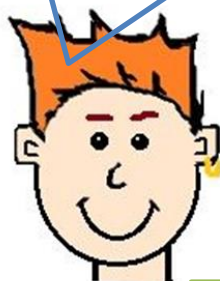


att beskriva tänkande högt
att uppskatta att stå stilla i
inlärningsprocessen
att uppskatta fel
~~svar~~ slutledning och argumentering
överbäggande av begrepp
att uppskatta olika lösningar



Undervisnings-
och kultur-
ministeriet



FLEXIBEL EKVATIONSÖÖSNING

$$a + 3 = 2a + 1$$

$$2(x - 3) = 16$$

Ekvation

Att jämföra uttryck
Uttryck = Uttryck
Sann, osann, stundom sann?

vågmodell
transformationer

frihet att undersöka
att söka efter lösning

Namn: _____

Klass: _____

Licens: Erkännande 4.0 Internationell (CC BY 4.0)
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.sv>



Innehåll

SYFTET AV MATEMATISKT GRUPPARBETE	2
Kapitel 1 Inledning till ekvationer	3
1.1 Vad är en ekvation?	3
1.2 Vad är ekvationslösning?	7
Kapitel 2 Att bekanta sig med transformationer	10
2.1 a) Transformationer och vågmodell	10
2.1 b) Transformationer och vågmodell	11
2.2 Bekanta dig med användning av transformationer	16
2.3 Fel i användning av transformationer	25
Kapitel 3 Ekvationslösning	30
3.1 Att forma och lösa en ekvation	30
3.2 Uppgifter i ekvationslösning	33
Kapitel 4 Flexibel ekvationslösning	35
4.1 Parentesuttryck	35
4.2 Parentesuttryck och flexibilitet	39
4.3 Mera flexibla ekvationer	44
5 Repetition	52
Självutvärdering	57

Författare:

Peter Hästö (2015-2019), Dimitri Tuomela (2015-2019), Riikka Palkki (2015-2019), Virpi Kostama (2015-2017), Marko Leinonen (2016), Hannu Suvanto (2015), Juha Jaako (2015)

Idén av Kalle och Lena-uppgifterna i materialet baserar sig på Jon R. Stars material

<http://scholar.harvard.edu/contrastingcases/>

SYFTET AV MATEMATISKT GRUPPARBETE

Gruppnamn: _____

Bekanta er i kunskaper gällande matematiskt grupparbete nedan. **Välj två punkter som er grupp skall bli bra på.**

1)
2)

Dina egna mål i grupparbetet

1)
2)

KUNSKAPER I MATEMATISKT GRUPPARBETE

HJÄLP ANDRA OCH BE OM HJÄLP:

- Be om hjälp och hjälp andra.
- Du kan också be om hjälp från andra grupper.
- Beskriv din tankegång. Berätta för de andra vilka saker du inte förstår.
- Ha en positiv inverkan på stämningen. Uppmuntra, tacka och beröm.

DISKUTERA FLEXIBELT

- Ta ställning: Är du av samma eller annan åsikt? Varför?
- Var artig. Ge kritik åt påståenden, inte individerna.
- Fäst dina tankar i andras inlägg.
- Be om betänketid.

REPETITION ÄR VIGTIGT

- En gång räcker ofta inte till att förstå saken.
- "Kan du förklara på nytt...?"
- "Menar du att...?"
- "Kunde någon annan förklara saken?"

KONCENTRERA DIG I SLUTLEDNING I STÄLLET FÖR SVARET

- Jämför olika lösningssätt.
- Undersök felaktigt slutledning och lär dig av det.
- Ställ frågor och förundra dig! "Jag undrar varför..."
- Sök efter olika synpunkter. Var kreativ! "Tänk om...?"
- Hitta bra frågor och skriv ner dem.

Kapitel 1 Inledning till ekvationer

1.1 Vad är en ekvation?

Ekvationens struktur och identifiering

Uppgift 1 Utred vilka av följande är ekvationer och vilka å sin sida är uttryck. Ringa in ekvationerna.

a) $8 = 10 - 2$

f) $1745 + 31 = 103 - 20$

b) $74 - 5$

g) $8 \cdot 14 = 4 \cdot 14 + 4 \cdot 14$

c) $-4 = -2 + 2$

h) $2a = a$

d) $10 \cdot 5 + 5 \cdot 10$

i) $-2 + 4 = -(2 + 4)$

e) $3 = 3$

j) $\square + 1 = 5 \cdot \square$

Jämförelse av en ekvation och ett uttryck



Empty speech bubble for the boy's response.

Vilka likheter har ekvationer och uttryck?

Vilka olikheter har ekvationer och uttryck?

Empty speech bubble for the girl's response.



Ekvation som påstående

Exempel 1 Är de följande påståendena sanna eller osanna?

a) *Nilen är en flod.*

b) $2 + 5 + 1 = 8$

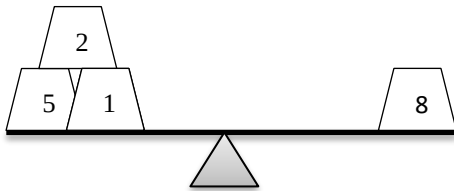
c) *Jorden är platt som en plätt.*

d) $8 + 2 = 7 + 5$

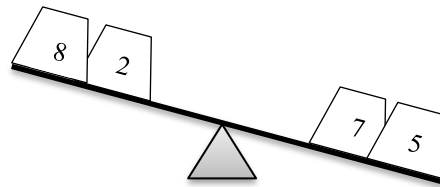
e) *Ett bord har fyra ben.*

f) $x = 4$

Ekvation illustrerad med hjälp av en våg



$$2 + 5 + 1 = 8$$



$$8 + 2 < 7 + 5$$

Exempel 2 Är de följande påståendena sanna eller osanna? Motivera dina svar.

a) $\frac{6}{2} = 1 + 2$

b) $4567 + 1000 = 5500 + 67$

c) $7x + 3 - 5$

d) $3x + 8 = 3x + 8$

e) $3a + 7 = b - 1$

f) $7 < 3$

Vad är en ekvation?

När är en ekvation sann?

Uppgift 2 Betrakta **uppgift 1** på nytt. Kontrollera om ekvationerna som du inringat är sanna eller osanna.

Joker 3 Formulera av figurerna nedan en ekvation som

1001

$9y$

-10

$\frac{11}{5}$

4

$\frac{4}{5}$

x

0,2

3

1

$-$
 $+$
 $\cdot$
 $\div$
 $=$

a) är sann.

b) är osann.

c) innehåller en variabel.

OBS!

- Du får själv bestämma innehållet av de tomma lådorna och cirkklarna.
- Du får använda innehållet eller symbolen av samma låda flera gånger i ekvationen så länge som slutresultatet är fortfarande en ekvation enligt uppdraget.

Bedöm tillsammans hur er grupp lyckades under denna lektion.

GRUPPVÄRDERING (gruppfärdigheter beskrivs mer detaljerat på sida 2)					
Gruppfärdigheter	Framgång				
Vi hjälpte och uppmuntrade varandra					
Vi beaktade varandra i diskussioner					
Vi repeterade saker vid behov					
Vi koncentrerade oss i motivering i stället för svar					
Vi drog nytta av våra fel					

Hemuppgift 1

a) Utred vilka av figurerna i lådan nedan är uttryck och vilka av dem är ekvationer. Ringa in ekvationerna.

b) Ta reda på om de inringade ekvationerna är sanna eller osanna. Skriv sann/osann bredvid ekvationen.

$$-7 = x$$

$$3 \cdot (9 - x)$$

$$u + 1 = 2u - u$$

$$3 \cdot 8 - 3 \cdot 7 - 3$$

$$\frac{8}{4}$$

$$5 = -5$$

$$7 + 3 = 8 + \frac{10}{5}$$

$$15037 - 138 = 15036 - 137$$

w

Hemuppgift 2 Skriv ner en sak som du har lärt dig om ekvationer.

1.2 Vad är ekvationslösning?

Uppgift 1 Utred genom att beräkna om ekvationerna i tabellen är sanna eller osanna med givna värden för variabeln.

Vad upptäcker du i tabellen?

	$x = 2$	$x = 5$	$x = -1$	$x = 3$	$x = 7$	$x = \frac{1}{2}$	$x =$
A							
$x + 2 = 7$							
B							
$x + 1 = x$							
C							
$x - 5 = 2x - x - 5$							
D							
$10 - x = 3$							
E							
$1 + x$							
F							
$5x - 3 = 2x + 3$							
G							
$x^2 + 6 = 5x$							

Vad upptäckte ni?

Nytt begrepp (Ekvationslösning)

Ekvationslösningen är ett tal som gör ekvationen sann när den placeras i stället för variabeln, d.v.s. den uppfyller ekvationen.

Exempel 1 Är variabelns värde $x = 3$ ekvationslösningen då ekvationen är

a) $11 = 5 + 2x$

b) $5x + 5 = 3x - 8$

Uppgift 2 Vilka av följande är eller är inte ekvationslösningar till ekvationen $2x - 6 = x - 8$?

a) $x = 3$

b) $x = -2$

c) $s = 1$

d) $x = \frac{1}{2}$

Uppgift 3 Beräkna lösningen till ekvationen

a) $2p = 6$

b) $4x = 2 + 2x$

c) $4x + 2 = 9 - x$

Joker 4 Är ekvationen sann eller osann då variabelns värde är -4 ?

a) $3x + 8 = -2x - 4$

b) $-5b + 6 = 3b + 38$

Joker 5 Vilket värde skall variabeln k ha då ekvationslösningen är $x = 3$?

a) $2x + k = 8$

b) $k - 3x = 7$

c) $x + 2k = k - 9$

d) $6x - k = 9 - 2$

GRUPPVÄRDERING (gruppfärdigheter beskrivs mer detaljerat på sida 2)					
Gruppfärdigheter	Framgång				
Vi hjälpte och uppmuntrade varandra					
Vi beaktade varandra i diskussioner					
Vi repeterade saker vid behov					
Vi koncentrerade oss i motivering i stället för svar					
Vi drog nytta av våra fel					

Hemuppgift 1 Repetera (du behöver inte skriva ner) följande begrepp: a) ekvation b) ekvationslösning.

Hemuppgift 2 Ekvationen är $5x - 6 = 3 + x$. Svara på de följande frågorna och motivera dina svar.

- a) Är ekvationen sann när $x = 2$? b) Är variabelns värde 3 ekvationslösningen?

Hemuppgift 3 Bevisa att talet 4 är ekvationslösningen till följande ekvationer:

- a) $3x + 1 = 13$ b) $\frac{x}{2} - 14 = 9x - 48$.

Självutvärdering (fylls i alltid på egen hand i slutet av kapitlet)

Hur väl kan du de följande sakerna

- Skillnaden mellan en ekvation och ett uttryck
- Ekvationens balans
- Utredda om ekvationen är sann/osann

1 = Väldigt svagt

VE = Vet ej

7 = Utmärkt

- Jag har lärt mig det som har gått genom under lektionen.
- Jag lyckades koncentrera mig i motivering i stället för svar.
- Jag lyckades hitta och ställa frågor.
- Jag lyckades beskriva min tankegång till andra.
- Jag lyckades dra nytta av mina fel för att lära mig.

1 2 3 4 5 6 7 VE

1 2 3 4 5 6 7 VE

1 2 3 4 5 6 7 VE

1 2 3 4 5 6 7 VE

1 2 3 4 5 6 7 VE

1 2 3 4 5 6 7 VE

1 2 3 4 5 6 7 VE

1 2 3 4 5 6 7 VE

Kapitel 2 Att bekanta sig med transformationer

Kapitel 2.1. gås igenom med antingen betraktelsesätt a eller b.

2.1 a) Transformationer och vågmodell

Exempel 1 Betrakta de följande ekvationerna.

$y + 2y = 3$	$\frac{y}{10} = \frac{1}{2}$	$3y = 3$	$3y - 4 = -1$
$2y = 10$	$3y + 2 = 5$	$2y = 5 \cdot 2$	$y = 5$

- Vilka av dessa ekvationer har samma lösning?
- Med hurdana räkneoperationer får du ekvationen transformerad till en annan ekvation med samma lösning?
- Skriv på tavlan ekvationen som du har funnit och som har samma lösning som någon av ekvationerna i lådan.

Exempel 2 (Sammanfattning av transformationer)

En transformation är ett sätt att ändra ekvationen så att ekvationens balans/ sanningsvärde/ lösning förblir det samma som i den ursprungliga ekvationen. Med andra ord är den nya ekvationen sann då variabeln har samma värde som den ursprungliga ekvationen.

OBS! Till exempel att tillägga ett tal på bara en sida av ekvationen är inte en transformation eftersom lösningen ändras.

TRANSFORMATIONER

Transformation A: att addera samma term på ekvationens båda sidor.

Transformation S: att _____ samma term på ekvationens båda sidor.

Transformation D: att _____ båda sidor med samma nollskilt heltal.

Transformation M: att _____ båda sidor med samma nollskilt heltal.

Transformation T: Att _____ leden i ekvationen.

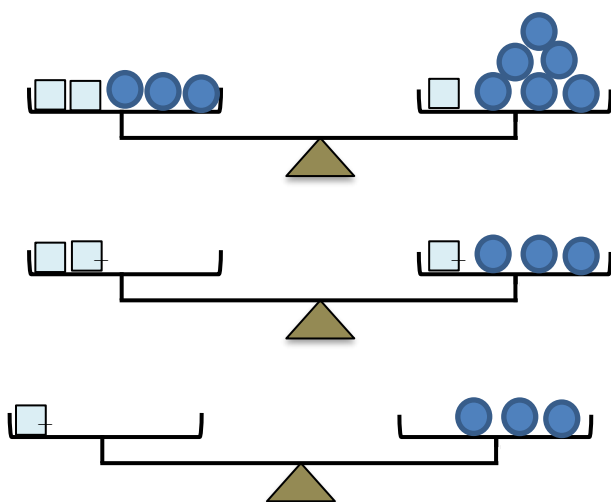
GRUPPVÄRDERING (gruppfärdigheter beskrivs mer detaljerat på sida 2)

Gruppfärdigheter	Framgång				
Vi hjälpte och uppmuntrade varandra					
Vi beaktade varandra i diskussioner					
Vi repeterade saker vid behov					
Vi koncentrerade oss i motivering i stället för svar					
Vi drog nytta av våra fel					

Hemuppgift: Se animationen: <https://ouluma.fi/wp-content/uploads/2016/11/yhtalo1-1.gif>

2.1 b) Transformationer och vågmodell

Exempel 1. Vågmodell. Vad är en låda (uppge med hjälp av bollar)?

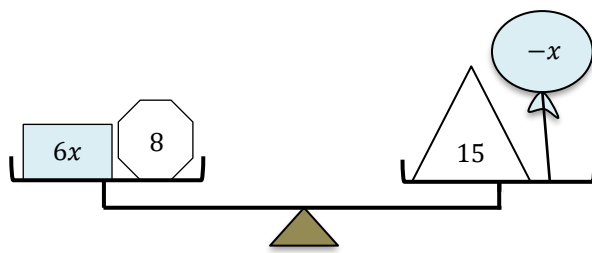


Nytt begrepp (Att transformera ett uttryck)

Obs! Negativa tal/termer visas med hjälp av ballonger.

Det finns lika mycket på vågens båda sidor fast uttrycken skulle bearbetas. Här bearbetas uttrycket till vänster.

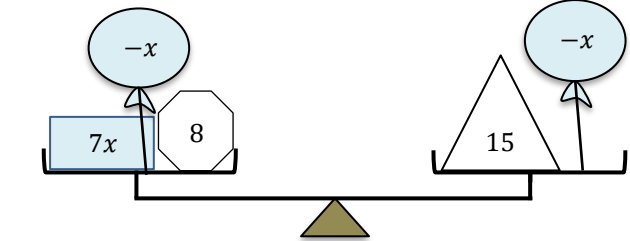
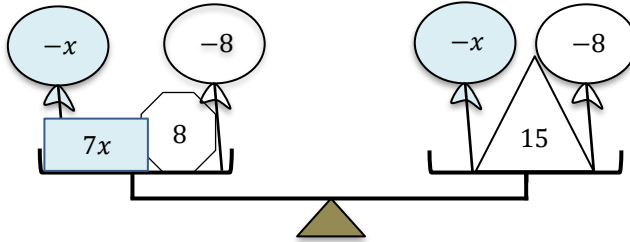
<i>vågmodell</i>	<i>matematisk framställning</i>	<i>transformation</i>
	$-x + 7x + 8 = 15 - x$	T ↙



$$6x + 8 = 15 - x$$

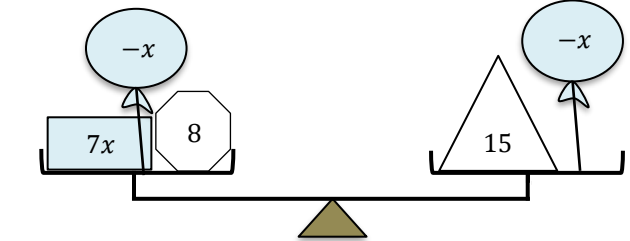
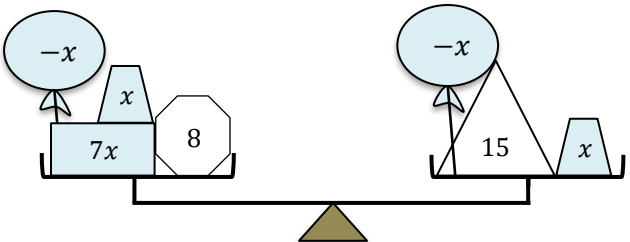
Nytt begrepp (Subtraktion)

Om det finns lika mycket på ekvationens båda sidor i början, måste där finnas lika mycket också då man subtraherar 8 från var sin sida. När man tittar på vågen märker man att man får samma resultat som om man skulle addera -8 .

<i>vågmodell</i>	<i>matematisk framställning</i>	<i>transformation</i>
	$-x + 7x + 8 = 15 - x$	
	$-x + 7x + 8 - 8 = 15 - x - 8$	-8

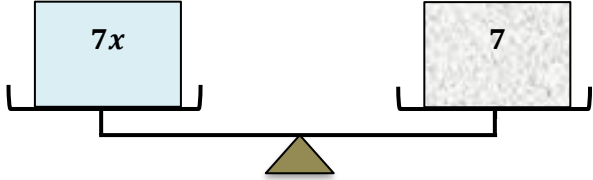
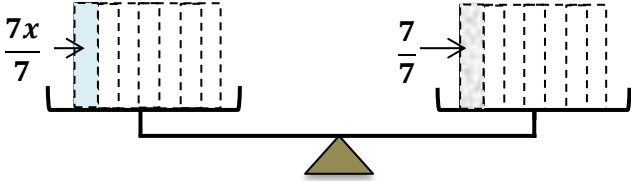
Nytt begrepp (Addition)

Om det finns lika mycket på ekvationens båda sidor, ändras ingenting om man tillägger en lika stor vikt på var sin sida.

<i>vågmodell</i>	<i>matematisk framställning</i>	<i>transformation</i>
	$-x + 7x + 8 = 15 - x$	
	$-x + 7x + 8 + x = 15 - x + x$	$+x$

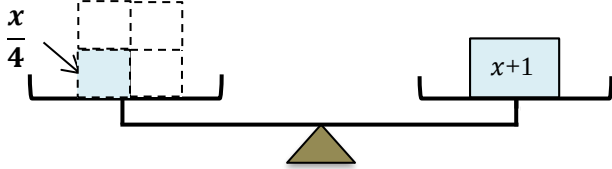
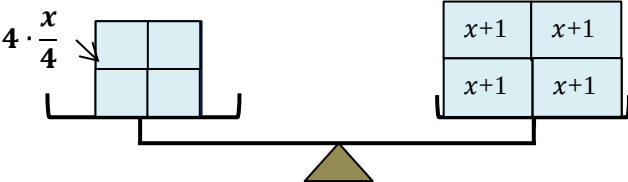
Nytt begrepp (Division)

Om man lämnar en sjundedel på var sin sida, skall det fortfarande finnas lika mycket på båda sidorna om det tidigare också fanns.

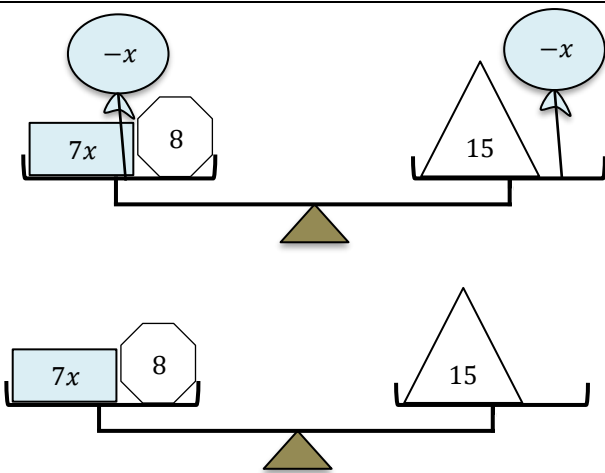
<i>vågmodell</i>	<i>matematisk framställning</i>	<i>transformation</i>
 	$7x = 7$ $\frac{7x}{7} = \frac{7}{7}$	<i>D7</i>

Nytt begrepp (Multiplikation)

Om man multiplicerar båda sidorna med fyra, är summan på båda sidorna densamma endast om det tidigare också var.

<i>vågmodell</i>	<i>matematisk framställning</i>	<i>transformation</i>
 	$\frac{x}{4} = x + 1$ $4 \cdot \frac{x}{4} = 4 \cdot (x + 1)$	<i>M4</i>

Exempel 2 (Addering och bearbetning)

vågmodell	matematisk framställning	transformation
	$-x + 7x + 8 = 15 - x$ $7x + 8 = 15$	$Ax \ T \ T$

Exempel 3 (Sammanfattning av transformationer)

En **transformation** är ett sätt att ändra ekvationen så att ekvationens balans/sanningsvärde/lösning förblir det samma som i den ursprungliga ekvationen. Med andra ord är den nya ekvationen sann när variabeln har samma värde som i den ursprungliga ekvationen.

OBS! Till exempel att tillägga ett tal på bara en sida av ekvationen är inte en transformation eftersom lösningen ändras.

TRANSFORMATIONER

Transformation A: att addera samma term på ekvationens båda sidor.

Transformation S: att _____ samma term på ekvationens båda sidor.

Transformation D: att _____ båda sidor med samma nollskilt heltal.

Transformation M: att _____ båda sidor med samma nollskilt heltal.

Transformation T: Att _____ leden i ekvationen.

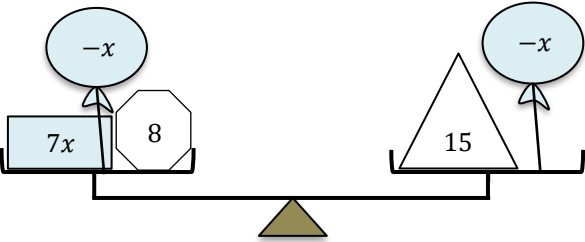
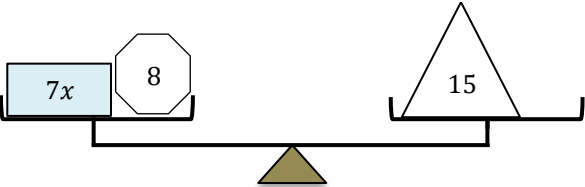
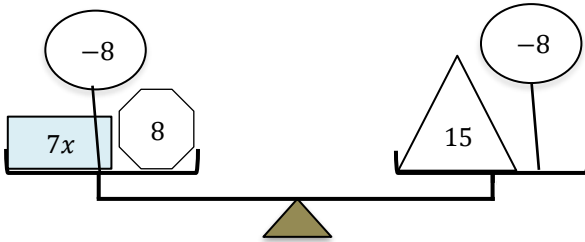
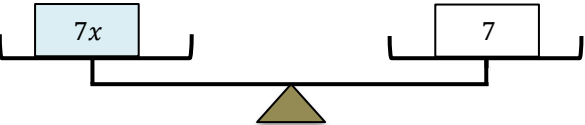
GRUPPVÄRDERING (gruppfärdigheter beskrivs mer detaljerat på sida 2)

Gruppfärdigheter	Framgång				
Vi hjälpte och uppmuntrade varandra					
Vi beaktade varandra i diskussioner					
Vi repeterade saker vid behov					
Vi koncentrerade oss i motivering i stället för svar					
Vi drog nytta av våra fel					

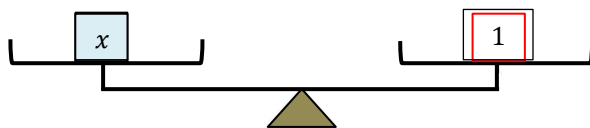
Hemuppgift: Se animationen: <https://ouluma.fi/wp-content/uploads/2016/11/yhtalo1-1.gif>

2.2 Bekanta dig med användning av transformationer

Exempel 1 Studera hur du kan använda transformationer för att lösa en utmanande ekvation.

	vågmodell	matematisk framställning	transformation
1		$-x + 7x + 8 = 15 - x$	
2			Ax T T
3			S8
4			T T
			D7 T T

5



a) Fyll i mellanfaserna som fattas i kolumnen *matematisk framställning*.

b) Vilket värde skall variabeln ha i sista punkten (5) så att ekvationen är sann? Placera detta värde i andra ekvationerna (1–4). Markera placeringen under ditt svar i kolumnen *matematisk framställning*. Vad märker du?

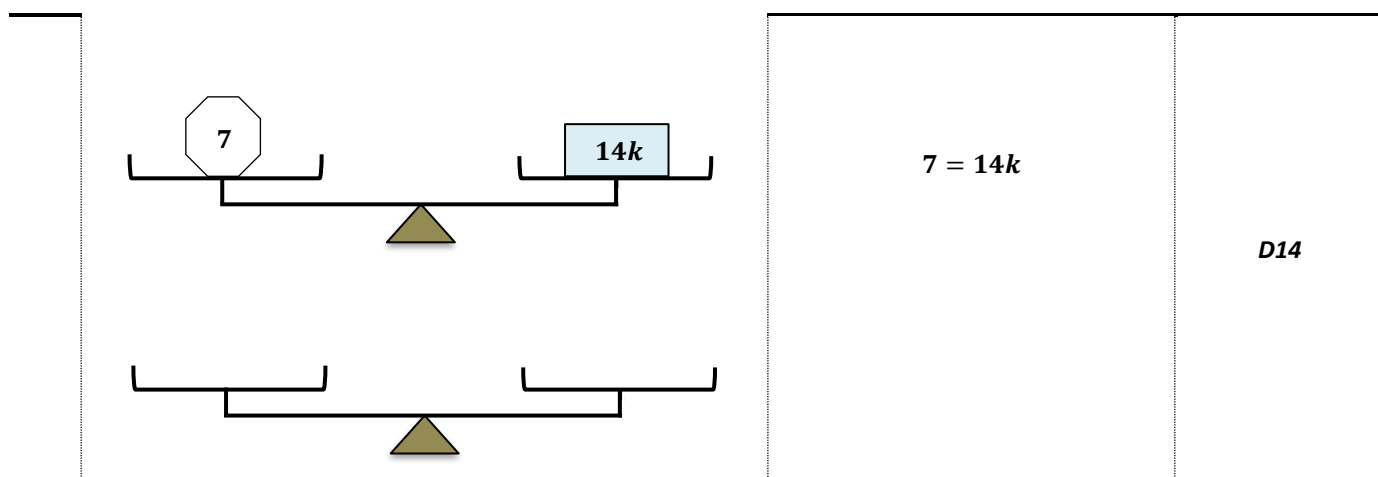
c) Skriv kort vad som ändras eller bevaras när transformationer används i en ekvation.

ÄNDRAS

BEVARAS

Uppgift 1 Använd den givna transformationen i ekvationen och ange situationen efter transformationen både i vågmodellen och med hjälp av matematisk framställning.

a)	<i>vågmodell</i>	<i>matematisk framställning</i>	<i>transformation</i>
		$2x - 1 = 5$	A1
b)		$2x - 1 = 5$	A1 T T
c)	<i>vågmodell</i>	<i>matematisk framställning</i>	<i>transformation</i>



Uppgift 2

matematisk framställning	transformation	verbal framställning
$\frac{b}{9} - 11 = -8$	A11	Jag adderar talet ____ på ekvationens båda sidor.
$\frac{b}{9} - 11 + 11 = -8 + 11$	TT	Jag transformerar ekvationens sidor genom att addera ____ och ____ på vänstra sidan. På högra sidan adderar jag talen ____ och ____.
$\frac{b}{9} = 3$	M9	Jag multiplicerar var sin sida av ekvationen med ____.
$9 \cdot \frac{b}{9} = 9 \cdot 3$	TT	Jag transformerar ekvationen genom att utföra räkneoperationen ____ till vänster och ____ till höger.
$b = 27$		Nu kan jag se att den ursprungliga ekvationen är sann när ____, d.v.s. ekvationslösningen är ____.

Uppgift 3 Fyll i matematisk framställning och verbal framställning.

matematisk framställning	transformation	verbal framställning
$5y = 4y - 20$	S4y	Jag subtraherar ____ från båda sidor av ekvationen.

TT

Jag transformerar ekvationen med att beräkna
_____ på ekvationens vänstra sida och
_____ på ekvationens högra sida.

Dessa ekvationer är sanna när _____.

Uppgift 4 Fyll i *transformation* och *verbal framställning*.

matematisk framställning	transformation	verbal framställning
$17 + 1 = 17 + 2a$		Jag subtraherar talet ____ från var sin sida.
$17 + 1 - 17 = 17 + 2a - 17$		Jag transformerar ekvationen genom att beräkna ____ på vänstra sidan och ____ på högra sidan.
$1 = 2a$		Jag dividerar båda sidorna med ____.
$\frac{1}{2} = \frac{2a}{2}$		Jag transformerar ekvationens högra sida genom att dividera ____.
$\frac{1}{2} = a$		Nu ser jag att lösningen till den ursprungliga ekvationen är ____.

Uppgift 5 Fyll i *transformation* i lösningssätt 1 och *matematisk framställning* i lösningssätt 2.

Sätt 1		Sätt 2	
matematisk framställning	transformation	matematisk framställning	transformation
$4a = 2a + 2$		$4a = 2a + 2$	
$\frac{4a}{2} = \frac{2a}{2} + \frac{2}{2}$			S2a
$2a = a + 1$			T T
$2a - a = a - a + 1$			D2
$a = 1$			T T

Joker 6 Vilken transformation har Kalle eller Leena använt i ekvationen? Skriv lösningen i ord **eller** med förkortningar.



$$5x - 3 - 2x - 3 = 0$$

$$3x - 6 = 0$$

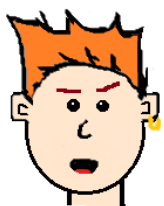
Kalle _____

Leena _____



$$3x - 6 = 0$$

$$3x - 6 + 6 = 0 + 6$$



$$62 = 62 + 17x$$

$$0 = 17x$$

Kalle _____

Leena _____



$$0 = 17x$$

$$\frac{0}{17} = \frac{17x}{17}$$



$$\frac{5}{4} + \frac{b}{2} = 2$$

$$\frac{5}{4} - \frac{5}{4} + \frac{b}{2} = 2 - \frac{5}{4}$$

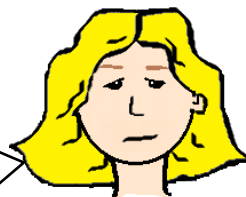
Kalle _____

Leena _____



$$\frac{b}{2} = \frac{3}{4}$$

$$2 \cdot \frac{b}{2} = \frac{3}{4} \cdot 2$$



Joker 7 Fyll i matematisk framställning och verbal framställning.

matematisk framställning	transformation	verbal framställning
$15x + 10 = 5x + 30$		
	S10	Jag subtraherar _____ från båda sidorna av ekvationen.
	T T	Jag transformerar ekvationen genom att beräkna _____ på vänstra sidan och _____ på högra sidan.
	S5x	_____.
	T T	Jag transformerar ekvationen genom att beräkna _____ på vänstra sidan och _____ på högra sidan.
	D10	_____.
	T T	Jag transformerar ekvationen genom att utföra divisionerna _____ och _____.
		Nu ser jag att lösningen till den ursprungliga ekvationen är _____.

GRUPPVÄRDERING (gruppfärdigheter beskrivs mer detaljerat på sida 2)

Gruppfärdigheter	Framgång				
Vi hjälpte och uppmuntrade varandra					
Vi beaktade varandra i diskussioner					
Vi repeterade saker vid behov					
Vi koncentrerade oss i motivering i stället för svar					
Vi drog nytta av våra fel					

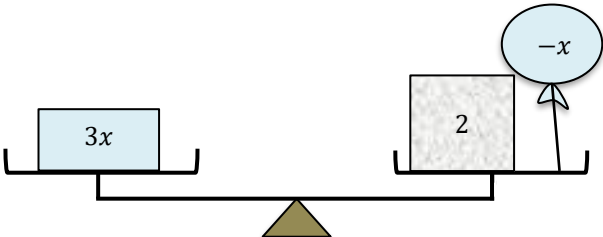
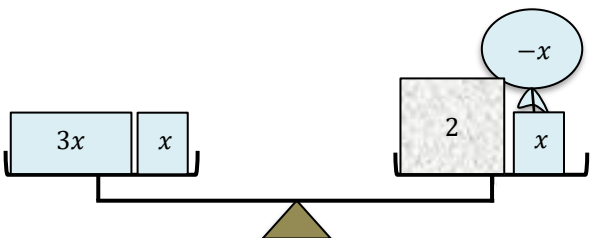
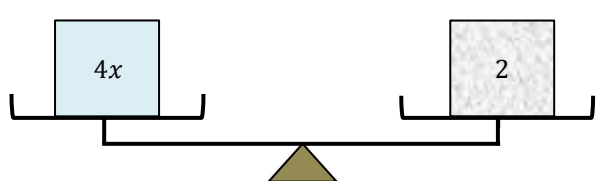
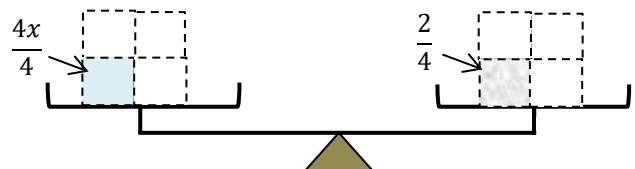
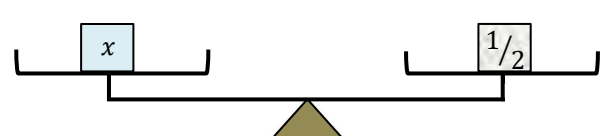
Hemuppgift 1

i) Fyll i ekvationens $3x = 2 - x$

a) matematisk framställning,

b) verbal framställning där du skriver vad som händer till ekvationen och vilken transformation som används.

ii) Kontrollera till slut att den transformerade (den nedersta) ekvationen och den ursprungliga $3x = 2 - x$ är sanna när variabeln har samma värde.

vågmodell	matematisk framställning	verbal framställning
	$3x = 2 - x$	Jag adderar ____ på båda sidorna. Transformation: A ____
		Jag beräknar ____ och ____ ihop. På andra sidan beräknar jag ____ och ____ ihop. Transformationer: ____
		Jag dividerar båda sidorna med ____. Transformationer : ____
		Jag hyfsar divisionerna på båda sidorna. Transformationer: ____
		Efter att jag använt transformationer märker jag att när variabeln x har värdet ____ är den ursprungliga ekvationen sann.

Hemuppgift 2 Fyll i *matematisk framställning* i Sätt 1 och *transformation* i Sätt 2.

Sätt 1		Sätt 2	
matematisk framställning	transformation	matematisk framställning	transformation
$\frac{1}{4}x + 2 = 6$		$\frac{1}{4}x + 2 = 6$	
	S2	$4 \cdot \frac{1}{4}x + 4 \cdot 2 = 6 \cdot 4$	
	T T	$x + 8 = 24$	
	M4	$x + 8 - 8 = 24 - 8$	
	T T	$x = 16$	

2.3 Fel i användning av transformationer

Exempel 1 Kalle och Leena har löst ekvationen $45y + 90 = 60y$ på följande sätt:

Först räknar jag ihop termerna på vänstra sidan.

Därefter subtraherar jag $60y$ från båda sidorna.

Till slut dividerar jag ekvationen med 75 och får svaret.



Kalles lösning

$$45y + 90 = 60y$$

$$135y = 60y$$

$$135y - 60y = 60y - 60y$$

$$75y = 0$$

$$\frac{75y}{75} = \frac{0}{75}$$

$$y = 0$$

Leenas lösning

$$45y + 90 = 60y$$

$$45y - 45y + 90 = 60y - 45y$$

$$90 = 15y$$

$$\frac{90}{15} = \frac{15y}{15}$$

$$6 = y$$

Först subtraherar jag $45y$ från båda sidorna.

Jag transformerar båda sidorna av ekvationen genom att utföra räkneoperationerna.

Till slut dividerar jag ekvationens båda sidor med 15.

Efter divisionen får jag lösningen till ekvationen.



a) Beskriv skillnaden mellan Kalles och Leenas lösningar. _____

b) Vem har rätt? Varför? Hur kontrollerar du detta? _____

c) Var är misstaget? Skriv med egna ord en regel som hjälper med att undvika felet.

Kalle och Leena har löst ekvationer och jämför sina lösningar till samma ekvationer. Svara de givna frågorna och operera som en lärare och kontrollera Kalles och Leenas lösningar till ekvationerna.

Uppgift 1



Kalles lösning

$$4a = 20$$

$$\frac{4a}{20} = \frac{20}{20}$$

$$a = 1$$

Leenas lösning

$$4a = 20$$

$$\frac{4a}{4} = \frac{20}{4}$$

$$a = 5$$



a) Berätta muntligt vad Kalle och Lena har gjort när de har försökt lösa ekvationen $4a = 20$.

Vem löste ekvationen rätt? _____

b) Ringa in stället där misstaget har gjorts i den felaktiga lösningen.

c) Skriv med egna ord en kort anvisning om hur ett sådant misstag kunde undvikas i ekvationslösning.

Uppgift 2 Kalle har gjort ett fel när han har försökt lösa ekvationen. Leena däremot vet hur man ska undvika felet. Skriv ner Leenas lösning med mellanfaserna.

	Kalles lösning	Leenas lösning	
	$a + 8 + 12 = 20$ $20a = 20$ $\frac{20a}{20} = \frac{20}{20}$ $a = 1$	$a + 8 + 12 = 20$	

Man får sätta ihop endast termer som har samma form. Kalle har satt ihop termerna a , 8 och 20 , som är inte möjligt eftersom $a + 20$ inte är samma sak som $a \cdot 20$. (Efter detta skulle Kalle ha kunnat fortsätta felfritt, men lösningen har redan ändrat och $a = 1$ är inte lösningen till den ursprungliga ekvationen.)

Uppgift 3

	Kalles lösning	Leenas lösning	
	$x + 5 = 10$ $x + 5 - 5 = 10 - 5$ $x = 5$	$x + 5 = 10$ $5x = 10$ $x = 10 - 5$ $x = 5$	

- Beskriv vad Kalle och Leena har gjort när de har löst ekvationen $x + 5 = 10$. Vem löste ekvationen rätt?
- Ringa in stället där misstaget har gjorts i den felaktiga lösningen.
- Skriv med egna ord en kort anvisning om hur ett sådant misstag kunde undvikas i ekvationslösning.

Uppgift 4



Kalles lösning	Leenas lösning
$-y + 7 = 12$	$-y + 7 = 12$
$-y + 7 - 7 = 12 - 7$	$-y + 7 - 7 = 12 - 7$
$-y = 5$	$-y = 5$
$y = -5$	$y = 5$



- Beskriv vad Kalle och Leena har gjort när de har löst ekvationen $-y + 7 = 12$. Vem löste ekvationen rätt?
- Ringa in stället där misstaget har gjorts i den felaktiga lösningen.
- Skriv med egna ord en kort anvisning om hur ett sådant misstag kunde undvikas i ekvationslösning.

Uppgift 5 Kalle och Leena har löst ekvationer. De har lämnat ut en mellanfas...

Kalles lösning	Leenas lösning
$5 = k - 15$	$5 = k - 15$
_____	_____
$-10 = k$	$20 = k$

- Vem har trots brådskan lyckats lösa ekvationen rätt? _____.
- Fyll i mellanfasen som fattas på strecken i lösningen som var rätt.

Uppgift 6



Kalles lösning	Leenas lösning
$6 = \frac{x}{10} - 2$	$6 = \frac{x}{10} - 2$
$10 \cdot 6 = 10 \cdot \frac{x}{10} - 10 \cdot 2$	$10 \cdot 6 = 10 \cdot \frac{x}{10} - 2$
$60 = x - 20$	$60 = x - 2$
$80 = x$	$62 = x$



- Beskriv vad Kalle och Leena har gjort när de har löst ekvationen $6 = \frac{x}{10} - 2$. Vem löste ekvationen rätt?
- Ringa in stället där misstaget har gjorts i den felaktiga lösningen.
- Skriv med egna ord en kort anvisning om hur ett sådant misstag kunde undvikas i ekvationslösning.

Joker 7



Kalles lösning

$$-2 + y + 10 = 40$$

$$y + 8 = 40$$

$$\frac{y + 8}{8} = \frac{40}{8}$$

$$y = 5$$

Leenas lösning

$$-2 + y + 10 = 40$$

$$y + 8 = 40$$

$$y + 8 - 8 = 40$$

$$y = 40$$



a) Beskriv vad Kalle och Leena har gjort när de har löst ekvationen $-2 + y + 10 = 40$. Vem löste ekvationen rätt?

b) Ringa in stället där misstaget har gjorts i den felaktiga lösningen.

c) Skriv med egna ord en kort anvisning om hur ett sådant misstag kunde undvikas i ekvationslösning.

Joker 8



Kalles lösning

$$15 + 2 = 17 - 10a$$

$$17 = 17 - 10a$$

$$17 - 17 = 17 - 17 - 10a$$

$$0 = 0 - 10a$$

$$10 = -10a + 10$$

$$10 = a$$

Leenas lösning

$$15 + 2 = 17 - 10a$$

$$17 = 17 - 10a$$

$$17 - 17 = 17 - 17 - 10a$$

$$0 = 0 - 10a$$

$$0 = -10a$$

$$\frac{0}{-10} = \frac{-10a}{-10}$$

$$0 = a$$



a) Beskriv vad Kalle och Leena har gjort när de har löst ekvationen $15 + 2 = 17 - 10$. Vem löste ekvationen rätt? _____

b) Ringa in stället där misstaget har gjorts i den felaktiga lösningen.

c) Skriv med egna ord en kort anvisning om hur ett sådant misstag kunde undvikas i ekvationslösning.

GRUPPVÄRDERING (gruppfärdigheter beskrivs mer detaljerat på sida 2)

Gruppfärdigheter	Framgång				
Vi hjälpte och uppmuntrade varandra					
Vi beaktade varandra i diskussioner					
Vi repeterade saker vid behov					
Vi koncentrerade oss i motivering i stället för svar					
Vi drog nytta av våra fel					

Hemuppgift 1 Kalle och Leena försöker lösa ekvationen $15a = 10a + 30$.



Kalles lösning	Leenas lösning
$15a = 10a + 30$	$15a = 10a + 30$
$15a - 10a = 10a - 10a + 30$	$15a = 10a - 10a + 30$
...	...



a) Vilken transformation har båda använt först?

b) Vem har använt transformationen rätt? _____.

c) Hur vet du att den andra lösningen är fel?

d) Skriv med egna ord en kort anvisning om hur ett sådant misstag kunde undvikas i ekvationslösning.

Självutvärdering (fylls i alltid på egen hand i slutet av kapitlet)

VE = Vet ej

Hur väl kan du de följande sakerna

1 = Väldigt svagt

7 = Utmärkt

- Skillnaden mellan en ekvation och ett uttryck
- Ekvationens balans
- Utredda om ekvationen är sann/osann

1 2 3 4 5 6 7 VE
1 2 3 4 5 6 7 VE
1 2 3 4 5 6 7 VE

- Jag har lärt mig det som gått igenom under lektionen.
- Jag lyckades koncentrera mig i motivering i stället för svar.
- Jag lyckades hitta och ställa frågor.
- Jag lyckades beskriva min tankegång till andra.
- Jag lyckades dra nytta av mina fel för att lära mig.

1 2 3 4 5 6 7 VE
1 2 3 4 5 6 7 VE
1 2 3 4 5 6 7 VE
1 2 3 4 5 6 7 VE
1 2 3 4 5 6 7 VE

Kapitel 3 Ekvationslösning

3.1 Att forma och lösa en ekvation

Visste du att olika krypterings- och avlyssningstekniker hade en inverkan på andra världskrigets gång? Nuförtiden är kryptering av digital information alltmer viktigt. Under denna lektion är kryptering användning av transformationer så att ekvationen blir mer utmanande att lösa, och hackning användning av transformationer så att ekvationen blir lättare, d.v.s. ekvationslösningen blir synlig.

TRANSFORMATIONER

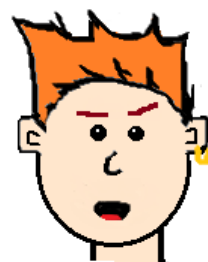
Transformation A: **addering** av samma term på båda sidorna

Transformation S: **subtraktion** av samma term från båda sidorna

Transformation D: **dividering** av båda sidorna med samma nollskilt heltal

Transformation M: **multipliering** av båda sidorna med samma nollskilt heltal

Transformation T: **Transformer**ing av uttrycken i ekvationen



Uppgift 1 Forma en ekvation nerifrån upp i gruppen. (Senare löser grupperna varandras ekvationer.)

a) Hitta på ett tal och en transformation som markeras som lika stora. (Det finns utrymme att skriva på följande sida).

I exemplet $12 = t$.

b) Hitta på transformation för ekvationen. Avancera nerifrån uppåt.

I exemplet har båda sidorna multiplicerats med 2 (M3), sedan har man adderat $2t$ (A2t) på var sin sida och sedan har man beräknat $3t$ och $2t$ (T).

<u>Att börja forma en ekvation</u>		<u>Slutresultat</u>
		$36 + 2t = 5t$
		↙ T
		$36 + 2t = 3t + 2t$
		↙ A2t
		$12 \cdot 3 = 3 \cdot t$
		↙ M3
		$12 = t$
	...	
$12 \cdot 3 = 3 \cdot t$		
↙ M3		
$12 = t$		

c) Ni har format en ekvation i gruppen. Skriv ekvationen och era namn på tavlan (i exemplet $36 + 2t = 5t$).

Se till att alla i gruppen har förstått vad ni har gjort. Kan ni säga utan att räkna vilket värde variabeln skall ha för att ekvationen är sann? Om du formade en ny ekvation, hur kunde du göra den mer utmanande?

Uppgift 2 Examinera ekvationerna på tavlan. Är de olika? På vilket sätt?

Uppgift 3 Lösningsskede: Lös ekvationer som de andra grupperna har format. **Jämförelseskede:** Diskutera era lösningar med varje grupp som kommit upp med ekvationen. Hur löste eller formade ni ekvationen? Vad har ni gjort på samma eller olika sätt?

Ekvationer formade av din grupp		
1.	2.	3.
$\underline{\quad} = \underline{\quad}$		
Ekvationer som din grupp har löst		
1.	2.	3.
$\underline{\quad} = \underline{\quad}$		

Joker 4 Fundera på följande frågor

- Har det någon skillnad i vilken ordning man gör transformationer?
- Vilka likheter och olikheter finns i formning och lösning av ekvationer?
- Vad betyder att räkneoperationerna utesluter varandra? Vad har det att göra med ekvationslösning?
- Hurdana ekvationer a) finns det b) kan du forma c) kan du lösa?
- Hurdana sätt hittade du som kan göra ekvationer mer utmanande?
- Hurdana fel hittade du?
- Hurdana olika lösningsmetoder hittade du?
- Hurdana förlägenheter eller frågor uppstod eller blev oklara?
- Vad nytt begrep du? Vad lärde du dig?
- Hur lyckades du med att lyssna på andras idéer och med att jämföra dem?

GRUPPVÄRDERING (gruppfärdigheter beskrivs mer detaljerat på sida 2)

Gruppfärdigheter	Framgång				
Vi hjälpte och uppmuntrade varandra					
Vi beaktade varandra i diskussioner					
Vi repeterade saker vid behov					
Vi koncentrerade oss i motivering i stället för svar					
Vi drog nytta av våra fel					

Hemuppgift 1 Med vilken transformation skulle du börja lösa följande ekvationer?

a) $5 = 4x$

b) $\frac{(1-a)}{3} = 2$

c) $-s + 2 = 2s - 1$

Hemuppgift 2

- Forma en ekvation för de andra att lösa genom att använda transformationer.
- Lös din egen ekvation.

Hemuppgift 3 Hitta på en ekvation vars lösning skulle börja med att

- Substrahera eller addera båda sidorna
- Dividera eller multiplicera båda sidorna

3.2 Uppgifter i ekvationslösning

Exempel 1 (Olika markeringssätt av transformationer)

matematisk framställning	sätt 1	matematisk framställning	sätt 2
$2x + 6 = 10$	S6	$2x + 6 = 10$	$ - 6$
$2x + 6 - 6 = 10 - 6$	T T		
$2x = 4$	D 2	$2x = 4$	$: 2$
$\frac{2x}{2} = \frac{4}{2}$	T T		
$x = 2$		$x = 2$	

Uppgift 1 Lös den okända variabeln i ekvationerna med hjälp av transformationer som du har lärt dig. Med din grupp välj **två** uppgiftsgrupper.

Grupp 1. a) $6a - 5 - 37 = 0$

b) $\frac{x}{2} - 3 = 10$

c) $12 + 6 = 2y + 4y$

Grupp 2. a) $a - 2 = 0$

b) $\frac{y}{2} = 4$

c) $4 + 8 = 20 + 2x$

Grupp 3. a) $0,3y + 0,2 = 1,1$

b) $3 - \frac{x}{4} = 3 + 4 - (8 + 3)$

c) $6a + 5 = 10a + 3$

Grupp 4. a) $4c - (c + 2c) = 3$

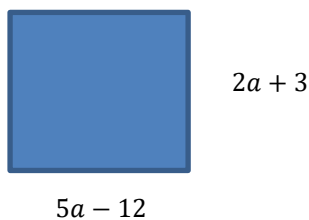
b) $17x + 3x + 1 = 6x + 17x + 1$

c) $8x + \pi = 5\pi$

GRUPPVÄRDERING (gruppfärdigheter beskrivs mer detaljerat på sida 2)

Gruppfärdigheter	Framgång				
Vi hjälpte och uppmuntrade varandra					
Vi beaktade varandra i diskussioner					
Vi repeterade saker vid behov					
Vi koncentrerade oss i motivering i stället för svar					
Vi drog nytta av våra fel					

Joker 2 Figuren är en kvadrat. Beräkna sidan av kvadraten.



Joker 3 Definiera värdet av uttrycket $\frac{ax}{b}$ när $a = \frac{2}{5}$ och x är en tredjedel av b (studentexamen höst 1999)

Hemuppgift 1 Lös ekvationen och kontrollera ditt svar

a) $4a + 3 = 7$

b) $7t - 11 = 3t + 5$

Hemuppgift 2 Forma en ekvation till följande problem och lös den:

Flaskan och dess innehåll kostar sammanlagt 4 €. Innehållet kostar 3 euro mera än flaskan. Vad kostar flaskan?

Självutvärdering (fylls i alltid på egen hand i slutet av kapitlet)

VE = Vet ej

Hur väl kan du de följande sakerna

1 = Väldigt svagt

7 = Utmärkt

- | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| • Att söka efter ekvationslösningen | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | VE |
| • Att kontrollera ekvationslösningen | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | VE |
| • Olika transformationer | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | VE |
| • Att hitta en lämplig transformation | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | VE |
| • Att lösa en ekvation så som $2t + 5 = 5t - 1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | VE |
| • Att berätta muntligt hur uppgiften skall lösas | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | VE |
| • Jag har lärt mig det som gått igenom under lektionen. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | VE |
| • Jag lyckades koncentrera mig i motivering i stället för svar. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | VE |
| • Jag lyckades hitta och ställa frågor. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | VE |
| • Jag lyckades beskriva min tankegång till andra. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | VE |
| • Jag lyckades dra nytta av mina fel för att lära mig. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | VE |

Kapitel 4 Flexibel ekvationslösning

4.1 Parentesuttryck

Uppgift 1 Fyll i tabellen nedan genom att beräkna värden för uttrycken med de olika variabelvärdena.

	$x = 3$	$x = 5$	$x = -1$	$x = 10$	$x = \frac{1}{4}$	$x = -\frac{5}{3}$
$4(x + 3)$						
$4x + 12$						
$4x + 3$						
$4 + x + 3$						

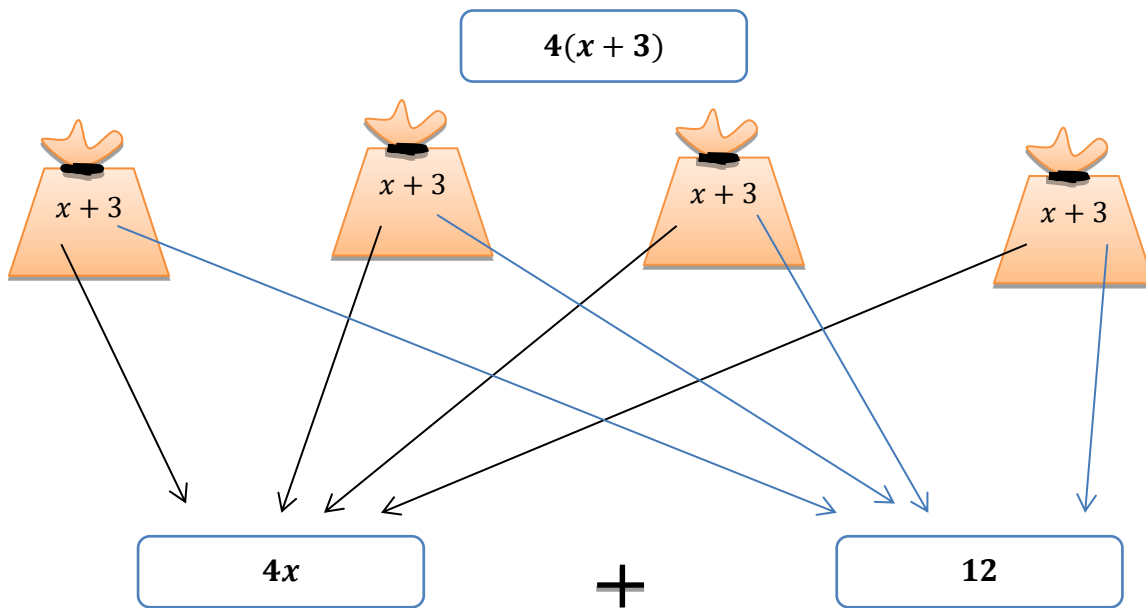
Att fundera på

Vilka skillnader märker du mellan olika uttryck när man placerar samma variabelvärde i dem?

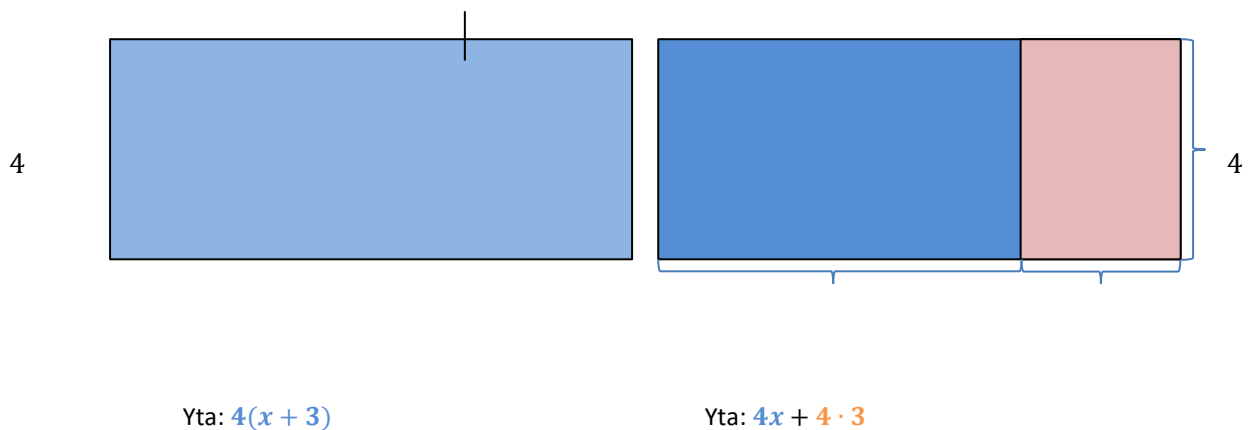
Slutsatser

Exempel 1 (Framställningssätt för parentesuttryck)

Sätt 1 (Säckmodell)



Sätt 2 (Geometrisk modell)



Eftersom dessa är arean för samma rektangel kan de markeras som lika stora: $4(x+3) = 4x + 4 \cdot 3 = 4x + 12$.

Uppgift 2 Rita enligt uttrycken

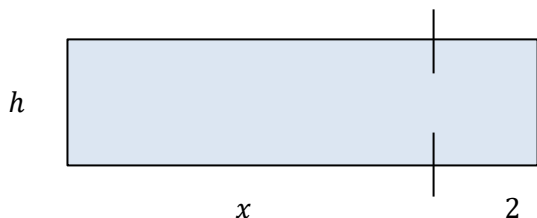
a) $3(1+x)$ en geometrisk modell,

b) $5(x-5)$ en säckmodell.

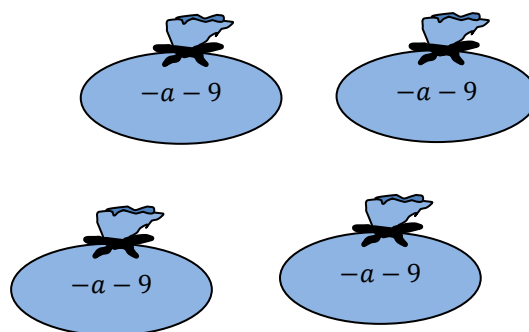
Teckna till slut uttrycken a) och b) utan parentes.

Joker 3 Teckna ett parentesuttryck och ett uttryck utan parentes av arean i punkt a) och av säckarna i punkt b).

a)



b)



Joker 4 Teckna utan parenteser: $a(b + c)$

Joker 5 Teckna följande uttryck med parenteser

a) $x + 2 + x + 2 + x + 2$

b) $3a + 3$

c) $2y - 2 + y - 1$

GRUPPVÄRDERING (gruppfärdigheter beskrivs mer detaljerat på sida 2)

Gruppfärdigheter

Framgång

Vi hjälpte och uppmuntrade varandra



Vi beaktade varandra i diskussioner



Vi repeterade saker vid behov



Vi koncentrerade oss i motivering i stället för svar



Vi drog nytta av våra fel



Hemuppgift 1 Rita en säckmodeller av följande uttryck och skriv uttrycken utan parentestecken

a) $2(x + 3)$

b) $7(2x - 4)$

Hemuppgift 2 Lös ekvationen $12x - (5x - 2) = 23$.

4.2 Parentesuttryck och flexibilitet

Exempel 1 Kalle och Leena har löst ekvationen $3(x + 2) = 15$ på följande sätt:

	Kalles lösning	Leenas lösning	
Först multiplicerade jag den vänstra sidans parenteser bort.	$3(x + 2) = 15$ $3x + 6 = 15$	$3(x + 2) = 15$ $\frac{3(x + 2)}{3} = \frac{15}{3}$	Först dividerade jag ekvationen med 3.
Därefter subtraherade jag 6 från båda sidorna.	$3x + 6 - 6 = 15 - 6$ $3x = 9$	$x + 2 = 5$ $x + 2 - 2 = 5 - 2$	Därefter subtraherade jag 2 från båda sidorna.
Till slut dividerade jag båda sidorna med 3.	$\frac{3x}{3} = \frac{9}{3}$	$x = 3$	Mitt svar är $x = 3$
Som svar fick jag $x = 3$	$x = 3$		



- Hur löste Kalle ekvationen? Hur löste Leena ekvationen? Har de kommit fram till rätt lösning? Hur vet du det?
- Hittar du likheter i Kalles och Lenas lösningar?
- Vilket sätt skulle du använda för att lösa denna ekvation?
- Om ekvationen var $3(x + 2) = 17$, vilket lösningssätt skulle vara bättre och varför?



	Kalles lösning	Leenas lösning	
Först multiplicerade jag parenteserna bort på vänstra sidan.	$3(x + 2) = 17$ $3x + 6 = 17$	$3(x + 2) = 17$ $\frac{3(x + 2)}{3} = \frac{17}{3}$	Först dividerade jag ekvationens båda sidorna med 3
Därefter subtraherade jag 6 från båda sidorna.	$3x + 6 - 6 = 17 - 6$ $3x = 11$	$x + 2 = \frac{17}{3}$ $x + 2 - 2 = \frac{17}{3} - 2$	Därefter subtraherade jag 2 från båda sidorna.
Till slut dividerade jag båda sidorna med 3 och hyfsade divisionerna.	$\frac{3x}{3} = \frac{11}{3}$	$x = \frac{17}{3} - \frac{6}{3}$	Sedan förlängde jag talen till samma form.
Som svar fick jag $x = \frac{11}{3}$	$x = \frac{11}{3}$	$x = \frac{11}{3}$	Som svar fick jag $x = \frac{11}{3}$

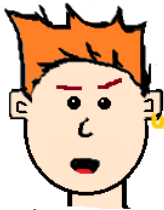
- _____
- _____
- _____
- _____

Uppgift 1 Lös ekvationerna på två olika sätt.

a) $5(t + 2) = 11$

b) $5(t + 2) = 10$.

Uppgift 2 Kalle och Leena har löst ekvationen $5(a + 3) = 20$ på följande sätt:



Först dividerade jag
ekvationen med 5.

Till slut subtraherade jag 3
från båda sidorna.

Som svar fick jag $a = 1$

Kalles lösning	Leenas lösning
$5(a + 3) = 20$	$5(a + 3) = 20$
$\frac{5(a+3)}{5} = \frac{20}{5}$	$5(a + 3) - 3 = 20 - 3$
$a + 3 = 4$	$5a = 17$
$a + 3 - 3 = 4 - 3$	$\frac{5a}{5} = \frac{17}{5}$
$a = 1$	$a = \frac{17}{5}$



Först subtraherade jag 3 från
båda sidorna.

Till slut dividerade jag båda
sidorna med 5.

Som svar fick jag $a = \frac{17}{5}$

a) Beskriv vad Kalle och Leena har gjort när de har löst ekvationen $5(a + 3) = 20$. Vem löste ekvationen rätt? _____

b) Ringa in stället där misstaget har gjorts i den felaktiga lösningen.

c) Skriv med egna ord en kort anvisning om hur ett sådant misstag kunde undvikas i ekvationslösning.

Uppgift 3 Betrakta Jessicas och Minttus sätt att lösa ekvationen $4(t - 1) + 3(t - 1) = 35$.

a) **Jessicas** lösningssätt. Fyll i skeden på tomma strecken med hjälp av exemplet.

$$4(t - 1) + 3(t - 1) = 35$$

Först _____

$$4t - 4 + 3t - 3 = 35$$

Jag adderar 4t ja 3t samt ____ och ____.

$$7t - 7 = 35$$

Jag _____ 7 på båda sidorna.

$$7t = 42$$

Jag dividerar ekvationen med ____ och hyfsar
divisionerna

$$t = 6$$

b) **Minttus** lösningssätt. Fyll i skeden på tomma strecken.

$$4(t - 1) + 3(t - 1) = 35$$

Jag adderar _____ och _____.

$$7(t - 1) = 35$$

Jag _____ båda sidorna med 7.

$$t - 1 = 5$$

Jag adderar ____ på båda sidorna.

$$t = 6$$

c) **Fundera**

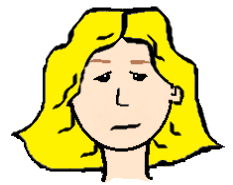
- i) Vad för skillnader finns i Jessicas och Minttus lösningssätt? _____
_____.
- ii) Om du skulle lösa ekvationen $4(y + 5) + 6(y + 4) + 5(y + 2) = 45$, vems lösningssätt skulle du använda?
Ringa in din lösning;
- | Jessicas | Minttus |
|----------|---------|
| | |
- iii) Motivera ditt val: _____
_____.

Uppgift 4 Lös ekvationen $4(y + 4) + 6(y + 4) + 5(y + 4) = 45$ med lösningssättet som du valde.

Minttus sätt:

Jessicas sätt:

Joker 5 Lös ekvationen $4(t + 1) + 3(t + 2) = 7$.



Joker 6 Kalle och Leena har löst ekvationen $2(m + 3) = -4(m + 3) + 12$ på följande sätt:



Kalles lösning	Leenas lösning
$2(m + 3) = -4(m + 3) + 12$	$2(m + 3) = -4(m + 3) + 12$
$2m + 6 = -4m + (-12) + 12$	$2(m + 3) + 4(m + 3) = -4(m + 3) + 4(m + 3) + 12$
$2m + 6 = -4m$	$6(m + 3) = 12$
$2m - 2m + 6 = -4m - 2m$	$\frac{6(m + 3)}{6} = \frac{12}{6}$
$6 = -6m$	$m + 3 = 2$
$\frac{6}{-6} = \frac{-6m}{-6}$	$m + 3 - 3 = 2 - 3$
$-1 = m$	$m = -1$

- a) Vad har Kalle gjort först med ekvationen? Vad har Leena gjort?

- b) Markera med förkortningar de transformationerna som Kalle och Leena har använt i sina lösningar. (Den andra transformationen som Leena har använt i sin lösning som modell).
- c) Har Kalle och Leena kommit fram till den rätta lösningen? Hur vet du detta? (Motivera genom att kontrollera räkneoperationen nedan).

- d) Skulle du utnyttja Kalles eller Leenas lösningssätt? Motivera ditt svar. _____
-

GRUPPVÄRDERING (gruppfärdigheter beskrivs mer detaljerat på sida 2)

Gruppfärdigheter	Framgång				
Vi hjälpte och uppmuntrade varandra					
Vi beaktade varandra i diskussioner					
Vi repeterade saker vid behov					
Vi koncentrerade oss i motivering i stället för svar					
Vi drog nytta av våra fel					

Hemuppgift 1 Skriv den första transformationen och den följande raden i lösningarna för följande ekvationer. Du behöver alltså **INTE** lösa ekvationen till slut. Försök också hitta ett annat sätt att sätta i gång.

a) $2(y + 6) + 3(y + 6) = 25$

b) $9 = 3(t - 3) + 2(2t - 3) + 7(t - 3)$

c) $6 = 3(t - 3)$

Hemuppgift 2 Lös ekvationen $-12(5y + 2) = 24$ på två olika sätt.

Sätt 1:

Sätt 2:

4.3 Mera flexibla ekvationer

Exempel 1 Kalle och Leena har löst ekvationen $\frac{x}{4} - \frac{x}{5} = -2$ på följande sätt:

Jag multiplicerade ekvationen med 20 som är nämnarnas minsta gemensamma dividend.

Därefter hyfsade jag båda sidorna av ekvationen.

Till slut adderade $5x$ ja $-4x$ på ekvationens vänstra sida.

Kalles lösning

$$\frac{x}{4} - \frac{x}{5} = -2$$

$$20 \cdot \left(\frac{x}{4} - \frac{x}{5} \right) = -2 \cdot 20$$

$$\frac{20x}{4} - \frac{20x}{5} = -40$$

$$5x - 4x = -40$$

$$x = -40$$

Leenas lösning

$$\frac{x}{4} - \frac{x}{5} = -2$$

$$\frac{5x}{20} - \frac{4x}{20} = -2$$

$$\frac{x}{20} = -2$$

$$20 \cdot \frac{x}{20} = -2 \cdot 20$$

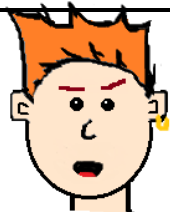
$$x = -40$$

Först förlängde jag bråktalen på vänstra sidan så att de fick en gemensam nämnare.

Jag beräknade subtraktionen på ekvationens vänstra sida.

Jag multiplicerade ekvationen med 20.

Som svar fick jag $x = -40$



- Varför multiplicerade Kalle ekvationen först med 20? _____
- Varför förlängde Leena bråktalen på vänstra sidan först? _____
- Hurdana likheter och skillnader märker du i Kalles och Leenas lösningssätt? _____
- Har Kalle och Leena kommit fram till rätt lösning? Hur vet du detta? (Motivera genom att kontrollera räkneoperationen nedan).
- Vilket av lösningssätten (Kalles eller Leenas) tycker du är enklare? Motivera ditt svar.

Uppgift 1 Kalle och Leena har löst ekvationen $\frac{1}{4}(x + 3) = 2$ på följande sätt:

	Kalles lösning	Leenas lösning	
Först multiplicerade jag parenteserna bort. Därefter subtraherade jag $\frac{3}{4}$ från båda sidorna. Till slut multiplicerade jag båda sidorna med 4 ja och fick min lösning.	$\frac{1}{4}(x + 3) = 2$	$\frac{1}{4}(x + 3) = 2$	Först multiplicerade jag ekvationens båda sidorna med 4. Därefter subtraherade jag 3 från båda sidorna. Här är min lösning.
	$\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} = 2$	$4 \cdot \frac{1}{4}(x + 3) = 2 \cdot 4$	
	$\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 2 - \frac{3}{4}$	$x + 3 = 8$	
	$\frac{1}{4}x = \frac{8}{4} - \frac{3}{4}$	$x + 3 - 3 = 8 - 3$	
	$\frac{1}{4}x = \frac{5}{4}$	$x = 5$	
	$4 \cdot \frac{1}{4}x = \frac{5}{4} \cdot 4$		
	$x = 5$		

a) Hurdana likheter och skillnader märker du i Kalles och Leenas lösningssätt? _____

b) Har Kalle och Leena kommit fram till rätt lösning? Hur vet du detta? (Motivera genom att kontrollera räkneoperationen nedan).

c) Vilken av lösningssätten (Kalles eller Leenas) tycker du är lämpligare för denna ekvation? Motivera ditt svar.

Uppgift 2 Lös ekvationerna nedan.

a) $\frac{y}{3} + \frac{y}{4} = 20$

b) $\frac{3x+6}{3} + \frac{24+12x}{4} = 8$

c) $3(h+1) = 6(h+1)$

d) $e^{-i\omega t} - 1 = e^{-i\omega t} + 4t.$

Uppgift 3 Kalle, Leena och Miia har löst ekvationen $\frac{t}{3} - 1 = 12$ på följande sätt:

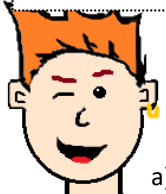
Kalles lösning	Leenas lösning	Miias lösning
$\frac{t}{3} - 1 = 12$	$\frac{t}{3} - 1 = 12$	$\frac{t}{3} - 1 = 12$
$\frac{t}{3} - 1 + 1 = 12 + 1$	$\frac{t}{3} - \frac{3}{3} = 12$	$3 \cdot (\frac{t}{3} - 1) = 12 \cdot 3$
$\frac{t}{3} = 13$	$\frac{t-3}{3} = 12$	$\frac{3t}{3} - 3 = 36$
$3 \cdot \frac{t}{3} = 13 \cdot 3$	$3 \cdot \frac{t-3}{3} = 12 \cdot 3$	$t - 3 = 36$
$t = 39$	$t - 3 = 36$	$t - 3 + 3 = 36 + 3$
	$t - 3 + 3 = 36 + 3$	$t = 39$
	$t = 39$	



- a) Hurdana likheter och skillnader märker du i Kalles, Leenas och Miias lösningar? _____
- b) Vilket lösningssätt skulle du använda för denna ekvation? Varför? _____
- c) Skriv förkortningarna av transformationerna som Kalle, Leena och Miia har använt bredvid deras lösningar.

Joker 4 Kalle och Leena har löst ekvationen $2t - (2 + 3t) = -4t$ på följande sätt:

	Kalles lösning	Leenas lösning	
Jag subtraherar $2t$ från båda sidorna och hyfsar.	$2t - (2 + 3t) = -4t$	$2t - (2 + 3t) = -4t$	Först tog jag bort parenteserna på vänstra sidan.
Jag multiplicerar båda sidorna med -1 .	$2t - 2t - (2 + 3t) = -4t - 2t$	$2t - 2 - 3t = -4t$	Jag hyfsade ekvationens vänstra sida genom att beräkna $2t - 3t$.
Jag subtraherar $3t$ från båda sidorna.	$-(2 + 3t) = -6t$	$-t - 2 = -4t$	Jag adderade t på båda sidorna och hyfsade.
Till slut dividerar jag ekvationen med 3 . Min lösning är $\frac{2}{3} = t$.	$-(2 + 3t) \cdot (-1) = -6t \cdot (-1)$	$-t + t - 2 = -4t + t$	Till slut dividerade jag båda sidorna med -3 och fick $t = \frac{2}{3}$ som svar.
	$2 + 3t = 6t$	$-2 = -3t$	
	$2 + 3t - 3t = 6t - 3t$	$\frac{-2}{-3} = \frac{-3t}{-3}$	
	$2 = 3t$	$\frac{2}{3} = t$	
	$\frac{2}{3} = \frac{3t}{3}$		
	$\frac{2}{3} = t$		




a) Hurdana likheter och skillnader märker du i Kalles och Leenas lösningar?

b) Vilka fördelar har Kalles lösningssätt? Och Leenas?

c) Hur skulle du själv lösa ekvationen? Motivera ditt svar.

Joker 5 Lös ekvationerna nedan.

a) $7 = \frac{4y}{3}$

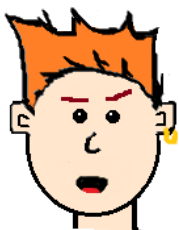
b) $\frac{2x}{3} - 1 = 4x + \frac{1}{2}$

$$c) -a = \frac{a(x+1)}{2}$$

$$d) 3(h+1) = 6(h+2)$$

Joker 6 Kalle, Leena och Miia har löst ekvationen $8 - 4(x - 3) = 40$ på följande sätt:

Kalles lösning	Leenas lösning	Miias lösning
$8 - 4(x - 3) = 40$	$8 - 4(x - 3) = 40$	$8 - 4(x - 3) = 40$
$8 - 4x - 12 = 40$	$8 - 8 - 4(x - 3) = 40 - 8$	$\frac{8}{4} - \frac{4(x - 3)}{4} = \frac{40}{4}$
$-4x - 4 = 40$	$-4(x - 3) = 32$	$2 - x + 3 = 10$
$-4x - 4 + 4 = 40 + 4$	$\frac{-4(x - 3)}{-4} = \frac{32}{-4}$	$x + 5 = 10$
$-4x = 44$	$x - 3 = -8$	$x + 5 - 5 = 10 - 5$
$\frac{-4x}{-4} = \frac{44}{-4}$	$x - 3 + 3 = -8 + 3$	$x = 5$
$x = -11$	$x = -5$	



- Gå noggrant igenom Kalles, Leenas och Miias lösning.
- Vem löste ekvationen rätt? _____.
- Ringa in stället där misstaget har gjorts i de felaktiga lösningarna.
- Lös de felaktiga lösningarna på nytt så att svaret är rätt. (Fortsätt alltså ekvationslösningen från det stället där den sist var rätt och försök avancera såsom personen har avancerat)

GRUPPVÄRDERING (gruppfärdigheter beskrivs mer detaljerat på sida 2)

Gruppfärdigheter	Framgång				
Vi hjälpte och uppmuntrade varandra					
Vi beaktade varandra i diskussioner					
Vi repeterade saker vid behov					
Vi koncentrerade oss i motivering i stället för svar					
Vi drog nytta av våra fel					

Hemuppgift 1 Lös ekvationerna nedan.

a) $12x - (5x - 2) = 23$

b) $3y + \frac{y}{3} = 20$

c) $2(3 + y) = 18$

Hemuppgift 2 Vad har du lärt dig om lösning av parentes- och bråkekvationer? _____

Självutvärdering (fylls i alltid på egen hand i slutet av kapitlet)

VE = Vet ej

1 = Väldigt svagt

7 = Utmärkt

Hur väl kan du de följande sakerna

- | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| • Skillnaden mellan ett uttryck och en ekvation | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | VE |
| • Ekvationens balans | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | VE |
| • Utredda om ekvationen är sann/osann | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | VE |
| • Jag har lärt mig det som gått igenom under lektionen. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | VE |
| • Jag lyckades koncentrera mig i motivering i stället för svar. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | VE |
| • Jag lyckades hitta och ställa frågor. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | VE |
| • Jag lyckades beskriva min tankegång till andra. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | VE |
| • Jag lyckades dra nytta av mina fel för att lära mig. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | VE |

5 Repetition

Uppgift 1 Upprepa det som har lärt genom att diskutera tillsammans

- Likformiga termer
- Skillnaden mellan ett uttryck och en ekvation
- Utforskning av ekvationens sanningsvärde
- Att söka ekvationslösning
- Att granska ekvationslösningen
- Olika transformationer och användning av dem
- Att lösa en ekvation såsom $2t + 5 = 5t - 1$

Uppgift 2 Utred om ekvationerna är sanna eller osanna. Motivera ditt svar muntligt.

a) $6 \cdot 12 = 4 \cdot 12 + 2 \cdot 12$

b) $3 + 2 = 8$

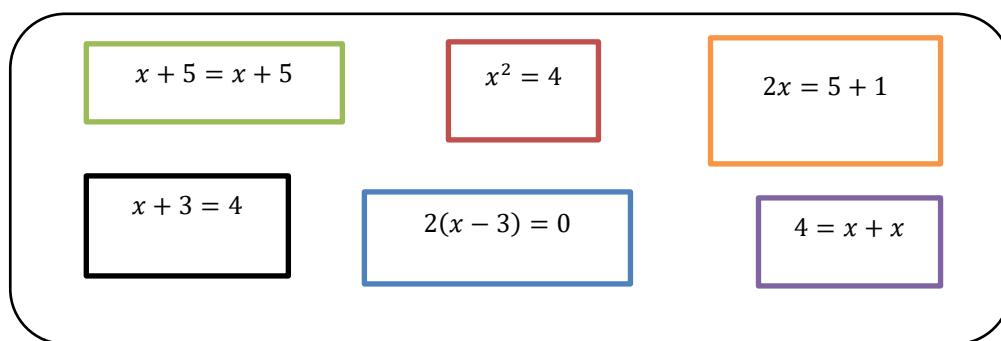
c) $y + 2 = 4 + 5$

d) $-180 = -(-180)$

Uppgift 3

a) Beräkna uttryckets $3x - 5$ värde när $x = -2$.

b) Finns det en ekvation/ekvationer nedan vars lösning är $x = 3$?



$x + 5 = x + 5$

$x^2 = 4$

$2x = 5 + 1$

$x + 3 = 4$

$2(x - 3) = 0$

$4 = x + x$

Svar och motivering:

Uppgift 4 Fyll i den matematiska och verbala framställningen

matematisk framställning	transformation	verbal framställning
$-5 - y = y + 2$		
	A y	Jag _____ y på båda sidorna.
	T T	Jag transformerar båda sidorna genom att beräkna _____ på vänstra och högra sidan.
	S2	Jag _____ 2 på båda sidorna.
	T T	Jag transformerar ekvationens båda sidorna genom att utföra räkneoperationerna _____ och _____.
	D 2 T T	Jag dividerar ekvationens båda sidorna med _____ och utför divisionerna som uppstår. Ekvationens lösning är _____.

Uppgift 5 Kalle och Leena har löst ekvationen $2x + 5 = 3x - 3 + 5$ på följande sätt:

	Kalles lösning	Leenas lösning
	$2x + 5 = 3x - 3 + 5$	$2x + 5 = 3x - 3 + 5$
	$2x + 5 - 5 = 3x - 3 + 5 - 5$	$2x + 5 = 3x + 2$
	$2x + 5 = 3x - 3$	$2x + 5 = 5x$
	$2x - 2x + 5 = 3x - 2x - 3 + 3$	$2x = 5x - 5$
	$5 = 3x - 2x$	$2x - 2x = 5x - 5 - 2x$
	$5 = x$	$0 = 3x - 5$
		$0 + 5 = 3x - 5 + 5$
		$5 = x$

- a) Vilken transformation har Kalle använt först? _____ Vilken har Leena använt först? _____
b) Kontrollera om Kalles och Leenas lösningar är rätt.

- c) Ringa in felen. Formulera med egna ord en kort anvisning om hur felet i fråga kunde undvikas.

Uppgift 6 Lös ekvationerna nedan.

a) $y + 3y = 10 - 2$

b) $t - 2 = 3t + 4$

c) $1 + \frac{a}{5} = 7$

d) $5(2z - 4) = 20$

Uppgift 7

a) Lös ekvationen $-2(y + 4) + 6(y + 4) = 12$ på minst två olika sätt.

Sätt 1

Sätt 2

b) Vilket sätt tycker du är lämpligare för denna uppgift? Motivera ditt svar. _____

_____.

Joker 8 Kalle och Leena har löst ekvationer och jämför nu sina lösningar till de samma ekvationerna. Svara till de givna frågor och kontrollera Kalles och Leenas lösningar till ekvationerna så som du skulle vara en lärare.

	Kalles lösning	Leenas lösning	
	$4b + 16 = -8$	$4b + 16 = -8$	
	$\frac{4b}{4} + \frac{16}{4} = \frac{-8}{4}$	$\frac{4b + 16}{4} = \frac{-8}{4}$	
	$b + 4 = -2$	$b + 16 = -2$	
	$b + 4 - 4 = -2 - 4$	$b + 16 - 16 = -2 - 16$	
	$b = -6$	$b = -18$	

- a) Beskriv vad Kalle och Leena har gjort när de har löst ekvationen $4b + 16 = -8$. Vem löste ekvationen rätt? _____
- b) Ringa in stället där misstaget har gjorts i den felaktiga lösningen.
- c) Skriv med egna ord en kort anvisning om hur ett sådant misstag kunde undvikas i ekvationslösning.

Joker 9 Fyll i lösningens matematiska framställning på två olika sätt

matematisk framställning	transformation	matematisk framställning	transformation
$\frac{8 + 20x}{4} = 6x$	M4	$\frac{8 + 20x}{4} = 6x$	T
	T T		S5x
	S20x		T T
	T T		
	D4 T T		

GRUPPVÄRDERING (gruppfärdigheter beskrivs mer detaljerat på sida 2)

Gruppfärdigheter	Framgång				
Vi hjälpte och uppmuntrade varandra					
Vi beaktade varandra i diskussioner					
Vi repeterade saker vid behov					
Vi koncentrerade oss i motivering i stället för svar					
Vi drog nytta av våra fel					

Joker 10 Formulera en ekvation och lös den.

a) Tiina och Ville delar en lön på 60 euro. Tiina arbetade två gånger så mycket som Ville. Hur mycket får de lön?

b) Summan av tre successiva tal är 108. Vilket tal är minst av dessa?

c) En biljett till Robins konsert kostade 20 för vuxna (alltså för personer över 12 år) och 10 euro för personer under 12 år. Utred hur många biljetter såldes till barn och vuxna, när man vet att man sålde sammanlagt 350 biljetter och biljettförsäljningsinkomsterna var sammanlagt 4000 euro.

Joker 11 Formulera en så utmanande ekvation som möjligt och lös den.

Självutvärdering

Svara på frågorna nedan.

1 = Våldigt svagt

7 = Utmärkt

Hur väl kan du de följande sakerna?

- | | | | | | | | |
|--|---|---|---|---|---|---|---|
| • Strukturen av ett uttryck | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Att hyfsa ett uttryck | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Skillnaden mellan ett uttryck och en ekvation | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Ekvationens balans | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Utreda om ekvationen är sann/osann | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Att söka en lösning till en ekvation | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Att kontrollera ekvationslösningen | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • De olika transformationerna | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Att finna en lämplig transformation | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Att lösa en ekvation så som $2t + 5 = 5t - 1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Att berätta muntligt hur en uppgift skall lösas | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| | | | | | | | |
| • Jag har lärt mig det som gåtts igenom under lektionen. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Jag lyckades koncentrera mig i motivering i stället för svar. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Jag lyckades hitta och ställa frågor. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Jag lyckades beskriva min tankegång till andra. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Jag lyckades jämföra skillnader och likheter mellan uppgifterna. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Jag lyckades hitta och jämföra olika lösningssätt. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Jag lyckades dra nytta av mina fel för att lära mig. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

Vilken sak har du lärt dig bäst?

Vilka saker behöver du ännu lära dig?

Feedback av inläring av ekvationer