisessa liikkeelle voi auttaa rohkaisemalla ”saatte valita minkä tahansa luvun ja muuttujasymbolin, kaikki käy” ja sitten ”valitkaa jokin muunnos (L, V, J, K) ja luku” sekä ”muokatkaa välillä lausekkeita eli laskekaa niissä olevia laskuja”.

Yleisiä oppilaiden virheitä, harhakäsityksiä ja ihmettelyitä: A) Yhdistetään erimuotoisia termejä. B) ”Ei tällä luvulla voi jakaa, koska ei tule kokonaislukua.” C) ”Voikohan muuttujaa lisätä tai vähentää? Voiko muuttujalla kertoa tai jakaa?” Voi, mutta muuttujalla kertomisen jälkeen myös 0 on ratkaisu ja muuttujalla jaettaessa muuttuja ei voi olla 0.

Alkuun pääseminen voi tuntua oppilaista **aluksi haastavalta** ja hämmentävältä. Sitä suurempi on **onnistumisen elämys**, kun he huomaavat pystyvänsä luomaan kokonaan oman yhtälön.

Ryhmien ilmapiiri vaikuttaa valtavasti siihen, miten tehtävää tehdään. Joissakin ryhmissä keskustellaan yhdessä, mitä muunnoksia olisi kiinnostavinta käyttää, toisessa ryhmässä yksi päättää kaikki muiden tehdessä perässä ja kolmannessa autetaan jokaista ryhmän jäsentä keksimään yhden muunnoksen. Jotkut ryhmät saattavat tehdä kokonaan omat yhtälönsä keskustelematta lainkaan. Opettajan täytyy antaa neuvoja ryhmätyöskentelyyn oppilaan tuntemusta ja tilannetajua käyttäen. Yleisesti oppilaita voi kehottaa huolehtimaan jokaisesta ryhmänjäsenestä: Toisia täytyy rohkaista osallistumaan ja toisia antamaan tilaa muillekin. Tavoitteena on, että kaikki ryhmän jäsenet ymmärtävät, miten oma yhtälö luotiin.

c) Olette luoneet ryhmässä yhtälön. Kirjoittakaa yhtälö taululle nimienne kanssa (esimerkissä $36 + 2t = 5t$). Huolehdi, että kaikki ryhmäläisenne ymmärsivät, mitä teitte. Osaatteko sanoa laskematta, millä muuttujan arvolla luomanne yhtälö on tosi? Jos tekisit uuden yhtälön, niin miten yhtälöstä voisi tehdä haastavamman?

Nopeimpia ryhmiä voi tarvittaessa ohjata keksimään haastavampia ("ovelampia") yhtälöitä taululle.

Tehtävä 2 Tutkikaa taululle ilmestyviä yhtälöitä: Ovatko ne erilaisia? Millä tavoin?

Kun kaikki ryhmät ovat kirjoittaneet taululle yhtälönsä, voidaan analysoida yhdessä niitä. Oppilaiden ideoita on tässä helppo kehua! Oppilaat voivat pohtia esimerkiksi:

- Onko joku vaikea? Miksi? Onko joku helppo? Miksi?
- Millaisia laskutoimituksia niissä on? (+, -, ·, /, sulkuja)
- Millaisia lukuja niissä on? (isot luvut, murtoluvut, desimaaliluvut, negatiiviset luvut, toinen muuttuja, pii....)
- Kuinka pitkiä yhtälöt ovat tai arviolta kuinka montaa muunnosta on käytetty?
- Voiko yhtälöistä päätellä päässä, mikä on ratkaisu?

Jos oppilaat ovat kovin hiljaisia, voi antaa minuutin aikaa keskustella ryhmissä ensin.

Tehtävä 3 Ratkaisuvaihe: Ratkaiskaa toisten laatimia yhtälöitä. **Vertailuvaihe:** Käykää keskustelemassa jokaisesta ratkaisustanne keksijäryhmän kanssa. Miten ratkaisitte/loitte yhtälön? Mitä olette tehneet samoin tai eri tavalla?

Vertailuvaihe tuo esille luokassa vallitsevan oppilaiden oppimiskulttuurin ja samalla antaa mahdollisuuden ohjata rakentavan ilmapiirin luomiseen. Opettaja voi painottaa, että virheiden löytäminen ryhmien vertailuvaiheessa on parasta mitä voi tapahtua. Virheet ovat aarteita, joita yhdessä tutkimalla oppilaat voivat huomata uusia asioita yhtälönratkaisuun liittyen. Ei siis ole tarkoitus piilotella omaa tuotosta ja sanoa "väärin, mee takas omalle paikalle!"

Jos oppilaat ovat kirjoittaneet muunnokset näkyviin, heidän on helpompi kuvailla ääneen toisilleen, mitä ovat tehneet. Ihannetapaus olisi, että oppilaat nähdään rinnatusten vihkot vierekkäin osoittelemassa sormella kohtia ratkaisuisaan ja kuvailemassa, mitä kumpainenkin ryhmä teki. Todennäköisesti monet kuitenkin vain tarkistavat ratkaisun ja menevät takaisin omalle paikalleen. Tässä täytyy ottaa huomioon oppilaiden erilaisuus ja antaa aikaa muutokselle.

Ryhmän luomat yhtälöt		
1.	2.	3.
$\underline{\quad} = \underline{\quad}$		
Ryhmän valitsevat ratkaistavat yhtälöt		
1.	2.	3.
$\underline{\quad} = \underline{\quad}$		

Jokeri 4 Pohdi seuraavia kysymyksiä

- a) Onko merkitystä, missä järjestyksessä muunnoksia tehdään?

Jakaminen ja kertominen ovat ikään kuin samaa perhettä samoin kuin lisääminen ja vähentäminen ovat keskenään samaa perhettä. Samaa perhettä olevien peräkkäisten muunnoksien järjestyksellä ei ole väliä. Jos lausekkeissa on useampia termejä, niin sen jälkeen tulee muistaa kertoa kaikki termit tai kirjoittaa sulkulauseke. Esim. $K3 \cdot L2$ tuottaa erisuuruisen lausekkeen kuin $L2 \cdot K3$.

- b) Mitä samaa ja erilaista on yhtälön luomisessa ja ratkaisemisessa?

Molemmissa muunnetaan yhtälöä niin, että syntyneet yhtälöt ovat kaikki tosia samalla muuttujan arvolla (eli ratkaisu säilyy). Erilaista on, että luomisessa käytetään luovuutta ja lopputulos on avoin, mutta ratkaisemisessa täytyy valita strategisesti juuri sellaisia muunnoksia, joilla saadaan yhtälö helpommaksi.

- c) Mitä tarkoittaa, että laskutoimitukset kumoavat toisensa? Miten idea liittyy yhtälönratkaisuun?

Tähän liittyy myös oppilaille jännä idea, että yhteen- ja vähennyslasku sekä kerto- ja jakolasku kumoavat toisensa eri tavoilla. Toisessa kumoutumisen seurauksena on 0 ja toisessa 1. Yhtälöä ratkaistessa täytyy kumota laskutoimituksia.

- d) Millaisia erilaisia yhtälöitä a) on olemassa b) osaat luoda c) osaat ratkaista?

Jos tehtävää haluaisi laajentaa usean tunnin pituiseksi "projektiksi", osaamista olisi helppo arvioida "portfoliolla".

- e) Millaisia keinoja löysit, joilla yhtälöistä saa tehtyä haastavamman?

Käytin jakamismuunnosta, murtolukuja, sulkulausekkeita, toista muuttujaa tai puita. Lausekkeen muokkausta voi käyttää myös toiseen suuntaan $6t = 2 \cdot 3t = 2 \cdot (4t - t)$. (Tämä idea soveltuu lausekkeiden tutkivaan harjoitteluun.)

- f) Millaisia virheitä löytyi?
g) Millaisia erilaisia ratkaisutapoja löytyi?
h) Millaisia hämmennyksiä ja kysymyksiä jäi vielä auki?
i) Mitä uutta oivalsit? Mitä opit?
j) Miten onnistuit toisten ideoiden kuuntelemissa ja vertailussa?

Loppukoonti riippuu siitä mitä oppilaat ovat löytäneet. Koontiin voi valmistautua pohtimalla Jokerin 4 kysymyksiä. Opettaja voi pyytää jotain ryhmää kuvailemaan dokumenttikameran avulla jonkin hyvän idean (virhe, luova lähestymistapa, oivallus ym.), jonka tunnin aikana havaitsi.

RYHMÄARVIOINTI (ryhmätaidot selitetty tarkemmin sivulla 2)

Ryhmätaito	Onnistuminen				
Autoimme ja rohkaisimme toisiamme					
Keskustelimme toisemme huomioiden					
Toistimme asioita tarvittaessa					
Keskityimme perusteluihin vastausten sijaan					
Hyödynsimme virheitä oppiaksemme					

Kotitehtävä 1 Millä muunnoksella aloittaisit seuraavien yhtälöiden ratkaisemisen?

- a) $5 = 4x$
J4 (jakaminen luvulla 4)
- b) $\frac{(1-a)}{3} = 2$
K2 (kertominen luvulla 2)
- c) $-s + 2 = 2s - 1$
Ls (lisätään termi s)

Huomautuksia kotitehtävästä 1

- Tehtävän voi aloittaa millä tahansa muunnoksella!
- Yhtälöratkaisussa pohditaan, mikä muunnos tekee yhtälön helpommaksi. On olemassa erilaisia ja yhtä lailla oikeita ratkaisutapoja. Jotkut ratkaisutavat ovat tehokkaampia kuin toiset.
- Tehtävää kannattaa analysoida ennen tehtävän aloittamista ja sen jälkeen.

Kotitehtävä 2

- a) Luo muunnoksia käyttäen yhtälö toisten ratkottavaksi.
- b) Ratkaise oma yhtälösi.

Opettaja voi yhdessä oppilaiden kanssa päättää jatketaanko yhtälöratkaisun harjoittelua ensi tunnilla keräämällä kotitehtävänä luodut yhtälöt taululle ja käyttämällä tämän tunnin ideaa vai ratkaisemalla materiaalissa seuraavana olevia valmiita yhtälöitä.

Kotitehtävä 3 Keksi yhtälö, jonka ratkaisemiseksi kannattaisi seuraavaksi

- a) Vähentää tai lisätä puolittain
Esim. $x + 2 = 2x$
- b) Jakaa tai kertoo puolittain
Esim. $\frac{t}{4} - 3 = 2$

3.2 Yhtälönratkaisutehtäviä

Huomautus! Vaihtoehtoinen toteutustapa tunnille on luoda ja ratkaista itse tehtäviä (vrt. edellinen tunti).

Tunnin rakenne:

- Kotitehtävät ja kertaus (5min)
- Esimerkki (5min)
- Tehtäväsarjojen ratkaiseminen (30min)
- Koonti ja itsearviointi (5min)

Tunnin tavoitteet: Opetellaan ratkaisemaan erityyppisiä yhtälöitä muunnosten avulla ja tarkastamaan ratkaisu.

Toimintaohje: Rohkaistaan oppilaita selittämään ääneen, mitä on omassa ratkaisussaan tehnyt. Huomataan, että on olemassa useita erilaisia ja silti oikeita ratkaisutapoja. Ohjataan tarkistamaan ratkaisu sijoittamalla saatu muutujan arvo alkuperäiseen yhtälöön. Opastetaan ”jumitilanteissa”. Matematiikassa on tärkeää opetella pohtimaan tehtävää, joka aluksi tuntuisi hyvinkin haastavalta. Tutkitaan ensin vanhoja esimerkkejä, kysytään kavereilta ja lopuksi opettajalta, kun kaikkea muuta on yritetty.

Sanalliset tehtävät jäävät materiaalissa vähäiselle käsittelylle, sillä painopiste on yhtälön käsitteellisessä ymmärtämisessä ja (myöhemmin) joustavuuden kehittämisessä.

Esimerkki 1 (Muunnosten eri merkintätavoista)

Matemaattinen esitys	Tapa 1	Matemaattinen esitys	Tapa 2
$2x + 6 = 10$	V6	$2x + 6 = 10$	$ - 6$
$2x + 6 - 6 = 10 - 6$	M M		
$2x = 4$	J 2	$2x = 4$	$: 2$
$\frac{2x}{2} = \frac{4}{2}$	M M	$x = 2$	
$x = 2$			

Huomioita esimerkistä 1: Oppilaille voi näyttää yleisesti käytössä olevan merkintätavan ”temppuviivat”, jos sitä ei ole vielä tähän mennessä näytetty. Temppuviivoissa on se huono puoli, että niissä ei ole ”muokkaamista” näkyvillä ja ne vahvistavat käsitystä siitä, että matematiikka on numeroita ja symboleita eikä kirjoitus tai puhe kuulu siihen. Temppuviivat ovat siitä hyviä, että ne ovat yleisesti käytössä ja merkinnästä on helppo päätellä mitä se tarkoittaa esimerkiksi riippumatta kielestä. Oppilaat voivat itse päättää, millaista merkintää käyttävät. Tässä materiaalissa käytetään kuitenkin Tapaa 1.

Tehtävä 1 Ratkaise yhtälöistä tuntematon muuttuja käyttäen oppimiasi muunnoksia. Valitkaa ryhmänne kanssa **kaksi** tehtäväsarjaa.

Huomautus!

- Sarjat eivät ole vaikeusjärjestyksessä.
- Ryhmä valitsee kaksi tehtäväsarjaa, jotka kaikki ryhmän jäsenet tekevät.
- Tarvittaessa sarjat voi tarkistaa esimerkiksi antamalla ryhmille ratkaisut monisteella.
- Välivaiheet ratkaisuissa kirjoitetaan allekkain.
- Oppilaille voi huomauttaa, että kaikkia välivaiheita ei tarvitse kirjoittaa siinä vaiheessa, kun ne ovat itselle selviä. Välivaiheet kirjoittamalla varmistaa kuitenkin muun muassa, että muunnos tulee tehtyä oikein molemmille puolille yhtälöä.
- Lausekkeen muokkauksen voi merkitä esimerkiksi ympyröimällä yhdistettävät termit.
- Yhtälöön on yleensä useita ratkaisutapoja, malliratkaisu on vain eräs mahdollinen ratkaisutapa.

Sarja 1

a) $6a - 5 - 37 = 0$ L42	b) $\frac{x}{2} - 3 = 10$ L3	c) $12 + 6 = 2y + 4y$ M M
$6a - 5 - 37 + 42 = 0 + 42$ M M	$\frac{x}{2} - 3 + 3 = 13 + 3$ M M	$18 = 6y$ J3 M M
$6a = 42$ J6	$\frac{x}{2} = 13$ K2	$3 = y$
$\frac{6a}{6} = \frac{42}{6}$ M M	$2 \cdot \frac{x}{2} = 13 \cdot 2$ M M	
$a = 7$	$x = 26$	

Sarja 2

a) $a - 2 = 0$ L2	b) $\frac{y}{2} = 4$ K2	c) $4 + 8 = 20 + 2x$ M
$a - 2 + 2 = 0 + 2$ M M	$2 \cdot \frac{y}{2} = 2 \cdot 4$ M M	$12 = 20 + 2x$ V20 M M
$a = 2$	$y = 8$	$-8 = 2x$ J2 M M
		$-4 = x$

Sarja 3

a) $0,3y + 0,2 = 1,1$ V0,2	b) $3 - \frac{x}{4} = 3 + 4 - (8 + 3)$ M	c) $6a + 5 = 10a + 3$ V6
$0,3y + 0,2 - 0,2 = 1,1 - 0,2$ M M	$3 - \frac{x}{4} = 3 + 4 - 8 - 3$ M	$6a - 6a + 5 = 10a - 6a + 3$ M M
$0,3y = 0,9$ J0,3 M M	$3 - \frac{x}{4} = -4$ L $\frac{x}{4}$ L4	$5 = 4a + 3$ V3 M M
$y = 3$	$3 + 4 - \frac{x}{4} + \frac{x}{4} = -4 + 4 + \frac{x}{4}$ M M	$2 = 4a$ J2
	$7 = \frac{x}{4}$ K4 M M	$\frac{2}{4} = \frac{4a}{4}$ M M
	$28 = x$	$\frac{1}{2} = a$

Sarja 4

a) $4c - (c + 2c) = 3$ M	b) $17x + 3x + 1 = 6x + 17x + 1$ V17x	c) $8x + \pi = 5\pi$ V π
$4c - 3c = 3$ M	$17x + 3x + 1 - 17x = 6x + 17x + 1 - 17x$ M M	$8x + \pi - \pi = 5\pi - \pi$ M M
$c = 3$	$3x + 1 = 6x + 1$ V1 M M	$8x = 4\pi$ J8
	$3x - 3x = 6x - 3x$ V 3x	$\frac{8x}{8} = \frac{4\pi}{8}$ M M
	$0 = 3x$ M M	$x = \frac{\pi}{2}$
	$\frac{0}{3} = \frac{3x}{3}$ J3	
	$0 = x$	

Jokeri 2 Kuvio on neliö. Laske sivun pituus.



$$2a + 3$$

$$5a - 12$$

Ratkaisu: Neliön kaikkien sivujen on oltava yhtä pitkiä, joten voidaan muodostaa yhtälö $2a + 3 = 5a - 12$, jonka ratkaisu kertoo, milloin sivut ovat yhtä pitkiä.

$$2a + 3 = 5a - 12 \quad V2aL12MM$$

$$15 = 3a \quad J3MM$$

$$5 = a$$

Vastaus: Neliön sivun pituus on 5 pituusyksikköä.

Jokeri 3 Määritä lausekkeen $\frac{ax}{b}$ arvo, kun $a = \frac{2}{5}$ ja x on kolmasosa b :stä (yo syksy 1999)

Ratkaisu: $a = \frac{2}{5}$ ja $x = \frac{b}{3}$ sijoitetaan nämä lausekkeeseen $\frac{ax}{b}$ eli saadaan $\frac{2}{5} \cdot \frac{b}{3} \cdot \frac{1}{b} = \frac{2}{15}$ eli lausekkeen arvo on $\frac{2}{15}$.

RYHMÄARVIOINTI (ryhmätaidot selitetty tarkemmin sivulla 2)					
Ryhmätaito	Onnistuminen				
Autoimme ja rohkaisimme toisiamme					
Keskustelimme toisemme huomioiden					
Toistimme asioita tarvittaessa					
Keskityimme perusteluihin vastausten sijaan					
Hyödynsimme virheitä oppiaksemme					

Huomautus kotitehtävistä

- Kotitehtävä 2 voi olla melko haastava muodostaa yhtälöksi.
- Oppilaat täyttävät myös ITSEARVIOINNIN.

Kotitehtävä 1 Ratkaise yhtälö ja tarkista vastauksesi.

a) $4a + 3 = 7$ V3MM

$$4a = 4 \quad J4MM$$

$$a = 1$$

Tarkistus $4 \cdot 1 + 3 = 7$

$$4 + 3 = 7$$

$$7 = 7$$

b) $7t - 11 = 3t + 5$ V3tL11MM

$$4t = 16 \quad J4MM$$

$$t = 4$$

Tarkistus $7 \cdot 4 - 11 = 3 \cdot 4 + 5$

$$28 - 11 = 12 + 5$$

$$17 = 17$$

Kotitehtävä 2 Muodosta seuraavaan ongelmaan yhtälö ja ratkaise se:

Pullo ja sen sisältö maksavat yhteensä 4 €. Sisältö maksaa 3 euroa enemmän kuin pullo. Kuinka paljon pullo maksaa?

Ratkaisu: Merkitään pullon hintaa kirjaimella x . Nyt sisällön hinnan voi kirjoittaa lausekkeena $x+3$. Muodostetaan yhtälö, joka kuvaa pullon ja tämän sisällön hintaa

$$x + x + 3 = 4 \quad M$$

$$2x + 3 = 4 \quad V3MM$$

$$2x = 1 \quad J2MM$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Vastaus: Pullo maksaa 0,5 euroa (ts. pullon sisältö maksaa 3,5 euroa).

Itsearviointi (täytetään yksin aina luvun päätteeksi)

EOS = En osaa sanoa

1=Erittäin heikosti

7=Erinomaisesti

Miten hyvin osaat seuraavat asiat

- | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|
| • Lausekkeen ja yhtälön ero | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |
| • Yhtälön tasapaino | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |
| • Tutkia, onko yhtälö tosi/epätosi | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |
| | | | | | | | | |
| • Olen oppinut tunneilla käsitellyt asiat. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |
| • Onnistuin keskittymään perusteluihin vastausten sijaan. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |
| • Onnistun löytämään ja esittämään kysymyksiä. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |
| • Onnistuin kuvailemaan ajatteluani muille. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |
| • Onnistuin hyödyntämään virheitä oppiakseni. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |

Luku 4 Joustava yhtälönratkaisu

Luvussa 4 harjoitellaan lisää yhtälönratkaisua ja keskitytään joustavuuden kehittämiseen erilaisia ratkaisutapoja käyttämällä ja vertailemalla. Ensimmäisessä kappaleessa käydään läpi sulkujen käsittelyä mm. säkkimallin avulla, toisessa ja kolmannessa kappaleessa harjoitellaan erityyppisiä yhtälöitä. Esimerkiksi sulkuyhtälöiden ratkaisu voidaan aloittaa jakamalla yhtälöä aluksi puolittain, mikä voi olla harvinaisempi mutta tehokkaampi ja joustavuutta kehittävä ratkaisumalli. Joustavuuden on todettu olevan yhteydessä ongelmanratkaisutaitojen kehittymiselle.

4.1 Sulkulausekkeet

Oppitunnin viitteellinen rakenne:

- Kertaus ja kotitehtävät (10min)
- Tehtävä 1 (tutkimista ja keskustelua) (15 min)
- Esimerkki 1 (säkkimalli ja geometrinen malli) (10 min)
- Tehtävä 2 (5 min)
- Koonti, ryhmäarviointi ja kotitehtävät (5 min)

Oppitunnin tavoitteet

- Uutena asiana opetellaan sulkeiden avaaminen.
 - o Opitaan ymmärtämään, miten ja miksi sulkuja voidaan aukaista (tai ottaa yhteinen tekijä).
 - o Yhdistetään matemaattinen esitystapa geometriaan ja ”säkkeihin”.
- Jatketaan yhtälönratkaisua, nyt sulut mukana yhtälöissä.
- Huomataan yhtäläisyyksiä ja eroavaisuuksia eri ratkaisutavoissa.
- Opetellaan suhtautumaan myönteisesti virheisiin ja oppimaan niistä.
-

Toimintaohje: Anna myönteistä huomiota virheille!

Tehtävän 1 toteutus

- Opettaja valitsee kullekin ryhmälle 2-3 saraketta (muuttujan arvoa). Selvitettyään ratkaisut, ryhmät käyvät täydentämässä taululla olevaan taulukkoon (**Opettajan ohjeistamana**) jonkin muuttujan sarakkeen (**pelkkä ratkaisu tähän riittää**).

Tehtävä 1 Täydennä oheista taulukkoa laskemalla lausekkeiden arvot eri muuttujan arvoilla.

	$x = 3$	$x = 5$	$x = -1$	$x = 10$	$x = \frac{1}{4}$	$x = -\frac{5}{3}$
$4(x + 3)$	24	32	8	52	13	$\frac{16}{3}$
$4x + 12$	24	32	8	52	13	$\frac{16}{3}$
$4x + 3$	15	23	-1	43	4	$-\frac{11}{3}$
$4 + x + 3$	10	12	6	17	$\frac{29}{4}$	$\frac{16}{3}$

Pohdittavaa

Mitä eroa huomaat eri lausekkeiden välillä, kun niihin sijoitetaan sama muuttujan arvo?

Kahdella ensimmäisellä rivillä lausekkeen arvot ovat aina samat riippumatta muuttujan lukuarvosta.

Johtopäätökset

Lausekkeet $4(x + 3)$ ja $4x + 12$ ovat yhtäpitäviä keskenään, sillä niiden arvo on aina sama riippumatta siitä, mikä muuttujan arvo on.

Tehtävä 1 koonti:

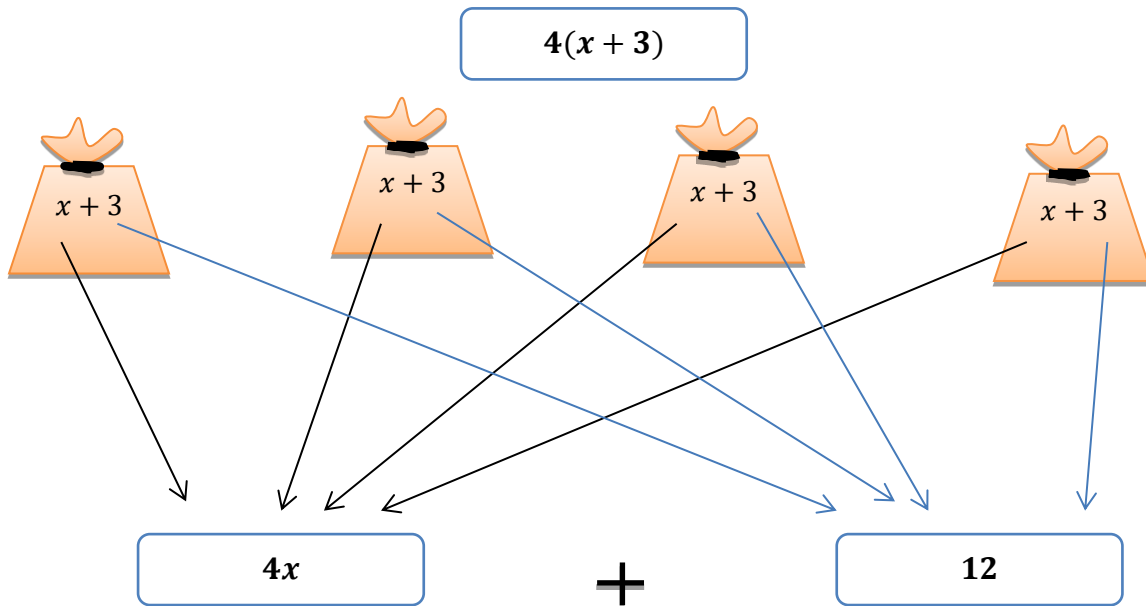
- Opettaja tarkistaa, ovatko ratkaisut oikein. Tärkein huomio on kuitenkin kysyä, **huomaavatko oppilaat mitään erikoista ratkaisuisissa?** Ensimmäisellä ja toisella rivillä on aina sama ratkaisu, riippumatta muuttujan arvosta. Kolmannen ja neljännen rivien arvot poikkeavat ensimmäisen ja toisen rivin arvoista, vaikka hieman muistuttavatkin ensimmäisen ja toisen rivin lausekkeita. (**Huom!** neljännen rivin yhtälö saa saman arvon kuin ensimmäisen ja toisen rivin lauseke, muuttujan arvolla $x = -\frac{5}{3}$.)
- **Kirjoitetaan seuraava ylös:** $4(x + 3) = 4x + 4 \cdot 3 = 4x + 12$ (Sulkujen purkaminen esitettynä tehtävän numeroilla, **tähän voi piirtää nuolia** selkeyttämään, millä kerrotaan mitään)
- Johtopäätökset toimivat johdantona siihen, miten sulut puretaan. Samalla tulee pohdittua, mitä yhtäpitävät lausekkeet tarkoittavat **ja aletaan tarkastella sulkulausekkeiden esitystapoja esimerkin 1 avulla.**

Lisätieto:

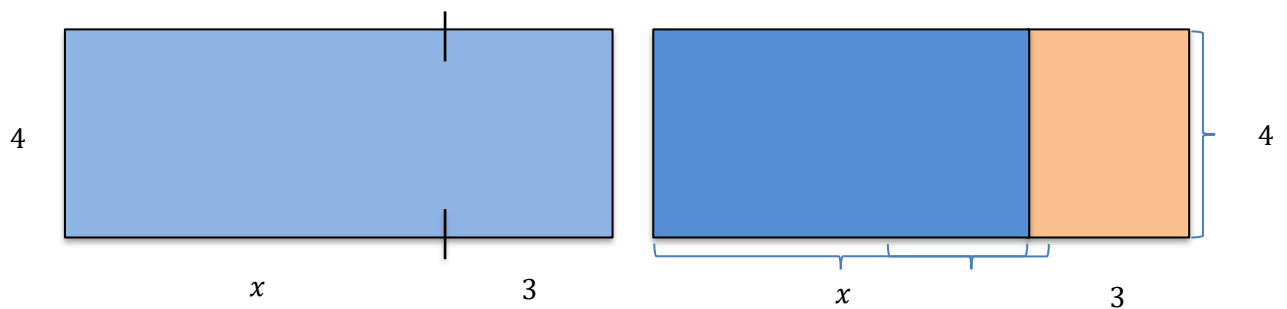
- Kaavamainen esitys sulkujen purkamiselle, jonka voi opettaja halutessaan tuoda esille: $a(b + c) = ab + ac$ missä a, b ja c ovat termejä (voivat olla myös vakioita).
- (Tyypillinen virheellinen tapa olisi avata sulkeet siten että $4(x + 3) = 4x + 3$)

Esimerkki 1 (Sulkulausekkeiden esitystapoja)

Tapa 1 (Säkkimalli)



Tapa 2 (Geometrinen malli)



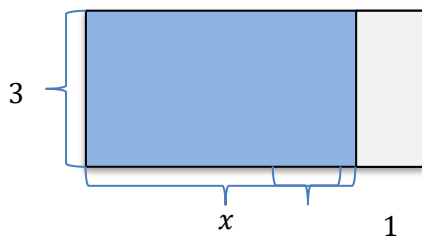
Pinta-ala: $4(x + 3)$

Pinta-ala: $4x + 4 \cdot 3$

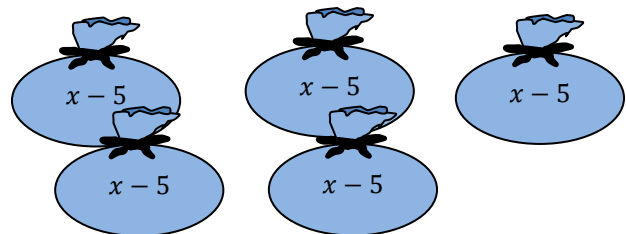
Koska nämä ovat saman suorakulmion pinta-alat, voidaan ne merkitä yhtä suuriksi: $4(x + 3) = 4x + 4 \cdot 3 = 4x + 12$.

Tehtävä 2 Piirrä lausekkeista

a) $3(1 + x)$ geometrinen malli



b) $5(x - 5)$ säkkimalli



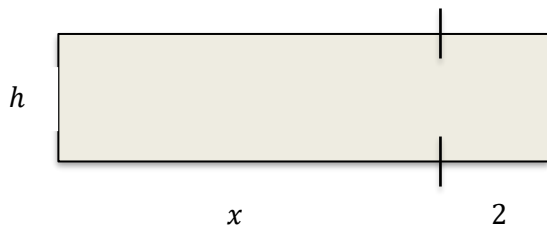
Kirjoita lopuksi a) ja b) kohtien lausekkeet ilman sulkuja.

a) $3(1 + x)$
 $= 3 \cdot 1 + 3 \cdot x$
 $= 3 + 3x$

b) $5(x - 5)$
 $= 5 \cdot x + 5 \cdot (-5)$
 $= 5x - 25$

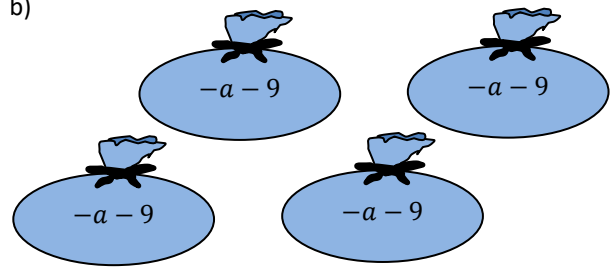
Jokeri 3 Kirjoita a) kohdan pinta-alasta ja b) kohdan säikeistä lauseke sulkujen kanssa ja lauseke ilman sulkuja.

a)



a) $h(x + 2) = hx + 2h$

b)



b) $4(-a - 9) = -4a - 36$

Jokeri 4 Kirjoita ilman sulkuja: $a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
 $= ab + ac$

Jokeri 5 Kirjoita seuraavat lausekkeet sulkujen kanssa

a) $x + 2 + x + 2 + x + 2$

$= (x + 2) + (x + 2) + (x + 2)$

$= 3(x + 2)$

b) $3a + 3$

$= 3(a + 1)$

c) $2y - 2 + y - 1$

$= 2(y - 1) + y - 1$

$= (2 + 1)(y - 1)$

$= 3(y - 1)$

RYHMÄARVIOINTI (ryhmätaidot selitetty tarkemmin sivulla 2)

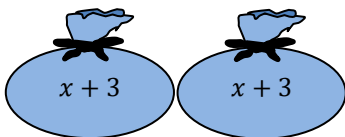
Ryhmätaito	Onnistuminen				
Autoimme ja rohkaisimme toisiamme					
Keskustelimme toisemme huomioiden					
Toistimme asioita tarvittaessa					
Keskityimme perusteluihin vastausten sijaan					
Hyödynsimme virheitä oppiaksemme					

Kotitehtävä 1 Piirrä säkkimallit seuraavista lausekkeista ja kirjoita lausekkeet ilman sulkuja

a) $2(x + 3)$

$= 2 \cdot x + 2 \cdot 3$

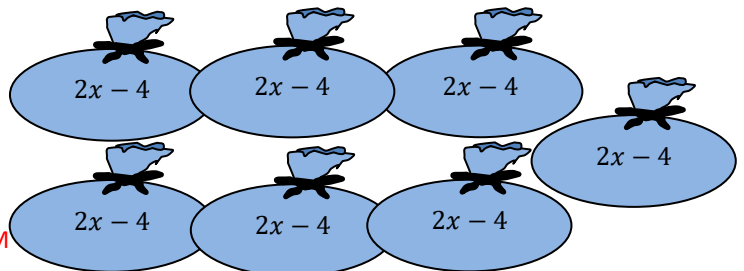
$= 2x + 6$



b) $7(2x - 4)$

$= 7 \cdot 2x + 7 \cdot (-4)$

$= 14x - 28$



Kotitehtävä 2 Ratkaise yhtälö $12x - (5x - 2) = 23$.

$12x - (5x - 2) = 23$

$12x - 5x + 2 = 23$

$7x = 21$

$x = 3$

M

V2MM

J7MM

4.2 Sulkuyhtälöt ja joustavuus

Oppitunnin rakenne:

- Kertaus ja kotitehtävät (5 min)
- Esimerkki 1 (10 min)
- Tehtävät (25min)
- Koonti ja ryhmäarviointi (5 min)

Oppitunnin tavoitteet

- Analysoidaan ja tuotetaan useita ratkaisutapoja samoille yhtälöille.
- Löydetään itselle helpoin tapa ratkaista yhtälö ja kehitetään samalla omia sekä yhtälönratkaisu-, että ongelmanratkaisutaitoja.

Toimintaohje: Aiemmin on totuttu vertailemaan useampaa ratkaisutapaa rinnakkain. Nyt vertailun lisäksi aletaan harjoitella itsenäisesti tuottamaan useampi ratkaisutapa samalle yhtälölle. Tällä vahvistetaan oppilaan käsitystä omista taidoista ratkaista yhtälöitä ja annetaan käyttää omaa luovuutta ja kekseliäisyyttä erilaisten tapojen luomisessa esitettyjä malleja apuna käyttäen.

Esimerkki 1 Kalle ja Leena ovat ratkaisseet yhtälön $3(x + 2) = 15$ seuraavilla tavoilla:

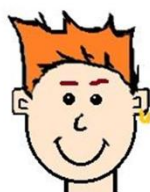
	Kallen ratkaisu	Leenan ratkaisu	
Ensin kerroin vasemman puolen sulkeet auki.	$3(x + 2) = 15$	$3(x + 2) = 15$	Ensin jaoin yhtälön puolittain luvulla 3
Seuraavaksi vähensin luvun 6 molemmilta puolilta	$3x + 6 = 15$	$\frac{3(x + 2)}{3} = \frac{15}{3}$	Seuraavaksi vähensin luvun 2 molemmilta puolilta
Lopuksi jaoin molemmat puolet luvulla 3	$3x + 6 - 6 = 15 - 6$	$x + 2 = 5$	Vastaukseni on $x = 3$
Sain vastaukseksi $x = 3$	$3x = 9$	$x + 2 - 2 = 5 - 2$	
	$\frac{3x}{3} = \frac{9}{3}$	$x = 3$	
	$x = 3$		

a) Kuinka Kalle ratkaisi yhtälön? Entä Leena? Ovatko he päätyneet oikeaan ratkaisuun? Mistä tiedät tämän?

b) Huomaatko yhtäläisyyksiä Kallen ja Leenan ratkaisuissa?

c) Kumpaa tapaa itse käyttäisit kyseisen yhtälön ratkaisuun?

d) Jos yhtälö olisi muotoa $3(x + 2) = 17$, kumpi ratkaisutavoista olisi parempi, miksi?



Ensin kerroin vasemman puolen sulkeet auki.	Kallen ratkaisu	Leenan ratkaisu	Ensin jaoin yhtälön puolittain luvulla 3
Seuraavaksi vähensin luvun 6 molemmilta puolilta	$3(x + 2) = 17$	$3(x + 2) = 17$	
	$3x + 6 = 17$	$\frac{3(x + 2)}{3} = \frac{17}{3}$	
Lopuksi jaoin molemmat puolet luvulla 3 ja sievensin jakolaskut	$3x + 6 - 6 = 17 - 6$	$x + 2 = \frac{17}{3}$	Seuraavaksi vähensin luvun 2 molemmilta puolilta
	$3x = 11$	$x + 2 - 2 = \frac{17}{3} - 2$	Lavensin samannimisiksi.
Sain ratkaisuksi $x = \frac{11}{3}$	$\frac{3x}{3} = \frac{11}{3}$	$x = \frac{17}{3} - \frac{6}{3}$	
	$x = \frac{11}{3}$	$x = \frac{11}{3}$	Sain ratkaisuksi $x = \frac{11}{3}$

a) Ratkaisun eteneminen on luettavissa puhekuplista, eikä laskuvirheitä ole tullut. Tarkistetaan sijoittamalla saatu vastaus alkuperäiseen yhtälöön.

$$3(3 + 2) = 15$$

$$3 \cdot 5 = 15$$

$$15 = 15$$

b) Kumpikin on jossain vaiheessa jakanut yhtälöä puolittain luvulla 3. Molemmat ovat vähentäneet puolittain jonkun luvun (ei kuitenkaan samaa lukua) ja he ovat päätyneet samaan vastaukseen.

c) Kallen ratkaisutapa, koska Leenan tavalla oikealle puolelle tulee puolittain jakamisen jälkeen murtoluku. Tämä ei ole ongelma, mutta joudutaan varhaisessa vaiheessa pyörittelemään murtolukuja, kun Kallen ratkaisutavalla murtoluvut syntyvät vasta aivan lopussa.

Huomioita Esimerkistä 1 opettajalle:

- Jos Leenan ratkaisu tuntuu vaikealta ymmärtää, voi opettaja esittää tilanteen yhtälön $3y = 15$ avulla. Tämän yhtälön esittämällä voi joillekin oppilaille selkeytyä, miksi luvulla 3 jakaminen on nyt mahdollista ensimmäisenä. Tässä muuttujalla y on korvattu lauseke $x + 2$.
- Opettaja kertoo, milloin kyseistä joustavaa lähestymistapaa kannattaa hyödyntää yhtälöitä ratkaistaessa. (Kun $a(x + b) = c$, niin kannattaa jakaa ensin puolittain a :lla, jos c on jaollinen a :lla. Muulloin oikealle puolelle tulee puolittain jakamisen jälkeen murtoluku. Verrataan tilanteeseen, jossa ratkaisutavat ovat pysyneet samoina, mutta yhtälö on muotoa $3(x + 2) = 17$.)
- **Vertailun hyödyllisyydestä**, jotta oppilaille voidaan kertoa miksi tätä tapaa käytetään.
 - Tehtävät voidaan ratkaista eri tavoilla eli ratkaisuun voidaan päästä useita eri lähestymistapoja käyttäen.
 - Eri ratkaisutavoilla pitää tulla sama ratkaisu, jos tehtävä on ratkaistu oikein. Useita ratkaisutapoja voidaan käyttää apuna tarkistamisessa.
 - Vertailemalla rinnakkain eri ratkaisutapoja oppii näkemään yhteyksiä erilaisten tehtävien ja matemaattisten käsitteiden välillä.

Tehtävä 1 Ratkaise yhtälöt kahdella eri tavalla.

a) $5(t + 2) = 11$

$$\begin{aligned} 5(t + 2) &= 11 & \text{M} \\ 5 \cdot t + 5 \cdot 2 &= 11 & \text{M} \\ 5t + 10 &= 11 & \text{V10MM} \\ 5t &= 1 & \text{J5MM} \\ t &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5(t + 2) &= 11 & \text{J5} \\ \frac{5(t+2)}{5} &= \frac{11}{5} & \text{M} \\ t + 2 &= \frac{11}{5} & \text{V2} \\ t + 2 - 2 &= \frac{11}{5} - \frac{10}{5} & \text{MM} \\ t &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

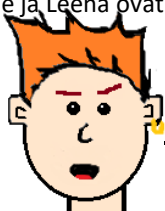
b) $5(t + 2) = 10$.

$$\begin{aligned} 5(t + 2) &= 10 & \text{J5MM} \\ t + 2 &= 2 & \text{V2MM} \\ t &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5(t + 2) &= 10 & \text{M} \\ 5t + 10 &= 10 & \text{V10 M} \\ 5t &= 0 & \text{J5 M} \\ t &= 0 \end{aligned}$$

Tehtävässä 2 Kalle ja Leena ovat ratkaisseet yhtälöt ja toinen on tehnyt virheen. Tutustutaan joustavaan tapaan ratkaista yhtälöitä ja alustavasti seuraavan tunnin aiheeseen.

Tehtävä 2 Kalle ja Leena ovat ratkaisseet yhtälön $5(a + 3) = 20$ seuraavilla tavoilla:



Kallen ratkaisu

$$\begin{aligned} 5(a + 3) &= 20 \\ \frac{5(a + 3)}{5} &= \frac{20}{5} \\ a + 3 &= 4 \\ a + 3 - 3 &= 4 - 3 \\ a &= 1 \end{aligned}$$

Leenan ratkaisu

$$\begin{aligned} 5(a + 3) &= 20 \\ 5(a + 3) - 3 &= 20 - 3 \\ 5a &= 17 \\ \frac{5a}{5} &= \frac{17}{5} \\ a &= \frac{17}{5} \end{aligned}$$



Ensin jaoin yhtälön puolittain luvulla 5

Lopuksi vähensin luvun 3 molemmilta puolilta

Sain ratkaisuksi $a = 1$

Ensin vähensin luvun 3 molemmilta puolilta.

Lopuksi jaoin molemmat puolet luvulla 5

Sain ratkaisuksi $a = \frac{17}{5}$

- Kerro, mitä Kalle ja Leena ovat tehneet ratkaistessaan yhtälön $5(a + 3) = 20$. Kumpi ratkaisi oikein? *Kalle.*
Leena laski virheellisesti $5(a + 3) - 3 = 5a$, sillä sulut olisi pitänyt kertoa auki ennen termien yhdistämistä.
- Ympyröi virheellisestä ratkaisusta kohta, jossa virhe on tapahtunut.
- Muotoile omin sanoin lyhyt ohje, miten kyseisen virheen voi yhtälöä ratkaistaessa välttää.

Sulut olisi pitänyt purkaa auki ennen vähennyslaskun suorittamista.

Tehtävä 3 Tarkastele Jessican ja Mintun ratkaisutapoja yhtälölle $4(t - 1) + 3(t - 1) = 35$.

a) **Jessican** ratkaisutapa. Täydennä vaiheet tyhjille viivoille esimerkin avulla.

$4(t - 1) + 3(t - 1) = 35$	Ensin <u>avasin vasemmalla puolella yhtälöä olevat sulut</u> .
$4t - 4 + 3t - 3 = 35$	Lasken <u>4t</u> ja <u>3t</u> yhteen sekä <u>-4</u> ja <u>-3</u> yhteen.
$7t - 7 = 35$	<u>Vähennän</u> luvun 7 puolittain
$7t = 42$	Jaan luvulla <u>7</u> puolittain ja sievennän jakolaskut
$t = 6$	

b) **Mintun** ratkaisutapa. Täydennä vaiheet tyhjille viivoille.

$4(t - 1) + 3(t - 1) = 35$	Lasken <u>4(t - 1)</u> ja <u>3(t - 1)</u> yhteen.
$7(t - 1) = 35$	<u>Jaan</u> luvulla 7 puolittain.
$t - 1 = 5$	Lisään luvun <u>1</u> puolittain.
$t = 6$	

c) **Pohdi**

- Mitä eroa Jessican ja Mintun ratkaisutavoilla on? *Jessica on aluksi kertonut sulkeet auki, kun Minttu ei missään vaiheessa yhtälönratkaisua kertonut sulkeita auki. Mintun ratkaisutapa on lyhyempi kuin Jessican ratkaisutapa.*
- Jos pitäisi ratkaista yhtälö $4(y + 5) + 6(y + 4) + 5(y + 2) = 45$, kumman ratkaisutapaa käyttäisit? Ympyröi ratkaisusi;

Jessican

Mintun
- Perustelu valintaasi: *Sulkujen sisällä ei ole sama lauseke, joten niitä ei voi yhdistää. Siksi aluksi kerrotaan vasemmalla puolella kaikki sulut auki ja lähdetään Mintun tavalla ratkaisemaan yhtälöä eteenpäin.*

Tehtävä 4 Ratkaise yhtälö $4(y + 4) + 6(y + 4) + 5(y + 4) = 45$ valitsemallasi ratkaisutavalla.

Mintun tavalla:

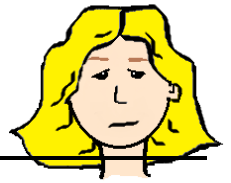
Jessican tavalla:

$4(y + 4) + 6(y + 4) + 5(y + 4) = 45$	M	$4(y + 4) + 6(y + 4) + 5(y + 4) = 45$	M
$15(y + 4) = 45$	J15 M M	$4y + 16 + 6y + 24 + 5y + 20 = 45$	M
$y + 4 = 3$	V4 M M	$15y + 60 = 45$	V60 M M
$y = -1$		$15y = -15$	J15 M M
		$y = -1$	

Jokeri 5 Ratkaise yhtälö $4(t + 1) + 3(t + 2) = 7$.

$4(t + 1) + 3(t + 2) = 7$	M
$4t + 4 + 3t + 6 = 7$	M
$7t + 10 = 7$	V10 M M
$7t = -3$	J7 M M
$t = -\frac{3}{7}$	

Jokeri 6 Kalle ja Leena ovat ratkaisseet yhtälön $2(m + 3) = -4(m + 3) + 12$ seuraavilla tavoilla:



Kallen ratkaisu	Leenan ratkaisu
$2(m + 3) = -4(m + 3) + 12$	$2(m + 3) = -4(m + 3) + 12$
	$+4(m + 3)$
$2m + 6 = -4m + (-12) + 12$	$2(m + 3) + 4(m + 3) = -4(m + 3) + 4(m + 3) + 12$
$2m + 6 = -4m$	$6(m + 3) = 12$
$2m - 2m + 6 = -4m - 2m$	$\frac{6(m + 3)}{6} = \frac{12}{6}$
$6 = -6m$	$m + 3 = 2$
$\frac{6}{-6} = \frac{-6m}{-6}$	$m + 3 - 3 = 2 - 3$
$-1 = m$	$m = -1$



a) Mitä Kalle on tehnyt yhtälölle ensimmäisenä? Entä Leena? *Kalle on aluksi kertonut sulkulausekkeet auki yhtälön vasemmalla ja oikealla puolella. Leena on aluksi lisännyt molemmille puolille termin $4(m + 3)$.*

b) Merkitse Kallen ja Leenan ratkaisuihin käytetyt muunnokset lyhenteillä näkyville. (Mallina Leenan ratkaisussa toinen käytetty muunnos).

c) Ovatko Kalle ja Leena päätyneet oikeaan ratkaisuun? Mistä tiedät tämän? (Laita tarkistus perusteluksi alle)

$$\begin{aligned} 2(-1 + 3) &= -4(-1 + 3) + 12 \\ -2 + 6 &= 4 - 12 + 12 \\ 4 &= 4 \end{aligned}$$

Kalle ja Leena ovat päätyneet oikeaan ratkaisuun.

d) Kumpaa ratkaisutavoista (Kallen vai Leenan) itse käyttäisit? Perustele. *Käytän Leenan tapaa, koska yhtälön molemmilla puolilla on sellaiset sulkulausekkeet, joissa sulkujen sisältö on sama. Yhtälö sievenee nopeammin, kun aluksi lisää sopivasti puolittain sulkulausekkeen, jotta toiselta puolelta saadaan sulkulausekkeet kokonaan pois.*

RYHMÄARVIOINTI (ryhmätaidot selitetty tarkemmin sivulla 2)

Ryhmätaito	Onnistuminen				
Autoimme ja rohkaisimme toisiamme					
Keskustelimme toisemme huomioiden					
Toistimme asioita tarvittaessa					
Keskityimme perusteluihin vastausten sijaan					
Hyödynsimme virheitä oppiaksemme					

Kotitehtävä 1 Kirjoita, ensimmäinen muunnos seuraavien yhtälöiden ratkaisussa. Sinun **EI TARVITSE** siis ratkaista yhtälöä loppuun. Yritä löytää myös toinen tapa lähteä liikkeelle.

a) $2(y + 6) + 3(y + 6) = 25$		b) $9 = 3(t - 3) + 2(2t - 3) + 7(t - 3)$		c) $6 = 3(t - 3)$	
Tapa 1	M	Tapa 1	M	Tapa 1	J3 M M
$5(y + 6) = 25$		$9 = 12(t - 3)$		$2 = t - 3$	
Tapa 2	M	Tapa 2	M	Tapa 2	M
$2y + 12 + 3y + 18 = 25$		$9 = 3t - 9 + 4t - 6 + 7t - 21$		$6 = 3t - 9$	

Kotitehtävä 2 Ratkaise yhtälö kahdella eri tavalla $-12(5y + 2) = 24$

Tavalla 1:

$$\begin{aligned}
 -12(5y + 2) &= 24 && \text{J -12 M M} \\
 5y + 2 &= -2 && \text{V2 M M} \\
 5y &= -4 && \text{J5 M M} \\
 y &= -\frac{4}{5}
 \end{aligned}$$

Tavalla 2:

$$\begin{aligned}
 -12(5y + 2) &= 24 && \text{M} \\
 -60y - 24 &= 24 && \text{L24 M M} \\
 -60y &= 48 && \text{J -60 M M} \\
 y &= -\frac{48}{60} && \text{M} \\
 y &= -\frac{4}{5}
 \end{aligned}$$

4.3 Lisää joustavia yhtälöitä

Oppitunnin viitteellinen rakenne:

- Kertaus ja kotitehtävät (10min)
- Esimerkki 1 (10 min)
- Tehtävät (20 min)
- Koonti ja ryhmäarviointi (5 min)

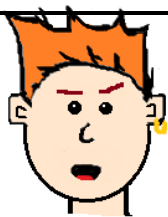
Oppitunnin tavoitteet

- Analysoidaan lisää erilaisia ratkaisutapoja samalle yhtälölle.
- Ratkaistaan erilaisia yhtälöitä.
- Kehitetään joustavuutta.

Toimintaohje: Tunnilla jatketaan yhtälöiden ratkaisemista ja erilaisten ratkaisutapojen vertailua. Mukaan otetaan murtoyhtälöt ja käydään läpi esimerkki ja haetaan niistä mallia joustavaan ja helpompiin tapoihin ratkaista monimutkaisempia yhtälöitä. Monipuolisuutta erilaisille ratkaisutavoille tuodaan lisäämällä yhtälölle kolmas erilainen ratkaisutapa vertailutehtäviin Miian ratkaisutavan avulla. Näin luodaan esimerkkejä erilaisten yhtälöiden ratkaisulle ja annetaan vinkkejä oppilaille rohkeasti kokeilla ja luoda omia erilaisia ratkaisutapoja.

Esimerkki 1 Kalle ja Leena ovat ratkaisseet yhtälön $\frac{x}{4} - \frac{x}{5} = -2$ seuraavilla tavoilla:

	Kallen ratkaisu	Leenan ratkaisu	
Kerron yhtälöä puolittain luvulla 20, joka on nimittäjien pienin yhteinen jaettava	$\frac{x}{4} - \frac{x}{5} = -2$	$\frac{x}{4} - \frac{x}{5} = -2$	Aluksi lavennan murtoluvut vasemmalla puolella, että niillä on yhteinen nimittäjä.
Tämän jälkeen sievensin yhtälön vasenta ja oikeaa puolta.	$20 \cdot \left(\frac{x}{4} - \frac{x}{5}\right) = -2 \cdot 20$	$\frac{5x}{20} - \frac{4x}{20} = -2$	Lasken vähennyslaskun vasemmalla puolella.
Lopuksi vielä laskin vasemmalla puolella yhteen $5x$ ja $-4x$.	$\frac{20x}{4} - \frac{20x}{5} = -40$	$\frac{x}{20} = -2$	Kerron yhtälöä puolittain luvulla 20.
	$5x - 4x = -40$	$20 \cdot \frac{x}{20} = -2 \cdot 20$	Sain ratkaisuksi $x = -40$
	$x = -40$	$x = -40$	



- Miksi Kalle kertoi yhtälöä aluksi luvulla 20? *Kalle kertoi luvulla 20, jotta pääsisi eroon vasemman puolen murtoluvuista, joiden nimittäjänä on 4 ja 5. Luku 20 on jaollinen sekä luvulla 4, että luvulla 5, joten vasen puoli saadaan sievennettyä muotoon, jossa ei ole murtolukuja.*
- Miksi Leena lavensi murtoluvut vasemmalla puolella ensimmäiseksi? *Leena lavensi murtoluvut ensin, jotta murtoluvut voitaisiin laskea yhteen yhtälön vasemmalla puolella. Jos murtoluvulla ei ole yhteinen nimittäjä, ei niiden välistä yhteen- tai vähennyslaskua voi suorittaa.*

- c) Mitä yhtäläisyyksiä ja eroavaisuuksia huomaat Kallen ja Leenan ratkaisutavassa? *Yhtäläisyyksiä on mm. sama ratkaisu ja molemmat kertovat luvulla 20 yhtälöä, jossain vaiheessa omaa ratkaisuaan. Eroavaisuuksia on mm., että Leena lavensi murtolukuja, kun taas Kalle ei. Kalle lähti ratkaisemaan yhtälöä kertomalla ensin.*

- d) Ovatko Kalle ja Leena päätyneet oikeaan ratkaisuun? Mistä tiedät tämän? (Kirjoita tarkistus perusteluksi alle) *Sijoitetaan saatu vastaus alkuperäiseen yhtälöön ja tarkistetaan näin vastaus.*

$$\begin{aligned}\frac{-40}{4} - \frac{-40}{5} &= -2 \\ -10 - (-8) &= -2 \\ -2 &= -2\end{aligned}$$

Kalle ja Leena ovat päätyneet oikeaan ratkaisuun.

- e) Kumpi ratkaisutavoista (Kallen vai Leenan) on mielestäsi yksinkertaisempi? Perustele.

Kallen tapa toimii, koska yhteisen jaettavan päättelyminen ei ole liian vaikeaa. Toisaalta Leenan tapa on varmempi ja palauttaa mieleen murtoluvuilla laskemisen sääntöjä.

Tehtävä 1 Kalle ja Leena ovat ratkaisseet yhtälön $\frac{1}{4}(x + 3) = 2$ seuraavilla tavoilla:

Ensin kerroin sulkeet auki.

Seuraavaksi vähensin molemmilta puolilta $\frac{3}{4}$.

Lopuksi kerroin molemmilta puolilta luvulla 4 ja sain ratkaisuni.



Kallen ratkaisu	Leenan ratkaisu
$\frac{1}{4}(x + 3) = 2$	$\frac{1}{4}(x + 3) = 2$
$\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} = 2$	$4 \cdot \frac{1}{4}(x + 3) = 2 \cdot 4$
$\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 2 - \frac{3}{4}$	$x + 3 = 8$
$\frac{1}{4}x = \frac{8}{4} - \frac{3}{4}$	$x + 3 - 3 = 8 - 3$
$\frac{1}{4}x = \frac{5}{4}$	$x = 5$
$4 \cdot \frac{1}{4}x = \frac{5}{4} \cdot 4$	
$x = 5$	

Ensiksi kerroin yhtälöä molemmin puolin luvulla 4.

Sitten vähensin luvun 3 molemmilta puolilta.

Tässä on ratkaisuni.



- a) Mitä yhtäläisyyksiä ja eroavaisuuksia huomaat Kallen ja Leenan ratkaisutavassa? *Yhtäläisyyksiä on, että molemmat ovat kertoneet yhtälöä puolittain luvulla 4 (jossain vaiheessa yhtälön ratkaisua) ja päätyneet samaan ratkaisuun. Eroavaisuutena Leena ei ole kertonut sulkeita auki ja kumpikin vähentänyt puolittain yhtälöstä eri luvun, jossain vaiheessa yhtälön ratkaisua.*

- b) Ovatko Kalle ja Leena päätyneet oikeaan ratkaisuun? Mistä tiedät tämän? (Kirjoita tarkistus perusteluksi alle) *Kyllä ovat. Sijoitetaan saatu vastaus alkuperäiseen yhtälöön.*

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}(5 + 3) &= 2 \\ \frac{1}{4} \cdot 8 &= 2 \\ 2 &= 2\end{aligned}$$

- c) Kumpi ratkaisutavoista (Kallen vai Leenan) on mielestäsi soveltuvampi tälle yhtälölle? Perustele.

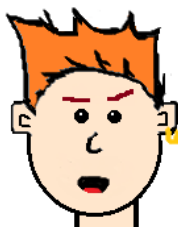
Esim. Leenan ratkaisutapa, koska siinä ei tarvitse laskea murtoluvuilla. Leenan tavassa sulkujen murtolukukerrointa kerrotaan sopivasti, jotta sulkujen kerroin on luku 1 eli sulkujen kertomiselta aukei välttyään myös.

Tehtävä 2 Ratkaise seuraavat yhtälöt

a)	$\frac{y}{3} + \frac{y}{4} = 20$	K12	b)	$\frac{3x+6}{3} + \frac{24+12x}{4} = 8$	M
	$12 \cdot \left(\frac{y}{3} + \frac{y}{4}\right) = 20 \cdot 12$	M M		$x + 2 + 6 + 3x = 8$	M
	$\frac{12y}{3} + \frac{12y}{4} = 240$	M		$4x + 8 = 8$	V8 M M
	$4y + 3y = 240$	M		$4x = 0$	J4 M M
	$7y = 240$	J7 M M		$x = 0$	
	$y = \frac{240}{7}$				
c)	$3(h+1) = 6(h+1)$	J3 M M	d)	$e^{-i\omega t} - 1 = e^{-i\omega t} + 4$	$\vee e^{-i\omega t}$ M M
	$h+1 = 2(h+1)$	M		$-1 = 4t$	J4 M M
	$h+1 = 2h+2$	Vh M M		$-\frac{1}{4} = t$	
	$1 = h+2$	V2 M M			
	$-1 = h$				

Tehtävä 3 Kalle, Leena ja Miia ovat ratkaisseet yhtälön $\frac{t}{3} - 1 = 12$ seuraavilla tavoilla:

Kallen ratkaisu	Leenan ratkaisu	Miian ratkaisu
$\frac{t}{3} - 1 = 12$	$\frac{t}{3} - 1 = 12$	$\frac{t}{3} - 1 = 12$
L1	M	K3
$\frac{t}{3} - 1 + 1 = 12 + 1$	$\frac{t}{3} - \frac{3}{3} = 12$	$3 \cdot (\frac{t}{3} - 1) = 12 \cdot 3$
M M	M	M M
$\frac{t}{3} = 13$	$\frac{t-3}{3} = 12$	$\frac{3t}{3} - 3 = 36$
K3	K3	M
$3 \cdot \frac{t}{3} = 13 \cdot 3$	$3 \cdot \frac{t-3}{3} = 12 \cdot 3$	$t - 3 = 36$
M M	M M	L3
$t = 39$	$t - 3 = 36$	$t - 3 + 3 = 36 + 3$
	L3	M M
	$t - 3 + 3 = 36 + 3$	$t = 39$
	M M	
	$t = 39$	



- Mitä yhtäläisyyksiä ja eroavaisuuksia huomaat Kallen, Leenan ja Miian ratkaisuissa? *Kaikki ovat päätyneet samaan vastaukseen ja kertoneet jossain vaiheessa yhtälönratkaisua yhtälöään puolittain luvulla 3. Kaikilla on erilainen ratkaisutapa yhtälölle, joka vaikuttaa välivaiheiden lukumäärään ennen vastausta.*
- Mitä ratkaisutapaa käyttäisit tälle yhtälölle? Miksi? *Ei väärää vastausta, jokainen käyttää itselle sopivinta tapaa, jonka ymmärtää.*
- Kirjoita Kallen, Leenan ja Miian käyttämien muunnosten lyhenteet ratkaisujen viereen näkyville.

Jokeri 4 Kalle ja Leena ovat ratkaisseet yhtälön $2t - (2 + 3t) = -4t$ seuraavilla tavoilla:

	Kallen ratkaisu	Leenan ratkaisu	
Vähennän molemmilta puolilta $2t$ ja sievennän.	$2t - (2 + 3t) = -4t$	$2t - (2 + 3t) = -4t$	Ensin avasin sulkeet vasemmalla puolella.
Kerron yhtälöä puolittain luvulla -1	$2t - 2t - (2 + 3t) = -4t - 2t$	$2t - 2 - 3t = -4t$	Sievennän yhtälön vasenta puolta laskemalla laskut.
Vähennän molemmilta puolilta $3t$.	$-(2 + 3t) = -6t$	$-t - 2 = -4t$	Lisään molemmille puolille t ja sievennän.
Lopuksi jaan yhtälöä puolittain luvulla 3 , ratkaisuni yhtälölle on $\frac{2}{3} = t$.	$-(2 + 3t) \cdot (-1) = -6t \cdot (-1)$ $2 + 3t = 6t$ $2 + 3t - 3t = 6t - 3t$ $2 = 3t$ $\frac{2}{3} = \frac{3t}{3}$ $\frac{2}{3} = t$	$-t + t - 2 = -4t + t$ $-2 = -3t$ $\frac{-2}{-3} = \frac{-3t}{-3}$ $\frac{2}{3} = t$	Lopuksi jaan puolittain luvulla -3 ja sain vastaukseksi $t = \frac{2}{3}$.



- a) Mitä yhtäläisyyksiä ja eroavaisuuksia huomaat Kallen ja Leenan ratkaisuisissa? *Yhtäläisyytenä; molemmat ovat käyttäneet muunnoksia ratkaistessaan yhtälöä oikein ja päätyneet täten samaan ratkaisuun. Eroavaisuutena ovat erilaiset ratkaisutavat alussa suluista eroon pääsemiseksi.*
- b) Mitä hyötyjä Kallen ratkaisutavassa on? Entä Leenan? *Leenan ratkaisutavassa sulu on avattu kertomalla sulkujen sisältö näiden edessä olevalla luvulla (joka tässä tapauksessa on -1). Kalle välttää sulkujen avaamisen ja mahdollisen merkkivirheen syntymisen, kun hän kertoo yhtälöä (rivillä 4) puolittain -1 , jolloin sulkujen eteen jää positiivinen luku 1 ja sulu voi jättää pois.*
- c) Miten itse ratkaisisit kyseisen yhtälön? Perustele.

Jokeri 5 Ratkaise seuraavat yhtälöt

a) $7 = \frac{4y}{3}$ K 3

$3 \cdot 7 = \frac{4y}{3} \cdot 3$ M M

$21 = 4y$ J4 M M

$\frac{21}{4} = y$

b) $\frac{2x}{3} - 1 = 4x + \frac{1}{2}$ K6

$6\left(\frac{2x}{3} - 1\right) = 6\left(4x + \frac{1}{2}\right)$ M M

$\frac{12x}{3} - 6 = 24x + \frac{6}{2}$ M M

$4x - 6 = 24x + 3$ V4x M M

$-6 = 20x + 3$ V3 M M

$-9 = 20x$ J20 M M

$-\frac{9}{20} = x$

c) $-a = \frac{a(x+1)}{2}$ K2

$$2(x-a) = \frac{2a(x+1)}{2} \quad \text{MM}$$

$$2x - 2a = ax + a \quad \text{Vax MM}$$

$$2x - ax - 2a = a \quad \text{L2 MM}$$

$$2x - ax = a + 2a \quad \text{MM}$$

$$x(2-a) = 3a \quad \text{J}(2-a) \text{ MM}$$

$$x = \frac{3a}{2-a}$$

d) $3(h+1) = 6(h+2)$ J3 M M

$$h+1 = 3(h+2) \quad \text{M}$$

$$h+1 = 3h+6 \quad \text{Vh MM}$$

$$1 = 2h+6 \quad \text{V6 MM}$$

$$-5 = 2h \quad \text{J2 MM}$$

$$-\frac{5}{2} = h$$

Jokeri 6 Kalle, Leena ja Miia ovat ratkaisseet yhtälön $8 - 4(x - 3) = 40$ seuraavilla tavoilla:

Kallen ratkaisu	Leenan ratkaisu	Miian ratkaisu
$8 - 4(x - 3) = 40$	$8 - 4(x - 3) = 40$	$8 - 4(x - 3) = 40$
$8 - 4x - 12 = 40$	$8 - 8 - 4(x - 3) = 40 - 8$	$\frac{8}{4} - \frac{4(x-3)}{4} = \frac{40}{4}$
$-4x - 4 = 40$	$-4(x - 3) = 32$	$2 - x + 3 = 10$
$-4x - 4 + 4 = 40 + 4$	$\frac{-4(x-3)}{-4} = \frac{32}{-4}$	$x + 5 = 10$
$-4x = 44$	$x - 3 = -8$	$x + 5 - 5 = 10 - 5$
$\frac{-4x}{-4} = \frac{44}{-4}$	$x - 3 + 3 = -8 + 3$	$x = 5$
$x = -11$	$x = -5$	



a) Käy huolella lävitse Kallen, Leenan ja Miian ratkaisu.

b) Kuka ratkaisi yhtälön oikein? Leena.

c) Ympyröi virheellisiin ratkaisuihin kohta, jossa virhe on tapahtunut.

d) Ratkaise virheelliset ratkaisut uudelleen siten, että vastaus on oikein. (Jatka siis ratkaisua siitä kohti, missä se viimeisen kerran oli oikein ja yritä edetä siten kuin ratkaisija oli edennyt)

Kallen korjattu ratkaisu

$$8 - 4x + 12 = 40 \quad \text{M}$$

$$-4x + 20 = 40 \quad \text{V20}$$

$$-4x + 20 - 20 = 40 - 20 \quad \text{MM}$$

$$-4x = 20 \quad \text{J-4 MM}$$

$$x = -5$$

Miian korjattu ratkaisu

$$2 - x + 3 = 10 \quad \text{M}$$

$$-x + 5 = 10 \quad \text{V5}$$

$$-x + 5 - 5 = 10 - 5 \quad \text{MM}$$

$$-x = 5 \quad \text{K-1 MM}$$

$$x = -5$$

RYHMÄARVIOINTI (ryhmätaidot selitetty tarkemmin sivulla 2)

Ryhmätaito	Onnistuminen				
Autoimme ja rohkaisimme toisiamme					
Keskustelimme toisemme huomioiden					
Toistimme asioita tarvittaessa					
Keskityimme perusteluihin vastausten sijaan					
Hyödynsimme virheitä oppiaksemme					

Kotitehtävä 1 Ratkaise seuraavat yhtälöt

a) $12x - (5x - 2) = 23$ M M $12x - 5x + 2 = 23$ $7x + 2 = 23$ V2 M M $7x = 21$ J7 M M $x = 3$	b) $3y + \frac{y}{3} = 20$ K3 $3 \cdot (3y + \frac{y}{3}) = 3 \cdot 20$ M M $9y + y = 60$ M $10y = 60$ J10 M M $y = 6$	c) $2(3 + y) = 18$ J2 M M $3 + y = 9$ V3 M M $y = 6$
--	--	--

Kotitehtävä 2 Mitä olet oppinut sulku- ja murtoyhtälöiden ratkaisemisesta?

Itsearviointi (täytetään yksin aina luvun päätteeksi)

EOS = En osaa sanoa

1=Erittäin heikosti

7=Erinomaisesti

Miten hyvin osaat seuraavat asiat

- | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|
| • Lausekkeen ja yhtälön ero | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |
| • Yhtälön tasapaino | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |
| • Tutkia, onko yhtälö tosi/epätosi | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |
| | | | | | | | | |
| • Olen oppinut tunneilla käsitellyt asiat. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |
| • Onnistuin keskittymään perusteluihin vastausten sijaan. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |
| • Onnistuin löytämään ja esittämään kysymyksiä. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |
| • Onnistuin kuvailemaan ajatteluani muille. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |
| • Onnistuin hyödyntämään virheitä oppiakseni. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |

Luku 5 Kertaus

Kertaustunti voidaan pitää tarvittaessa.

Tunnin rakenne:

- Kotitehtävät ja kertaus (5 min)
- Tehtävät 1-7 pienryhmissä ja/tai opettajan kanssa (30 min)
- Itsearviointi ja palaute (10 min)

Tunnin tavoitteet: Harjoitellaan yhtälönratkaisua kerraten kurssilla käytyjä asioita.

Toimintaohje: Tehtäviä voidaan laskea pienryhmissä ja/tai opettajan valinnan mukaan osin käydä välillä läpi yhdessä. Tehtäviä voi perustella suullisesti ryhmäkavereille, mutta kannattaa sanoa, että tulee osata myös kirjoittaa.

Tehtävä 1 Kerratkaa oppimanne asiat yhdessä keskustellen.

- Samanmuotoiset termit
- Lausekkeen ja yhtälön ero
- Yhtälön totuusarvon tutkiminen
- Yhtälön ratkaisun etsiminen
- Yhtälön ratkaisun tarkistaminen
- Eri muunnokset ja niiden käyttäminen
- Tyyppiä $2t + 5 = 5t - 1$ olevan yhtälön ratkaiseminen

Toimintaohje: Tehtävässä 1 oppilaat kuvailevat omin sanoin toisilleen ää-
neen kurssin keskeisimpiä ideoita.

Tehtävä 2 Tutki, ovatko seuraavat yhtälöt tosia vai epätosia. Perustele vastauksesi suullisesti.

a) $6 \cdot 12 = 4 \cdot 12 + 2 \cdot 12$

$6 \cdot 12 = 6 \cdot 12$

tosí, molemmilta puolilla yhtälöä on yhtä paljon ($6 \cdot 12 = 72$).

b) $3 + 2 = 8$

$5 \neq 8$

epätosí, sillä vasemmalla puolella yhtälöä on 5 ja oikealla 8.

c) $y + 2 = 4 + 5$

$y + 2 = 9$

tosí, kun muuttujan y arvo on 7, muulloin epätosí.

d) $-180 = -(-180)$

$-180 \neq 180$

epätosí, sillä vasemmalla puolella yhtälöä on -180 ja oikealla 180.

Tehtävä 3

a) Laske lausekkeen $3x - 5$ arvo, kun $x = -2$.

Síjoitetaan muuttujan x arvo lausekkeeseen, $3(-2) - 5 = -6 - 5 = -11$ eli lausekkeen arvo on -11.

b) Onko alla yhtälö/yhtälöitä, joiden ratkaisu on $x = 3$?

$x + 5 = x + 5$

$x^2 = 4$

$2x = 5 + 1$

$x + 3 = 4$

$2(x - 3) = 0$

$4 = x + x$

Vastaus ja perustelu: *Kyllä, yhtälöt $2x = 5 + 1$, $x + 5 = x + 5$ ja $2(x - 3) = 0$. Síjoittamalla niihin muuttujan x paikalle 3 saadaan yhtälö, joka on tosí.*

Tehtävä 4 Täydennä matemaattinen ja sanallinen esitys

Matemaattinen esitys	Muunnos	Sanallinen selitys
$-5 - y = y + 2$		
$-5 - y + y = y + y + 2$	L y	<u>Lisään</u> molemmille puolille y :n.
$-5 = 2y + 2$	M M	Muokkaan yhtälöä puolittain laskemalla laskun <u>$-y + y$</u> vasemmalla ja <u>$y + y$</u> oikealla puolella.
$-5 - 2 = 2y + 2 - 2$	V2	<u>Vähennän</u> puolittain luvun 2.
$-7 = 2y$	M M	Muokkaan yhtälöä puolittain suorittamalla laskut <u>$-5 - 2$</u> ja <u>$+2 - 2$</u> .
$-\frac{7}{2} = y$	J 2 M M	Jaan yhtälön molempia puolia luvulla <u>2</u> ja muokkaan lausekkeita. Yhtälön ratkaisu on $-\frac{7}{2}$. (tai $y = -\frac{7}{2}$)

Tehtävä 5 Kalle ja Leena ovat ratkaisseet yhtälön $2x + 5 = 3x - 3 + 5$ seuraavilla tavoilla.

	Kallen ratkaisu	Leenan ratkaisu	
	$2x + 5 = 3x - 3 + 5$	$2x + 5 = 3x - 3 + 5$	
	$2x + 5 - 5 = 3x - 3 + 5 - 5$	$2x + 5 = 3x + 2$	
	$2x + 5 = 3x - 3$	$2x + 5 = 5x$	
	$2x - 2x + 5 = 3x - 2x - 3 + 3$	$2x = 5x - 5$	
	$5 = 3x - 2x$	$2x - 2x = 5x - 5 - 2x$	
	$5 = x$	$0 = 3x - 5$	
		$0 + 5 = 3x - 5 + 5$	
		$5 = x$	

Huom. Tehtävässä 5 sekä Kalle että Leena ovat tehneet virheen, vaikka vastaus on sama. Kalle on laskenut virheellisesti vaiheen $5 - 5$ ja Leena vaiheen $3x + 2$. Kysy oppilailta, millaisia ajatuksia tämä heissä herättää?

a) Minkä muunnokset Kalle on tehnyt ensimmäisenä? Vähentänyt luvun 5 puolittain eli V5 Entä Leena? Leena on muokannut yhtälön vasenta puolta eli M.

b) Tarkista, ovatko Kallen ja Leenan vastaukset oikein.

Tarkistetaan sijoittamalla $x=5$ riville 1. Kallen yhtälöstä tulee vasemmalta puolelta: $2 \cdot 5 + 5 = 15$ ja oikealta $3 \cdot 5 - 3 + 5 = 17$. Nämä ovat eri suuret, joten Kallen ratkaisu on väärä. Leenalla puolestaan vasen puoli saa arvoksi $2 \cdot 5 + 5 = 15$ ja oikea puoli $3 \cdot 5 - 3 + 5 = 17$. Molemmat ovat siis ratkaisseet yhtälön väärin.

c) Ympyröi virheet. Muotoile omin sanoin lyhyt ohje, miten kyseisen virheen voi välttää.

Kallen virhe: Muista ottaa huomioon kaikki termit, joita lasket.
Leenan virhe: Yhdistä vain samanmuotoiset termit.

Tehtävä 6 Ratkaise seuraavat yhtälöt.

a)	$y + 3y = 10 - 2$	MM
	$4y = 8$	J4
	$\frac{4y}{4} = \frac{8}{4}$	MM
	$y = 2$	
b)	$b - 2 = 3b + 4$	Vb
	$b - b - 2 = 3b - b + 4$	MM
	$-2 = 2b + 4$	V4
	$-2 - 4 = 2b + 4 - 4$	MM
	$-6 = 2b$	J2
	$\frac{-6}{2} = \frac{2b}{2}$	MM
	$-3 = b$	
c)	$1 + \frac{a}{5} = 7$	V1
	$1 - 1 + \frac{a}{5} = 7 - 1$	MM
	$\frac{a}{5} = 6$	K5
	$5 \cdot \frac{a}{5} = 6 \cdot 5$	MM
	$a = 30$	
d)	$5(2z - 4) = 20$	J5
	$\frac{5(2z-4)}{5} = \frac{20}{5}$	MM
	$2z - 4 = 4$	L4
	$2z - 4 + 4 = 4 + 4$	MM
	$2z = 8$	J2
	$\frac{2z}{2} = \frac{8}{2}$	MM
	$z = 4$	

Tehtävä 7

a) Laske yhtälö $-2(y + 4) + 6(y + 4) = 12$ vähintään kahdella eri tavalla.

Tavalla 1

$$\begin{aligned} -2(y + 4) + 6(y + 4) &= 12 & \text{M} \\ 4(y + 4) &= 12 & \text{J4 MM} \\ y + 4 &= 3 & \text{V4 MM} \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Tavalla 2

$$\begin{aligned} -2(y + 4) + 6(y + 4) &= 12 & \text{M} \\ -2y - 8 + 6y + 24 &= 12 & \text{M} \\ 4y + 16 &= 12 & \text{V16MM} \\ 4y &= -4 & \text{J4 M} \\ y &= \frac{-4}{4} & \text{M} \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Tavalla 3

$$\begin{aligned} -2(y + 4) + 6(y + 4) &= 12 & \text{J2MM} \\ -1(y + 4) + 3(y + 4) &= 6 & \text{M} \\ (y + 4)(3 - 1) &= 6 & \text{M} \\ (y + 4)2 &= 6 & \text{J2MM} \\ y + 4 &= 3 & \text{V4MM} \\ y &= -1 \end{aligned}$$

b) Kumpi ratkaisutapa on mielestäsi sopivampi tähän tehtävään? Miksi? *Esimerkkivastauksista tapa 1, sillä se on lyhyin.*

Jokeri 8 Kalle ja Leena ovat ratkoneet yhtälöitä ja vertailevat nyt ratkaisujaan samoille yhtälöille. Vastaa annettuihin kysymyksiin ja toimi opettajana tarkistaen Kallen ja Leenan ratkaisut yhtälöille.

	Kallen ratkaisu	Leenan ratkaisu	
	$4b + 16 = -8$	$4b + 16 = -8$	
	$\frac{4b}{4} + \frac{16}{4} = \frac{-8}{4}$	$\frac{4b + 16}{4} = \frac{-8}{4}$	
	$b + 4 = -2$	$b + 16 = -2$	
	$b + 4 - 4 = -2 - 4$	$b + 16 - 16 = -2 - 16$	
	$b = -6$	$b = -18$	

- a) Kerro, mitä Kalle ja Leena ovat tehneet ratkaistessaan yhtälön $4b + 16 = -8$. Kumpi ratkaisi oikein?

Kalle. Molemmat ovat jakaneet yhtälön puolittain luvulla 4. Leena ei kuitenkaan ole muistanut jakaa lukua 16 luvulla 4.

- b) Ympyröi virheellisestä ratkaisusta kohta, jossa virhe on tapahtunut.

- c) Muotoile omin sanoin lyhyt ohje, miten kyseisen virheen voi yhtälöä ratkaistaessa välttää.

Jakaminen täytyy suorittaa kaikille yhtälön termeille.

Jokeri 9 Täydennä yhtälön ratkaisun matemaattinen esitys kahdella eri tavalla.

Matemaattinen esitys	Muunnos	Matemaattinen esitys	Muunnos
$\frac{8 + 20x}{4} = 6x$		$\frac{8 + 20x}{4} = 6x$	
$4 \cdot \frac{8 + 20x}{4} = 4 \cdot 6x$	K4	$2 + 5x = 6x$	M
$8 + 20x = 24x$	M M	$2 + 5x - 5x = 6x - 5x$	V5x
$8 + 20x - 20x = 24x - 20x$	V20x	$2 = x$	M M
$8 = 4x$	M M		
$2 = x$	J4 M M		

Jokeri 10 Muodosta yhtälö ja ratkaise se.

a) Tiina ja Ville jakavat 60 euron palkan. Tiina teki töitä kaksi kertaa niin paljon kuin Ville. Kuinka paljon kumpikin saa palkkaa? *Ratkaisu: Merkitään kirjaimella p Villen palkkaa. Nyt Tiinan palkka on $2p$ (koska Tiina teki töitä kaksi kertaa enemmän kuin Ville). Muodostetaan yhtälö $p + 2p = 60$ josta voidaan ratkaista Villen ja Tiinan palkka.*

$$\begin{array}{ll} p + 2p = 60 & \text{M} \\ 3p = 60 & \text{J3} \\ \frac{3p}{3} = \frac{60}{3} & \text{MM} \\ p = 20 & \end{array}$$

Vastaus: Villen palkka oli 20 euroa ja Tiinan palkka oli 40 euroa.

b) Kolmen peräkkäisen kokonaisluvun summa on 108. Mikä on pienin luvuista?

Ratkaisu: Merkitään ensimmäistä lukua n , toinen on silloin $n + 1$ ja kolmas $n + 2$. Tällöin

$$\begin{array}{ll} n + (n + 1) + (n + 2) = 108 & \text{M} \\ 3n + 3 = 108 & \text{V3MM} \\ 3n = 105 & \text{J3MM} \\ n = 35 & \end{array}$$

Vastaus: Kolme lukua ovat 35, 36 ja 37 eli pienin on 35.

c) Lippu Robinin konserttiin maksoi aikuisille (eli yli 12-vuotiaille) 20 euroa ja alle 12-vuotiaille 10 euroa. Selvitä, montako lasten ja montako aikuisten lippua myytiin, kun tiedetään, että lippuja myytiin yhteensä 350 kappaletta ja lipunmyyntituloja saatiin yhteensä 4000 euroa.

Ratkaisu: Merkitään yli 12-vuotiaiden lippujen lukumäärää kirjaimella y ja lasten lippujen lukumäärää kirjaimella x .

Nyt tiedetään, että $x + y = 350$ (eli kaikkien myytyjen lippujen lukumäärän on oltava 350 kpl)

Lisäksi tiedetään, että $10x + 20y = 4000$ (eli lipunmyyntitulot myydyistä lipuista ovat yhteensä 4000 euroa).

Jos muuttujan x ratkaisee ensimmäisestä yhtälöstä, saadaan että $x = 350 - y$. Sijoitetaan tämä toiseen yhtälöön, jolloin saadaan uusi yhtälö $10(350 - y) + 20y = 4000$ ja ratkaistaan se:

$$\begin{array}{ll} 10(350 - y) + 20y = 4000 & \text{M} \\ 3500 - 10y + 20y = 4000 & \text{M} \\ 3500 + 10y = 4000 & \text{V3500MM} \\ 10y = 500 & \text{J10MM} \\ y = 50 & \end{array}$$

Lasten lippujen lukumäärä (eli x) saadaan, kun sijoitettiin ratkaistu y yhtälöön $x = 350 - y$ eli $x = 350 - 50 = 300$.

Vastaus: Aikuisten lippuja myytiin 50 kappaletta ja Lasten lippuja myytiin 300 kappaletta.

Jokeri 11 Muodosta mahdollisimman haastava yhtälö ja ratkaise se.

RYHMÄARVIOINTI (ryhmätaidot selitetty tarkemmin sivulla 2)

Ryhmätaito	Onnistuminen				
Autoimme ja rohkaisimme toisiamme					
Keskustelimme toisemme huomioiden					
Toistimme asioita tarvittaessa					
Keskityimme perusteluihin vastausten sijaan					
Hyödynsimme virheitä oppiaksemme					

Loppuitsearviointissa arvioidaan osaamista kurssin loppuksi.

Loppuitsearviointi

Vastaa seuraaviin kysymyksiin.

1 = Erittäin heikosti

7 = Erinomaisesti

Miten hyvin osaat seuraavat asiat

- | | | | | | | | |
|--|---|---|---|---|---|---|---|
| • Lausekkeen rakenne | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Lausekkeen sieventäminen | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Lausekkeen ja yhtälön ero | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Yhtälön tasapaino | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Tutkia, onko yhtälö tosi/epätosi | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Yhtälön ratkaisun etsiminen | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Yhtälön ratkaisun tarkistaminen | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Eri muunnokset | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Sopivan muunnoksen löytäminen | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Tyyppiä $2t + 5 = 5t - 1$ olevan yhtälön ratkaiseminen | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Kertoa sanallisesti/ääneen, miten tehtävä ratkaistaan | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| | | | | | | | |
| • Olen oppinut kurssilla käsitellyt asiat. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Onnistuin keskittymään perusteluihin vastausten sijaan. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Onnistuin löytämään ja esittämään kysymyksiä. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Onnistuin kuvailemaan ajatteluani muille. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Onnistuin vertailemaan tehtävien eroavaisuuksia ja yhtäläisyyksiä. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Onnistuin löytämään ja vertailemaan eri ratkaisutapoja | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Onnistuin hyödyntämään virheitä oppiakseni. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

Minkä asian olet oppinut parhaiten?

Missä sinulla on eniten opittavaa?

Palautetta yhtälöiden opiskelusta: