

ajattelun kuvaileminen ääneen
jumissa olemisen arvostaminen
virheiden arvostaminen
vastaus päättely ja perustelut
käsitteiden pohtiminen
erilaisten ratkaisujen arvostaminen
itsearviointi



LUMA-KESKUS
SUOMI



OULUN
YLIOPISTO



Opetus- ja
kulttuuri-
ministeriö



JOUSTAVA YHTÄLÖNRATKAISU

$$a + 3 = 2a + 1$$

$$2(x - 3) = 16$$

Yhtälö

Lausekkeiden vertailua
Lauseke = Lauseke
Tosi, epätosi, joskus tosi?

vaakamalli
muunnokset

vapaus tutkia
ratkaisun etsiminen

Nimi: _____

Luokka: _____



Tämä teos on lisensoitu Creative Commons Nimeä 4.0
Kansainvälinen -käyttöluvalla. Tarkastele käyttö lupaa osoitteessa
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.fi>.

Sisällys

MATEMAATTISEN RYHMÄTYÖSKENTELYN TAVOITTEET	2
Luku 1 Johdatus yhtälöihin	3
1.1 Mikä on yhtälö?	3
1.2 Mikä on yhtälön ratkaisu?	7
Luku 2 Muunnoksiin tutustuminen	10
Kappale 2.1. käydään joko lähestymistavalla a tai b.	10
2.1 a) Muunnokset ja vaakamalli.....	10
2.1 b) Muunnokset ja vaakamalli	11
2.2 Muunnosten käyttöön tutustumista	15
2.3 Virheitä muunnosten käytössä.....	23
Luku 3 Yhtälön ratkaiseminen	28
3.1 Yhtälön luominen ja ratkaiseminen.....	28
3.2 Yhtälönratkaisutehtäviä	31
Luku 4 Joustava yhtälönratkaisu	34
4.1 Sulkausekkeet.....	34
4.2 Sulkuyhtälöt ja joustavuus.....	37
4.3 Lisää joustavia yhtälöitä	42
5 Kertaus.....	50
Loppuitsearviointi.....	56

Joustava yhtälönratkaisu –työryhmä:

Peter Hästö (2015-2019), Dimitri Tuomela (2015-2019), Riikka Palkki (2015-2019), Virpi Kostama (2015-2017), Marko Leinonen (2016), Hannu Suvanto (2015), Juha Jaako (2015)

Materiaalissa esiintyvien Kalle ja Leena -tehtävien idea pohjautuu Jon R. Starin ja kollegoiden materiaaleihin <http://scholar.harvard.edu/contrastingcases/>

MATEMAATTISEN RYHMÄTYÖSKENTELYN TAVOITTEET

Ryhmän nimi: _____

Tutustukaa ryhmänne kanssa alla oleviin matemaattisen ryhmätyöskentelyn taitoihin. **Poimikaa kaksi kohtaa, joissa ryhmänne aikoo tulla hyväksi.**

1)	
2)	

Omat ryhmätyöskentelyn tavoitteeni

1)	
2)	

MATEMAATTISEN RYHMÄTYÖSKENTELYN TAIOT

AUTA JA PYYDÄ APUA:

- Pyydä apua ja auta toisia.
- Myös toisesta ryhmästä voi hakea apua.
- Kuvaile ajatteluasi. Kerro mitä et ymmärrä.
- Vaikuta ilmapiiriin myönteisesti. Rohkaise, kiitä ja kehu.

KESKUSTELE JOUSTAVASTI

- Ota kantaa: Oletko samaa vai eri mieltä? Miksi?
- Ole kohtelias. Kritisoi väitteitä, älä henkilöitä.
- Liitä ajatuksesi toisten puheenvuoroihin.
- Pyydä miettimisaikaa.

TOISTO ON TÄRKEÄÄ

- Usein kerta ei riitä asian ymmärtämiseen.
- "Selittäisitkö uudestaan...?"
- "Tarkoitatko, että...?"
- "Voisiko joku toinen selittää saman asian?"

KESKITY VASTAUKSEN SIJAAN PÄÄTTELYYN

- Vertaile erilaisia ratkaisutapoja.
- Tutki virheellistä päättelyä ja opi siitä.
- Kysele ja ihmettele! "Miksiköhän...?"
- Etsi lisää näkökulmia. Ole luova! "Entä jos...?"
- Keksi hyviä kysymyksiä ja kirjoita ne ylös.

Luku 1 Johdatus yhtälöihin

1.1 Mikä on yhtälö?

Yhtälön rakenne ja tunnistaminen

Tehtävä 1 Selvitä mitkä seuraavista ovat yhtälöitä ja mitkä puolestaan lausekkeita. Ympyröi yhtälöt.

a) $8 = 10 - 2$

f) $1745 + 31 = 103 - 20$

b) $74 - 5$

g) $8 \cdot 14 = 4 \cdot 14 + 4 \cdot 14$

c) $-4 = -2 + 2$

h) $2a = a$

d) $10 \cdot 5 + 5 \cdot 10$

i) $-2 + 4 = -(2 + 4)$

e) $3 = 3$

j) $\square + 1 = 5 \cdot \square$

Yhtälön ja lausekkeen vertailua

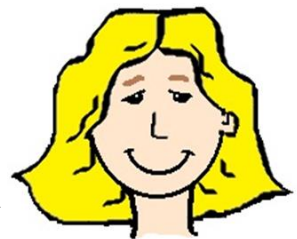


Empty speech bubble for the boy's response.

Mitä samanlaista on
yhtälöissä ja lausekkeissa?

Mitä erilaista on
yhtälöissä ja lausekkeissa?

Empty speech bubble for the girl's response.



Yhtälö väitteenä

Esimerkki 1 Ovatko seuraavat väitteet tosia vai epätosia.

a) *Niili on joki.*

b) $2 + 5 + 1 = 8$

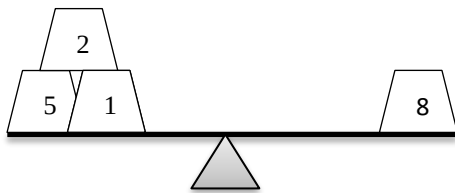
c) *Maapallo on litteä kuin lettu.*

d) $8 + 2 = 7 + 5$

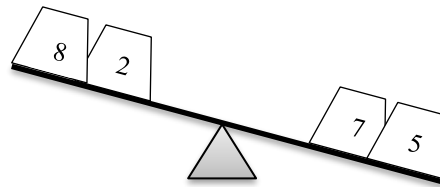
e) *Pöydässä on neljä jalkaa.*

f) $x = 4$

Yhtälö vaa'an avulla esitettynä



$$2 + 5 + 1 = 8$$



$$8 + 2 < 7 + 5$$

Esimerkki 2 Ovatko seuraavat väitteet tosia vai epätosia? Perustele.

a) $\frac{6}{2} = 1 + 2$

b) $4567 + 1000 = 5500 + 67$

c) $7x + 3 - 5$

d) $3x + 8 = 3x + 8$

e) $3a + 7 = b - 1$

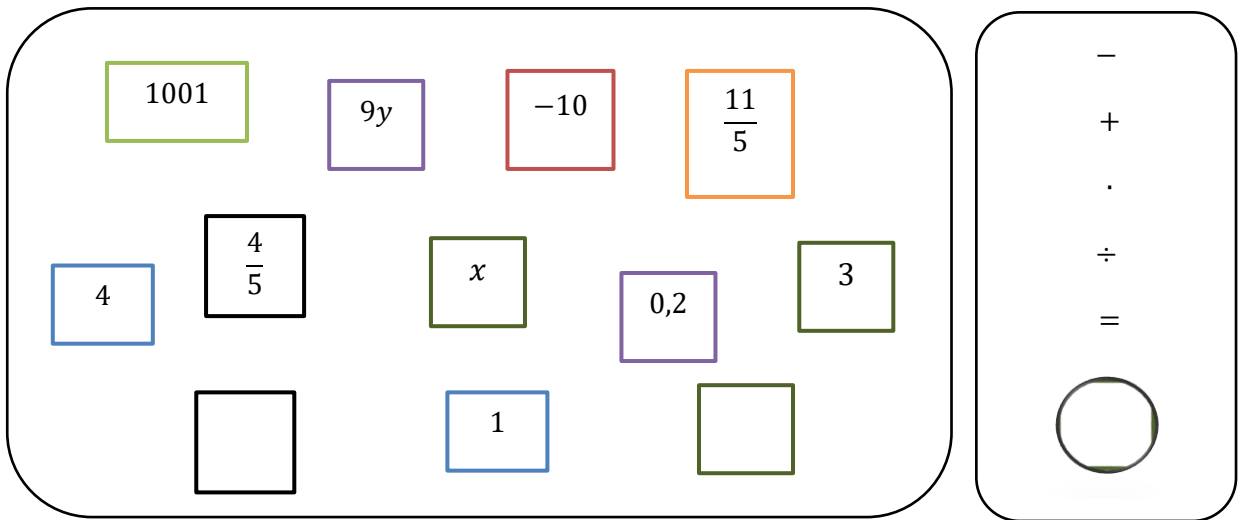
f) $7 < 3$

Mikä on yhtälö?

Milloin yhtälö on tosi?

Tehtävä 2 Tarkastele uudestaan **tehtävää 1**. Selvitä, ovatko ympyröimäsi yhtälöt tosia vai epätosia.

Jokeri 3 Muodosta alla olevista



- yhtälö, joka on tosi.
- yhtälö, joka on epätosi.
- yhtälö, joka sisältää muuttujan.

Huomautus!

- Tyhjien laatikkojen ja ympyrän sisällöistä voit päättää itse.
- Samaa laatikon sisältöä tai merkkiä voi käyttää yhtälössä useammin kuin kerran, kunhan lopputulos on edelleen tehtävänannon mukainen yhtälö.

Arvioikaa yhdessä ryhmänne kanssa onnistumistanne tällä oppitunnilla.

RYHMÄARVIOINTI (ryhmätaidot selitetty tarkemmin sivulla 2)					
Ryhmätaito	Onnistuminen				
Autoimme ja rohkaisimme toisiamme					
Keskustelimme toisemme huomioiden					
Toistimme asioita tarvittaessa					
Keskityimme perusteluihin vastausten sijaan					
Hyödynsimme virheitä oppiaksemme					

Kotitehtävä 1

a) Selvitä, mitkä laatikossa ovat lausekkeita ja mitkä yhtälöitä. Ympyröi yhtälöt.

b) Selvitä, ovatko ympyröimäsi yhtälöt tosia vai epätosia. Kirjoita yhtälön viereen tosi/epätosi.

$$-7 = x$$

$$3 \cdot (9 - x)$$

$$u + 1 = 2u - u$$

$$3 \cdot 8 - 3 \cdot 7 - 3$$

$$\frac{8}{4}$$

$$5 = -5$$

$$7 + 3 = 8 + \frac{10}{5}$$

$$15037 - 138 = 15036 - 137$$

$$w$$

Kotitehtävä 2 Kerro jokin asia, minkä olet oppinut yhtälöistä.

1.2 Mikä on yhtälön ratkaisu?

Tehtävä 1 Tutki laskemalla, ovatko taulukon yhtälöt tosia vai epätosia annetuilla muuttujan arvoilla. Mitä huomaat taulukosta?

	$x = 2$	$x = 5$	$x = -1$	$x = 3$	$x = 7$	$x = \frac{1}{2}$	$x =$
A	$x + 2 = 7$						
B	$x + 1 = x$						
C	$x - 5 = 2x - x - 5$						
D	$10 - x = 3$						
E	$1 + x$						
F	$5x - 3 = 2x + 3$						
G	$x^2 + 6 = 5x$						

Mitä havaitsitte?

Uusi käsite (Yhtälön ratkaisu)

Yhtälön ratkaisu tarkoittaa lukua, joka sijoitettuna muuttujan paikalle tekee yhtälöstä toden eli toteuttaa yhtälön.

Esimerkki 1 Onko muuttujan arvo $x = 3$ yhtälön ratkaisu, kun yhtälö on

a) $11 = 5 + 2x$

b) $5x + 5 = 3x - 8$

Tehtävä 2 Mitkä seuraavista vaihtoehdoista ovat tai eivät ole yhtälön $2x - 6 = x - 8$ ratkaisuja?

a) $x = 3$ b) $x = -2$ c) $s = 1$ d) $x = \frac{1}{2}$

Tehtävä 3 Päättele yhtälön ratkaisu

a) $2p = 6$

b) $4x = 2 + 2x$

c) $4x + 2 = 9 - x$

Jokeri 4 Onko yhtälö tosi vai epätosi, muuttujan arvolla -4 ?

a) $3x + 8 = -2x - 4$

b) $-5b + 6 = 3b + 38$

Jokeri 5 Millä muuttujan k arvolla yhtälön ratkaisu on $x = 3$?

a) $2x + k = 8$

b) $k - 3x = 7$

c) $x + 2k = k - 9$

d) $6x - k = 9 - 2$

RYHMÄARVIOINTI (ryhmätaidot selitetty tarkemmin sivulla 2)					
Ryhmätaito	Onnistuminen				
Autoimme ja rohkaisimme toisiamme					
Keskustelimme toisemme huomioiden					
Toistimme asioita tarvittaessa					
Keskityimme perusteluihin vastausten sijaan					
Hyödynsimme virheitä oppiaksemme					

Kotitehtävä 1 Kertaa (ei tarvitse kirjoittaa), mitä ovat

a) yhtälö

b) yhtälön ratkaisu.

Kotitehtävä 2 Yhtälö on $5x - 6 = 3 + x$. Vastaa seuraaviin kysymyksiin ja perustele vastauksesi.

a) Onko yhtälö tosi, kun $x = 2$?

b) Onko muuttujan arvo 3 yhtälön ratkaisu?

Kotitehtävä 3 Osoita, että luku 4 on seuraavien yhtälöiden ratkaisu:

a) $3x + 1 = 13$

b) $\frac{x}{2} - 14 = 9x - 48$.

Itsearviointi (täytetään yksin aina luvun päätteeksi)

EOS = En osaa sanoa

1 = Erittäin heikosti

7 = Erinomaisesti

Miten hyvin osaat seuraavat asiat

- | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|
| • Lausekkeen ja yhtälön ero | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |
| • Yhtälön tasapaino | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |
| • Tutkia, onko yhtälö tosi/epätosi | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |
| | | | | | | | | |
| • Olen oppinut tunneilla käsitellyt asiat. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |
| • Onnistuin keskittymään perusteluihin vastausten sijaan. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |
| • Onnistuin löytämään ja esittämään kysymyksiä. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |
| • Onnistuin kuvailemaan ajatteluani muille. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |
| • Onnistuin hyödyntämään virheitä oppiakseni. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |

Luku 2 Muunnoksiin tutustuminen

Kappale 2.1. käydään joko lähestymistavalla a tai b.

2.1 a) Muunnokset ja vaakamalli

Esimerkki 1 Tarkastellaan seuraavia yhtälöitä.

$y + 2y = 3$	$\frac{y}{10} = \frac{1}{2}$	$3y = 3$	$3y - 4 = -1$
$2y = 10$	$3y + 2 = 5$	$2y = 5 \cdot 2$	$y = 5$

- Millä näistä yhtälöistä on sama ratkaisu?
- Mitä laskutoimituksia tekemällä yhtälö saadaan muutettua toiseksi yhtälöksi, jolla on sama ratkaisu?
- Kirjoita taululle keksimäsi yhtälö, jolla on sama ratkaisu kuin joillain laatikon yhtälöistä.

Esimerkki 2 (Yhteenvedo muunnoksista)

Muunnos on sellainen tapa muuttaa yhtälöä, että yhtälön tasapaino/ totuusarvo / ratkaisu säilyy samana kuin alkuperäisen. Toisin sanoen uusi yhtälö on tosi samalla muuttujan arvolla kuin alkuperäinen.

Huom! Esimerkiksi luvun lisääminen vain toiselle puolelle ei ole muunnos, koska ratkaisu muuttuu.

MUUNNOKSIA

Muunnos L: saman termin lisääminen yhtälön molemmille puolille.

Muunnos V: saman termin _____ yhtälön molemmilta puolilta.

Muunnos J: molempien puolien _____ samalla nolasta eroavalla luvulla.

Muunnos K: molempien puolien _____ samalla nolasta eroavalla luvulla.

Muunnos M: Yhtälössä olevan lausekkeen _____.

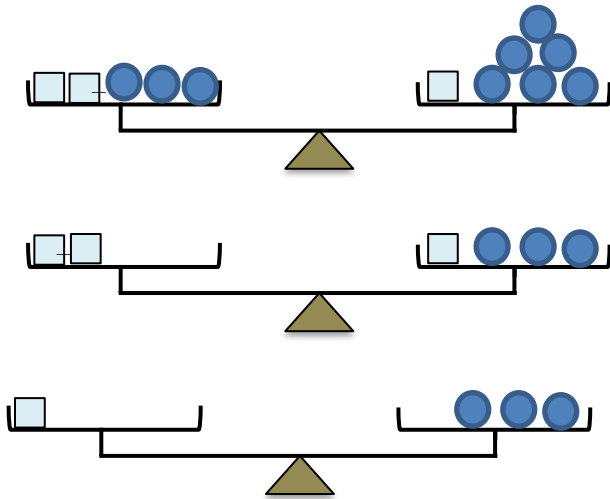
RYHMÄARVIOINTI (ryhmätaidot selitetty tarkemmin sivulla 2)

Ryhmätaito	Onnistuminen				
Autoimme ja rohkaisimme toisiamme					
Keskustelimme toisemme huomioiden					
Toistimme asioita tarvittaessa					
Keskityimme perusteluihin vastausten sijaan					
Hyödynsimme virheitä oppiaksemme					

Kotitehtävä: Katso animaatio: <https://ouluma.fi/wp-content/uploads/2016/11/yhtalo1-1.gif>

2.1 b) Muunnokset ja vaakamalli

Esimerkki 1. Vaakamalli. Mitä on yksi laatikko (pallon avulla ilmaistuna)?



Uusi käsite (Lausekkeen muokkaaminen)

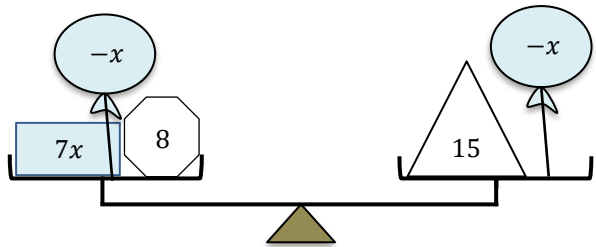
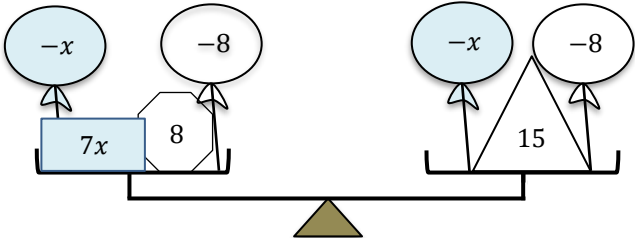
Huom! Negatiivinen luku/termi on vaakamallissa esitetty ilmapallon avulla.

Vaa'an molemmilla puolilla on edelleen yhtä paljon, vaikka yhtälön lausekkeita muokattaisiin. Tässä muokataan yhtälön vasemman puolen lauseketta.

Vaakamalli	Matemaattinen esitys	Muunnos
	$-x + 7x + 8 = 15 - x$	
	$6x + 8 = 15 - x$	M

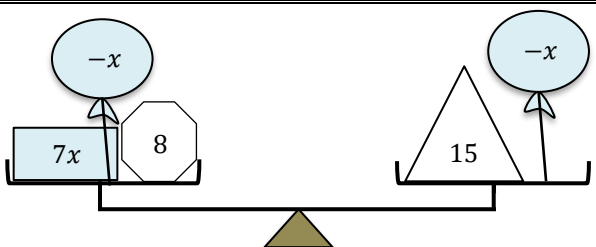
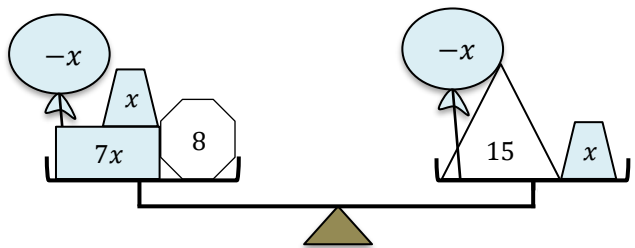
Uusi käsite (Vähentäminen)

Jos aluksi molemmilla puolilla oli yhtä paljon, niin täytyy olla edelleen yhtä paljon, kun molemmilta puolilta otetaan pois 8. Vaakaa katsomalla huomataan, että tämä on sama asia kuin luvun -8 lisääminen.

Vaakamalli	Matemaattinen esitys	Muunnos
	$-x + 7x + 8 = 15 - x$	
	$-x + 7x + 8 - 8 = 15 - x - 8$	$V8$

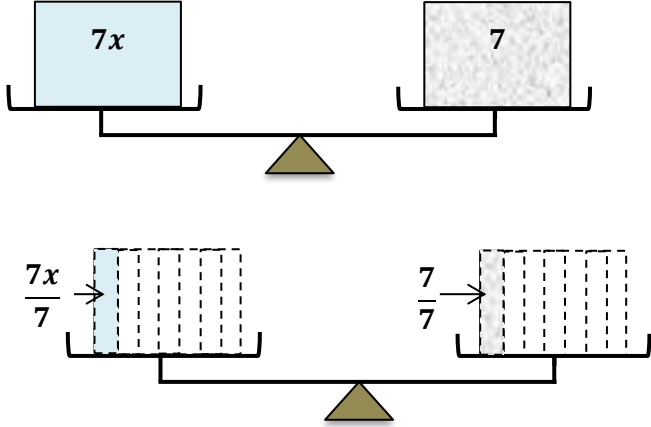
Uusi käsite (Lisääminen)

Jos molemmilla puolilla oli yhtä paljon, niin saman suuruisen punnuksen lisäämisen jälkeen täytyy myös olla yhtä paljon.

Vaakamalli	Matemaattinen esitys	Muunnos
	$-x + 7x + 8 = 15 - x$	
	$-x + 7x + 8 + x = 15 - x + x$	Lx

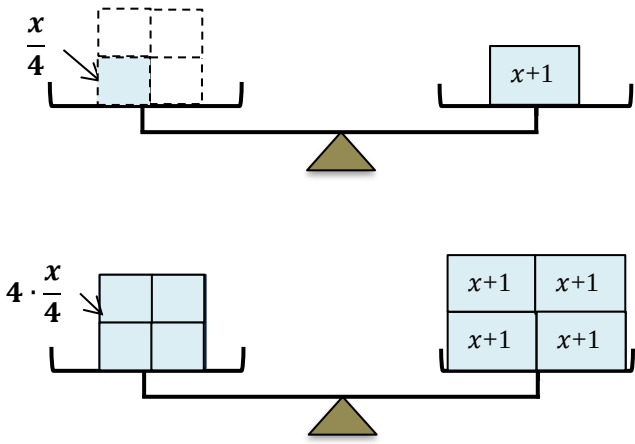
Uusi käsite (Jakaminen)

Jos molemmille puolille jätetään seitsemäsosa alkuperäisestä, niin yhtälön molemmilla puolilla täytyy olla yhtä paljon, mikäli aiemminkin oli.

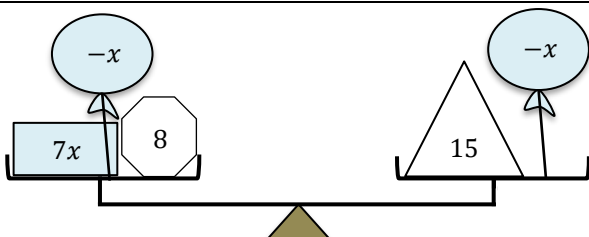
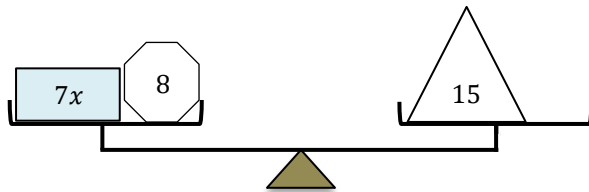
Vaakamalli	Matemaattinen esitys	Muunnos
	$7x = 7$ $\frac{7x}{7} = \frac{7}{7}$	J7

Uusi käsite (Kertominen)

Jos molemmat puolet nelinkertaistetaan, on molemmilla puolilla yhtä paljon vain, jos aiemminkin oli.

Vaakamalli	Matemaattinen esitys	Muunnos
	$\frac{x}{4} = x + 1$ $4 \cdot \frac{x}{4} = 4 \cdot (x + 1)$	K4

Esimerkki 2 (Lisääminen ja Muokkaaminen)

Vaakamalli	Matemaattinen esitys	Muunnos
	$-x + 7x + 8 = 15 - x$	
	$7x + 8 = 15$	$Lx \ M \ M$

Esimerkki 3 (Yhteenvedo muunnoksista)

Muunnos on sellainen tapa muuttaa yhtälöä, että yhtälön tasapaino/ totuusarvo / ratkaisu säilyy samana kuin alkuperäisen. Toisin sanoen uusi yhtälö on tosi samalla muuttujan arvolla kuin alkuperäinen.

Huom! Esimerkiksi luvun lisääminen vain toiselle puolelle ei ole muunnos, koska ratkaisu muuttuu.

MUUNNOKSIA

Muunnos L: saman termin lisääminen yhtälön molemmille puolille.

Muunnos V: saman termin _____ yhtälön molemmilta puolilta.

Muunnos J: molempien puolien _____ samalla nolasta eroavalla luvulla.

Muunnos K: molempien puolien _____ samalla nolasta eroavalla luvulla.

Muunnos M: Yhtälössä olevan lausekkeen _____.

RYHMÄARVIOINTI (ryhmätaidot selitetty tarkemmin sivulla 2)

Ryhmätaito	Onnistuminen				
Autoimme ja rohkaisimme toisiamme					
Keskustelimme toisemme huomioiden					
Toistimme asioita tarvittaessa					
Keskityimme perusteluihin vastausten sijaan					
Hyödynsimme virheitä oppiaksemme					

Kotitehtävä: Katso animaatio: <https://ouluma.fi/wp-content/uploads/2016/11/yhtalo1-1.gif>

2.2 Muunnosten käyttöön tutustumista

Esimerkki 1 Tutki kuinka muunnosten avulla voi selvittää haastavan yhtälön ratkaisun.

	Vaakamalli	Matemaattinen esitys	Muunnos
1		$-x + 7x + 8 = 15 - x$	
2			Lx M M
3			V8
4			M M
5			J7 M M

a) Täydennä puuttuvat välivaiheet matemaattinen esitys sarakkeeseen.

b) Millä muuttujan arvolla viimeinen yhtälö (kohta 5) on tosi? Sijoita tämä muuttujan arvo muihin yhtälöihin (1-4).

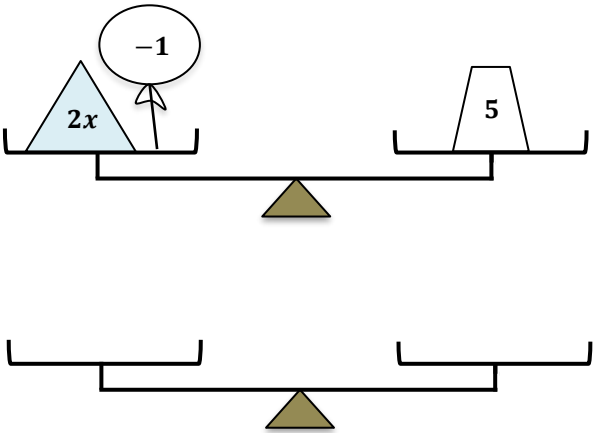
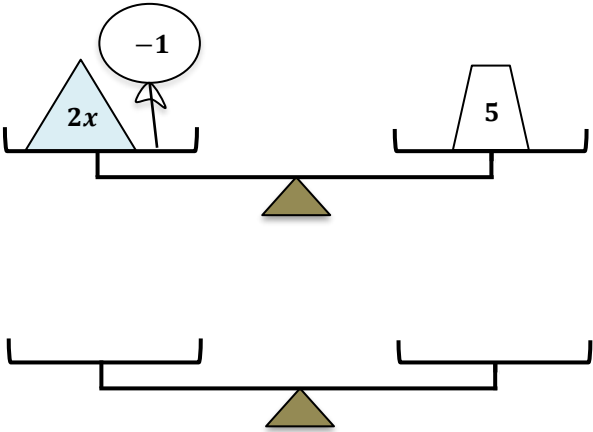
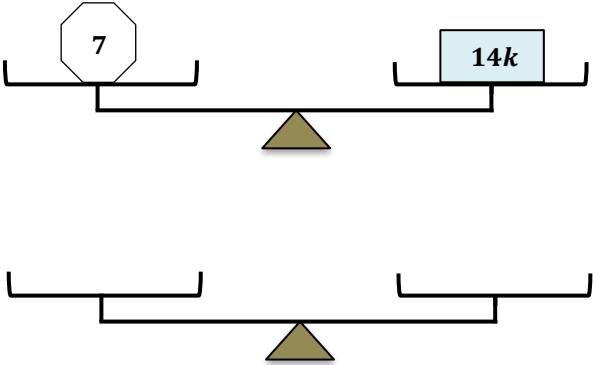
Merkitse sijoitukset näkyviin matemaattisen esityksen alapuolelle. Mitä huomaat? _____

c) Kerro lyhyesti mikä muuttuu tai säilyy, kun muunnoksia käytetään yhtälöön.

MUUTTUU

SÄILYY

Tehtävä 1 Tee pyydetty muunnos yhtälölle ja kirjoita muunnoksen jälkeinen tilanne sekä vaakamallin että matemaattisen esityksen avulla.

a)	Vaakamalli	Matemaattinen esitys	Muunnos
		$2x - 1 = 5$	L1
b)		$2x - 1 = 5$	L1 M M
c)		$7 = 14k$	J14

Tehtävä 2

Matemaattinen esitys	Muunnos	Sanallinen selitys
$\frac{b}{9} - 11 = -8$	<i>L11</i>	Lisään yhtälön molemmille puolille luvun ____.
$\frac{b}{9} - 11 + 11 = -8 + 11$	<i>M M</i>	Muokkaan yhtälön puolia, laskemalla yhtälön vasemmalla puolella yhteen ____ ja _____. Oikealla puolella lasken yhteen luvut ____ ja ____.
$\frac{b}{9} = 3$	<i>K9</i>	Kerron yhtälöä puolittain luvulla ____.
$9 \cdot \frac{b}{9} = 9 \cdot 3$	<i>M M</i>	Muokkaan yhtälöä suorittamalla vasemmalla kertolaskun _____ ja oikealla kertolaskun _____.
$b = 27$		Nyt näen, että alkuperäinen yhtälö on tosi, kun _____ eli yhtälön ratkaisu on _____.

Tehtävä 3 Täydennä matemaattinen esitys ja sanallinen esitys.

Matemaattinen esitys	Muunnos	Sanallinen selitys
$5y = 4y - 20$	<i>V4y</i>	Vähennän ____ molemmilta puolilta yhtälöä.
	<i>M M</i>	Muokkaan yhtälöä puolittain laskemalla laskun _____ vasemmalla ja _____ oikealla puolella. Nämä yhtälöt ovat siis tosia, kun _____.

Tehtävä 4 Täydennä muunnos ja sanallinen esitys.

Matemaattinen esitys	Muunnos	Sanallinen selitys
$17 + 1 = 17 + 2a$		Vähennän puolittain luvun _____.
$17 + 1 - 17 = 17 + 2a - 17$		Muokkaan yhtälöä puolittain laskemalla laskun _____ vasemmalla ja _____ oikealla puolella.
$1 = 2a$		Jaan yhtälöä puolittain luvulla _____.
$\frac{1}{2} = \frac{2a}{2}$		Muokkaan yhtälön oikeaa puolta suorittamalla jakolaskun _____.
$\frac{1}{2} = a$		Nyt näen, että alkuperäisen yhtälön ratkaisu on _____.

Tehtävä 5 Täydennä yhtälön ratkaisutapaan 1 matemaattinen esitys ja ratkaisutapaan 2 käytetty muunnos.

Tapa 1		Tapa 2	
Matemaattinen esitys	Muunnos	Matemaattinen esitys	Muunnos
$4a = 2a + 2$		$4a = 2a + 2$	
$\frac{4a}{2} = \frac{2a}{2} + \frac{2}{2}$			V2a
$2a = a + 1$			M M
$2a - a = a - a + 1$			J2
$a = 1$			M M

Jokeri 6 Mitä muunnosta Kalle tai Leena on käyttänyt yhtälöön? Kirjoita ratkaisu sanallisesti **tai** lyhenteellä.



$$5x - 3 - 2x - 3 = 0$$

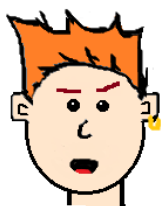
$$3x - 6 = 0$$

Kalle _____

Leena _____

$$3x - 6 = 0$$

$$3x - 6 + 6 = 0 + 6$$



$$62 = 62 + 17x$$

$$0 = 17x$$

Kalle _____

Leena _____

$$0 = 17x$$

$$\frac{0}{17} = \frac{17x}{17}$$



$$\frac{5}{4} + \frac{b}{2} = 2$$

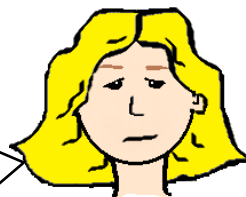
$$\frac{5}{4} - \frac{5}{4} + \frac{b}{2} = 2 - \frac{5}{4}$$

Kalle _____

Leena _____

$$\frac{b}{2} = \frac{3}{4}$$

$$2 \cdot \frac{b}{2} = \frac{3}{4} \cdot 2$$



Jokeri 7 Täydennä matemaattinen ja sanallinen esitys.

Matemaattinen esitys	Muunnos	Sanallinen selitys
$15x + 10 = 5x + 30$		
	V10	Vähennän _____ molemmilta puolilta yhtälöä.
	M M	Muokkaan yhtälöä puolittain laskemalla laskun _____ vasemmalla ja _____ oikealla puolella.
	V5x	_____.
	M M	Muokkaan yhtälöä puolittain laskemalla laskun _____ vasemmalla ja _____ oikealla puolella.
	J10	_____.
	M M	Muokkaan yhtälöä puolittain suorittamalla jakolaskut ____ ja ____.
		Nyt näen, että alkuperäisen yhtälön ratkaisu on _____.

RYHMÄARVIOINTI (ryhmätaidot selitetty tarkemmin sivulla 2)

Ryhmätaito	Onnistuminen				
Autoimme ja rohkaisimme toisiamme					
Keskustelimme toisemme huomioiden					
Toistimme asioita tarvittaessa					
Keskityimme perusteluihin vastausten sijaan					

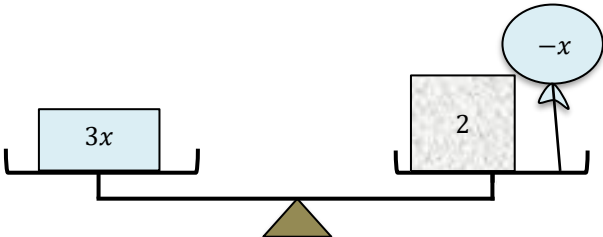
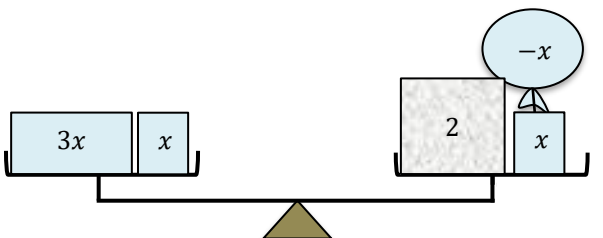
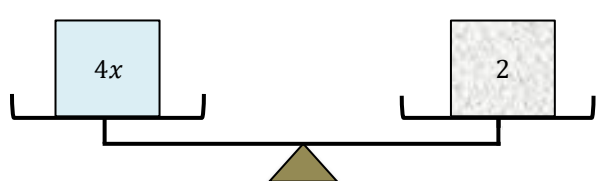
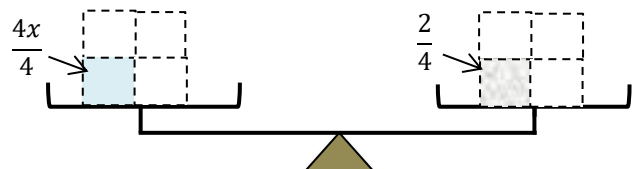
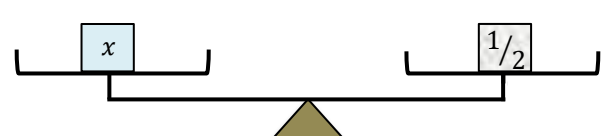
Kotitehtävä 1

i) Täydennä yhtälön $3x = 2 - x$ ratkaisutavan

a) matemaattinen esitys,

b) sanallisesti osio, johon kirjoitat, mitä yhtälölle tehdään ja mitä muunnosta käytetään.

ii) Tarkista lopuksi ovatko muunnettu (alimmainen) ja alkuperäinen yhtälö $3x = 2 - x$ tosia samalla muuttujan arvolla.

vaakamalli	matemaattinen esitys	sanallisesti
	$3x = 2 - x$	Lisään ____ molemmille puolille.
		Muunnos: L____
		Lasken __ ja __ yhteen. Toisella puolella lasken __ ja __ yhteen.
		Muunnokset: _____
		Jaan molemmat puolet luvulla ____.
		Muunnokset: _____
		Sievennän jakolaskut molemmilla puolilla.
		Muunnokset: ____
		Muunnoksia käytettyäni näen, että muuttujan x arvolla __ alkuperäinen yhtälö on tosi.

Kotitehtävä 2 Täydennä yhtälön ratkaisutapaan 1 matemaattinen esitys ja ratkaisutapaan 2 käytetty muunnos.

Tapa 1		Tapa 2	
Matemaattinen esitys	Muunnos	Matemaattinen esitys	Muunnos
$\frac{1}{4}x + 2 = 6$		$\frac{1}{4}x + 2 = 6$	
	V2		
	M M	$4 \cdot \frac{1}{4}x + 4 \cdot 2 = 6 \cdot 4$	
	K4	$x + 8 = 24$	
	M M	$x + 8 - 8 = 24 - 8$	
		$x = 16$	

2.3 Virheitä muunnosten käytössä

Esimerkki 1 Kalle ja Leena ovat ratkaisseet yhtälön $45y + 90 = 60y$ seuraavilla tavoilla:

	Kallen ratkaisu	Leenan ratkaisu	
Aluksi yhdistän vasemman puolen termit keskenään.	$45y + 90 = 60y$	$45y + 90 = 60y$	Aluksi vähennän molemmilta puolilta 45y.
Tämän jälkeen vähennän molemmilta puolilta 60y.	$135y = 60y$	$45y - 45y + 90 = 60y - 45y$	Muokkaan yhtälön molempia puolia suorittamalla yhteenlaskut.
Lopuksi jaan yhtälöä puolittain luvulla 75 ja saan vastauksen.	$135y - 60y = 60y - 60y$	$90 = 15y$	Lopuksi jaan yhtälöä puolittain luvulla 15.
	$75y = 0$	$\frac{90}{15} = \frac{15y}{15}$	Suoritan jakolaskut puolittain ja saan yhtälön ratkaisun.
	$\frac{75y}{75} = \frac{0}{75}$	$6 = y$	
	$y = 0$		



a) Kuvaile, mitä eroa Kallen ja Leenan ratkaisuissa on. _____

b) Kumpi on oikeassa? Miksi? Miten tarkistat tämän? _____

c) Mikä virhe on tehty? Kirjoita omin sanoin sääntö, jolla virhe voidaan välttää.

Kalle ja Leena ovat ratkoneet yhtälöitä ja vertailevat nyt ratkaisujaan samoille yhtälöille. Vastaa annettuihin kysymyksiin ja toimi opettajana tarkistaen Kallen ja Leenan ratkaisut yhtälöille.

Tehtävä 1

	Kallen ratkaisu	Leenan ratkaisu	
	$4a = 20$	$4a = 20$	
	$\frac{4a}{20} = \frac{20}{20}$	$\frac{4a}{4} = \frac{20}{4}$	
	$a = 1$	$a = 5$	



- Kerro suullisesti, mitä Kalle ja Leena ovat tehneet yrittäessään ratkaista yhtälön $4a = 20$. Kumpi ratkaisi oikein? _____
- Ympyröi virheellisestä ratkaisusta kohta, jossa virhe on tapahtunut.
- Muotoile omin sanoin lyhyt ohje, miten kyseisen virheen voi yhtälöä ratkaistaessa välttää.

Tehtävä 2 Kalle on tehnyt virheen yrittäessään ratkaista yhtälöä. Leena sen sijaan tietää, miten välttää tämä virhe. Kirjoita Leenan ratkaisu välivaiheineen näkyviin.

	Kallen ratkaisu	Leenan ratkaisu	
	$a + 8 + 12 = 20$ $20a = 20$ $\frac{20a}{20} = \frac{20}{20}$ $a = 1$	$a + 8 + 12 = 20$	

Vain samanmuotoisia termejä saa yhdistää. Kalle on yhdistänyt termit a , 8 ja 20 , mikä ei ole mahdollista, sillä $a + 20$ ei ole sama asia kuin $a \cdot 20$. (Tämän jälkeen Kalle olisi osannut jatkaa oikein, mutta ratkaisu on jo muuttunut eikä $a = 1$ ole alkuperäisen yhtälön ratkaisu.)

Tehtävä 3

	Kallen ratkaisu	Leenan ratkaisu	
	$x + 5 = 10$ $x + 5 - 5 = 10 - 5$ $x = 5$	$x + 5 = 10$ $5x = 10$ $x = 10 - 5$ $x = 5$	

- Kerro, mitä Kalle ja Leena ovat tehneet ratkaistessaan yhtälön $x + 5 = 10$. Kumpi ratkaisi oikein?
- Ympyröi virheellisestä ratkaisusta kohta, jossa virhe on tapahtunut.
- Muotoile omin sanoin lyhyt ohje, miten kyseisen virheen voi yhtälöä ratkaistaessa välttää.

Tehtävä 4



Kallen ratkaisu	Leenan ratkaisu
$-y + 7 = 12$	$-y + 7 = 12$
$-y + 7 - 7 = 12 - 7$	$-y + 7 - 7 = 12 - 7$
$-y = 5$	$-y = 5$
$y = -5$	$y = 5$



- Kerro, mitä Kalle ja Leena ovat tehneet ratkaistessaan yhtälön $-y + 7 = 12$. Kumpi ratkaisi oikein?
- Ympyröi virheellisestä ratkaisusta kohta, jossa virhe on tapahtunut.
- Muotoile omin sanoin lyhyt ohje, miten kyseisen virheen voi yhtälöä ratkaistaessa välttää.

Tehtävä 8 Kalle ja Leena ovat ratkaisseet yhtälöitä. Heiltä on jäänyt yksi välivaihe merkitsemättä...

Kallen ratkaisu	Leenan ratkaisu
$5 = k - 15$	$5 = k - 15$
_____	_____
$-10 = k$	$20 = k$

- Kumpi on kiireestä huolimatta saanut tehtävän ratkaistua oikein? _____.
- Täydennä puuttuva välivaihe viivalle siihen ratkaisuun, jossa ratkaisu oli oikein.

Tehtävä 6



Kallen ratkaisu	Leenan ratkaisu
$6 = \frac{x}{10} - 2$	$6 = \frac{x}{10} - 2$
$10 \cdot 6 = 10 \cdot \frac{x}{10} - 10 \cdot 2$	$10 \cdot 6 = 10 \cdot \frac{x}{10} - 2$
$60 = x - 20$	$60 = x - 2$
$80 = x$	$62 = x$



- Kerro, mitä Kalle ja Leena ovat tehneet ratkaistessaan yhtälön $6 = \frac{x}{10} - 2$. Kumpi ratkaisi oikein?
- Ympyröi virheellisestä ratkaisusta kohta, jossa virhe on tapahtunut.
- Muotoile omin sanoin lyhyt ohje, miten kyseisen virheen voi yhtälöä ratkaistaessa välttää.

Jokeri 7



Kallen ratkaisu

$$-2 + y + 10 = 40$$

$$y + 8 = 40$$

$$\frac{y + 8}{8} = \frac{40}{8}$$

$$y = 5$$

Leenan ratkaisu

$$-2 + y + 10 = 40$$

$$y + 8 = 40$$

$$y + 8 - 8 = 40$$

$$y = 40$$



a) Kerro, mitä Kalle ja Leena ovat tehneet ratkaistessaan yhtälön $-2 + y + 10 = 40$. Kumpi ratkaisi oikein? _____

b) Ympyröi virheellisestä ratkaisusta kohta, jossa virhe on tapahtunut.

c) Muotoile omin sanoin lyhyt ohje, miten kyseisen virheen voi yhtälöä ratkaistaessa välttää.

Jokeri 8



Kallen ratkaisu

$$15 + 2 = 17 - 10a$$

$$17 = 17 - 10a$$

$$17 - 17 = 17 - 17 - 10a$$

$$0 = 0 - 10a$$

$$10 = -10a + 10$$

$$10 = a$$

Leenan ratkaisu

$$15 + 2 = 17 - 10a$$

$$17 = 17 - 10a$$

$$17 - 17 = 17 - 17 - 10a$$

$$0 = 0 - 10a$$

$$0 = -10a$$

$$\frac{0}{-10} = \frac{-10a}{-10}$$

$$0 = a$$



a) Kerro, mitä Kalle ja Leena ovat tehneet ratkaistessaan yhtälön $15 + 2 = 17 - 10$. Kumpi ratkaisi oikein? _____

b) Ympyröi virheellisestä ratkaisusta kohta, jossa virhe on tapahtunut.

c) Muotoile omin sanoin lyhyt ohje, miten kyseisen virheen voi yhtälöä ratkaistaessa välttää.

RYHMÄARVIOINTI (ryhmätaidot selitetty tarkemmin sivulla 2)

Ryhmätaito	Onnistuminen				
Autoimme ja rohkaisimme toisiamme					
Keskustelimme toisemme huomioiden					
Toistimme asioita tarvittaessa					
Keskityimme perusteluihin vastausten sijaan					
Hyödynsimme virheitä oppiaksemme					

Kotitehtävä 1 Kalle ja Leena ovat lähteneet ratkaisemaan yhtälöä $15a = 10a + 30$.



Kallen ratkaisu	Leenan ratkaisu
$15a = 10a + 30$	$15a = 10a + 30$
$15a - 10a = 10a - 10a + 30$	$15a = 10a - 10a + 30$
...	...



a) Mitä muunnosta kumpikin on lähtenyt käyttämään ensimmäisenä?

b) Kumpi on käyttänyt muunnosta oikein? _____.

c) Mistä tiedät, että toinen ratkaisu ei ole oikein?

d) Muotoile omin sanoin lyhyt ohje, miten tällaisen virheen voi yhtälöä ratkaistaessa välttää.

Itsearviointi (täytetään yksin aina luvun päätteeksi)

EOS = En osaa sanoa

Miten hyvin osaat seuraavat asiat

- Lausekkeen ja yhtälön ero
- Yhtälön tasapaino
- Tutkia, onko yhtälö tosi/epätosi

1 = Erittäin heikosti

7 = Erinomaisesti

- Olen oppinut tunneilla käsitellyt asiat.
- Onnistuin keskittymään perusteluihin vastausten sijaan.
- Onnistun löytämään ja esittämään kysymyksiä.
- Onnistuin kuvailemaan ajatteluani muille.
- Onnistuin hyödyntämään virheitä oppiakseni.

1 2 3 4 5 6 7 EOS

1 2 3 4 5 6 7 EOS

1 2 3 4 5 6 7 EOS

1 2 3 4 5 6 7 EOS

1 2 3 4 5 6 7 EOS

1 2 3 4 5 6 7 EOS

1 2 3 4 5 6 7 EOS

1 2 3 4 5 6 7 EOS

Luku 3 Yhtälön ratkaiseminen

3.1 Yhtälön luominen ja ratkaiseminen

Tiesitkö, että toisen maailmansodan tapahtumien kulkuun vaikuttivat merkittävästi salausta ja salakuuntelumenetelmät? Nykyään digitaalisen tiedon salaaminen on yhä tärkeämpää. Tällä tunnilla salaaminen on muunnosten käyttämistä, jotta yhtälöstä tulisi haastavampi ja hakkerointi on muunnosten käyttämistä, jotta yhtälöstä tulee helpompi eli yhtälön ratkaisu on näkyvillä.

MUUNNOKSIA

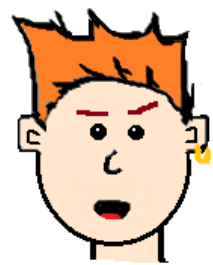
Muunnos L: saman termin lisääminen yhtälön molemmille puolille

Muunnos V: saman termin **vähentäminen** yhtälön molemmilta puolilta

Muunnos J: molempien puolien **jakaminen** samalla nollasta eroavalla luvulla

Muunnos K: molempien puolien **kertominen** samalla nollasta eroavalla luvulla

Muunnos M: Yhtälössä olevan lausekkeen/lausekkeiden **muokkaaminen**.



Tehtävä 1 Luokaa ryhmässä yhtälö alhaalta ylöspäin. (Myöhemmin ryhmät ratkaisevat toistensa yhtälöitä.)

a) Keksikää ryhmässä luku ja muuttuja, jotka merkitsette yhtä suuriksi (Seuraavalla sivulla on tilaa kirjoittaa).

Esimerkissä $12 = t$.

b) Tehkää tälle yhtälölle yhdessä valitsemianne muunnoksia. Edetkää alhaalta ylös.

Esimerkissä on kerrottu puolittain luvulla 3 (K3), lisätty molemmille puolille $2t$ (L $2t$) ja laskettu $3t$ ja $2t$ yhteen (M).

Yhtälön luomisen aloittaminen	Lopputulokset
$12 \cdot 3 = 3 \cdot t$	$36 + 2t = 5t$
$12 = t$	$36 + 2t = 3t + 2t$
...	$12 \cdot 3 = 3 \cdot t$
	$12 = t$

Diagram showing the transformation process from the initial equation to the final result. On the left, the initial equation $12 = t$ is transformed by multiplying both sides by 3 (K3) to get $12 \cdot 3 = 3 \cdot t$. On the right, the final equation $36 + 2t = 5t$ is transformed by subtracting $2t$ from both sides (V $2t$) to get $36 = 3t$, which is then simplified by dividing both sides by 3 (J3) to get $12 = t$. The final result is $12 = t$.

c) Olette luoneet ryhmässä yhtälön. Kirjoittakaa yhtälö taululle nimienne kanssa (esimerkissä $36 + 2t = 5t$).

Huolehtikaa, että jokainen ryhmänne jäsen on ymmärtänyt, mitä teitte. Osaatteko sanoa laskematta, millä muuttujan arvolla luomanne yhtälö on tosi? Jos tekisit uuden yhtälön, niin miten yhtälöstä voisi tehdä haastavamman?

Tehtävä 2 Tutkikaa taululle ilmestyviä yhtälöitä: Ovatko ne erilaisia? Millä tavoin?

Tehtävä 3 Ratkaisuvaihe: Ratkaiskaa toisten laatimia yhtälöitä. **Vertailuvaihe:** Käykää keskustelemassa jokaisesta ratkaisustanne keksijäryhmän kanssa. Miten ratkaisitte tai loitte yhtälön? Mitä olette tehneet samoin tai eri tavalla?

Ryhmän luomat yhtälöt		
1.	2.	3.
$___ = ___$		

Ryhmän valitsevat ratkaistavat yhtälöt		
1.	2.	3.
$______ = ______$		

Jokeri 4 Pohdi seuraavia kysymyksiä

- Onko merkitystä, missä järjestyksessä muunnoksia tehdään?
- Mitä samaa ja erilaista on yhtälön luomisessa ja ratkaisemisessa?
- Mitä tarkoittaa, että laskutoimitukset kumoavat toisensa? Miten idea liittyy yhtälönratkaisuun?
- Millaisia erilaisia yhtälöitä a) on olemassa b) osaat luoda c) osaat ratkaista?
- Millaisia keinoja löysit, joilla yhtälöistä saa tehtyä haastavamman?
- Millaisia virheitä löytyi?
- Millaisia erilaisia ratkaisutapoja löytyi?
- Millaisia hämmennyksiä ja kysymyksiä jäi vielä auki?
- Mitä uutta oivalsit? Mitä opit?

j) Miten onnistuit toisten ideoiden kuuntelemissa ja vertailussa?

RYHMÄARVIOINTI (ryhmätaidot selitetty tarkemmin sivulla 2)					
Ryhmätaito	Onnistuminen				
Autoimme ja rohkaisimme toisiamme					
Keskustelimme toisemme huomioiden					
Toistimme asioita tarvittaessa					
Keskityimme perusteluihin vastausten sijaan					
Hyödynsimme virheitä oppiaksemme					

Kotitehtävä 1 Millä muunnoksella aloittaisit seuraavien yhtälöiden ratkaisemisen?

a) $5 = 4x$

b) $\frac{(1-a)}{3} = 2$

c) $-s + 2 = 2s - 1$

Kotitehtävä 2

- Luo muunnoksia käyttäen yhtälö toisten ratkottavaksi.
- Ratkaise oma yhtälösi.

Kotitehtävä 3 Etsi yhtälö, jonka ratkaisemiseksi kannattaisi seuraavaksi

- Vähentää tai lisätä puolittain
- Jakaa tai kertoa puolittain

3.2 Yhtälönratkaisutehtäviä

Esimerkki 1 (Muunnosten eri merkintätavoista)

Matemaattinen esitys	Tapa 1	Matemaattinen esitys	Tapa 2
$2x + 6 = 10$	V6	$2x + 6 = 10$	$ - 6$
$2x + 6 - 6 = 10 - 6$	M M		
$2x = 4$	J 2	$2x = 4$	$: 2$
$\frac{2x}{2} = \frac{4}{2}$	M M		
$x = 2$		$x = 2$	

Tehtävä 1 Ratkaise yhtälöistä tuntematon muuttuja käyttäen oppimiasi muunnoksia. Valitkaa ryhmänne kanssa **kaksi** tehtäväsarjaa.

Sarja 1. a) $6a - 5 - 37 = 0$

b) $\frac{x}{2} - 3 = 10$

c) $12 + 6 = 2y + 4y$

Sarja 2. a) $a - 2 = 0$

b) $\frac{y}{2} = 4$

c) $4 + 8 = 20 + 2x$

Sarja 3. a) $0,3y + 0,2 = 1,1$

b) $3 - \frac{x}{4} = 3 + 4 - (8 + 3)$

c) $6a + 5 = 10a + 3$

Sarja 4. a) $4c - (c + 2c) = 3$

b) $17x + 3x + 1 = 6x + 17x + 1$

c) $8x + \pi = 5\pi$

RYHMÄARVIOINTI (ryhmätaidot selitetty tarkemmin sivulla 2)

Ryhmätaito	Onnistuminen				
Autoimme ja rohkaisimme toisiamme					
Keskustelimme toisemme huomioiden					
Toistimme asioita tarvittaessa					
Keskityimme perusteluihin vastausten sijaan					
Hyödynsimme virheitä oppiaksemme					

Jokeri 2 Kuvio on neliö. Laske sivun pituus.



$$2a + 3$$

$$5a - 12$$

Jokeri 3 Määritä lausekkeen $\frac{ax}{b}$ arvo, kun $a = \frac{2}{5}$ ja x on kolmasosa b :stä (yo syksy 1999)

Kotitehtävä 1 Ratkaise yhtälö ja tarkista vastauksesi

a) $4a + 3 = 7$

b) $7t - 11 = 3t + 5$

Kotitehtävä 2 Muodosta seuraavaan ongelmaan yhtälö ja ratkaise se:

Pullo ja sen sisältö maksavat yhteensä 4 €. Sisältö maksaa 3 euroa enemmän kuin pullo. Kuinka paljon pullo maksaa?

Itsearviointi

EOS = En osaa sanoa

Erittäin heikosti

Erinomaisesti

Miten hyvin osaat seuraavat asiat

• Yhtälön ratkaisun etsiminen	1	2	3	4	5	6	7	EOS
• Yhtälön ratkaisun tarkistaminen	1	2	3	4	5	6	7	EOS
• Eri muunnokset	1	2	3	4	5	6	7	EOS
• Sopivan muunnoksen löytäminen	1	2	3	4	5	6	7	EOS
• Tyyppiä $2t + 5 = 5t - 1$ olevan yhtälön ratkaiseminen	1	2	3	4	5	6	7	EOS
• Kertoa sanallisesti/ääneen, miten tehtävä ratkaistaan	1	2	3	4	5	6	7	EOS
• Olen oppinut tunneilla käsitellyt asiat.	1	2	3	4	5	6	7	EOS
• Onnistuin keskittymään perusteluihin vastausten sijaan.	1	2	3	4	5	6	7	EOS
• Onnistuin löytämään ja esittämään kysymyksiä.	1	2	3	4	5	6	7	EOS
• Onnistuin kuvailemaan ajatteluani muille.	1	2	3	4	5	6	7	EOS
• Onnistuin hyödyntämään virheitä oppiakseni.	1	2	3	4	5	6	7	EOS

Luku 4 Joustava yhtälönratkaisu

4.1 Sulkulausekkeet

Tehtävä 1 Täydennä oheista taulukkoa laskemalla lausekkeiden arvot eri muuttujan arvoilla.

	$x = 3$	$x = 5$	$x = -1$	$x = 10$	$x = \frac{1}{4}$	$x = -\frac{5}{3}$
$4(x + 3)$						
$4x + 12$						
$4x + 3$						
$4 + x + 3$						

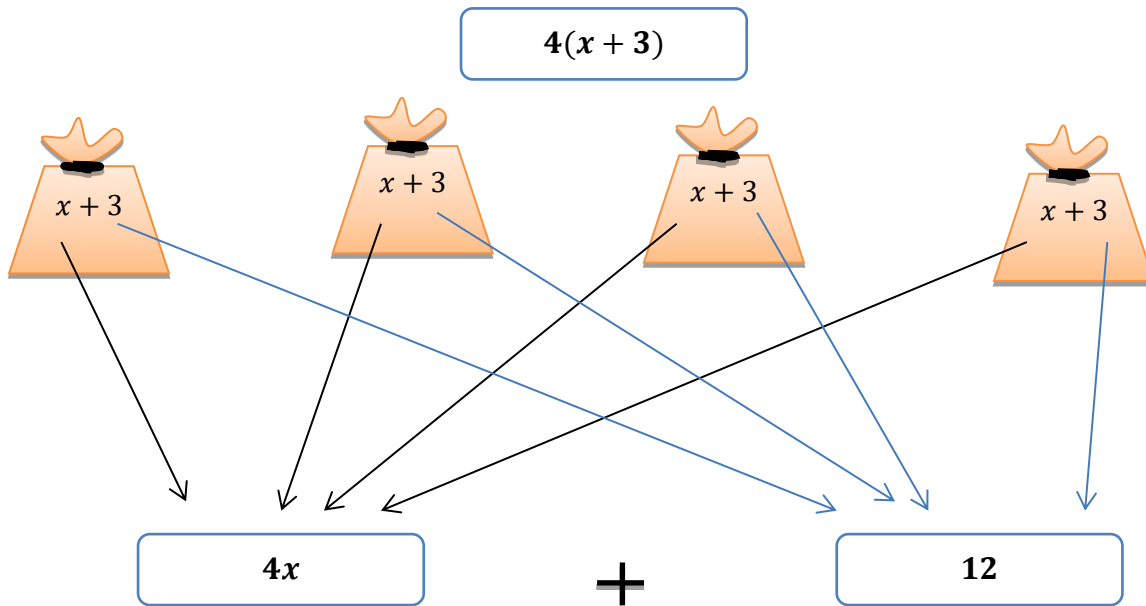
Pohdittavaa

Mitä eroa huomaat eri lausekkeiden välillä, kun niihin sijoitetaan sama muuttujan arvo?

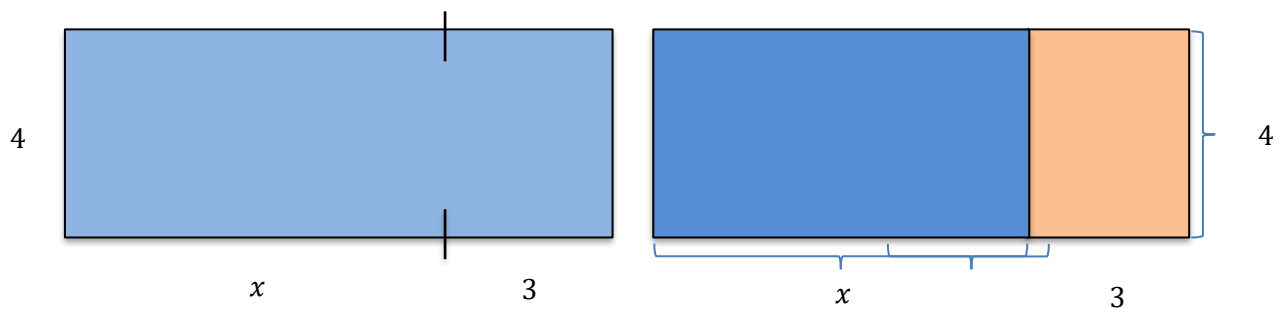
Johtopäätökset

Esimerkki 1 (Sulkulausekkeiden esitystapoja)

Tapa 1 (Säkkimalli)



Tapa 2 (Geometrinen malli)



Pinta-ala: $4(x + 3)$

Pinta-ala: $4x + 4 \cdot 3$

Koska nämä ovat saman suorakulmion pinta-alat, voidaan ne merkitä yhtä suuriksi: $4(x + 3) = 4x + 4 \cdot 3 = 4x + 12$.

Tehtävä 2 Piirrä lausekkeista

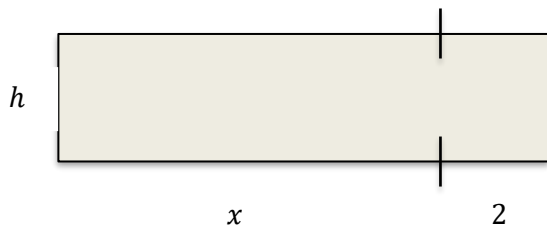
a) $3(1 + x)$ geometrinen malli,

b) $5(x - 5)$ säkkimalli.

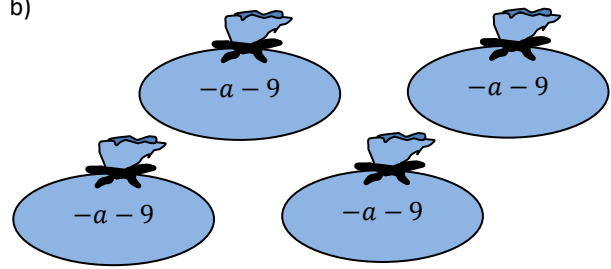
Kirjoita lopuksi a) ja b) kohtien lausekkeet ilman sulkuja.

Jokeri 3 Kirjoita a) kohdan pinta-alasta ja b) kohdan säikeistä lauseke sulkujen kanssa ja lauseke ilman sulkua.

a)



b)



Jokeri 4 Kirjoita ilman sulkua: $a(b + c)$

Jokeri 5 Kirjoita seuraavat lausekkeet sulkujen kanssa

a) $x + 2 + x + 2 + x + 2$

b) $3a + 3$

c) $2y - 2 + y - 1$

RYHMÄARVIOINTI (ryhmätaidot selitetty tarkemmin sivulla 2)

Ryhmätaito	Onnistuminen				
Autoimme ja rohkaisimme toisiamme					
Keskustelimme toisemme huomioiden					
Toistimme asioita tarvittaessa					
Keskityimme perusteluihin vastausten sijaan					
Hyödynsimme virheitä oppiaksemme					

Kotitehtävä 1 Piirrä säkkimallit seuraavista lausekkeista ja kirjoita lausekkeet ilman sulkua

a) $2(x + 3)$

b) $7(2x - 4)$

Kotitehtävä 2 Ratkaise yhtälö $12x - (5x - 2) = 23$.

4.2 Sulkuyhtälöt ja joustavuus

Esimerkki 1 Kalle ja Leena ovat ratkaisseet yhtälön $3(x + 2) = 15$ seuraavilla tavoilla:

	Kallen ratkaisu	Leenan ratkaisu	
Ensin kerroin vasemman puolen sulkeet auki.	$3(x + 2) = 15$	$3(x + 2) = 15$	Ensin jaoin yhtälön puolittain luvulla 3
Seuraavaksi vähensin luvun 6 molemmilta puolilta	$3x + 6 = 15$	$\frac{3(x + 2)}{3} = \frac{15}{3}$	Seuraavaksi vähensin luvun 2 molemmilta puolilta
Lopuksi jaoin molemmat puolet luvulla 3	$3x + 6 - 6 = 15 - 6$	$x + 2 = 5$	Vastaukseni on $x = 3$
Sain vastaukseksi $x = 3$	$3x = 9$	$x + 2 - 2 = 5 - 2$	
	$\frac{3x}{3} = \frac{9}{3}$	$x = 3$	
	$x = 3$		



- Kuinka Kalle ratkaisi yhtälön? Entä Leena? Ovatko he päätyneet oikeaan ratkaisuun? Mistä tiedät tämän?
- Huomaatko yhtäläisyyksiä Kallen ja Leenan ratkaisuissa?
- Kumpaa tapaa itse käyttäisit kyseisen yhtälön ratkaisuun?
- Jos yhtälö olisi muotoa $3(x + 2) = 17$, kumpi ratkaisutavoista olisi parempi, miksi?

	Kallen ratkaisu	Leenan ratkaisu	
Ensin kerroin vasemman puolen sulkeet auki.	$3(x + 2) = 17$	$3(x + 2) = 17$	Ensin jaoin yhtälön puolittain luvulla 3
Seuraavaksi vähensin luvun 6 molemmilta puolilta	$3x + 6 = 17$	$\frac{3(x + 2)}{3} = \frac{17}{3}$	Seuraavaksi vähensin luvun 2 molemmilta puolilta
Lopuksi jaoin molemmat puolet luvulla 3 ja sievensin jakolaskut	$3x + 6 - 6 = 17 - 6$	$x + 2 = \frac{17}{3}$	Lavensin samannimisiksi.
Sain ratkaisuksi $x = \frac{11}{3}$	$3x = 11$	$x + 2 - 2 = \frac{17}{3} - 2$	
	$\frac{3x}{3} = \frac{11}{3}$	$x = \frac{17}{3} - \frac{6}{3}$	
	$x = \frac{11}{3}$	$x = \frac{11}{3}$	

- _____
- _____
- _____
- _____

Tehtävä 1 Ratkaise yhtälöt kahdella eri tavalla.

a) $5(t + 2) = 11$

b) $5(t + 2) = 10.$

Tehtävä 2 Kalle ja Leena ovat ratkaisseet yhtälön $5(a + 3) = 20$ seuraavilla tavoilla:



Ensin jaoin yhtälön puolittain luvulla 5

Lopuksi vähensin luvun 3 molemmilta puolilta

Sain ratkaisuksi $a = 1$

Kallen ratkaisu

$$5(a + 3) = 20$$

$$\frac{5(a + 3)}{5} = \frac{20}{5}$$

$$a + 3 = 4$$

$$a + 3 - 3 = 4 - 3$$

$$a = 1$$

Leenan ratkaisu

$$5(a + 3) = 20$$

$$5(a + 3) - 3 = 20 - 3$$

$$5a = 17$$

$$\frac{5a}{5} = \frac{17}{5}$$

$$a = \frac{17}{5}$$



Ensin vähensin luvun 3 molemmilta puolilta.

Lopuksi jaoin molemmat puolet luvulla 5

Sain ratkaisuksi $a = \frac{17}{5}$

a) Kerro, mitä Kalle ja Leena ovat tehneet ratkaistessaan yhtälön $5(a + 3) = 20$. Kumpi ratkaisi oikein? _____

b) Ympyröi virheellisestä ratkaisusta kohta, jossa virhe on tapahtunut.

c) Muotoile omin sanoin lyhyt ohje, miten kyseisen virheen voi yhtälöä ratkaistaessa välttää.

Tehtävä 3 Tarkastele Jessican ja Mintun ratkaisutapoja yhtälölle $4(t - 1) + 3(t - 1) = 35$.

a) **Jessican** ratkaisutapa. Täydennä vaiheet tyhjille viivoille esimerkin avulla.

$$4(t - 1) + 3(t - 1) = 35$$

Ensin _____

$$4t - 4 + 3t - 3 = 35$$

Lasken 4t ja 3t yhteen sekä ____ ja ____ yhteen.

$$7t - 7 = 35$$

_____ luvun 7 puolittain

$$7t = 42$$

Jaan luvulla ____ puolittain ja sievennän jakolaskut

$$t = 6$$

b) **Mintun** ratkaisutapa. Täydennä vaiheet tyhjille viivoille.

$$4(t - 1) + 3(t - 1) = 35$$

Lasken _____ ja _____ yhteen.

$$7(t - 1) = 35$$

_____ luvulla 7 puolittain.

$$t - 1 = 5$$

Lisään luvun ____ puolittain.

$$t = 6$$

c) **Pohdi**

i) Mitä eroa Jessican ja Mintun ratkaisutavoilla on? _____

ii) Jos pitäisi ratkaista yhtälö $4(y + 5) + 6(y + 4) + 5(y + 2) = 45$, kumman ratkaisutapaa käyttäisit? Ympyröi ratkaisusi;

Jessican

Mintun

iii) Perustelu valintaasi: _____

Tehtävä 4 Ratkaise yhtälö $4(y + 4) + 6(y + 4) + 5(y + 4) = 45$ valitsemallasi ratkaisutavalla.

Mintun tavalla:

Jessican tavalla:

Jokeri 5 Ratkaise yhtälö $4(t + 1) + 3(t + 2) = 7$.

Jokeri 6 Kalle ja Leena ovat ratkaisseet yhtälön $2(m + 3) = -4(m + 3) + 12$ seuraavilla tavoilla:



Kallen ratkaisu

$$2(m + 3) = -4(m + 3) + 12$$

$$2m + 6 = -4m + (-12) + 12$$

$$2m + 6 = -4m$$

$$2m - 2m + 6 = -4m - 2m$$

$$6 = -6m$$

$$\frac{6}{-6} = \frac{-6m}{-6}$$

$$-1 = m$$

Leenan ratkaisu

$$2(m + 3) = -4(m + 3) + 12$$

$$2(m + 3) + 4(m + 3) = -4(m + 3) + 4(m + 3) + 12$$

MM

$$6(m + 3) = 12$$

$$\frac{6(m + 3)}{6} = \frac{12}{6}$$

$$m + 3 = 2$$

$$m + 3 - 3 = 2 - 3$$

$$m = -1$$



a) Mitä Kalle on tehnyt yhtälölle ensimmäisenä? Entä Leena? _____

b) Merkitse Kallen ja Leenan ratkaisuihin käytetyt muunnokset lyhenteillä näkyville. (Mallina Leenan ratkaisussa toinen käytetty muunnos).

c) Ovatko Kalle ja Leena päätyneet oikeaan ratkaisuun? Mistä tiedät tämän? (Laita tarkistus perusteluksi alle)

d) Kumpaa ratkaisutavoista (Kallen vai Leenan) itse käyttäisit? Perustele. _____

RYHMÄARVIOINTI (ryhmätaidot selitetty tarkemmin sivulla 2)

Ryhmätaito	Onnistuminen				
Autoimme ja rohkaisimme toisiamme					
Keskustelimme toisemme huomioiden					
Toistimme asioita tarvittaessa					
Keskityimme perusteluihin vastausten sijaan					
Hyödynsimme virheitä oppiaksemme					

Kotitehtävä 1 Kirjoita, ensimmäinen muunnos ja seuraava rivi yhtälöiden ratkaisussa. Sinun **EI TARVITSE** siis ratkaista yhtälöä loppuun. Yritä löytää myös toinen tapa lähteä liikkeelle.

a) $2(y + 6) + 3(y + 6) = 25$ b) $9 = 3(t - 3) + 2(2t - 3) + 7(t - 3)$ c) $6 = 3(t - 3)$

Kotitehtävä 2 Ratkaise yhtälö kahdella eri tavalla $-12(5y + 2) = 24$

Tavalla 1:

Tavalla 2:

4.3 Lisää joustavia yhtälöitä

Esimerkki 1 Kalle ja Leena ovat ratkaisseet yhtälön $\frac{x}{4} - \frac{x}{5} = -2$ seuraavilla tavoilla:

Kerron yhtälöä puolittain luvulla 20, joka on nimittäjien pienin yhteinen jaettava

Tämän jälkeen sievensin yhtälön vasenta ja oikeaa puolta.

Lopuksi vielä laskin vasemmalla puolella yhteen $5x$ ja $-4x$.

Kallen ratkaisu

$$\frac{x}{4} - \frac{x}{5} = -2$$

$$20 \cdot \left(\frac{x}{4} - \frac{x}{5} \right) = -2 \cdot 20$$

$$\frac{20x}{4} - \frac{20x}{5} = -40$$

$$5x - 4x = -40$$

$$x = -40$$

Leenan ratkaisu

$$\frac{x}{4} - \frac{x}{5} = -2$$

$$\frac{5x}{20} - \frac{4x}{20} = -2$$

$$\frac{x}{20} = -2$$

$$20 \cdot \frac{x}{20} = -2 \cdot 20$$

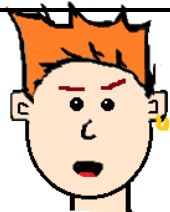
$$x = -40$$

Aluksi lavennan murtoluvut vasemmalla puolella, että niillä on yhteinen nimittäjä.

Lasken vähennyslaskun vasemmalla puolella.

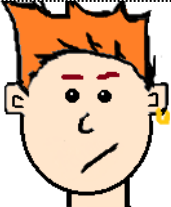
Kerron yhtälöä puolittain luvulla 20.

Sain ratkaisuksi $x = -40$



- a) Miksi Kalle kertoi yhtälöä aluksi luvulla 20? _____
- b) Miksi Leena lavensi murtoluvut vasemmalla puolella ensimmäiseksi? _____
- c) Mitä yhtäläisyyksiä ja eroavaisuuksia huomaat Kallen ja Leenan ratkaisutavassa? _____
- d) Ovatko Kalle ja Leena päätyneet oikeaan ratkaisuun? Mistä tiedät tämän? (Kirjoita tarkistus perusteluksi alle)
- e) Kumpi ratkaisutavoista (Kallen vai Leenan) on mielestäsi yksinkertaisempi? Perustele.

Tehtävä 1 Kalle ja Leena ovat ratkaisseet yhtälön $\frac{1}{4}(x + 3) = 2$ seuraavilla tavoilla:

	Kallen ratkaisu	Leenan ratkaisu	
Ensin kerroin sulkeet auki. Seuraavaksi vähensin molemmilta puolilta $\frac{3}{4}$. Lopuksi kerroin molemmilta puolilta luvulla 4 ja sain ratkaisuni. 	$\frac{1}{4}(x + 3) = 2$	$\frac{1}{4}(x + 3) = 2$	Ensiksi kerroin yhtälöä molemmin puolin luvulla 4. Sitten vähensin luvun 3 molemmilta puolilta. Tässä on ratkaisuni. 
	$\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} = 2$	$4 \cdot \frac{1}{4}(x + 3) = 2 \cdot 4$	
	$\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 2 - \frac{3}{4}$	$x + 3 = 8$	
	$\frac{1}{4}x = \frac{8}{4} - \frac{3}{4}$	$x + 3 - 3 = 8 - 3$	
	$\frac{1}{4}x = \frac{5}{4}$	$x = 5$	
	$4 \cdot \frac{1}{4}x = \frac{5}{4} \cdot 4$		
	$x = 5$		

a) Mitä yhtäläisyyksiä ja eroavaisuuksia huomaat Kallen ja Leenan ratkaisutavassa? _____

b) Ovatko Kalle ja Leena päätyneet oikeaan ratkaisuun? Mistä tiedät tämän? (Kirjoita tarkistus perusteluksi alle)

c) Kumpi ratkaisutavoista (Kallen vai Leenan) on mielestäsi soveltuvampi tälle yhtälölle? Perustele.

Tehtävä 2 Ratkaise seuraavat yhtälöt

a) $\frac{y}{3} + \frac{y}{4} = 20$

b) $\frac{3x+6}{3} + \frac{24+12x}{4} = 8$

c) $3(h+1) = 6(h+1)$

d) $e^{-i\omega t} - 1 = e^{-i\omega t} + 4t.$

Tehtävä 3 Kalle, Leena ja Miia ovat ratkaisseet yhtälön $\frac{t}{3} - 1 = 12$ seuraavilla tavoilla:

Kallen ratkaisu	Leenan ratkaisu	Miian ratkaisu
$\frac{t}{3} - 1 = 12$	$\frac{t}{3} - 1 = 12$	$\frac{t}{3} - 1 = 12$
$\frac{t}{3} - 1 + 1 = 12 + 1$	$\frac{t}{3} - \frac{3}{3} = 12$	$3 \cdot (\frac{t}{3} - 1) = 12 \cdot 3$
$\frac{t}{3} = 13$	$\frac{t-3}{3} = 12$	$\frac{3t}{3} - 3 = 36$
$3 \cdot \frac{t}{3} = 13 \cdot 3$	$3 \cdot \frac{t-3}{3} = 12 \cdot 3$	$t - 3 = 36$
$t = 39$	$t - 3 = 36$	$t - 3 + 3 = 36 + 3$
	$t - 3 + 3 = 36 + 3$	$t = 39$
	$t = 39$	



- a) Mitä yhtäläisyyksiä ja eroavaisuuksia huomaat Kallen, Leenan ja Miian ratkaisuissa? _____
- _____
- b) Mitä ratkaisutapaa käyttäisit tälle yhtälölle? Miksi? _____
- _____
- c) Kirjoita Kallen, Leenan ja Miian käyttämien muunnosten lyhenteet ratkaisujen viereen näkyville.

Jokeri 4 Kalle ja Leena ovat ratkaisseet yhtälön $2t - (2 + 3t) = -4t$ seuraavilla tavoilla:

	Kallen ratkaisu	Leenan ratkaisu	
Vähennän molemmilta puolilta $2t$ ja sievennän.	$2t - (2 + 3t) = -4t$	$2t - (2 + 3t) = -4t$	Ensin avasin sulkeet vasemmalla puolella.
Kerron yhtälöä puolittain luvulla -1	$2t - 2t - (2 + 3t) = -4t - 2t$	$2t - 2 - 3t = -4t$	Sievennän yhtälön vasenta puolta laskemalla laskut.
Vähennän molemmilta puolilta $3t$.	$-(2 + 3t) = -6t$	$-t - 2 = -4t$	Lisään molemmille puolille t ja sievennän.
Lopuksi jaan yhtälöä puolittain luvulla 3 , ratkaisuni yhtälölle on $\frac{2}{3} = t$.	$-(2 + 3t) \cdot (-1) = -6t \cdot (-1)$ $2 + 3t = 6t$ $2 + 3t - 3t = 6t - 3t$ $2 = 3t$ $\frac{2}{3} = \frac{3t}{3}$ $\frac{2}{3} = t$	$-t + t - 2 = -4t + t$ $-2 = -3t$ $\frac{-2}{-3} = \frac{-3t}{-3}$ $\frac{2}{3} = t$	Lopuksi jaan puolittain luvulla -3 ja sain vastaukseksi $t = \frac{2}{3}$




a) Mitä yhtäläisyyksiä ja eroavaisuuksia huomaat Kallen, Leenan ja Miian ratkaisuisissa?

b) Mitä hyötyjä Kallen ratkaisutavassa on? Entä Leenan?

c) Miten itse ratkaisisit kyseisen yhtälön? Perustele.

Jokeri 5 Ratkaise seuraavat yhtälöt

a) $7 = \frac{4y}{3}$

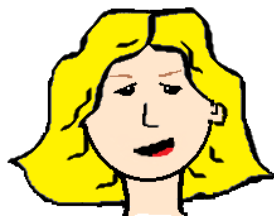
b) $\frac{2x}{3} - 1 = 4x + \frac{1}{2}$

$$c) -a = \frac{a(x+1)}{2}$$

$$d) 3(h+1) = 6(h+2)$$

Jokeri 6 Kalle, Leena ja Miia ovat ratkaisseet yhtälön $8 - 4(x - 3) = 40$ seuraavilla tavoilla:

Kallen ratkaisu	Leenan ratkaisu	Miian ratkaisu
$8 - 4(x - 3) = 40$	$8 - 4(x - 3) = 40$	$8 - 4(x - 3) = 40$
$8 - 4x - 12 = 40$	$8 - 8 - 4(x - 3) = 40 - 8$	$\frac{8}{4} - \frac{4(x - 3)}{4} = \frac{40}{4}$
$-4x - 4 = 40$	$-4(x - 3) = 32$	$2 - x + 3 = 10$
$-4x - 4 + 4 = 40 + 4$	$\frac{-4(x - 3)}{-4} = \frac{32}{-4}$	$x + 5 = 10$
$-4x = 44$	$x - 3 = -8$	$x + 5 - 5 = 10 - 5$
$\frac{-4x}{-4} = \frac{44}{-4}$	$x - 3 + 3 = -8 + 3$	$x = 5$
$x = -11$	$x = -5$	



- Käy huolella lävitse Kallen, Leenan ja Miian ratkaisu.
- Kuka ratkaisi yhtälön oikein? _____.
- Ympyröi virheellisiin ratkaisuihin kohta, jossa virhe on tapahtunut.
- Ratkaise virheelliset ratkaisut uudelleen siten, että vastaus on oikein. (Jatka siis ratkaisua siitä kohti, missä se viimeisen kerran oli oikein ja yritä edetä siten kuin ratkaisija oli edennyt)

RYHMÄARVIOINTI (ryhmätaidot selitetty tarkemmin sivulla 2)

Ryhmätaito	Onnistuminen				
Autoimme ja rohkaisimme toisiamme					
Keskustelimme toisemme huomioiden					
Toistimme asioita tarvittaessa					
Keskityimme perusteluihin vastausten sijaan					
Hyödynsimme virheitä oppiaksemme					

Kotitehtävä 1 Ratkaise seuraavat yhtälöt

a) $12x - (5x - 2) = 23$

b) $3y + \frac{y}{3} = 20$

c) $2(3 + y) = 18$

Kotitehtävä 2 Mitä olet oppinut sulku- ja murtoyhtälöiden ratkaisemisesta? _____

Itsearviointi (täytetään yksin aina luvun päätteeksi)

EOS = En osaa sanoa

1 = Erittäin heikosti

7 = Erinomaisesti

Miten hyvin osaat seuraavat asiat

- | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|
| • Lausekkeen ja yhtälön ero | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |
| • Yhtälön tasapaino | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |
| • Tutkia, onko yhtälö tosi/epätosi | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |
| | | | | | | | | |
| • Olen oppinut tunneilla käsitellyt asiat. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |
| • Onnistuin keskittymään perusteluihin vastausten sijaan. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |
| • Onnistun löytämään ja esittämään kysymyksiä. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |
| • Onnistuin kuvailemaan ajatteluani muille. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |
| • Onnistuin hyödyntämään virheitä oppiakseni. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |

5 Kertaus

Tehtävä 1 Kerratkaa oppimanne asiat yhdessä keskustellen.

- Samanmuotoiset termit
- Lausekkeen ja yhtälön ero
- Yhtälön totuusarvon tutkiminen
- Yhtälön ratkaisun etsiminen
- Yhtälön ratkaisun tarkistaminen
- Eri muunnokset ja niiden käyttäminen
- Tyyppeä $2t + 5 = 5t - 1$ olevan yhtälön ratkaiseminen

Tehtävä 2 Tutki, ovatko seuraavat yhtälöt tosia vai epätosia. Perustele vastauksesi suullisesti.

a) $6 \cdot 12 = 4 \cdot 12 + 2 \cdot 12$

b) $3 + 2 = 8$

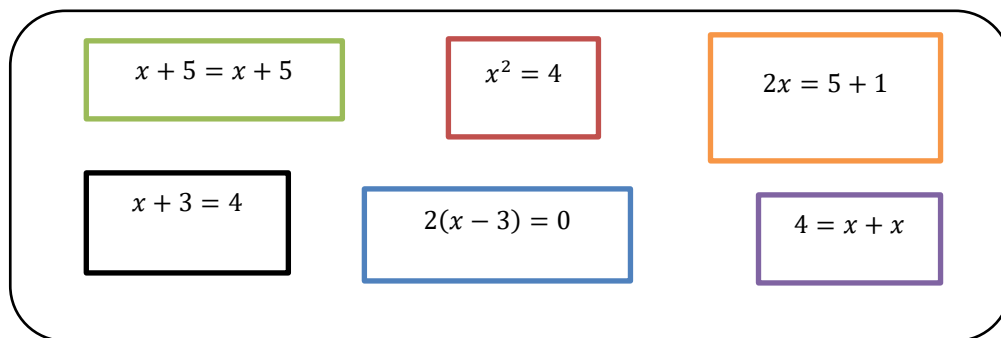
c) $y + 2 = 4 + 5$

d) $-180 = -(-180)$

Tehtävä 3

a) Laske lausekkeen $3x - 5$ arvo, kun $x = -2$.

b) Onko alla yhtälö/yhtälöitä, joiden ratkaisu on $x = 3$?



$x + 5 = x + 5$

$x^2 = 4$

$2x = 5 + 1$

$x + 3 = 4$

$2(x - 3) = 0$

$4 = x + x$

Vastaus ja perustelu:

Tehtävä 4 Täydennä matemaattinen ja sanallinen esitys

Matemaattinen esitys	Muunnos	Sanallinen selitys
$-5 - y = y + 2$		
	L y	_____ molemmille puolille $y: n$.
	M M	Muokkaan yhtälöä puolittain laskemalla laskun _____ vasemmalla ja oikealla puolella.
	V2	_____ puolittain luvun 2.
	M M	Muokkaan yhtälöä puolittain suorittamalla laskut _____ ja _____.
	J 2 M M	Jaan yhtälön molempia puolia luvulla _____ ja suoritan syntyvät jakolaskut. Yhtälön ratkaisu on _____.

Tehtävä 5 Kalle ja Leena ovat ratkaisseet yhtälön $2x + 5 = 3x - 3 + 5$ seuraavilla tavoilla



Kallen ratkaisu	Leenan ratkaisu
$2x + 5 = 3x - 3 + 5$	$2x + 5 = 3x - 3 + 5$
$2x + 5 - 5 = 3x - 3 + 5 - 5$	$2x + 5 = 3x + 2$
$2x + 5 = 3x - 3$	$2x + 5 = 5x$
$2x - 2x + 5 = 3x - 2x - 3 + 3$	$2x = 5x - 5$
$5 = 3x - 2x$	$2x - 2x = 5x - 5 - 2x$
$5 = x$	$0 = 3x - 5$
	$0 + 5 = 3x - 5 + 5$
	$5 = x$



- a) Minkä muunnokset Kalle on tehnyt ensimmäisenä? _____ Entä Leena? _____.
- b) Tarkista, ovatko Kallen ja Leenan vastaukset oikein.

- c) Ympyröi virheet. Muotoile omin sanoin lyhyt ohje, miten kyseisen virheen voi välttää.

Tehtävä 6 Ratkaise seuraavat yhtälöt.

a) $y + 3y = 10 - 2$

b) $t - 2 = 3t + 4$

c) $1 + \frac{a}{5} = 7$

d) $5(2z - 4) = 20$

Tehtävä 7

a) Laske yhtälö $-2(y + 4) + 6(y + 4) = 12$ vähintään kahdella eri tavalla.

Tavalla 1

Tavalla 2

b) Kumpi ratkaisutapa on mielestäsi sopivampi tähän tehtävään? Miksi? _____

Jokeri 8 Kalle ja Leena ovat ratkoneet yhtälöitä ja vertailevat nyt ratkaisujaan samoille yhtälöille. Vastaa annettuihin kysymyksiin ja toimi opettajana tarkistaen Kallen ja Leenan ratkaisut yhtälöille.

	Kallen ratkaisu	Leenan ratkaisu	
	$4b + 16 = -8$	$4b + 16 = -8$	
	$\frac{4b}{4} + \frac{16}{4} = \frac{-8}{4}$	$\frac{4b + 16}{4} = \frac{-8}{4}$	
	$b + 4 = -2$	$b + 16 = -2$	
	$b + 4 - 4 = -2 - 4$	$b + 16 - 16 = -2 - 16$	
	$b = -6$	$b = -18$	

- a) Kerro, mitä Kalle ja Leena ovat tehneet ratkaistessaan yhtälön $4b + 16 = -8$. Kumpi ratkaisi oikein?
- _____
- b) Ympyröi virheellisestä ratkaisusta kohta, jossa virhe on tapahtunut.
- c) Muotoile omin sanoin lyhyt ohje, miten kyseisen virheen voi yhtälöä ratkaistaessa välttää.

Jokeri 9 Täydennä yhtälön ratkaisun matemaattinen esitys kahdella eri tavalla.

Matemaattinen esitys	Muunnos	Matemaattinen esitys	Muunnos
$\frac{8 + 20x}{4} = 6x$	K4	$\frac{8 + 20x}{4} = 6x$	M
	M M		V5x
	V20x		M M
	M M		
	J4 M M		

RYHMÄARVIOINTI (ryhmätaidot selitetty tarkemmin sivulla 2)

Ryhmätaito	Onnistuminen				
Autoimme ja rohkaisimme toisiamme					
Keskustelimme toisemme huomioiden					
Toistimme asioita tarvittaessa					
Keskityimme perusteluihin vastausten sijaan					
Hyödynsimme virheitä oppiaksemme					

Jokeri 10 Muodosta yhtälö ja ratkaise se.

a) Tiina ja Ville jakavat 60 euron palkan. Tiina teki töitä kaksi kertaa niin paljon kuin Ville. Kuinka paljon kumpikin saa palkkaa?

b) Kolmen peräkkäisen kokonaisluvun summa on 108. Mikä on pienin luvuista?

c) Lippu Robinin konserttiin maksoi aikuisille (eli yli 12-vuotiaille) 20 euroa ja alle 12-vuotiaille 10 euroa. Selvitä, montako lasten ja montako aikuisten lippua myytiin, kun tiedetään, että lippuja myytiin yhteensä 350 kappaletta ja lipunmyyntituloja saatiin yhteensä 4000 euroa.

Jokeri 11 Muodosta mahdollisimman haastava yhtälö ja ratkaise se.

Loppuitsearviointi

Vastaa seuraaviin kysymyksiin.

Miten hyvin osaat seuraavat asiat

1 = Erittäin heikosti

7 = Erinomaisesti

- | | | | | | | | |
|--|---|---|---|---|---|---|---|
| • Lausekkeen rakenne | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Lausekkeen sieventäminen | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Lausekkeen ja yhtälön ero | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Yhtälön tasapaino | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Tutkia, onko yhtälö tosi/epätosi | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Yhtälön ratkaisun etsiminen | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Yhtälön ratkaisun tarkistaminen | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Eri muunnokset | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Sopivan muunnoksen löytäminen | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Tyyppeä $2t + 5 = 5t - 1$ olevan yhtälön ratkaiseminen | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Kertoa sanallisesti/ääneen, miten tehtävä ratkaistaan | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| | | | | | | | |
| • Olen oppinut kurssilla käsitellyt asiat. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Onnistuin keskittymään perusteluihin vastausten sijaan. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Onnistun löytämään ja esittämään kysymyksiä. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Onnistuin kuvailemaan ajatteluani muille. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Onnistuin vertailemaan tehtävien eroavaisuuksia ja yhtäläisyyksiä. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Onnistuin löytämään ja vertailemaan eri ratkaisutapoja | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Onnistuin hyödyntämään virheitä oppiakseni. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

Minkä asian olet oppinut parhaiten?

Missä sinulla on eniten opittavaa?

Palautetta yhtälöiden opiskelusta: