

Lisätehtäviä

Vastaukset löytyvät tiedoston lopusta.

1. Arvioi seuraavien lausekkeiden arvot

- a. i^6
- b. i^{15}
- c. i^{20}
- d. i^{41}

2. Laske seuraavat kompleksilukujen laskutoimitukset

- a. $2i^3 - 3i^2 + 5i$
- b. $(5 - 9i) + (2 - 4i)$
- c. $i(5 + 7i)$
- d. $(2 - 3i)(4 + i)$
- e. $(2 + 3i)^2$
- f. $3i + \frac{1}{2-i}$
- g. $\frac{2-4i}{3+5i}$
- h. $\frac{(5-4i)-(3+7i)}{(4+2i)+(2-3i)}$
- i. $i(1-i)(2-i)(2+6i)$

3. Olkoon $z = a + bi$. Sievennä seuraavat lausekkeet.

- a. $Re(iz)$
- b. $Im(2z + 4\bar{z} - 4i)$

4. Ratkaise yhtälöt

- a. $2z = i(2 + 9i)$
- b. $z - 2\bar{z} + 7 - 6i = 0$

5. Laske seuraavien kompleksilukujen itseisarvo eli moduli

- a. $3 + 4i$
- b. $(1 - i)^2$
- c. $\frac{2i}{3-4i}$

6. Ratkaise yhtälöt. Mikä lukujoukko toteuttaa yhtälön?

- a. $|z - i| = |z - 1|$
- b. $|z - 1| = 1$
- c. $|z - 2| = Re(z)$

7. Todista seuraavat ominaisuudet hyödyntäen sijoituksia $z = a + bi$ ja $w = c + di$

- a. $\bar{\bar{z}} = z$
- b. $\overline{z\bar{w}} = \bar{z} \cdot w$
- c. $|z|^2 = z\bar{z}$
- d. $|zw| = |z||w|$

8. Muunna seuraavat kompleksiluvut napakoordinaattimuotoon ja eksponenttimuotoon

- a. 3
- b. $-4i$
- c. $1 + i$
- d. $-\sqrt{3} + i$

9. Kirjoita seuraavat kompleksiluvut muodossa $z = a + bi$

- a. $z = 8\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$
- b. $z = 5 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right)$

10. Sievennä seuraavat lausekkeet, kun $z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right)$ ja $z_2 = 4 \left(\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} \right)$

- a. $\frac{z_1}{z_2}$
- b. $z_1 z_2$
- c. z_1^6

11. Laske seuraavat kompleksilukujen juuret

- a. $8^{1/3}$
- b. $(-16)^{1/2}$
- c. $i^{1/2}$
- d. $(-1 + \sqrt{3}i)^{1/3}$
- e. $(3 + 4i)^{1/2}$

12. Ratkaise yhtälöt

- a. $z^2 + 4z + 7 = 0$
- b. $2z^2 + 2z + 5 = 0$
- c. $-3z^2 + 2z - 4 = 0$
- d. $z^2 = -1$

VASTAUKSET

- -1
 - $-i$
 - 1
 - i
- $3 + 3i$
 - $7 - 13i$
 - $-7 + 5i$
 - $11 - 10i$
 - $-5 + 12i$
 - $\frac{2}{5} + \frac{16}{5}i$
 - $-\frac{7}{17} - \frac{11}{17}i$
 - $\frac{23}{37} - \frac{64}{37}i$
 - $20i$
- $-b$
 - $-2b - 4$
- $z = -\frac{9}{2} + i$
 - $7 + 2i$
- 5
 - 2
 - $\frac{2}{5}$
- suora $y = x$
 - ympyrä, jonka keskipiste on $(1,0)$ ja säde 1
 - paraabeli $y^2 = 4x - 4$
- Todistustehtävän jokainen väite on tosi.
- $3(\cos 0 + i \sin 0) = 3e^{0i}$
 - $4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 4e^{-\frac{\pi}{2}i}$
 - $\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$
 - $2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 2e^{\frac{5\pi}{6}i}$

9. a. $-\frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}i$
b. $8 + 8i$

10. a. $\frac{1}{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}i$
b. $8 \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) = 8i$
c. $64 \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4} \right) = -\frac{64}{\sqrt{2}} + \frac{64}{\sqrt{2}}i$

11. a. $w_0 = 2e^{0i} = 2, w_1 = 2e^{\frac{2\pi}{3}i} = -1 + \sqrt{3}i, w_2 = 2e^{\frac{4\pi}{3}i} = -1 - \sqrt{3}i$
b. $w_0 = 4e^{\frac{\pi}{2}i} = 4i, w_1 = 4e^{-\frac{\pi}{2}i} = -4i$
c. $w_0 = e^{\frac{\pi}{4}i} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, w_1 = e^{\frac{5\pi}{4}i} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$
d. $w_0 = \sqrt[3]{2}e^{\frac{2\pi}{9}i}, w_1 = \sqrt[3]{2}e^{\frac{8\pi}{9}i}, w_2 = \sqrt[3]{2}e^{\frac{14\pi}{9}i}$

12. a. $-2 \pm \sqrt{3}i$
b. $z = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}i$
c. $z = \frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{11}}{3}i$
d. $z = \pm i$