Kohti joustavaa matemaattista ajattelua

Joustavaan matematiikkaan -täydennyskoulutushanke

Materiaalin kuvaus:

Ota haltuun joustavuus matematiikan opetuksessa! Tämä materiaali on tarkoitettu varhaiskasvatuksen opetus- ja kasvatushenkilöstölle, esi- ja perusopetuksen opettajille, lukio-opettajille ja erityisopettajille itseopiskelumateriaaliksi. Materiaali sisältää suurimman osan Joustavaan matematiikkaan -koulutusohjelman kaikille yhteisestä kurssista Kohti joustavaa matemaattista ajattelua (3 op). Materiaalissa on paljon mielenkiintoisia videoita, tekstiä ja tehtäviä. Tehtäviä kannattaa pohtia paitsi itsekseen niin myös mahdollisuuksien mukaan yhdessä kollegoiden kanssa.

Tämä itseopiskelumateriaali pohjautuu käynnissä olevaan maksuttomaan verkkotäydennyskoulutuskurssiin. Jos tämä materiaali herättää kysymyksiä, innostusta tai mielenkiintoa, niin voit katsoa koko kurssin sisällöt Joustavaan Matematiikkaan -hankkeen kotisivuilta: https://www.flexibility.fi/events/kohti-joustavaa-matemaattista-ajattelua/ ja ilmoittautua mukaan. Verkkokurssilta löytyy joitain videoita ja kurssilaisten välisiä keskusteluja, joita tähän itseopiskelumateriaaliin ei ollut mahdollista sisällyttää. Verkkokurssin voi opiskella omaan tahtiin ja se on auki vuoden 2023 marraskuun loppuun asti.

Materiaali on tuotettu osana Joustavaan matematiikkaan -hanketta (JoMa). JoMa on vuosina 2018–2023 toiminut valtakunnallinen matematiikan opetuksen täydennyskoulutushanke varhaiskasvatukseen, esiopetukseen, alakouluun, yläkouluun ja lukioon. Hankkeessa tuotettiin 19 verkkokurssia. Kursseilla kehitettyä materiaalia löytyy täältä Avointen oppimateriaalien kirjastosta. Opetushallituksen rahoittaman hankkeen toteuttamiseen osallistuivat Turun yliopisto, Åbo Akademi, Jyväskylän yliopisto ja Oulun yliopisto.

Materiaalin tekijät: Erno Lehtinen ja Minna Hannula-Sormunen

Lisenssi: Tämä teos on lisensoitu Creative Commons Nimeä 4.0 Kansainvälinen -käyttöluvalla. Tarkastele käyttölupaa osoitteessa https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.fi.

Lisenssi koskee vain tätä teosta. Lisenssi ei koske tähän teokseen linkitettyä materiaalia.

SISÄLLYS

1. Tervetuloa kurssille 4

Tervetuloa 4

Miksi täydennyskoulutuksen teemana on joustavaan matematiikkaan? 5

Monipuolinen taustatiimi 5

Kansainväliset asiantuntijat apuna 8

2. Joustava matemaattinen ajattelu 11

2.1. Joustava matemaattinen ajattelu 11

Mitä tarkoitetaan joustavalla matemaattisella ajattelulla ja miksi se on tärkeä tavoite koulun matematiikan oppimiselle? 11

Joustavat strategiat aritmetiikassa 11

Joustavat strategiat algebrassa 12

Keskustelua joustavan matemaattisen ajattelun roolista kouluopetuksessa 13

2.2. Matemaattisen ajattelun kehitys 18

Johdanto 18

Miten varhainen lukujen osaaminen ennustaa myöhempää matemaattista oppimista? 18

Maailma matemaattisin silmin - jo pienestä pitäen! 19

Pienten lasten matematiikan myytinmurtajat 20

Lukukäsitteen ja perusaritmetiikan oppiminen peruskoulun alaluokilla 22

Matemaattisen ajattelun kehitys ylempien kouluasteiden aikana 23

Tehtävät 25

Videopalaute 26

3. Mihin tätäki tarvii? 28

3.1. Mihin matematiikkaa tarvitaan 28

Erilaisia tapoja vastata lasten ja nuorten kysymykseen mihin matematiikkaa tarvitaan 30

Matematiikan osaamisen tarpeet tulevaisuudessa 31

3.2. Motivaation vahvistaminen 33

Motivaation vahvistaminen olennaista joustavan matematiikan opetuksessa 33

Mitä mieltä ovat koulutuskentän toimijat? 34

Usko omiin kykyihin vahvistaa myös kiinnostusta 37

Yleinen uskomus: Tällainen opetus sopii parhaille oppilaille, mutta eikö se oli liian vaativaa heikommille oppilaille? 37

4. Joustavan matemaattisen ajattelun tukeminen käytännössä 41

4.1. Joustavan matemaattisen ajattelun vahvistaminen 41
Joustavuuden tukeminen käytännössä ja erilaiset representaatiot 41
Adaptiivinen ja joustava lukukäsite strategisen joustavuuden takana 41
Yksittäisten strategioiden opettamisesta joustavan matemaattisen ajattelun tukemiseen 42
Adaptiivinen rationaalilukutieto 42
Joustavat aritmeettiset taidot ennustavat myöhempää matematiikan oppimista 43
Pelit joustavan matematiikan oppimisympäristöinä 43
Joustavuuden tukeminen vertailutehtävien avulla 44
Joustavuuden tukeminen argumentaatiokeskustelujen avulla 45
4.2. Harjoittelun merkitys 47
Harjoittelun merkitys joustavan matemaattisen ajattelun kehittämisessä 47
Tarkoituksellisen harjoittelun piirteet 49
4.3. Arkipäivän ongelmat ja sanalliset tehtävät matematiikan opetuksessa 52
Missä määrin ylioppilaskoe edellyttää joustavuutta? 53
5. Kurssin päättäminen 54

1. Tervetuloa kurssille

Tervetuloa

Kurssin tarkoitus on johdattaa kohti joustavaa matemaattista ajattelua, selventää mitä sillä tarkoitetaan ja miten se näkyy eri-ikäisten lasten ja nuorten kohdalla. Verkko-opintoina järjestettävät koulutusasteittain toteutettavat 6 opintopisteen JoMa-kurssit toimivat erittäin hyvänä jatkona tälle johdantokurssille tarjoten paljon käytännön vinkkejä kasvatus- ja opetustyöhön. Näiden 6 op:n laajuisten kurssien sisältöjä on saatavilla myös aoe-palvelussa tammikuusta 2023 alkaen. Tämä johdantokurssi on tarkoitettu varhaiskasvatuksen opetus- ja kasvatushenkilöstölle, esi- ja perusopetuksen opettajille, lukio-opettajille ja erityisopettajille itseopiskelumateriaaliksi.

Tervetuloa mukaan!

Huom! Videoilla ja materiaaleissa vilahtaa toisinaan varhaiskasvattaja-nimike, joka on kuitenkin hankala termi epämääräisyytensä vuoksi. Tarkoitamme varhaiskasvattajilla varhaiskasvatuksen ja esiopetuksen kasvatus- ja opetustyöhön osallistuvia henkilöitä.

Kurssin sisällöt

AIHEKOKONAISUUS	JAKSO
Tervetuloa kurssille!	Tervetuloa kurssille!
Joustava matemaattinen ajattelu	Joustava matemaattinen ajattelu Matemaattisen ajattelun kehitys
Mihin tätäki tarvii?	Mihin matematiikkaa tarvitaan? Motivaation vahvistaminen
Joustavan matemaattisen ajattelun tukeminen käytännössä	Joustavan matemaattisen ajattelun vahvistaminen Harjoittelun merkitys Arkipäivän ongelmat ja sanalliset tehtävät
Kurssin päättäminen	Kurssin päättäminen

Miksi täydennyskoulutuksen teemana on joustavaan matematiikkaan?

Yhteiskunnan ja työelämän muutos edellyttää uudenlaista osaamista. Tulevaisuuden osaamisessa korostuu yleisten taitojen lisäksi joustavien matemaattisten taitojen, erityisesti määrällisten ja avaruudellisten suhteiden ymmärtämisen, algebrallisen ajattelun ja matemaattisen mallintamisen merkitys ja ongelmanratkaisutaito.

Vaikka tutkijat ovat laajasti yksimielisiä siitä, että matemaattisen ajattelun merkitys on lisääntymässä sekä työelämässä että ihmisten arjessa, niin lähes kaikissa länsimaissa on havaittavissa, että matematiikan keskimääräinen opiskelumotivaatio heikkenee mitä pidemmälle koulutus etenee. Toisaalta tutkimukset ovat tuoneen esille sen, että hyväkään menestys perinteisessä koulumatematiikassa ei aina merkitse sitä, että opittua matematiikkaa osattaisiin käyttää tarkoituksenmukaisella tavalla arjen tilanteissa, työelämässä tai jatko-opinnoissa.

Joustavan matematiikan ajatuksella pyritään vastaamaan kaikkiin edellä esitettyihin haasteisiin. Siinä korostuvat tulevaisuuden taidoille ominaiset ajattelun piirteet. Joustavassa matematiikassa formaalin matematiikan oppiminen liittyy kiinteästi merkityksellisten tilanteiden ymmärtämiseen ja ongelmien ratkaisuun. Lisäksi joustavan matematiikan ajatuksena on voimaannuttaa oppijat itse keksimään ja vertailemaan vaihtoehtoisia ratkaisustrategioita, jolloin matematiikkakin voi muuttua ylhäältä annettujen sääntöjen mekaanisesta noudattamisesta omakohtaiseksi ajattelun välineeksi.

Joustavassa matemaattisessa ajattelussa ei olla kiinnitytty yhteen toimintamalliin vaan tilanteesta riippuen hyödynnetään joustavasti erilaisia ajattelutapoja. Joustava ajattelu mahdollistaa toiminnan myös uudenlaisessa, ongelmallisessa tilanteessa. Joustavuuteen liittyy olennaisesti kyky keskustella ja toimia haastavankin aiheen parissa yhteistyössä muiden kanssa.

Monipuolinen taustatiimi

Joustavaan matematiikkaan -täydennyskoulutuksen suunnittelusta ja toteutuksesta vastaa kolmen yliopiston ja koulun kentän toimijoista koostuva tiimi, jolla on monipuolinen kokemus ja koulutustausta.

Dimitri Tuomela

Yläkoulun ja lukion osuuksista vastaa väitöskirjatutkija Dimitri Tuomela Oulun yliopistosta. Hän toimii useissa matematiikan opetuksen kehittämishankkeissa ja hänen väitöskirjansa aihe on miten luodaan innostavaa, yhteisöllistä ja päättelykeskeistä matematiikan oppimiskulttuuria. Lisäksi hän tutkii joustavuutta kansainvälisessä tutkimusryhmässä.

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Erno Lehtinen

Turun yliopiston kasvatustieteen professori Erno Lehtinen on pitkän linjan opettajankouluttaja. Hän on tutkinut 1970-luvun lopulta lähtien oppimista, oppimisvaikeuksia, oppimisympäristöjä ja asiantuntijuutta keskittyen erityisesti matemaattisen ajattelun pitkän aikavälin kehittymiseen.

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Peter Hästö

Yläkoulun ja lukion osuuksista vastaa matematiikan professori Peter Hästö Turun ja Oulun yliopistoista. Hän on toiminut mm. matematiikan opettajakoulutuksen vastuuhenkilönä sekä ylioppilastutkintolautakunnan matematiikan jaoksessa. Puhtaan matematiikan tutkimuksen lisäksi hän on tutkinut joustavuutta yhtälönratkaisussa yläkoulussa ja lukiossa.

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Minna Hannula-Sormunen

Konsortion johtajana toimii Turun yliopiston kasvatustieteen professori Minna Hannula-Sormunen. Tässä täydennyskoulutushankkeessa hän vastaa myös varhaiskasvatuksen sekä esi- ja alkuopetuksen osuuksista. Hänen tutkimustyönsä on keskittynyt matemaattisten taitojen kehitykseen, kehitystekijöihin ja opetusympäristöihin varhaiskasvatusiästä alakoulun loppuun.

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Markus Hähkiöniemi

Yläkoulun osuudesta vastaa Jyväskylän yliopiston opettajankoulutuslaitoksen matematiikan pedagogiikan yliopistonlehtori Markus Hähkiöniemi. Hän on tutkinut mm. opettajan ja oppilaan välistä vuorovaikutusta matematiikassa, tutkivaa matematiikan oppimista, GeoGebran opetuskäyttöä sekä peruskoululaisten ja lukiolaisten matemaattista ajattelua.

Riina Harri

Yläkoulun osuudesta vastaa Jyväskylä yliopiston opettajankoulutuslaitoksen yliopistonopettaja Riina Harri. Hän on myös opettaja Sipoonlahden yhtenäiskoulussa sekä laatii väitöskirjaa. Hän tutkii ja on kiinnostunut opettajan ja oppilaiden välisestä vuorovaikutuksesta sekä matemaattisesta ajattelusta matematiikan opetuksessa.

Videolla Markus ja Riina keskustelevat luokkahuonevuorovaikutuksesta ja joustavasta matemaattisesta ajattelusta.

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Teija Laine

Alakoulun osuuden rakentamisesta vastaa luokanopettaja Teija Laine, Turun Matikkamaasta ja sivistystoimialalla tunnettu matematiikan opetuksen kehittäjä ja opettajien täydennyskouluttaja.

Teijan kiinnostuksen kohteena ovat olleet erityisesti ongelmakeskeinen opettaminen ja sen avulla oppilaiden matemaattisen ajattelun kehittäminen. Matematiikan sanallisten tehtävien kehittäminen mielekkäämmiksi on ollut hänen tutkimuksensa ja kehittelynsä aihe jo usean vuoden ajan. Teija on kouluttanut Turun Matikkamaassa opettajia käyttämään konkreettisia, arkielämän liittyviä tilanteita sekä matematiikan välineitä omassa opetuksessaan.

Teija menehtyi vakavaan sairauteen keväällä 2021. Teijan ja hänen perheensä toivomuksesta kaikki Teijan upeat opetusvideot, tehtävät ja ideat ovat käytettävissä JoMa-kursseilla ja matematiikan opetuksen kehittämisessä.

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

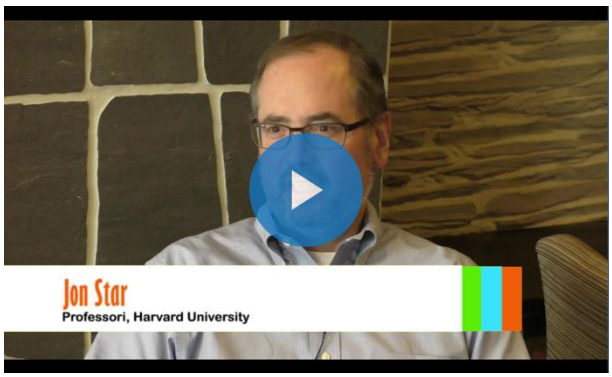
Kansainväliset asiantuntijat apuna

Joustava matematiikka on tällä hetkellä kuuma aihe kansainvälisessä matematiikan opetusta koskevassa keskustelussa. Olemme onnistuneet saamaan tämän täydennyskoulutusohjelman taustajoukkoihin myös joukon maailman johtavia matemaattisen ajattelun asiantuntijoita.

Jon Star

Professori Jon Star Harvardin yliopistosta on entinen matematiikan opettaja, joka on tehnyt uraauurtavaa tutkimustyötä joustavien matemaattisten strategioiden tutkijana. Hänen viimeaikainen tutkimuksensa on kohdistunut erityisesti ratkaisustrategioihin algebrassa.

Video ei ole tekstitetty, mutta voit lukea esityksen sisällön **suomeksi** (ei sanasta sanaan käännös).



Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Lieven Verschaffel

Professori Lieven Verschaffel on kansainvälisesti erittäin tunnettu matematiikan oppimisen ja opetuksen tutkija, joka on tutkinut sekä joustavien aritmeettisten taitojen kehittymistä ja opettamista että matemaattisen ajattelun käyttöä realistisissa ongelmanratkaisutilanteissa.

Video ei ole tekstitetty, mutta voit lukea esityksen sisällön **suomeksi** (ei sanasta sanaan käännös).

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Laajempi alkuperäinen video: https://vimeo.com/246771031

Robert Siegler

Professori Robert Siegler Carnegie Mellon yliopistosta on tämän hetken maailman tunnetuimpia kognitiivisen kehityksen tutkijoita, joka on tutkinut monipuolisesti matemaattisen ajattelun kehitystä. Tällä hetkellä hän tekee yhteistyötä kanssamme hankkeessa, jossa tutkitaan joustavan rationaalilukukäsitteen opettamista.

Video ei ole tekstitetty, mutta voit lukea esityksen sisällön **suomeksi** (ei sanasta sanaan käännös). Tämä sama video tulee tarkemmin käsiteltäväksi myöhemmin tällä kurssilla.

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Douglas Clements

Douglas Clements on Denverin yliopiston professori ja kansainvälisesti tunnettu varhaisen matematiikan oppimisen ja opetuksen tutkija. Varsinaisen tutkimustyönsä ohella hän on osallistunut aktiivisesti matematiikan opetuksen käytännön kehittämiseen. Lisäksi hän on julkaissut monia varhaiskasvattajille ja opettajille suunnattuja teoksia.

Video: Clementsin puhe Valkoisessa talossa

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

POHDINTATEHTÄVÄ: Mikä näissä esittelyissä oli kiinnostavaa, mitä jäi mieleen, onko jotain, josta olet eri mieltä, voidaanko näitä ajatuksia soveltaa käytännön opetukseen?

2. Joustava matemaattinen ajattelu

2.1. Joustava matemaattinen ajattelu

Mitä tarkoitetaan joustavalla matemaattisella ajattelulla ja miksi se on tärkeä tavoite koulun matematiikan oppimiselle?

Vaikka tämä kurssi käsittelee erityisesti joustavaa matematiikkaa, niin joustava ajattelu ei ole ainoastaan matematiikkaan liittyvää. Emeritusprofessori Art Costa (California State University, Sacramento) on tehnyt elämäntyönsä edistämällä kriittistä ja joustavaa ajattelua (ks. **The Institute for Habits of Mind**). Seuraavalla videolla hän pohtii, miksi joustava ajattelu yleensä on tärkeää. Videota ei ole tekstitetty, mutta voit lukea videon **suomennoksen**.

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Joustavat strategiat aritmetiikassa

Seuraavassa on uudelleen professori Lieven Verschaffelin esittelyvideo, jossa hän määrittelee joustavuuden ideaa yleensä ja erityisesti aritmetiikassa. Halutessasi voit lukea esityksen myös **suomeksi** (ei sanasta sanaan käännös).

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Laajempi alkuperäinen video: https://vimeo.com/246771031

Seuraavassa videossa Verschaffel keskittyy erityisesti tarkastelemaan yhteen- ja vähennyslaskun käänteisyyttä ja sen käyttämistä hyväksi joustavassa aritmeettisessa ongelmanratkaisussa. Tutustu myös Verschaffelin luennon **suomenkieliseen tiivistelmään sekä hänen käyttämiinsä dioihin**.

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Laajempi alkuperäinen video: https://vimeo.com/246771031

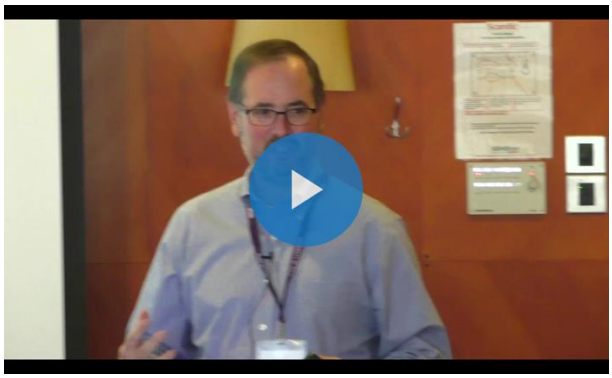
Videolla Verschaffel esitti kolme erilaista tapaa tarkastella joustavia ja adaptiivisia strategioita. Tällä johdantokurssilla tarkastelemme millaista joustavuutta erilaiset tehtävät mahdollistavat. On kuitenkin tärkeää ottaa huomioon, että joustavuutta ei voida käytännössä määritellä vain suhteessa tehtävien ominaisuuksiin. Oppilaan taitojen ja tehtävän ominaisuuksien välinen suhde on myös tärkeä arvioitaessa joustavuutta. Toiseksi joustavuus on myös aina suhteessa sen tilanteen vaatimuksiin ja vakiintuneisiin käytäntöihin, joissa ongelmia ratkaistaan. Esimerkiksi opetuksessa oppilaille on välittynyt käsitys, että vain yhden harjoitellun rutiinin mukainen suoritus on koulussa hyväksyttävää.

Verschaffelin luennossa käsiteltyjä asioita on avattu tarkemmin 2009 julkaistussa artikkelissa, jota käsitellään perusteellisemmin alakoulun 6 opintopisteen kurssilla. Kiinnostuneet voivat vielä lukea **artikkelin** (Verschaffel et al., 2009).

Joustavat strategiat algebrassa

Seuraavassa videossa professori Jon Star johdattelee joustavuuteen yleisesti ja yhtälönratkaisun kontekstissa. Luento on kuvattu JoMa-kesätyöpajassa Tampereella 12.6.2018.

Jon Starin ja Colleen Seifertin artikkelissa "**The development of flexibility in equation solving**" kuvataan yhtälönratkaisun opetteluun tapa, joka auttaa oppilaita kehittämään joustavuuttaan. Voit lukea myös artikkelin **suomenkielisen tiivistelmän**.



Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

TEHTÄVÄ: Valitse jokin matemaattinen sisältö, jota käsittelet opetuksessasi. Mieti mitä joustavuus tarkoittaisi tämän sisällön kohdalla ja kuvaa, miten tukisit joustavan ajattelun muodostumista sen opiskelussa.

Keskustelua joustavan matemaattisen ajattelun roolista kouluopetuksessa

Vaikka suuri osa tutkimustuloksista tukee joustavan matemaattisen ajattelun opettamista, niin kysymykseen liittyy vielä erimielisyyksiä käytännön opetuksen kehittämisessä. Seuraavissa katkelmissa Verschaffel käy läpi joitain näistä keskustelua aiheuttavista kysymyksistä.

Väite - vastaväite 1:

Pitäisikö koulun keskittyä matemaattisten perustaitojen opettamiseen ja yhden ratkaisumallin perusteelliseen harjaannuttamiseen? Joustavaa taitoa voi sitten oppia muualla.

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Halutessasi voit lukea myös **suomennoksen Verschaffelin puheenvuorosta**.

Erno Lehtinen kommentoi

Jon Star kommentoi.

Väite - vastaväite 2:

Jos hyväksytään, että joustavan matemaattisen ajattelun ja adaptiivisen asiantuntijuuden opettaminen on koulumatematiikan tehtävä, niin milloin se olisi parasta tehdä? Olisiko luonnollista ajatella, että opetetaan ensin rutiinitaidot ja vasta joskus myöhemmin kiinnitettäisiin huomiota joustavaan ajatteluun?

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Erno kommentoi.

Dimitri kommentoi.

Väite - vastaväite 3:

Entä keille joustavaa ajattelua kannattaa opettaa? Olisiko se kohdistettava vain matemaattisesti lahjakkaille oppilaille?

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Halutessasi voit lukea myös **suomennoksen Verschaffelin puheenvuorosta**.

Erno kommentoi.

Jon Star kommentoi.

Dimitri kommentoi.

Väite - vastaväite 4:

Miten joustavia matemaattisia strategioita pitäisi opettaa?

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Halutessasi voit lukea myös **suomennoksen Verschaffelin puheenvuorosta**.

Erno kommentoi.

Jon Star kommentoi.

Seuraavassa videossa Teija antaa käytännön esimerkkejä joustavien aritmeettisten strategioiden käsittelystä kuvitteellisessa opetustilanteessa matematiikkapuheen avulla.

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Tässä videossa oppilaiden roolissa olleet tutkijat toivat esiin strategioita, jotka eivät olleet aina kaikkein ilmeisimpiä. Esimerkiksi tehtävässä 9 · 49 varmaan monella tekisi kovasti mieli vertailla

kymppeihin hajottamisen strategiaa seuraavaan: 9 · 50 - 9 tai 10 · 49 - 49. Oikeassa tilanteessa kokonaisesta luokasta ainakin joku oppilas olisi esittänyt myös tällaisen ratkaisuehdotuksen. Joustavia strategioita vahvistavassa matematiikkapuheessa on kuitenkin tärkeää, ettei opettaja pysähdy heti kaikkein ilmeisimpään strategiseen ratkaisuun, vaan malttaa jatkaa keskustelua, jossa tarkastellaan useita vaihtoehtoja. Vähitellen näissä keskusteluissa aletaan nähdä, mitkä strategiat ovat tarkoituksenmukaisimpia tietynlaisissa tehtävissä. Silloinkin eri oppilailla voi olla erilaisia näkemyksiä juuri heille parhaasta strategiasta, koska strateginen joustavuus edellyttää tehtävän ominaisuuksien lisäksi myös henkilön omien vahvuuksien huomioon ottamista.

POHDINTATEHTÄVÄ: Pohdi Verschaffelin käynnistämää keskustelua, joka voidaan tiivistää neljään kysymykseen miksi, milloin, keille ja miten.

2.2. Matemaattisen ajattelun kehitys

Johdanto

Tällä videolla Erno Lehtinen tekee yleiskatsauksen siihen, mitä tutkimusten perusteella tiedetään matemaattisen ajattelun pitkän aikavälin kehityksestä. Videon kesto on noin 19 minuuttia.

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Miten varhainen lukujen osaaminen ennustaa myöhempää matemaattista oppimista?

Matemaattisen ajattelun kehitys ei ala vasta muodollisen matemaattisen opetuksen alettua koulun alussa. Matemaattisen ajattelun perusta rakentuu vähitellen aivan elämän varhaisista vuosista lähtien. Ennen kouluikää kehittynyt luonnollisten lukujen ymmärtäminen ja niihin liittyvät taidot ennustavat matematiikan oppimista koulun alkuvaiheessa. Seuraavassa pohditaan kahta Suomessa tehtyä tutkimusta. Niissä on käytetty niin sanottuja rakenneyhtälömalleja, joilla voidaan samanaikaisesti kuvata miten useammat eri tekijät ennustavat myöhempää oppimista.

Aunion ja Niemivirran tutkimuksesta selviää, että esikoululaisten laskemistaidot ja yleisempi lukukäsitteen ymmärtäminen (Relational skills) molemmat ennustavat sekä matematiikan kouluarvosanaa että erikseen mitattuja matematiikan taitoja peruskoulun alussa.

Puolestaan ennen kouluikää mitatut luonnollisen luvun käsitteen ymmärtäminen, spontaani lukumääriin huomion kiinnittäminen ja laskemistaidot ennustavat matemaattisia suorituksia koulun alkuvaiheessa ja aina alakoulun loppuun asti. Vastaavaa tutkimusnäyttöä on runsaasti muistakin maista kuin Suomesta.

Aiheesta voit lukea tarkemmin seuraavista artikkeleista:

Aunio, P., & Niemivirta, M. (2010). Predicting children's mathematical performance in grade one by early numeracy. *Learning and individual differences*, *20*(5), 427-435. Linkki artikkeliin

Hannula-Sormunen, M. M., Lehtinen, E., & Räsänen, P. (2015). Preschool children's spontaneous focusing on numerosity, subitizing, and counting skills as predictors of their mathematical performance seven years later at school. *Mathematical Thinking and Learning*, *17*(2-3), 155-177. Linkki artikkeliin

Maailma matemaattisin silmin - jo pienestä pitäen!

JoMa-koulutuksen varhais- ja alkukasvatusta koskevat "Pikkumatikka"-kurssit perustuvat Suomen Akatemian kärkihankerahoituksella tehtyyn tutkimushankkeeseen. Oheisella 5 minuutin videolla Minna Hannula-Sormunen perustelee, miksi "Pikkumatikkaa" tarvitaan varhaiskasvatukseen. Video on tallenne Suomen Akatemian kärkihankkeiden loppuseminaarista valtiovallan, sidosryhmien ja muiden kärkihankkeiden edustajille.

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Matemaattisen ajattelun biologinen perusta

Kuuntele WNYC Studios -sivuston podcast matemaattisen ajattelun perustasta ja vastaa väittämiin. Podcastissa mukana keskustelemassa professori Stanislas Dehaene ja professori Susan Carey, molemmat numeerisen prosessoinnin ja kognitiivisen kehityksen tutkimuksen uranuurtajia maailmassa. Voit käyttää kuuntelun apuna **suomenkielistä tiivistelmää**.

Voit kuunnella podcastin **WNYC Studios -sivustolta**.

Kun olet kuunnellut podcastin, tee alla oleva tehtävä, jossa pääset arvioimaan esitettyjen väitteiden tutkimusperustaisuutta. Tukeeko podcastissa esitelty tutkimustieto väittämää vai ei?

TEHTÄVÄ 1**:** Lapsen oman toiminnan ja vuorovaikutuksen merkitys varhaisessa kehityksessä**.** Lue Hannula-Sormusen, Mattisen, Räsäsen ja Ruusuvirran kirjoittama artikkeli **Varhaisten matemaattisten taitojen perusta: synnynnäiset valmiudet, tietoinen toiminta ja vuorovaikutus** ja vastaa sen jälkeen, tukeeko esitelty tutkimustieto väittämää, vai ei.

"Tutkimuksen mukaan lukukäsitteen kehittymiselle on olennaista spontaani kiinnittäminen lukumääriin ja sen käynnistämä omaehtoinen harjoittelu."

TEHTÄVÄ 2: Kahdeksan myyttiä pienten lasten matematiikasta

Pienten lasten matemaattisista taidoista liikkuu paljon **vääriä** uskomuksia, joita tutkimustieto ei tue. Mihin näistä sinä olet törmännyt?

1. *Matematiikkaa opitaan vasta koulussa.*
   Olen törmännyt tähän väärään uskomukseen.
   En ole juurikaan kuullut, että kukaan ajattelisi näin.
2. *Matematiikka on tarkoitettu joillekin lahjakkaille lapsille, joilla on paremmat matemaattiset geenit.*
   Olen törmännyt tähän väärään uskomukseen.
   En ole juurikaan kuullut, että kukaan ajattelisi näin.
3. *Pienet luvut ja yksinkertaiset muodot riittävät hyvin lapsille ennen kouluikää.*
   Olen törmännyt tähän väärään uskomukseen.
   En ole juurikaan kuullut, että kukaan ajattelisi näin.
4. *Kielellisten taitojen ja lukutaidon oppiminen on tärkeämpää kuin matematiikan oppiminen.*
   Olen törmännyt tähän väärään uskomukseen.
   En ole juurikaan kuullut, että kukaan ajattelisi näin.
5. *Varhaiskasvattajien tulisi pysyä taka-alalla ja antaa lasten leikkiä virikkeellisessä ympäristössä.*
   Olen törmännyt tähän väärään uskomukseen.
   En ole juurikaan kuullut, että kukaan ajattelisi näin.
6. *Pienten lasten matemaattisten taitojen arviointi on turhaa.*
   Olen törmännyt tähän väärään uskomukseen.
   En ole juurikaan kuullut, että kukaan ajattelisi näin.
7. *Lapset oppivat matematiikkaa vain konkreettisten esineiden avulla.*
   Olen törmännyt tähän väärään uskomukseen.
   En ole juurikaan kuullut, että kukaan ajattelisi näin.
8. *Tietokoneet eivät sovi matematiikan opettamiseen ja oppimiseen.*
   Olen törmännyt tähän väärään uskomukseen.
   En ole juurikaan kuullut, että kukaan ajattelisi näin.

Lähde: Lee, J. S., & Ginsburg, H. P. (2009). Early childhood teachers' misconceptions about mathematics education for young children in the United States. Australian Journal of Early Childhood, 34, 37–45.

Pienten lasten matematiikan myytinmurtajat

Pienten lasten matematiikkaan ja sen opettamiseen liittyy paljon myyttejä ja vääriä uskomuksia. Alla olevassa luentosarjassa Erikson Instituutin johtaja Jennifer McCray kumoaa yleisimpiä myyttejä, joihin he ovat törmänneet kouluttaessaan varhaiskasvattajia ja opettajia. Katso videot ja tee niihin liittyvät tehtävät. Voit tutustua myös Erikson Instituutin sivuilla jaettuihin **englanninkielisiin luentodioihin**. Voit käyttää apunasi **suomenkielistä tiivistelmää**.

Myytti 1: ”On tärkeämpää kehittää pienten lasten kielellisiä kuin matemaattisia taitoja.”

Video: Pienten lasten matematiikan oppimisen myyttejä, osa 1

Jennifer McCray
https://www.youtube.com/watch?v=rsKNrnIfXt4

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

POHDINTATEHTÄVÄ:

Miksi myytti ei pidä paikkaansa?

Myytti: ”Pienille lapsille on tärkeämpää kehittää kielellisiä taitoja kuin harjoitella matematiikan taitoja.”

Kirjaa ylös, miksi myytti ei pidä paikkaansa. Miten luennoitsija perusteli näkemystään?

Myytti 2: ”Pienten lasten matematiikka on pääosin numeroiden ja muotojen oppimista.”

Video: Pienten lasten matematiikan oppimisen myyttejä, osa 2

Jennifer McCray
https://www.youtube.com/watch?v=xssBJpOBecs

Klikkaa kuvaa avataksesi videon

Myytti: ”Pienten lasten matematiikka on pääosin numeroiden ja muotojen oppimista.”

Pohdi, mitä mieltä olet esitetystä myytistä. Kirjaa ylös millä perustein väite kumotaan. Yllättivätkö perustelut sinut?

Myytti 3: ”Matematiikan opettaminen lapsille on helppoa, koska pienten lasten matematiikka on helppoa ja yksinkertaista.”

Video: Pienten lasten matematiikan oppimisen myyttejä, osa 3

Jennifer McCray
https://www.youtube.com/watch?v=WVfwBQe_IJE

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Myytti: "Matematiikan opettaminen pienille lapsille on helppoa, koska kyseessä on yksinkertainen matematiikka.”

Kirjaa ylös, miksi matematiikan opettaminen pienille lapsille ei ole tämän luennoitsijan mielestä niin yksinkertaista.

Lukukäsitteen ja perusaritmetiikan oppiminen peruskoulun alaluokilla

Alakoulussa luodaan tärkeä perusta sekä matematiikan käytölle koulun ulkopuolella että myöhemmälle matematiikan oppimiselle yläkoulussa ja lukiossa. Peruskoulun 3. - 6. luokilla matematiikan oppiminen rakentuu sen varhaisen matemaattisen ajattelun varaan, joka on kehittynyt jo ennen kouluikää sekä alkuopetuksen aikana opituille käsitteille. Erityisen tärkeä merkitys näillä luokka-asteilla on luonnollisten lukujen systeemin vahvistamisessa sekä laajentamisessa rationaalilukuihin. Lukusysteemin hyvä ymmärtäminen liittyy olennaisesti joustavaan matematiikkaan.

Videolla Robert Siegler puhuu murtolukujen oppimisesta ja opettamisesta. Halutessasi voit lukea videon suomenkielisen **tiivistelmän**.

Video: Murtolukujen oppimisesta ja opettamisesta

Robert Siegler
https://www.youtube.com/watch?v=7YSj0mmjwBM

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

POHDINTATEHTÄVÄ: Oliko Sieglerin esiin nostamissa ajatuksissa sinulle sellaista, mikä kannattaisi ottaa huomioon opetuksessa?

Matemaattisen ajattelun kehitys ylempien kouluasteiden aikana

Yläkoulun ja lukion aikana olennaisin muutos matemaattisen ajattelun kannalta on siirtyminen konkreettisesta abstraktimpaan. Siirtyminen lukujen käsittelystä muuttujien käsittelyyn ja yksittäisistä tapauksista yleistyksiin. Edellä Teija havainnollisti, kuinka muuttujan käsitettä voi vahvistaa jo alakoulussa vertaamalla yhtäsuuruutta vaakaan ja muuttelemalla molempien puolien lukuja säilyttäen tasapaino tai käyttämällä konkreettista vaakaa. Ylemmillä kouluasteilla avainasemassa oleva muuttuja ei ole enää ainoastaan tuntematon luku vaan sillä on eri merkityksiä riippuen tilanteesta. Yläkoulussa tutkitaan erilaisia riippuvuussuhteita, lukujen ja lausekkeiden yleisiä ominaisuuksia sekä opetellaan yhtälönratkaisussa kohdistamaan laskutoimituksia muuttujaan. Lukiossa on puolestaan pystyttävä pohtimaan sujuvasti miten erilaiset muuttujat riippuvat toisistaan sekä miten erilaisten parametrien vaihtelu vaikuttaa tilanteeseen. Muuttujan käsitteen ymmärtäminen on välttämätöntä, jotta voidaan ymmärtää lukiossa keskiöön nouseva funktion käsite. Valtaosa lukion matematiikasta puolestaan on erilaisten funktioiden ja niiden ominaisuuksien tutkimista.

Ongelmanratkaisutaidot ja yleiset matemaattisen ajattelun taidot, kuten säännönmukaisuuksien havaitseminen, olettaminen, kyseenalaistaminen, perusteleminen, yleistäminen, kokeillen tutkiminen, yhdisteleminen, osiin purkaminen, vertaileminen ym. ovat kaikilla asteilla matemaattisen ajattelun kehittymisen perusta. Ylempien asteiden aikana lasten ja nuorten metakognitiiviset taidot (esimerkiksi kyky tarkkailla ja säädellä omaa toimintaa) kuitenkin kehittyvät merkittävästi, mikä mahdollistaa aivan erityisellä tavalla edellä kuvattujen matemaattisen ajattelun ytimessä olevien taitojen kehittämisen.

Muuttujan ja funktion käsitteet

Dimitri kuvaa muuttujakäsitteen ymmärtämiseen liittyviä haasteita, muuttujan tilanneriippuvaista luonnetta sekä antaa esimerkkejä, miten muuttujakäsitteen ymmärrystä voi yrittää vahvistaa.

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Vapaehtoinen lisämateriaali: Mikäli haluat lukea lisää aiheesta, niin Henna Heikkisen gradussa on koostettu Suomeksi useita tutkimuksia aiheeseen liittyen: **“Siirtymä aritmetiikasta algebraan - kirjainmuuttujan käyttöönottoon liittyviä oppimisvaikeuksia”**.

Lukiossa muuttujaa käsitellään erityisesti funktioissa, joissa tutkitaan tiettyjen muuttujien välistä riippuvuussuhdetta. Funktion on havaittu olevan erittäin vaikea käsite vielä jopa yliopistossa matematiikkaa opiskeleville. Osittain kuitenkin kirjojen ja opetuksen kaavamaisuus ovat luomassa funktioon liittyviä väärinkäsityksiä. Siksi on tärkeää tiedostaa mahdollisimman monipuolisesti, millä eri tavoin funktiokäsite voidaan ymmärtää väärin. Seuraavalla videolla avataan arvostettua Sajkan tutkimusta, jossa aineiston laatu korvaa määrän - nimittäin tutkimus perustuu yhden keskitasoisen lukiolaisen 45 minuutin haastatteluun ja työskentelyyn funktion ymmärtämisen kannalta rikkaan tehtävän parissa.

Dimitri kuvaa funktioon liittyviä virhekäsityksiä ja pohtii miten kirjojen ja opetuksen monipuolisuus tai kaavamaisuus voi vaikuttaa niihin.

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Matematiikan kolme maailmaa

Yksi tapa hahmottaa matemaattisen ajattelun kehittymistä kaikenikäisillä oppijoilla on David Tallin teoria matematiikan kolmesta maailmasta. Myös tämän teoria korostaa tarvetta luoda oppilaille mahdollisuus ajatella monin eri tavoin.

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Tehtävät

Seuraavat tehtävät on jaoteltu kouluasteittain. Tarkoituksena ei ole, että teet näistä kaikki, vaan voit valita sen tehtävänannon, joka sopii omaan työnkuvaasi parhaiten.

Mikäli et ole tällä hetkellä työssä päiväkodissa tai koulussa, voit valita sen tehtävänannon, joka sinun on helpointa toteuttaa. Jos et voi toteuttaa vaihtoehdoista mitään, voit suorittaa tämän tehtävän kirjoittamalla suunnitelman (myös arvio kohdattavista haasteista) siitä, miten toteuttaisit kyseisen harjoituksen.

Oman tehtäväsi lisäksi saat nähtäväksi kolmen muun kurssilaisen vastaukset. Kirjoita positiivinen, innostava kommentti saamiisi vastauksiin.

TEHTÄVÄ: Tehtävänannot (valitse yksi)

1) Varhaiskasvattajat ja esikoulun opettajat:

Kokeile Pikkumatikan Vihannestori-leikkiä lasten kanssa. Seuraavassa tehtävässä pääset kokeilemaan mitä Pikkumatikka eli matemaattisten taitojen ohjaus on. Voit kokeilla tätä roolileikkiä yhden tai useamman lapsen kanssa. Aino Mattinen ja Minna Hannula-Sormunen esittelevät Vihannestori-roolileikin. Katso videolta vinkkejä siitä, kuinka toteutat Vihannestori-roolileikin yhden tai useamman lapsen kanssa.

Tutustu leikin **kirjallisiin ohjeisiin**.

Tehtävä: Kirjoita lyhyt kuvaus siitä, mikä oli haasteellista ja mikä onnistui matemaattisen ajattelun ohjauksessasi Vihannestori-roolileikissä. Kerro myös, minkä ikäisten kanssa ja missä kokeilit tätä matemaattista leikkiä.

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

2) Alakoulun opettajat:

Kokeile omassa luokassasi yhtäsuuruuden käsitettä vahvistavaa matematiikkakeskustelua. Matematiikkakeskustelulla tarkoitetaan keskustelua, jossa oppilaita innostetaan tuomaan esiin erilaisia ratkaisuja tai ehdotuksia. Tässä ei siis etsitä yhtä "oikeaa" vastausta vaan useita vaihtoehtoja. Jos keskustelussa tulee esiin ehdotus, joka ei ole matemaattisesti oikein, se korjataan yhdessä keskustellen oppilasryhmän kanssa (usein matemaattisesti virheellinen vastaus antaa mahdollisuuden

hedelmälliselle keskustelulle). Jos et nyt työskentele luokassa tai muuten et voi toteuttaa tehtävää luokkatilanteessa, niin tee tehtävä pohtimalla, miten ohjaisit keskustelua.

Tehtävä: Kirjoita kokemuksistasi lyhyt kuvaus.

3) Yläkoulun ja lukion opettajat:

Tehtävä: Käy matematiikkapuhetta hyödyntäen keskustelu oppilaiden kanssa muuttujakäsitteen eri merkityksistä. Kirjoita lyhyt kuvaus siitä, mikä oli haasteellista, mikä onnistui ja mitä opit.

Halutessasi voit hyödyntää Dimitrin videossa esiteltyjä lähestymistapoja (puhelinliittymä tai luvun vierekkäisten lukujen tulo), Teijan mallintamaa vaakakeskustelua tai funktiovideossa esiteltyä tehtävää ongelmanratkaisutehtävänä.

Mikäli sinulla ei ole mahdollisuutta käydä keskustelua lasten kanssa, voit pohtia muuttujan tai funktion käsitettä David Tallin kolmen maailman näkökulmasta. Mitä asioita kuuluu havaintomaailmaan, symbolimaailmaan ja formaalimaailmaan? Kuvaile esimerkein. Kerro, jos olet huomannut jollain oppilaalla ongelmia tietyssä ’maailmassa’ ja miten se on ilmennyt.

Videopalaute

Palautevideoilla professori Erno Lehtinen käy läpi matemaattisen ajattelun pitkän aikavälin kehitykseen liittyviä ydinkäsityksiä, jotka ovat hyvin tärkeitä muun matematiikan oppimisen kannalta. Professori Minna Hannula-Sormunen keskittyy erityisesti varhaisten matemaattisten taitojen kehittymiseen liittyviin myytteihin sekä nostaa esiin tärkeitä huomioita vihannestorileikistä. Väitöskirjatutkija Dimitri Tuomela pohtii yläkoulun ja lukion opettajien raportoimien keskusteluiden pohjalta matematiikan haastavuutta, kieltä, merkityksellisyyttä ja muutoksen hitautta.

Matemaattisen ajattelun kehitykseen liittyviä ydinkäsityksiä

Videolla Erno Lehtinen käy läpi kurssilaisten pohdintoja jakson sisällöistä

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Varhaisia matemaattisia taitoja koskevat virheelliset uskomukset

Kuinka yleisiä varhaisia matemaattisia taitoja koskevat virheelliset uskomukset ovat JoMa-kurssilaisten mukaan? Mikä on varhaiskasvatuksen matemaattisten taitojen erityishaaste Suomessa? Videolla Minna Hannula-Sormunen kommentoi myyttikyselyn vastauksia.

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Vihannestori

Videolla Minna Hannula-Sormunen nostaa vielä esiin tärkeitä huomioita varhaiskasvattajien ja esiopettajien vihannestorileikistä.

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Keskustelu muuttujakäsitteestä oppilaiden kanssa

Videolla Dimitri pohtii aineenopettajien palautteiden pohjalta matematiikan haastavuutta, kieltä, merkityksellisyyttä ja muutoksen hitautta.

Tässä vielä suorat linkit Dimitrin videolla vinkkaamaan **Worldometers** -sivustoon sekä artikkeliin **van Leeuwen, A. & Janssen, J. (2019). A systematic review of teacher guidance during collaborative learning in primary and secondary education. Educational Research Review, 27, 71 - 89.**

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

3. Mihin tätäki tarvii?

3.1. Mihin matematiikkaa tarvitaan

Joskus opettaessa voi olla vaikea vastata lasten ja nuorten kysymykseen mihin tätäkin sisältöä tarvitaan.

Ilmiö ei esiinny vain suomalaisissa koululuokissa, vaan se on erittäin yleinen erityisesti länsimaissa. Amerikan kansallinen matematiikan opettajien yhteisö (NCTM) on koonnut sivuston juuri tätä kysymystä varten. Jos kiinnostuit, voit halutessasi käydä tutustumassa **NCTM:n** sivuihin. Sivusto vaatii erillisen kirjautumisen.

Kirjautumisen jälkeen klikkaa FAQ ja valitse kysymys *Why study math? How to study math*. Sivustolta löytyy paljon mainioita vinkkejä ja ideoita opetuksen tueksi!

Lentäjä kertoo matematiikan merkityksestä lentäjäksi opiskelussa ja lentäjän työssä.

Video: Mihin lentäjä tarvitsee matematiikkaa?

https://www.youtube.com/watch?v=Plv8LcPZX2I

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Valtiovarainministeriön erityisasiantuntija Jukka Mattila pohdiskelee matematiikan osaamisen merkitystä sekä sitä mihin matematiikkaa tarvitaan.

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Professori Maarit Järvenpää kuvaa sitä, miten matematiikan merkitys on lisääntynyt kaikkialla ja muodostunut tärkeäksi osaksi hyvin monia ammatteja. Toisaalta matematiikalla on myös oma merkityksensä yleisenä ajattelun välineenä.

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Topi Törmä esittää esimerkkejä siitä, miten vaativampien matematiikan sisältöjen merkitystä voi avata oppilaille.

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Ekonomisti Olli Kärkkäinen kuvaa sitä, miten tarvitsee työssään matematiikkaa mutta samalla painottaa sitä, etteivät matemaattiset ja sosiaaliset taidot ole toisiaan poissulkevia, vaan modernissa työelämässä tarvitaan näiden yhdistämistä.

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Teknologiateollisuuden 100-vuotissäätiön sivusto tarjoaa hyvän materiaalin vaikkapa luokassa käytävään keskusteluun matematiikan käytöstä ja tarpeesta eri tilanteissa.

Erilaisia tapoja vastata lasten ja nuorten kysymykseen mihin matematiikkaa tarvitaan

1. Edellä NCTM:n sivustolla ja joissain videoissa on konkreettisia esimerkkejä siitä, miten kysymykseen voi vastata kertomalla matematiikan tarpeesta arkipäivän tilanteissa tai ammateissa. Joidenkin koulumatematiikan sisältöjen osalta tämä on suhteellisen helppoa mutta useiden matemaattisten käsitteiden tai proseduurin kohdalla täsmäesimerkin löytäminen voi olla hyvin haasteellista.
2. Joissain tapauksissa voikin olla parempi etsiä perustelua itse matematiikan järjestelmästä. Jonkin asian oppiminen on tärkeää, koska myöhemmät matemaattiset käsitteet tai operaatiot perustuvat tällä osaamiselle. Niillä myöhemmillä taidoilla taas voi olla paljonkin konkreettisia sovelluksia, vaikka tälle erityiselle kysymykselle ei täsmäesimerkkiä löydykään.
3. Opetustapa, jossa matemaattisia käsitteitä sovelletaan ajoittain hyvin konkreettisten arjen tilanteiden tulkintaa tai ratkaisuun, voi jo ennalta vähentää tällaisten kysymysten tekemistä. Toki joskus voi myös vastata oppilaiden kysymykseen ottamalla käsiteltäväksi tehtävän, jossa uutta matemaattista taitoa käytetään konkreettisen arjen ongelman ratkaisemiseen. Tällöin vakuuttaminen ei jää vain puheentasolle, vaan se ilmenee konkreettisesti tehtävän suorituksessa.
4. Matemaattisten ongelmien parissa saamme usein olla jumissa ja ponnistella. Lapsille ja nuorille voi tehdä näkyväksi mitä kaikkia jokapäiväisessä elämässä tärkeitä asioita juuri näissä tilanteissa voi oppia: metakognitiivisia taitoja, tunnetaitoja ja yleisiä ajattelutaitoja. Matematiikka antaa mahdollisuuden oppia viihtymään omalla epämukavuusalueellaan (ts. elämysalueella). Matematiikka antaa mahdollisuuden tiedostaa ja kehittää niitä toimintatapoja, jotka kytkeytyvät päälle, kun olemme henkisesti vaikeuksissa. Matematiikassa opitut ongelmanratkaisutaidot siirtyvät jokapäiväiseen elämään.
5. On myös tärkeää joskus “siirtää pallo” lapsille ja nuorille ja pyytää heitä miettimään matematiikan tarvetta arjessa ja työssä.
6. Matematiikan opiskelun avulla opimme myös tuntemaan omaa ajatteluamme. Matemaattisten ongelmien parissa olemme usein jumissa ja joudumme ponnistelemaan. Oppilaille voi tehdä näkyväksi mitä kaikkia jokapäiväisessä elämässä tärkeitä asioita juuri näissä

tilanteissa voi oppia: oman ajattelun seurantaa ja ohjaamista (ns. metakognitiivisia taitoja), tunnetaitoja ja yleisiä ajattelutaitoja. Matematiikka antaa mahdollisuuden oppia viihtymään omalla epämukavuusalueellaan, mikä on kaiken uutta luovan ajattelun edellytys.

Matematiikan osaamisen tarpeet tulevaisuudessa

Ylen nettisivuilla kerrotaan, kuinka matematiikka nähdään usein tylsänä, hankalana, teoreettisena ja tarpeettomana sekä arkielämästä irrallisena. Tämä käsitys haastetaan **Ylen nettisivujen** matematiikan hyödyllisyydestä kertovassa dokumentissa (kesto n. 21 min) sekä 3 podcastissa (kesto yhteensä n. 45 min).

Joustavaan matematiikkaan -ohjelman asiantuntijana toimiva Harvardin yliopiston professori Jon Star pohtii seuraavalla videolla sitä, miten maailma kehittyy ja miten se heijastuu matematiikan osaamisen tarpeisiin. Katso video ja vastaa kysymykseen.

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

POHDINTATEHTÄVÄ: Arvioi tunnistiko Jon Star mielestäsi olennaisia piirteitä tulevaisuuden matematiikan osaamisesta.

Matematiikka hahmottaa maailmaa

Seuraavassa opettajankouluttaja Kaisa Jokiranta pohtii matematiikan merkitystä arjessa ja maailman hahmottamisessa.

POHDINTATEHTÄVÄ: Herättikö tämä pohdinta sinussa uusia ajatuksia matematiikan opetuksesta?

Tulevaisuuden taidot matematiikan opetuksessa

Tunnetut matematiikan opetuksen tutkijat julkaisivat juuri laajan **artikkelin**, jossa he tarkastelivat eri näkökulmista matematiikan osaamisen tarvetta tulevaisuuden työelämässä ja arjessa. He esittivät myös joukon väitteitä siitä, miten nämä teknologian, yhteiskunnan ja työelämän muutokset heijastuvat siihen, millaista matematiikkaa kouluissa tulisi opettaa. Voit käyttää apunasi **suomenkielistä tiivistelmää**.

Seuraavalla videolla matemaatikko (Peter Hästö) ja oppimisen tutkija (Erno Lehtinen) keskustelevat artikkelista. Videon kesto on noin 25 minuuttia.

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Keskustele oppilaiden kanssa siitä millaista matematiikkaa ammateissa ja arjessa tarvitaan ja miten digitalisaatio muuttaa matematiikan osaamisen tarvetta. Aihetta voi pohtia myös varhaiskasvatuksessa ja esiopetuksessa yhdessä lasten kanssa. Voit keskustella aiheesta lisäksi myös kollegoiden kanssa. Jos et juuri nyt voi toteuttaa keskustelua oppilaiden tai kollegoiden kanssa, voit myös keskustella aiheesta omassa tuttavapiirissäsi.

TEHTÄVÄ: Keskustele oppilaiden kanssa siitä millaista matematiikkaa ammateissa ja arjessa tarvitaan ja miten digitalisaatio muuttaa matematiikan osaamisen tarvetta. Aihetta voi pohtia myös varhaiskasvatuksessa ja esiopetuksessa yhdessä lasten kanssa. Voit keskustella aiheesta lisäksi myös kollegoiden kanssa. Jos et juuri nyt voi toteuttaa keskustelua oppilaiden tai kollegoiden kanssa, voit myös keskustella aiheesta omassa tuttavapiirissäsi.

3.2. Motivaation vahvistaminen

Motivaation vahvistaminen olennaista joustavan matematiikan opetuksessa

Mikä tekee matematiikasta kiinnostavaa

Viime vuosina julkaistut tutkimukset ovat osoittaneet, että suomalaiset oppilaat eivät ole erityisen motivoituneita opiskelemaan matematiikkaa ja että motivaatio näyttää laskevan kouluvuosien aikana. Julkisessa keskustelussa tähän ongelmaan esitetään usein ratkaisuksi erilaisten viihteellisten elementtien kuten pelien tuominen matematiikan tunneille. Mutta riittääkö tällainen ulkoinen viihteellistäminen tekemään matematiikasta kiinnostavaa?

Lue Rimma Nymanin (2016) **tutkimus** siitä, mikä tekee matematiikan kiinnostavaksi oppilaille. Voit lukea myös artikkelin **suomenkielisen tiivistelmän**.

Matematiikan kiinnostavuus on monitahoinen kysymys, josta usein esitetään varsin pinnallisia kommentteja julkisessa keskustelussa. Ei ole mitään yhtä tapaa tehdä matemaattisista sisällöistä kiinnostavia, vaan kiinnostusta lisäävät keinot riippuvat oppilaiden iästä, matemaattisesta sisällöstä ja erilaisista tilannetekijöistä. Seuraavassa videossa Teija Laine ja Erno Lehtinen keskustelevat siitä, mitä matematiikan kiinnostavaksi tekeminen voisi tarkoittaa. Videon kesto on noin 27 minuuttia.

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

POHDINTATEHTÄVÄ: Oliko videossa sellaista, joka auttaa ymmärtämään mistä matematiikan kiinnostavuudessa on kyse?

Kurssin suunnittelutiimiin kuuluvalla Dimitri Tuomelalla on kokemusta matematiikan kiinnostavaksi tekemisestä sekä opettajana että tutkijana. Seuraavassa videossa Dimitri esittää kiinnostuksen herättämiseen liittyviä tekijöitä.

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

POHDINTATEHTÄVÄ: Ota kantaa seuraaviin väitteisiin. (1 = ei juuri ollenkaan, 5 = huomattavasti)

Koulumatematiikassa oppilailla on tavallisesti mahdollisuus tuntea

a) omaehtoisuutta, b) kyvykkyyttä, c) yhteisöllisyyttä

Miten voisit hyödyntää Dimitrin vinkkejä omassa opetuksessasi?

Mitä mieltä ovat koulutuskentän toimijat?

Kysyimme pitkään matematiikkaa opettaneilta ja matematiikan opetuksen ongelmia pohtineilta asiantuntijoilta heidän näkemyksiään siitä, mikä tekee matematiikasta kiinnostavaa. Ajatuksiaan jakavat opettajankouluttajat Kaisa Jokiranta, Sinikka Kaartinen ja Jarmo Leskinen, normaalikoulun opettaja Tero Hirvi sekä kansainvälisesti tunnustettu matematiikan opetuksen uudistaja Maarit Rossi.

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

POHDINTATEHTÄVÄ: Miten hyödyllisinä pidit videoissa esitettyjä ajatuksia? (1 = hyödyttöminä, 5 = hyödyllisinä)

Video: Mikä tekee matematiikasta kiinnostavaa?

Tero Hirvi, opettaja

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

POHDINTATEHTÄVÄ: Miten hyödyllisinä pidit videoissa esitettyjä ajatuksia? (1 = hyödyttöminä, 5 = hyödyllisinä)

Video: Mikä tekee matematiikasta kiinnostavaa?

Maarit Rossi,
matematiikan opetuksen uudistaja

POHDINTATEHTÄVÄ: Miten hyödyllisinä pidit videoissa esitettyjä ajatuksia? (1 = hyödyttöminä, 5 = hyödyllisinä)

Video: Mikä tekee matematiikasta kiinnostavaa?

Sinikka Kaartinen,
opettajankouluttaja

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

POHDINTATEHTÄVÄ: Miten hyödyllisinä pidit videoissa esitettyjä ajatuksia? (1 = hyödyttöminä, 5 = hyödyllisinä)

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

POHDINTATEHTÄVÄ: Miten hyödyllisinä pidit videoissa esitettyjä ajatuksia? (1 = hyödyttöminä, 5 = hyödyllisinä)

Yhteenveto kiinnostuksen herättämiseen liittyvistä kysymyksistä

Monet tutkimukset ja opettajien käytännön kokemus viittaavat siihen, että matematiikan hyödyllisyyden näkeminen on ollut tärkeä osa matematiikan kiinnostavuutta. Matematiikan hyödyllisyyttä voidaan lähestyä monella tapaa.

Tällä kurssilla tutustutaan siihen, miten matematiikka liittyy sekä arjen toiminnoissa että työelämässä tarvittaviin taitoihin nyt ja tulevaisuudessa.

Tärkeä väline hyödyllisyyden osoittamiseen ovat tehtävät, joiden kautta oppilaat saavat käytännön kokemusta matematiikan soveltamisesta todellisten ongelmien ratkaisemiseen.

Matematiikka ei kuitenkaan ole pelkästään sovelluksia, vaan se on tiedollinen järjestelmä, jossa asioiden ja niiden välisten suhteiden ymmärtämisestä itsestään voi tulla kiinnostavaa.

Erityisesti joustavat tavat lähestyä matemaattisia tehtäviä voivat muuttaa muuten tylsiksi koetut tehtävät kiinnostavammiksi.

Joustavaan matematiikkaan liittyy myös omien strategioiden keksiminen, joka vahvistaa oppilaiden toimijuutta. Toisin sanoen matematiikkaa ei ole vain ulkopuolelta annettujen ohjeiden mekaanista toteuttamista vaan myös mahdollisuutta osallistua itse matematiikan tekemiseen luovalla tavalla.

Osa oppiaineen kiinnostavuudesta voi liittyä myös niihin oppimisympäristöihin ja välineisiin, joita matematiikan opetuksessa käytetään. Tutkimukset ovat osoittaneet, että pelit ja pelilliset ympäristöt eivät ole mikään kokonaisvaltainen ratkaisu matematiikan kiinnostavaksi tekemiseen, mutta ne

tuovat yhden merkittävän lisän opiskeluympäristöjen monipuolistamiseen ja sitä kautta kiinnostuksen lisäämiseen.

POHDINTATEHTÄVÄ: Pohdi ja keskustele mahdollisuuksien mukaan kollegoidesi kanssa: Mikä tekee matematiikasta kiinnostavaa?

Usko omiin kykyihin vahvistaa myös kiinnostusta

Matematiikan opiskelun motivaation lasku on erityisen ongelmallista siksi, että motivaatio näyttäisi tutkimusten mukaan olevan keskeinen pitkän aikavälin oppimisen selittäjä. Mm. laajassa saksalaisessa tutkimuksessa (Murayama, Pekrun, Lichtenfeld & vom Hofe, 2013) seurattiin yli 3000 oppilaan matematiikan osaamista viiden vuoden ajan. Tutkimuksen alussa testeillä mitattu älykkyys oli yhteydessä matematiikan osaamiseen, mutta älykkyyden merkitys väheni kouluvuosien myötä. Sen sijaan keskeisiksi selittäjiksi matematiikan oppimisen muutokselle osoittautui motivaatio ja opiskelussa käytetyt strategiat.

Tämän poikkeuksellisen laajaan aineistoon ja pitkäkestoiseen seurantaan perustuvat tulokset ovat tärkeitä joustavan matematiikan kannalta. Motivaatiotekijöistä matematiikan oppimisen kehittymistä pitkällä aikavälillä selitti ensinnäkin oppilaan usko siihen, että hän voi itse kontrolloida matematiikan oppimista. Ylemmillä luokilla positiivista oppimiskehitystä selittäväksi tekijäksi nousi myös sisäinen motivaatio ja omakohtainen kiinnostus matematiikkaa kohtaan. Tärkeä tavoite joustavan matemaattisen ajattelun opettamisessa on se, että oppilas kokee olevansa aktiivinen toimija, jolla on ”oikeus” myös itse keksiä ja testata erilaisia ratkaisustrategioita. Joustavan matematiikan ohjelman kannalta tärkeä on myös tulos, joka osoitti, että käytetyt strategiat olivat selvästi älykkyyttä tärkeämpi tulevaa matematiikan osaamista ennustava tekijä. (Jos olet kiinnostunut tutkimuksesta voit käydä tutustumassa myös **alkuperäiseen artikkeliin (Murayama, 2013)**.)

Lukuisat tutkimukset osoittavat, että oppimiskokemukset, jotka lisäävät oppilaan uskoa omiin kykyihinsä ja samalla tukevat oppilaan autonomiaa ja toimijuutta johtavat kestävään sisäisen motivaation kasvuun.

Joustavan matematiikan opettaminen tarkoittaa, ettei oppilaalle opeteta vain yhtä tapaa ratkaista tehtäviä, vaan opetetaan erilaisia vaihtoehtoisia strategioita ja rohkaistaan omien strategioiden keksimiseen tehtäviä syvällisemmin pohtimalla.

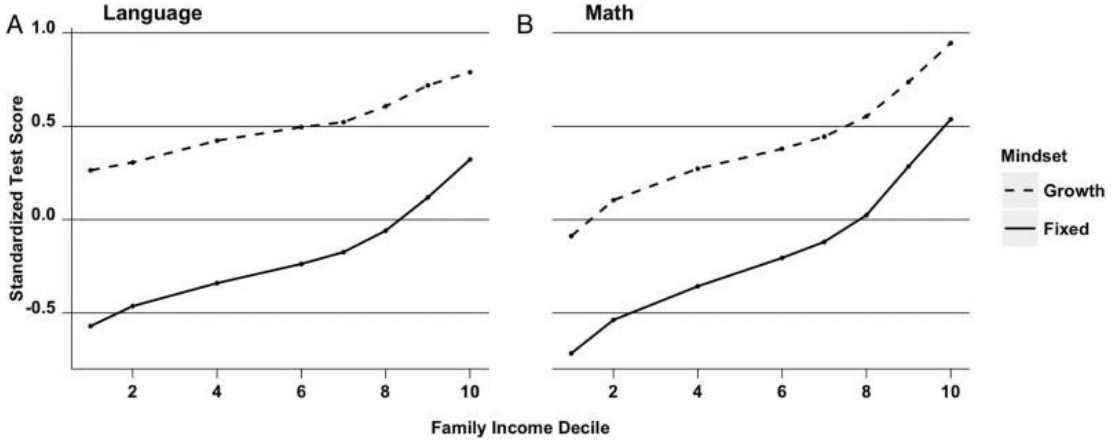
Yleinen uskomus: Tällainen opetus sopii parhaille oppilaille, mutta eikö se oli liian vaativaa heikommille oppilaille?

Tässä törmätään yhteen matematiikan opetuksen keskeiseen haasteeseen, oppilaiden erilaisuuteen. Kuinka pitkälle nämä havaittavat erot ovat muuttumattomia synnynnäisiä eroja, missä määrin erot ovat seurausta varhaista kokemuksista kasvuympäristössä ja missä määrin ne ovat enemmänkin koulukokemusten ja kulttuuristen tekijöiden synnyttämiä oppimista tukevia tai sitä rajoittavia uskomuksia.

Amerikkalaisen motivaatiotutkijan Carol Dweckin tutkimukset ovat osoittaneet, että oppilaiden opiskeluun vaikuttaa merkittävästi se, millainen käsitys heillä on kykyjen pysyvyydestä tai

muutettavuudesta. Dweck puhuu kulttuurin välittämistä ajattelutavoista (mindset). Usko siihen, että jonkin suorituksen edellyttämiä kykyjä voidaan vahvistaa harjoituksella, näyttää johtavan parempiin oppimistuloksiin kuin staattisiin kykyihin uskova ajattelutapa. Tutkimusten mukaan nämä ajattelutavat ovat muutettavissa ja oppimistilanteissa on mahdollista vahvistaa kykyjen kehitettävyyteen uskovaa ajattelutapaa, joka johtaa puolestaan parempiin oppimistuloksiin. Niin sanotut Growth Mindset -interventiot ovat tuottaneet hyviä tuloksia amerikkalaisessa vahvasti älykkyyseroja korostaneessa kulttuurissa. Mallia on erityisesti toteutettu matematiikan ja luonnontieteiden opetuksessa. Stanfordin yliopiston tutkijoiden tuottamalta **Youcubed**-sivustolta saa käsityksen niistä ideoista, joita interventioissa käytetään.

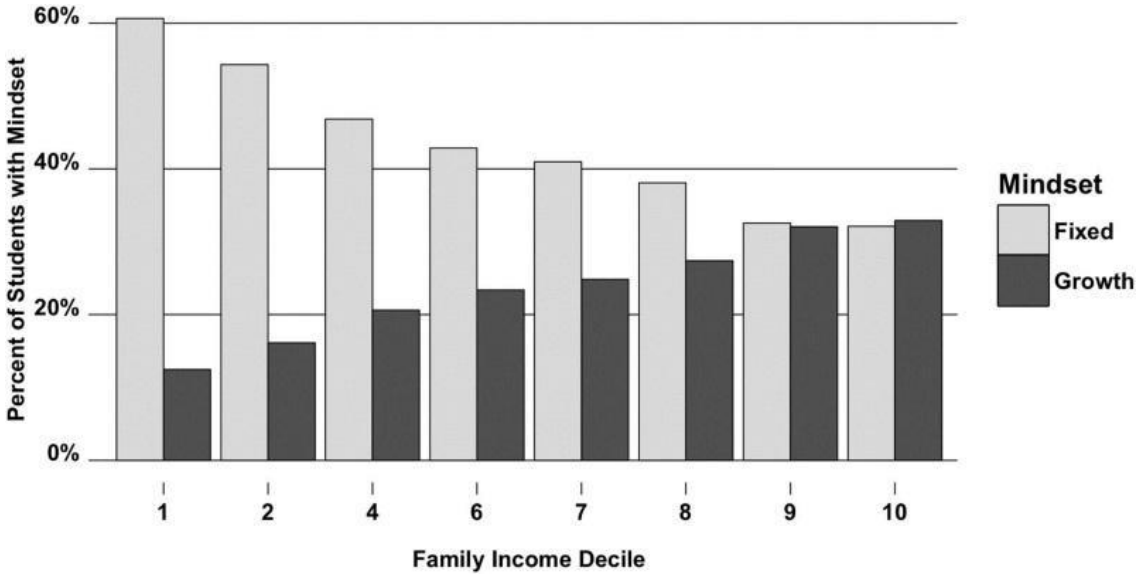
Osa näistä keinoista voi vaikuttaa vähän naiiveilta suomalaisesta näkökulmasta osittain siitä syystä, ettei älykkyyserojen korostus ole täällä koskaan ollut niin voimakasta ja tutkimuksien mukaan oppilaat eivät tee kovin jyrkästi eroa kyvyn ja yrityksen välillä. Ilmiö ei kuitenkaan ole pelkästään amerikkalainen. Aivan tuoreessa yli 100 000 oppilaan otokseen perustuvassa tutkimuksessa Chilessä havaittiin, että usko kykyjen kehitettävyyteen selitti yli 11 prosenttia 10.-luokkalaisten oppilaiden matematiikan suoritusten vaihtelusta. (Claro, Paunesku & Dweck, 2016). On tunnettua, että oppilaiden sosioekonominen tausta ennustaa voimakkaasti matemaattisia suorituksia. Kiinnostava havainto tässä tutkimuksessa kuitenkin oli se, että usko matemaattisten kykyjen kehitettävyyteen selitti samalla tavalla suorituksia eri sosioekonomisissa ryhmissä. Eli kykyjen kehitettävyyteen uskovien oppilaiden suorituksen olivat selkeästi parempia kaikissa ryhmissä (kuvio 1).



Kuvio 1: Sosioekonominen tausta ja kykyjen kehitettävyyteen uskominen (Uudelleenjulkaistu luvalla artikkelista Claro, Paunesku & Dweck, 2016).

Lähde: Claro, S., Paunesku, D., & Dweck, C. S. (2016). Growth mindset tempers the effects of poverty on academic achievement. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *113*(31), 8664-8668. Linkki artikkeliin

Samasta tutkimuksesta saatiin myös erittäin vakuuttava tulos siitä, että kotitausta vaikuttaa myös siihen millainen ajattelutapa oppilailla on kykyjen kehitettävyydestä (kuvio 2). Alempien matalamman sosioekonomisen aseman perheissä näyttää välittyvän muita tyypillisemmin ajatus ei muutettavista kyvyistä.



Kuvio 2: Kotitaustan yhteys kykyjen kehitettävyyteen (Uudelleenjulkaistu luvalla artikkelista Claro, Paunesku & Dweck, 2016).

Vaikka meillä älykkyyserojen korostuksella ei olekaan niin suurta merkitystä, niin matematiikan oppimisen kohdalla myös suomalaisessa kulttuurissa välittyy aika vahvasti staattinen kykykäsitys: ”matikkapää” joko on tai ei. Growth Mindset -interventioissa onkin eräitä piirteitä, jotka tukevat joustavan matematiikan opetuksen ajatuksia. Seuraavassa videossa käymme läpi joitakin periaatteita ja käytännön sovelluksia.

a. Matikkapäämyytin murtaminen ja siirtyminen staattiseen osaamiseen viittaavasta kielenkäytöstä matematiikkakykyjen kehitettävyyttä korostavaan puhetapaan tukee joustavan matematiikan opetuksen ajatusta.
b. Yksi Growth Mindset-intervention opetuksia on, että nopeus ei ole olennaista matematiikan oppimisessa. Joustavan matemaattisen ajattelun kehittyminen vaatii aikaa ja ilmiöiden rauhallista pohdintaa. On tärkeää miettiä, miten tätä aikaa saadaan vapautettua matematiikan tunneilla.
c. Heikostikin matematiikassa menestynyt oppilas voidaan ottaa mukaan tekemään vaativia joustavaa ajattelua ja ongelmanratkaisua vahvistavia tehtäviä, kunhan tilanne on hyvin organisoitu ja oppilas saa tarkoituksenmukaista tukea.

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

TEHTÄVÄ: Ohessa on lyhyt **Mindset-kysely**.

Teetä **kysely** oppilaillesi nimettömänä ja tehkää sen jälkeen (esim. parissa oppilasryhmässä) yhteenveto vastauksista tyhjälle lomakkeelle. Alemmilla luokilla voi käyttää vastausten lukumäärää kuhunkin vaihtoehtoon, mutta ylemmillä luokilla kannattaa myös laskea prosentit. Keskustelkaa sen jälkeen yhteenvedon tuloksista. Tuo keskustelussa esille niitä argumentteja, joita Growth Mindset tutkimus on nostanut esiin kykyjen kehitettävyyden puolesta. (Lisää tutkimuksesta voit lukea **Youcubed-sivustolta**.)

Esiopetuksessa ja ykkösluokalla saman voi tehdä suullisesti ja valita vain joitain kysymyksiä. Niistä voi keskustella heti joka kysymyksen jälkeen. Varhaiskasvatuksessa keskustele kollegojen kanssa Mindset-kysymyksistä.

Jos et juuri nyt ole opettamassa koulussa tai varhaiskasvatuksessa, voit kokeilla kysymyksiä omassa tuttavapiirissäsi ja keskustella teemasta.

4. Joustavan matemaattisen ajattelun tukeminen käytännössä

4.1. Joustavan matemaattisen ajattelun vahvistaminen

Joustavuuden tukeminen käytännössä ja erilaiset representaatiot

Opetuksessa on mahdollista opettaa joukko strategioita ja antaa ohjeita siitä, milloin niitä pitäisi käyttää. Tällainen mekaaninen tapa opettaa strategioita ei kuitenkaan näytä johtavan sellaiseen matemaattisen ajattelun joustavuuteen, joka tekisi mahdolliseksi tunnettujen strategioiden käytön vaihtelevissa tilanteissa ja kokonaan uusien strategioiden keksimisen silloin kuin niitä tarvitaan. Tässä jaksossa tarkastellaan sitä, miten opetuksessa voidaan tukea joustavan matemaattisen ajattelun kehittymistä kestävällä tavalla.

Adaptiivinen ja joustava lukukäsite strategisen joustavuuden takana

Aritmeettisten strategioiden tutkimus perustuu siihen havaintoon, että taitavan laskijan suoritusta ei selitä vain sellainen aritmeettisten operaatioiden sujuvuus ja automatisoituminen, joka on perinteisesti perusasteen aritmetiikan opetuksen tavoitteena. Taitavalle laskijalle (lapselle, nuorelle tai aikuiselle) on ominaista, että hänellä on hyvin automatisoituneet aritmeettiset faktatiedot pienellä lukualueella, mutta ennen kaikkea taito käyttää aritmeettisia taitojaan luovasti uudenlaisissa matemaattisissa tehtävissä. Toisin sanoen taitava laskija osaa käyttää joustavasti erilaisia aritmeettisia strategioita ja muovata niitä tilanteen vaatimusten mukaan.

Valtaosa joustavien aritmeettisten strategioiden opetustavoista on kohdistunut strategioiden valintamalliin. Tällöin tarkastelun kohteena on, kuinka joustavasti henkilö valitsee annettuun tehtävään parhaiten soveltuvan ennalta tunnetun strategian. Esimerkiksi vähennettäessä luvusta 53 luku 4 on kysymyksessä tyypillinen vähennyslaskutehtävä. Sen sijaan, jos tehtävänä on vähentää luvusta 53 luku 48, on tarkoituksenmukaisin strategia ajatella tehtävä yhteenlaskuna: mitä lukuun 48 pitää lisätä, jotta saadaan 53? Vaikka strategioiden valintamalli onkin hyödyllinen lähtökohta lisätä joustavuutta, kattaa se vain pienen osan adaptiivisten ja joustavien strategioiden käytöstä. Edellä esitetyn esimerkin kaltaisten strategioiden lisäksi taitavat laskijat käyttävät lukemattoman määrän erilaisia strategioita, jotka eivät useinkaan ole suoraan ennalta opitun soveltamista vaan yleisemmän lukujärjestelmän ominaisuuksien ymmärtämisen pohjalta kohdatussa tilanteessa luotuja. Joustavuuteen liittyy myös tärkeänä taitona kyky nopeasti ilman tarkkaa laskutoimitusta arvioida tulosten suuruusluokka.

Yksittäisten strategioiden opettamisesta joustavan matemaattisen ajattelun tukemiseen

Keskeiseksi pedagogiseksi haasteeksi muodostuukin tällöin se, miten oppilaat oppivat näkemään lukujen järjestelmän verkostona, jossa luvut ovat monin erilaisin tavoin ja monien erilaisten polkujen kautta yhteydessä toisiinsa. Tutkimuksista saadut havainnot viittaavat siihen, että yksittäisten strategioiden opettaminen ei välttämättä johda näiden strategioiden joustavaan käyttöön. Lehtisen johtama tutkimusryhmä Turun yliopistossa on keskittynyt tutkimaan sitä, millainen taustalla oleva tieto luvuista tekee mahdolliseksi havaita mitä joustavia mahdollisuuksia uusissa tehtävissä on. Tällaista lukujärjestelmää koskevaa tietoa kutsutaan adaptiiviseksi lukutiedoksi. Esimerkiksi jossain tehtävässä oleva luku 143 voidaan ajatella monella tapaa: se on lähellä lukua 144, joka on 12 x 12, tai lähellä lukua 140, joka on 2 x 70 tai 7 x 20 jne.

Tulosten mukaan adaptiivisen lukutiedon välttämättömänä edellytyksenä on hyvä käsitteellinen ymmärrys ja myös peruslaskutoimituksien sujuvuus. Ne eivät kuitenkaan ole riittävä selittäjä adaptiiviselle lukutiedolle. Joustavien strategioiden tutkijat ovat korostaneet, että joustavan aritmetiikan edellyttämän adaptiivisen lukutiedon kehittämiseksi oppilaiden pitäisi voida tutkiskella erilaisia lukujen yhdistelmiä ja keksiä omia strategioitaan, joilla tehtävät voi ratkaista eri tavoin. Luokkaopetuksessa voidaan tukea adaptiivisen lukutiedon kehittymistä avoimilla tehtävillä ja matematiikkapuheella. Esimerkiksi voidaan esittää yhteisesti tarkasteltavaksi tehtäviä, jossa on käytettävissä kaikki peruslaskutoimitukset (+,-, x, :) ja annetaan luvut 6, 14, 2, 3, 22 ja oppilaiden tehtävänä on yhteisessä keskustelussa miettiä, millä kaikilla aritmeettisilla lausekkeilla näistä luvusta saadaan tulokseksi 24.

Esim.

24 = 22 + 2

24 = 6 + 14 + 2 + 2

24 = 2 x 14 - 6 + 2

24 = 2 x 22 - 14 - 6

Alkuopetuksessa luvut voivat olla hyvin pieniä ja myöhemmillä kouluasteilla voidaan käyttää suurempia lukuja, sulkuja ja potensseja.

Tarkemmin joustavaa ja adaptiivista lukutietoa tarkastellaan artikkelissamme: **McMullen, J., Brezovszky, B., Rodríguez-Afleht, G., Pongsakdi, N., Hannula-Sormunen, M. M., & Lehtinen, E. (2016). Adaptive number knowledge: Exploring the foundations of adaptivity with whole-number arithmetic. Learning and Individual Differences, 47, 172–181**.

Adaptiivinen rationaalilukutieto

Adaptiivinen lukutieto ei ole olennaista vain luonnollisten lukujen alueella vaan jopa vielä merkittävämpää rationaalilukujen (murto- ja desimaaliluvut ja prosentit) alueella. Kuten matemaattisen ajattelun kehityksen asiantuntija, professori Robert Siegler on todennut, rationaalilukuja osataan erittäin huonosti, vaikka taitoa käyttää rationaalilukuja joustavasti tarvittaisiin sekä työelämässä että arjessa. Juuri valmistunut tutkimus osoittaa, että vain pieni osa 12−13-vuotiaista oppilaista pystyy käyttämään rationaalilukuja joustavasti vaihtelevissa tilanteissa ja osaa liikkua joustavasti rationaalilukujen eri esitysmuotojen eli representaatioiden (murtoluku - desimaaliluku ja esimerkiksi kuvalliset esitysmuodot) välillä. Hyvä käsitteellinen ymmärrys ja sujuvat proseduraaliset taidot ovat välttämätön edellytys adaptiivisen rationaalilukutiedon kehittymiselle myös rationaalilukujen alueella. Nämä taidot eivät kuitenkaan yksinään riitä. Tarvitaan myös tarkoituksellista harjoittelua, jossa rationaalilukuja

käytetään joustavasti vaihtelevissa tilanteissa (McMullen, Hannula-Sormunen, Lehtinen & Siegler, lähetetty arvioitavaksi). Adaptiiviseen rationaalilukutietoon palataan tarkemmin 3.-6. luokkien 6 opintopisteen koulutuksessa. Silloin myös kerrotaan tarkemmin tämän tutkimuksen sisällöstä.

Joustavat aritmeettiset taidot ennustavat myöhempää matematiikan oppimista

Matematiikan opetuksessa kannattaa huomioida, että tutkimustulosten perusteella adaptiivinen lukutieto ennustaa myöhempää algebran oppimista. Tämä perustuu siihen, että adaptiivisessa lukutiedossa luvut muodostavat monisuhteisen systeemin. Perinteinen aritmetiikan opetus johtaa usein mekaaniseen lineaariseen aritmeettiseen tietoon. Se tarkoittaa sitä, että oppilaat oppivat muistamaan esimerkiksi 7 + 8 = 15, mutta eivät ajattele tätä lukujen 7, 8, ja 15 erilaisina suhteina. Eli merkintä sisältää samalla tiedon siitä, että 15 - 7 = 8 ja 7 = 15 - 8 tai 2 x 7 + 2 x 8 = 2 x 15. Siirtymä tällaisesta aritmetiikan systeemisestä ymmärtämisestä algebraan on paljon helpompi kuin mekaanisesta lineaarisesta aritmetiikasta.

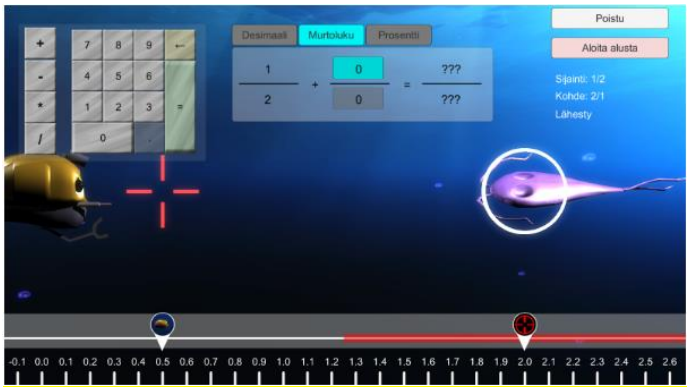
Tarkemmin joustavan ja adaptiivisen lukutiedon suhdetta algebran oppimiseen käsitellään artikkelissamme: **McMullen, J., Brezovszky, B., Hannula-Sormunen, M. M., Veermans, K., Rodríguez-Aflecht, G., Pongsakdi, N., & Lehtinen, E. (2017). Adaptive number knowledge and its relation to arithmetic and pre-algebra knowledge. Learning and Instruction, 49, 178–187**.

Pelit joustavan matematiikan oppimisympäristöinä

Kuten edellä todettiin, joustavien strategioiden käytön taustalla olevaa adaptiivista lukutietoa voidaan harjoitella normaalissa luokkatilanteessa avoimilla tehtävillä matematiikkapuheen avulla. Tällä tavoin harjoittelun määrä jää kuitenkin melko vähäiseksi eikä välttämättä varmista rikkaiden lukujen ja operaatioiden verkostojen muodostumista. Yksi ratkaisu tähän ovat pelilliset ympäristöt. Olemme Turun yliopiston matematiikan oppimisen tutkimusryhmässä kehittäneet tätä tarkoitusta varten luonnollisten lukujen alueen Number Navigation Game (NNG) -pelin ja kehitämme parhaillaan rationaalilukujen alueelle NanoRoboMath-peliä. Molemmat pelit annetaan opettajien käyttöön JoMa-hankkeen tulevissa 6 opintopisteen koulutuksissa. NNG-peliä on testattu useissa kokeiluissa. Se on osoittautunut tehokkaaksi tavaksi tukea adaptiivisen lukutiedon kehittymistä ja vahvistaa perusaritmetiikan sujuvuutta. Peli näyttäisi myös tukevan esi-algebrataitojen kehittymistä. Kiinnostuneet voivat tutustua tutkimusevidenssiin artikkelista Brezovszky, B., McMullen, J., Veermans, K., Hannula-Sormunen, M.M., Rodríguez-Aflecht, G, Pongsakdi, N., Laakkonen, E. & Lehtinen, E. (2019). Effects of a mathematics game-based learning environment on primary school students' adaptive number knowledge. Computer & Education, 128, 63−74.

Erno selittää videolla Number Navigation -peliä.

NanoRoboMath-pelissä pelaajan tehtävänä on ohjata laskuoperaatioilla nanorobottia, jolla suoritetaan erilaisia pelastus- ja hoitotehtäviä esim. vedessä ja elävissä organismeissa. Operaatioissa käytetään murto- ja desimaalilukuja sekä prosentteja ja robotin liikkeet näytetään skaalautuvalla lukusuoralla (konkreettinen representaatio rationaaliluvun tiheydestä). Pelaajan tehtävänä on esimerkiksi robotin vieminen täsmälleen johonkin kohtaan solussa, torjunta-aineen vieminen mahdollisimman nopeasti vaarallisen mikrobin lähiympäristöön ja lääkkeen vieminen solun pinnalle, jolloin robotti pitää saada mahdollisimman lähelle solun seinämää kuitenkaan koskettamatta sitä.



POHDINTATEHTÄVÄ: Pohdi ja keskustele mahdollisuuksien mukaan kollegoidesi kanssa: Miten tällaisia pelillisiä ympäristöjä voisi parhaiten käyttää matematiikan opetuksen osana?

Joustavuuden tukeminen vertailutehtävien avulla

Vertailutehtävät ovat hyväksi havaittu työkalu joustavuuden tukemisessa. Katso alta esimerkki vertailutehtävästä, joka käsittelee joustavuutta representaatioiden käytössä. Saat esimerkkitehtävät näkyviin klikkaamalla alla olevaa linkkiä:

Esimerkkitehtävä

Seuraavalla videolla Dimitri esittelee lyhyesti, miten vertailutehtäviä käyttämällä voidaan muuttaa nuorten käsityksiä matematiikasta ja rakentaa hyvät puitteet joustavan ajattelun kehittämiselle.

Lisämateriaalina voit halutessasi lukea **Riikka Palkin artikkelin** opettajien ja opettajaopiskelijoiden ennakkokäsityksistä vertailutehtävien käytöstä.

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Voit kurkata yläkoulun ja lukion kursseilla käytettäviä joustavuustehtäviä ja pedagogisia ohjeita seuraavista linkeistä:

Yläkoulun kurkistus

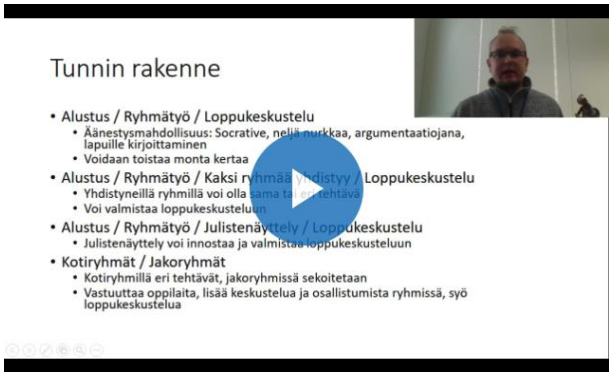
Lukion kurkistus

POHDINTATEHTÄVÄ: Mitä hyötyjä ja haasteita arvelet vertailutehtävien käyttöön liittyvän?

Joustavuuden tukeminen argumentaatiokeskustelujen avulla

Joustavuudessa voidaan harjaantua myös keskustelemalla oppilaiden kehittämistä erilaisista ratkaisutavoista. Joustavaan ajatteluun sisältyy myös valmius toimia muiden, erilaisten ajattelutapojen parissa sekä selittää muille omia ajatuksiaan. Tämä tarkoittaa argumentaatiokeskusteluja, joissa oppilaat puhuvat matematiikkaa.

Seuraavalla videolla Markus esittelee lyhyesti, millaisilla tunnin rakenteilla ja tehtävätyypeillä argumentaatiokeskusteluja voidaan tukea. Kyseisiä tunnin rakenteita ja tehtävätyyppejä on testattu kouluissa.



Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Tarkastellaan seuraavaksi yhtä argumentaatiotunnin suunnitelmaa tarkemmin. Lisää tämänkaltaisia tuntisuunnitelmia tarkastellaan yläkoulun osiossa. Kuviojonotehtäviä käytetään usein kaikilla asteilla varhaiskasvatuksesta lukioon. Aluksi voidaan esimerkiksi hahmottaa kuviojonon eteneminen ja piirtää seuraava kuvio. Lopulta päädytään laatimaan lauseke, jolla voidaan laskea kuviojonossa olevien “osien” lukumäärä.

Lue **tuntisuunnitelma** ja vastaa sen jälkeen alla oleviin tehtäviin.

TEHTÄVÄ 1. Tuota laskutapa kuviojonon 100. jäsenelle. Keksitkö toista tapaa? Halutessasi voit miettiä tehtävää jonkun toisen kanssa tai jopa viedä tehtävän omalle opetusryhmällesi.

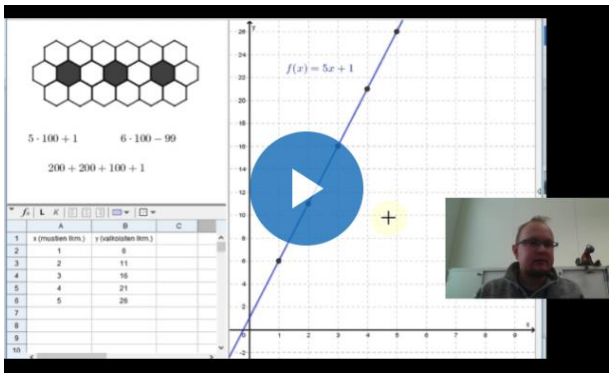
Katso sen jälkeen, onko alla olevalle "taululle" tuotettu samaa ratkaisua vielä. Mikäli tapaa ei ole tuotettu, laita ratkaisusi esiin. Laitathan yhden ratkaisutavan kerrallaan.

Jos keksimäsi ratkaisu on jo esitetty, ei sinun tarvitse kirjoittaa mitään.

TEHTÄVÄ 2. Tutki tehtävään 1 kirjoitettuja vastauksia ja pohdi seuraavia kysymyksiä (vastauksia ei tarvitse kirjata).

a. Mitä muita kuin sinun keksimiäsi ratkaisutapoja muut olivat keksineet?
b. Mitä hyötyä monista ratkaisutavoista on opetuksen kannalta tässä tehtävässä?
c. Miten tehtävän ratkaisuissa liikutaan erilaisten esitysmuotojen välillä ja mitä hyötyä tästä on oppimisen kannalta?

Katso tehtävän 2 jälkeen video, jossa Markus pohtii erilaisten esitysmuotojen käyttöä kyseisessä tehtävässä.



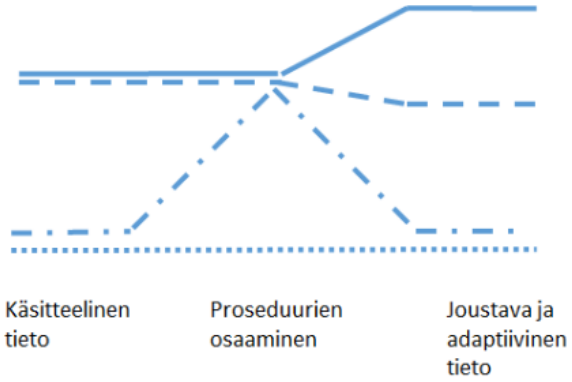
Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

4.2. Harjoittelun merkitys

Harjoittelun merkitys joustavan matemaattisen ajattelun kehittämisessä

Myöhemmillä kouluastekohtaisilla kursseilla tullaan esittelemään ja kokeilemaan erilaisia tehtäviä ja toimintamalleja, joiden tarkoituksena on joko suoraan vahvistaa joustavaa matemaattista ajattelua tai sellaista käsitteellistä ymmärrystä ja operaatioiden sujuvuutta, joka tekee joustavan matematiikan soveltamisen mahdolliseksi. Tarvitaanko joustavan matematiikan opiskelussa harjoitusta ja jos tarvitaan niin miten paljon ja millaista harjoittelua? Käsitteellisen ymmärryksen merkitystä korostava matematiikan opetus ja opiskelu on joskus ymmärretty niin, ettei enää tarvita harjoittelua, vaan matematiikkaa opitaan käsitteiden ja ideoiden oivalluksen kautta. Käsitteiden ymmärtäminen on äärimmäisen tärkeää ja siinä on hyvä myös joskus yhdessä “keksiä” matemaattisia lainalaisuuksia, mutta matematiikan oppiminen ei voi tapahtua ilman runsasta harjoittelua. Jo käsitteellisen ymmärryksen ja proseduraalisten taitojen jyrkkä erottaminen toisistaan on osoittautunut ongelmalliseksi. Joustavan matematiikkaan hankkeen amerikkalainen asiantuntija professori Jon Star on tutkimuksissaan osoittanut, että hyvä proseduurien osaaminen edellyttää myös hyvää käsitteellistä tietoa.

Omat tutkimuksemme joustavan matemaattisen ajattelun kehittymisestä sekä luonnollisten lukujen aritmetiikan että rationaalilukujen alueella on osoittanut, että hyvä käsitteellinen ymmärrys ja proseduurien hallinta ovat välttämättömiä mutta eivät riittäviä ehtoja hyvällä matemaattiselle osaamiselle. Alla olevassa kuviossa on yksinkertaistettu juuri valmistuneen tutkimuksemme tulokset rationaalilukujen oppimisesta. Siinä tutkittiin 400 noin 13-vuotiaan oppilaan murto- ja desimaalilukujen osaamista monipuolisilla testeillä. Tehtävät sisälsivät käsitteellistä ymmärrystä sisältäviä tehtäviä, aritmeettisia laskutoimituksia murto- ja desimaaliluvuilla sekä tehtäviä, jotka on kehitetty mittaamaan joustavaa ja adaptiivista rationaalilukujen osaamista. Oppilaiden suorituksista löydettiin tilastollisella analyysillä neljä toisistaan erottuvaa profiilia. (1) Neljännes oppilaista kuului profiiliin, jossa suoriutuminen oli tasaisesti heikkoa kaikilla osa-alueilla. (2) Vajaalla kolmanneksella oppilaista oli heikko käsitteellinen ymmärrys ja heikko suoriutuminen joustavan ja adaptiivisen taidon testissä mutta sujuva taito suorittaa standardeja aritmeettisia proseduureja rationaaliluvuilla. (3) Suurimmalla ryhmällä (vähän yli kolmannes oppilaista) oli hyvä käsitteellinen ymmärrys ja proseduraaliset taidot mutta vain keskinkertainen suoriutuminen joustavien ja adaptiivisten taitojen testissä. (4) Vain 10 prosenttia oppilaista kuului profiiliin, jossa oli käytännössä samantasoiset suoritukset käsitteellisessä ja proseduraalisessa testissä kuin profiililla 3 mutta selvästi korkeatasoisempi suoriutuminen joustavan ja adaptiivisen taidon testissä.



Hyvin samanlaiset tulokset on saatu myös luonnollisten lukujen alueella. Niissäkin käsitteellinen ja proseduraalinen tieto ovat edellytyksenä joustavalle taidolle mutta eivät yksin riitä selittämään sitä. Yllä olevassa kuviossa profiiliin kolme kuuluvien oppilaiden hyvä käsitteellinen ymmärrys ja korkeatasoinen proseduraalinen taito ovat varmasti edellyttäneet runsaasti harjoittelua. Mikä sitten tekee profiilin 4 oppilaista erilaisia. Onko kysymys synnynnäisistä lahjakkuuseroista tai ovatko nämä oppilaat harjoitelleet vielä enemmän?

Tähän kysymykseen voidaan etsiä vastausta modernista asiantuntijuustutkimuksesta, joka on keskittynyt selvittämään korkeatasoiseen osaamiseen johtavia tekijöitä. Perinteisesti korkeatasoiselle osaamiselle on annettu kaksi selitystä. Ensinnäkin hyvin yleisenä uskomuksena on, että korkeatasoisen asiantuntijuuden edellytyksenä on erityinen synnynnäinen lahjakkuus. Toiseksi runsaan kokemukset on uskottu johtavan korkeatasoiseen asiantuntijuuteen. Asiantuntijuustutkimuksen havainnot ovat haastaneet nämä molemmat selitysmallit. Tämän hetken johtava asiantuntijuuden tutkija Anders Ericsson on koonnut viimevuosikymmenten asiantuntijuustutkimuksen tulokset 2016 ilmestyneeseen kansantajuiseen teokseensa “Peak: Secrets from the new science of expertise”. Seuraava hauskasti toteutettu Youtube-video tiivistää kirjan keskeisen sisällön.

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Tieteellinen asiantuntijuustutkimus osoittaa, että korkeatasoiseen osaamiseen ei ole mitään oikotietä, vaan sen saavuttaminen edellyttää aina suuren määrän harjoitusta. Tämä koskee myös niin sanottuja lapsineroja. Esim. Mozartin jo nuorena osoittamaa soitto- ja sävellystaitoa edelsi vuosikausien erittäin intensiivinen harjoittelu säveltäjäisän johdolla. Tutkimukset osoittavat, että taidon

harjoittelun alkuvaiheessa yksilöllisillä lahjakkuuseroilla on merkitystä, mutta myöhemmin asiantuntijuudessa olevat erot selittyvät pääasiassa harjoittelun määrällä ja laadulla.

Toinen tärkeä asia videossa oli se, että korkeatasoisen suosituksen kehittyminen ei ole ensisijassa sujuvan taidon kehittymistä sinänsä, vaan pysyvä ja toistuvasti korkeatasoiseen suoritukseen johtava kehitys edellyttää hyvin jäsentyneiden ja organisoitujen mentaalisten mallien muodostumista. Eli matematiikassa se tarkoittaisi, että korkeatasoiseen osaamiseen ei riitä, että oppilas oppii välittömästi opetuksen jälkeen toistamaan opetetun operaation, vaan että hänellä kehittyy hyvin jäsentynyt tiedollinen rakenne tai mentaalinen malli opiskellusta asiasta.

Kolmas tärkeä havainto on se, että pelkkä kokemuksen tai harjoittelun kertyminen ei selitä asiantuntijuuden tasoa. Rutiininomainen pitkä kokemus saattaa jopa johtaa asiantuntijuuden laskuun, kuten näyttää käyvän jopa korkeaan koulutuksen perustuvissa ammateissa (mm. lääkärit). Olennaista on harjoittelun laatu ja tapa käsitellä kokemusta. Korkeatasoiseen osaamiseen johtavalle kokemukselle ja harjoittelulle, jota kutsutaan tarkoitukselliseksi harjoitteluksi (deliberate practice), on ominaista (1) tavoitteellisuus, (2) intensiivinen paneutuminen, (3) palautteen saaminen, (4) pyrkimys ylittää sen hetkisen osaamisen rajat (siirtyminen “epämukavuusalueelle”) ja (5) asiantunteva ohjaus.

Tarkoituksellisen harjoittelun piirteet

Tarkoituksellisen harjoittelun piirteet korkeatasoisen suorituksen edellytyksenä on havaittu hyvin monella alalla kuten musiikissa, urheilussa ja monissa ammateissa. Miten nämä piirteet soveltuvat kouluoppimisen kuvaukseen ja erityisesti lasten ja nuorten matematiikan oppimiseen? Seuraavassa videossa Erno johdattelee tarkoituksellisen harjoittelun ideaan.

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Erityisten matematiikkatuokioiden määrä varhaiskasvatuksessa tai matematiikan tunnit koulussa ovat vain pieni osa lasten ja nuorten elämästä ja paljon vähemmän kuin mitä intensiivisesti osaamistaan vaikkapa musiikissa tai urheilussa kehittävät lapset ja nuoret käyttävät näiden taitojen harjoitteluun. Lisäksi oppitunnista vain osa voidaan käyttää käsiteltävän asian harjoitteluun. Seuraavassa Minna ja Erno keskustelevat siitä, miten varhaisesta matematiikan oppimisesta voi tulla tarkoituksellisen harjoituksen kaltaista ilman, että muodollisen opetuksen määrää nykyisestään lisätään.

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Lasten taipumus kiinnittää huomionsa lukumääriin tilanteissa, joissa kukaan ei heitä ohjaa niin tekemään, näyttää tarjoavan rikkaan mahdollisuuden lukumäärien ja niiden muutosten pohtimiseen ja luvuilla leikittelyyn. Tätä voidaan kutsua itse ohjatuksi harjoitteluksi ja siinä on parhaimmillaan monia tarkoituksellisen harjoittelun piirteitä. Tämä ei kuitenkaan tee opetusta tarpeettomaksi. Varhaiskasvattajien ja opettajien tehtävänä on tukea käsitteellisen ymmärryksen syventymistä myös niiden oppilaiden kohdalla, joilla on vahva taipumus kiinnittää huomiota lukumääriin.

Spontaanin huomion kiinnittämisen merkitys matemaattisen ajattelun varhaisessa kehityksessä tunnetaan jo aika hyvin, mutta viimeaikaiset havainnot viittaavat siihen, että lasten ja nuorten itseohjattu matemaattinen harjoittelu ei rajoitu vain lukumäärien havainnointiin, vaan se näyttää jatkuvan myös matemaattisesti monimutkaisempien ilmiöiden kohdalla. Seuraavassa videossa Erno ja Minna keskustelevat uusista havainnoista, jotka koskevat spontaania huomion kiinnittämistä määrällisiin suhteisiin.

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Spontaanin huomion kiinnittämisen tutkimuksissa on katsottu tapahtumia, joissa lapset ja nuoret kiinnittävät huomiota matemaattisesti kiinnostaviin ilmiöihin tilanteissa, joita ei ole kuvattu matemaattisiksi. Opettajan tukemaa ja itseohjattua harjoittelua voi kuitenkin tapahtua myös matemaattisten tehtävien käsittelyn yhteydessä. Tehtävät voidaan suorittaa suhteellisen mekaanisesti soveltamalla opetuksessa annettua mallia. Oppilaat voi kuitenkin myös ohjata näkemään tehtävät siten, että ne herättävät heissä yleisempää matemaattista pohdintaa, kuten matemaattisesti merkityksellisiä rakenteita tai vaihtoehtoisia ratkaisustrategioita. Uusia asioita voidaan myös lähestyä ongelmalähtöisesti, jolloin synnytetään tavoitteellista matemaattista pohdintaa ohi sen mitä aikaisemmin on opittu. Toisin sanoen luomalla tilanteita, joissa käy selväksi, että tässä tarvitaan uudenlaisia matemaattisia käsitteitä (mm. tilanteita, joissa pienemmästä luvusta pitäisi vähentää suurempi ---> negatiiviset

luvut; miten määrittää suorakulma kun käytettävissä on vain pituusmitta --> Pythagoraan lause; tasaisesti kiihtyvän liikkeen tarkastelu --> derivaatta ja integraali)

Tarkoituksellisen harjoittelun merkityksestä matematiikan oppimisessa voi lukea lisää artikkelista **Lehtinen, E., Hannula-Sormunen, M., McMullen, J., & Gruber, H. (2017). Cultivating mathematical skills: From drill-and-practice to deliberate practice. ZDM - Mathematics Education, 49(4), 625–636**

POHDINTATEHTÄVÄ: Tämän kurssin aiemmissa jaksoissa on käsitelty sitä, miten oppilaille voidaan perustella matematiikan merkitystä erilaisissa ammateissa ja yhteiskunnallisissa tilanteissa. Pohdi nyt, miten oppilaat saadaan intensiivisesti pohtimaan matemaattisia kysymyksiä luokassa ja jatkamaan tätä ajattelua matematiikan tuntien ulkopuolella.

4.3. Arkipäivän ongelmat ja sanalliset tehtävät matematiikan opetuksessa

Yhteyttä matemaattisten proseduurien ja arjen ongelmien välille on perinteisesti pyritty rakentamaan sanallisten tehtävien avulla. Esimerkiksi 1900-luvun alkupuolen kansakoulun kirjoista löytyy matemaattisia tehtäviä, jotka on liitetty hyvin merkityksellisiin ja tärkeisiin maatalouden kysymyksiin. Tämä yhteys on kuitenkin vähitellen heikentynyt ja sanallisista tehtävistä on tullut yksi peruslaskutoimitusten harjoittelun väline ilman yhteyttä merkityksellisten käytännön ongelmien ratkaisemiseen. Tutkimuksessamme, jossa teimme kansainvälistä vertailua oppikirjojen sanallisista tehtävistä löydettiin suomalaisista oppikirjoista ääriesimerkki tästä sanallisen tehtävän alistamisesta pelkästään mekaanisen harjoittelun välineeksi. Osassa kirjasarjoja kaikki aukeaman sanalliset tehtävät ratkesivat samalla aritmeettisella operaatiolla. Toisin sanoen ensimmäisen tehtävän ratkaisun jälkeen kaikki muut oli ratkaistavissa poimimalla tehtävässä esitetyt luvut ja toistamalla sama aritmeettinen operaatio, mitä käytettiin ensimmäisessä tehtävässä.

Edellä kuvattu eräiden suomalaisten oppikirjojen piirre on omiaan vahvistamaan sitä pinnallista käsitystä, joka oppilaille muodostuu sanallisista tehtävistä. Sille on ominaista yritys siirtyä mahdollisimman nopeasti matemaattisiin operaatioihin tehtävän pinnallisten elementtien perusteella. Ilmiö ei kuitenkaan ole pelkästään suomalaisille oppilaille ominainen, vaan se on hyvin yleinen erityisesti länsimaissa. Tästä on hauska esimerkki seuraavassa videossa.

Video: Esimerkki sanallisesta tehtävästä

https://www.youtube.com/watch?v=uyS1cXrsglg

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Toinen tyyppiesimerkki sanallisista tehtävistä, jonka avulla voidaan osoittaa pinnallisia ratkaisustrategioiden käyttöä sisältää matemaattisen sisällön lisäksi merkittävää maailmaa koskevaa tietoa, joka pitää ottaa huomioon vastauksen antamisessa. “Koulun 220 lasta lähtevät luokkaretkelle

tilausajobusseilla. Jokaiseen bussiin mahtuu 40 lasta. Kuinka monta bussia rehtorin pitää pyytää bussifirmasta?” Hyvin yleinen vastaus tähän tehtävään on 5 ½ bussia. Joskus saadaan myös vastaus 5 jää 20. Kapteenin ikää kysyvässä tehtävässä ongelmana useilla oppilailla on se, ettei siinä aidosti yritetä ymmärtää kuvattua tehtävää, vaan lähdetään tekemään matemaattisia operaatioita ilman ymmärrystä. Bussiesimerkissä taas vastaus annetaan suoraan aritmeettisen operaation perusteella soveltamatta laskemalla saatua tulosta tehtävän kontekstiin.

Seuraavassa videossa Anu, Teija ja Erno keskustelevat sanallisten tehtävien ja arjen ongelmien merkityksestä matematiikan opetuksessa.

Klikkaa kuvaa avataksesi videon.

Videoissa korostui se, että joustavaa matemaattista ajattelua voidaan tukea tehtävillä, jotka edellyttävät niin sanotun tilannemallin muodostamista ja vasta sen jälkeen pohdintaa siitä, millaisilla matemaattisilla operaatioilla kyseisessä tilanteessa olevaa ongelmaa voidaan selvittää. Teija on koonnut **materiaalipaketin** sanallisten tehtävien käytöstä opetuksessa. Se sisältää sekä mallitehtäviä että esimerkkejä ongelmanratkaisun tukemisesta luokkatyöskentelyssä. Paketissa on myös vihjeitä siitä, miten opettajat voivat itse lähteä rikastamaan vaikkapa oppikirjojen tehtäviä mielenkiintoisemmiksi ja paremmin joustavaa ongelmanratkaisua tukeviksi.

POHDINTATEHTÄVÄ: Pohdi ja keskustele mahdollisuuksien mukaan myös kollegasi kanssa: Miten sanallisista tehtävistä saataisiin kiinnostavampia ja miten oppilaita voitaisiin tukea monimutkaisempien tehtävien ratkaisussa?

Missä määrin ylioppilaskoe edellyttää joustavuutta?

Alla on esimerkkejä siitä millä tavoin ylioppilaskoe edellyttää joustavuutta. Saat esimerkit näkyviin klikkaamalla alla olevaa linkkiä.

Ylioppilaskokeesta

Mitä lukiolaiset ajattelevat?

Seuraavaan **tekstitiedostoon** on koottu ylioppilaskokelaiden kommentteja ajattelua ja soveltamista vaativista tehtävistä. Nämä kommentit eivät välttämättä ole edustava otos, mutta niistä näkyy, että joidenkin nuorten käsitys matematiikan luonteesta on erilainen kuin ylioppilaskokeiden laatijoiden.

POHDINTATEHTÄVÄ: Pohdi ja keskustele mahdollisuuksien mukaan myös kollegasi kanssa: Miten nuoria voidaan valmistaa kokeeseen, joka mittaa joustavaa kykyä soveltaa, mallintaa ja mukautua uusiin tilanteisiin?

POHDINTATEHTÄVÄ: Nyt olet edennyt jo Kohti joustavaa matemaattista ajattelua -kurssin loppuun, mahtavaa! Pysähdy vielä hetkeksi pohtimaan kurssin sisältöjä. Mitä ajatuksia kurssi sinussa herätti? Saitko uusia ideoita työhösi? Toivatko muiden luokka-asteiden ammattilaisten ajatukset sinulle uusia näkökulmia? Jäitkö vielä pohtimaan jotakin kurssin sisältöihin liittyvää kysymystä? Olisitko kaivannut vielä lisätietoa jostain aiheesta tai jäikö jokin asia mielestäsi kokonaan käsittelemättä? Mieti ja kirjoita tärkeimmät oivalluksesi tältä keväältä.

5. Kurssin päättäminen

Onneksi olkoon! Kurssi on nyt päättämistä vaille valmis. Tämän kurssin tarkoituksena oli johdattaa kohti joustavaa matemaattista ajattelua, selventää mitä sillä tarkoitetaan ja miten se näkyy eri-ikäisten lasten ja nuorten kohdalla. Koulutusasteittain toteutettavat 6 opintopisteen kurssit toimivat erittäin hyvänä jatkona tälle johdantokurssille tarjoten paljon käytännön vinkkejä kasvatus- ja opetustyöhön. Valinnaisilla 2 opintopisteen kursseilla eri teemoja syvennetään entisestään. Kursseja voi suorittaa itseopiskelumateriaalien lisäksi 30.11.2023 saakka verkkokursseina. Lisätietoa löydät osoitteesta www.flexibility.fi.