Matematiikka ja musiikki

Teksti: Anssi Korhonen, Itä-Suomen yliopisto, LUMATIKKA-ohjelma

Miten matematiikka ja musiikki liittyvät toisiinsa? Usein matematiikka mielletään puhtaana luonnontieteenä, kun taas musiikki on yksi ilmaisevista taiteenmuodoista. Nämä kaksi ovat kuitenkin vahvasti linkittyneet toisiinsa molempien tieteenalojen historian ajan. Matematiikka kuvaa monia musiikin ilmiöitä, kuten kielten värähtelyn tietyillä aallonpituuksilla. (Shah, 2010, 7). Lisäksi tarkemmin ajateltuna, nuottien aika-arvot vastaavat murtolukuja ja tahtilajien kautta suoritetaan murtolukujen yhteenlaskuja (Marjanen, 2013, 28). Myös nuottiviivasto, johon nuotit ja tahtilajit sijoitetaan, on omanlaisensa koordinaatisto (Shah, 2010, 17).

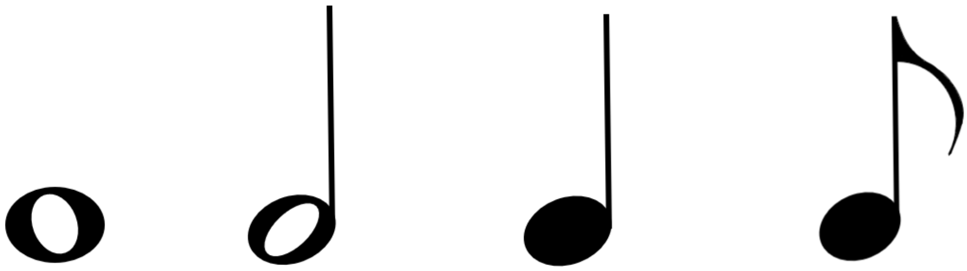
Matematiikka ja musiikki -osio on jaettu kappaleisin ”Nuottien aika-arvot”, ”Tahtilajit ja rytmi”, ”Nuottiviivasto ja intervallit”, joka sisältää alakohdat ”Intervallit logaritmeissa ja lukujonoissa” ja ”Yleisimmät intervallit”. Kaksi viimeistä kappaletta ovat ”Kielen värähtely” ja ”Ääniaalloista”. Lisäksi lopusta löydät muita hyödyllisiä artikkeleita ja tutkimuksia aiheeseen liittyen, joita voit halutessasi selata läpi.

Jokainen kappale sisältää teoriaosuuden sekä tehtäväehdotuksia eri ikäluokille. Lisäksi kappaleiden alussa on kuvattu lyhyesti sisältö sekä mille opetusasteelle kyseinen kappale erityisesti tarjoaa vinkkejä. Voit siis hyvin perehtyä tarkemmin niihin kappaleisiin, mitkä ovat kohdistettu erityisesti omalle opetusasteellesi, mutta halutessasi myös silmäillä läpi muutkin materiaalit.

Nuottien aika-arvot

Kappale käsittelee perinteisimmät nuottien aika-arvot, niiden symbolit sekä yhteyden murtolukuihin. Sisältö on tarkoitettu erityisesti peruskoulutasolle.

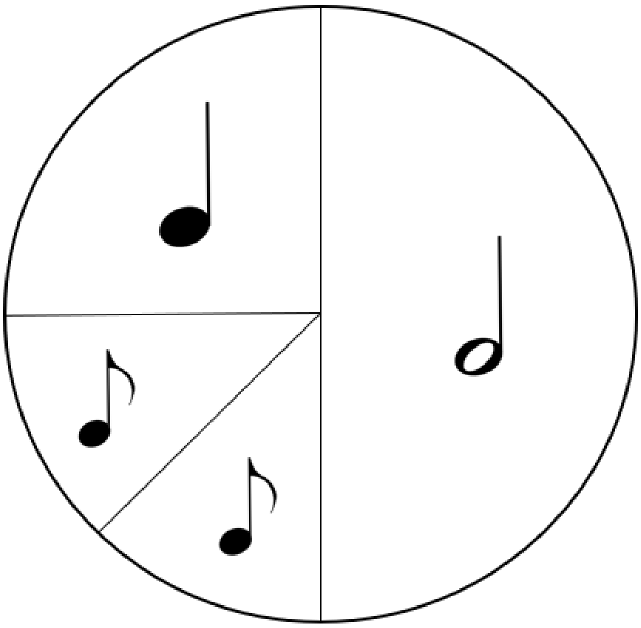
Nuottien sekä murtolukujen opiskelun voi kätevästi integroida keskenään. Mikäli kuitenkin murtoluvut ja niillä laskeminen ovat jo ennestään tuttuja, nuottien käsitteiden opettaminen käy murtolukujen kertaamisena. Yleisimmät käytettävissä olevat nuotit ovat kokonuotti, puolinuotti, neljäsosanuotti sekä kahdeksasosanuotti. Näiden symbolit löytyvät kuvasta 1. Kahdeksasosanuotin jälkeen, kun nuottia vastaava murtoluku puoliintuu, lisätään nuottiin aina uusi väkänen alle lisää. (Wright, 2009, 18–19.)



Kokonuotti	Puolinuotti	Neljäsosanuotti	Kahdeksasosanuotti
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

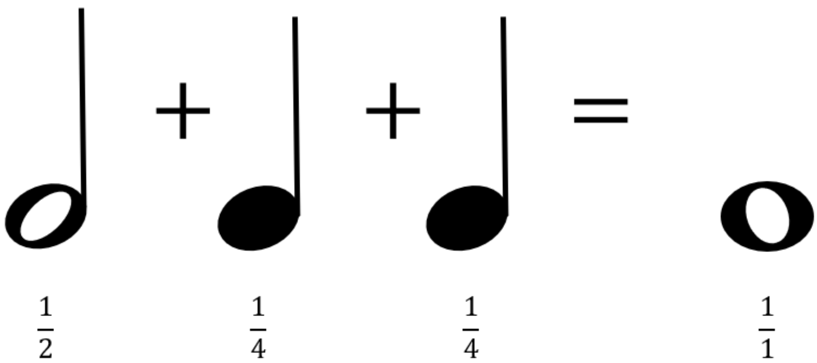
Kuva 1: Yleisimpien nuottien symbolit, nimet sekä niitä vastaavat murtoluvut.

Kun nuotteja lasketaan yhteen, tapahtuu se samalla tapaa kuten murtolukujen yhteenlasku. Hyvänä havainnollistuskeinona voi käyttää esimerkiksi kuvan 2 kaltaista piirakkamallia, jossa koko piirakka vastaa kokonuottia, puolikas puolinuottia ja niin edelleen. Piirakkamallia voi käyttää myös eräänlaisena palapelitehtävänä. Muita hyödyllisiä tehtäviä murtolukujen ja nuottien oppimiseen ovat yhdistelytehtävät, joissa tehtävänannossa on kuvattuna nuottien symbolit, niiden nimet ja murtolukumerkinnät (kuten kuvassa 1), mutta sekoitetussa järjestyksessä. Oppilaan tehtävänä on yhdistää symboli oikeaan nimeen ja murtolukumerkintään. (Marjanen, 2013, 24–28.)



Kuva 2: Piirakkamalli nuottien aika-arvoja sekä suhteellisia osuuksia varten.

Nuottisymbolien avulla on mahdollista rakentaa ja havainnollistaa helposti myös muita erilaisia matemaattisia laskuja, joiden avulla nuotit tulevat tutuksi ja samalla murtolukulaskutaidot syvenevät (kts. kuva 3) (Marjanen, 2013, 24–28). Voit miettiä hetken itsekin muita havainnollistavia tapoja nuottien aika-arvojen oppimiseen murtolukujen avulla.

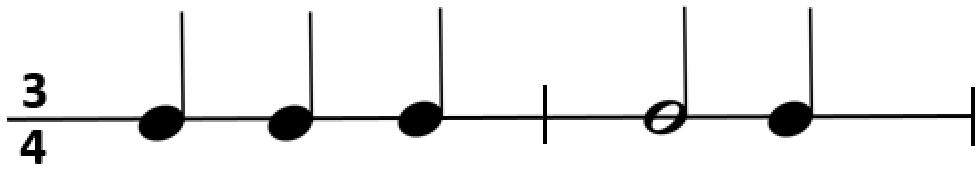


Kuva 3: Esimerkkilasku nuottien avulla.

Tahtilajit ja rytmi

Tahtilajit ja rytmi -kappale sisältää teoriaa tahtilajeista ja niiden yhteydestä matematiikkaan laskemisen, murtolukujen sekä muun muassa jaollisuuden muodossa. Kappaleen asiat on tarkoitettu erityisesti varhaiskasvatukseen sekä peruskoulutasolle.

Kun nuotteja aletaan sijoittamaan nuottiviivoille, määrää tahtilaji sen, miten paljon ja millaisia nuotteja yhteen tahtiin mahtuu. Tahtilajin kertoo tahtiosoitus, joka löytyy merkittynä kappaleen alussa, kuten kuvassa 4 (Kontiolahti). Yleisimmät tahtilajit ovat $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$ ja $\frac{6}{8}$. Tahtilajimerkinnässä osoittaja kertoo sen, kuinka monta nuottia tahtiin mahtuu ja nimittäjä sen, millaisia nämä nuotit ovat. Esimerkiksi tahtilajissa $\frac{2}{4}$ yhteen tahtiin mahtuu kaksi neljäsosanuottia. yhteen tahtiin mahtuu kaksi neljäsosanuottia. Tahdin voi myös täyttää muilla nuoteilla, kunhan tahdin mitta ei muutu. (Shah, 2010, 17–18.)

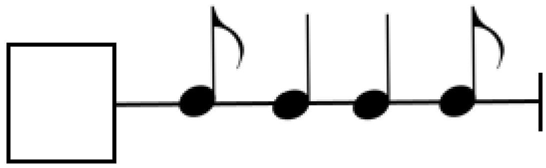


Kuva 4: Tahtilaji $\frac{3}{4}$ ja sen mukaisesti kaksi esimerkkitahtia.

Tahtilajien ymmärtämisen havainnollistamiseen voidaan käyttää konkreettisia kartonkipaloja, jotka ovat leikattu leveydeltään nuotin aika-arvoa vastaavaksi; kokonuotti on leveydeltään suurin, puolinuotti leveydeltään puolet kokonuotin palasta ja niin edelleen. Tämän jälkeen taululle voidaan piirtää nuottiviivasto esimerkiksi tahtilajilla $\frac{2}{4}$ ja mitoitettuna niin, että siihen mahtuu yksi puolinuottia vastaava kartonkipala. Tällöin kokonuotti ei mahdu tähän tahtilajiin, mutta esimerkiksi neljä kahdeksasosanuottia täyttää tahtilajin täydellisesti.

Oppilaiden kanssa tahtilajin ja tahdin ymmärtämiseen voi käyttää myös erilaisia laskuvariaatioita. Oppilaat voivat selvittää tahtilajeja esimerkiksi siten, että tahti on täytetty erilaisilla nuoteilla valmiiksi ja heidän tehtävänään on laskea nuottien aika-arvot yhteen (Kontiolahti).

Konkreettisena apukeinona ratkaisemiseen voi käyttää esimerkiksi yllä mainittua nuottien havainnointimenetelmää kartonkipaloilla. Tästä yksi esimerkki löytyy kuvasta 5.



Kuva 5: Esimerkki tehtävästä, jossa ratkaistaan tahtilaji.

Tahtilajeja opettaessa on hyvä ottaa konkreettisesti mukaan rytmi, vaikka yksinkertaisesti taputtaen. Erityisesti pienempien oppijoiden kanssa musiikin rytmin eli tahtilajin hahmottamisessa tärkeää on kehon mukaan ottaminen ja tahdin mukaan liikkuminen, vaikkapa tanssien tai muun musiikkiliikunnan kautta (Musiikkimatka.fi, 2021).

Yksinkertaisin tapa lähteä tekemään rytmiharjoituksia on käyttää alkuun vain neljäsosanuottia ja kahdeksasosanuottia. Näistä perussykkeenä toimii neljäsosanuotti, joka luetaan ”TAA”. Kahdeksasosanuotti luetaan puolestaan ”TI”. (Kontiolahti.) Tällöin tahti, joka sisältää alkuun kaksi neljäsosanuottia, sitten kaksi kahdeksasosanuottia ja lopuksi vielä yhden neljäsosanuotin, luetaan TAA-TAA-TI-TI-TAA. Mikä tahtilaji tällöin on kyseessä?

Rytmejä harjoitellessa voi luokan ja ryhmän kanssa sopia, että esimerkiksi neljäsosanuotti taputetaan käsin, kahdeksasosanuotti rintakehään ja puolinuotti reisille. Näin laskemiseen saadaan keho mukaan monipuolisemmin. (Fagerlund, 2020, 25.) Lisäksi ääneen laskeminen tehostaa rytmin sisäistämistä ja pienemmille luvut tulevat samalla tutummaksi. Käyttämällä eri tahtilajeja saadaan laskemiseen variaatioita, ja aiheen ymmärrystä syvennettyä.

Rytmiä, tahtilajeja ja rytmitajua voi harjoitella myös kaikuharjoituksena. Tässä opettaja taputtaa ensin yksin jonkun rytmin, johon oppilaat vastaavat kaikuna. Kun rytmit alkavat sujumaan opettajajohtoisesti, voivat oppilaat tehdä kaikuharjoituksen pareittain. Toinen parista luo rytmin, johon pari kaikuna vastaa. Näin oppilaat pääsevät itse luomaan omia rytmejään. (Musiikkimatka.fi, 2021.) Lisäksi omien sävellysten ja rytmien tekeminen kehittää tutkitusti lapsen ongelmanratkaisukykyä. Myöhemmin kun taputtaminen alkaa sujumaan hyvin, rytmiin voi yhdistää laulun lyriikoita ja loruja, joiden avulla tuetaan myös sanallista kehittymistä sekä tavuttamisen hahmottamista (Rajala, 2016). Kehon lisäksi voidaan käyttää itsetehtyjä rytmisoittimia, kuten kapuloita ja rytmimunia, jotta oppimiseen saadaan vielä enemmän mielekkyyttä (Musiikkimatka.fi, 2021).

Sarjojen, pienimmän yhteisen tekijän ja jaollisuuden alkeiden opettamiseenkin voi hyvin käyttää rytmiä ja sitä myöten kehoa. Tällaiseen tehtävään hyvän esimerkin antoi Saara Lehto LUMA Pohjanmaan järjestämässä Matematiikkaa tanssien -webinaarissa (2021). Harjoituksessa luokka jaetaan ryhmään A, jotka taputtavat tahtilajiin $\frac{3}{4}$ niin, että ensimmäinen taputetaan reisiin, toinen rintakehään ja kolmas kädet vastakkain. Toinen ryhmä B, taputtaa tahtilajiin $\frac{2}{4}$ niin, että ensimmäinen taputetaan reisiin ja toinen kädet vastakkain. Tällöin huomataan, että molempien ryhmien tekemät taputukset kädet vastakkain kohtaavat ryhmän B kolmannen tahdin jälkeen ja ryhmän A toisen tahdin jälkeen. Tästä saadaan, että lukujen kaksi ja kolme pienin yhteinen tekijä on kuusi. Ryhmän kanssa voidaan yhdessä miettiä, miksi näin tapahtuu ja mitä yhteistä luvulla kaksi ja kolme tällöin on. Tehtävää voi myös tehdä pareittain tai pienryhmissä erityisesti silloin, jos opetettava ryhmä on suuri. (LUMA Pohjanmaa, 2021.)

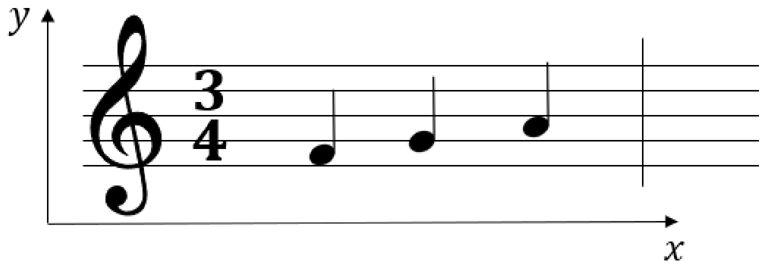
Voit hetken pohtia muitakin erilaisia tehtävämalleja ja havainnointimenetelmiä tahtilajeihin sekä rytmiin liittyen.

Nuottiviivasto ja intervallit

Nuottiviivasto ja intervallit -kappale selittää teorian tasolla sävelten taajuuksia ja niiden suhteita eli intervalleja. Lisäksi käydään läpi sitä, miten intervalleja voidaan hyödyntää logaritmeihin ja lukujonoihin sekä yleisimpien intervallien määritelmiä. Kappaleen asiat sopivat parhaiten lukiotasolle, mutta peruskouluasteen opetukseen voi saada inspiraatiota. Luvun alussa on myös vinkki varhaiskasvatuksen puolelle liittyen matematiikan liittämisestä laulamiseen ja leikkiin.

Nuottiviivasto, nuottien taajuus ja niiden väliset korkeuserot

Nuottiviivaston avulla musiikkiin saadaan liitettyä melodia rytmin lisäksi. Se voidaan käsittää koordinaatistona, jossa x-akseli kuvaa ajan kulkua ja y-akseli sävelkorkeutta, kuten kuvassa 6 on esitetty (Shah, 2010, 17). Nuottiviivasto käsittää viisi viivaa tasaisin välimatkoin toisistaan sekä G-nuottiavaimen, joka osoittaa koukerollaan G-sävelen paikan. Lisäksi nuottiviivastolle merkitään jo aiemmin opittu tahtilaji. Nuotteja voidaan sijoittaa niin viivojen väliin kuin viivojen päälle, kuten kuvassa 7. (Kontiolahti.)



Kuva 6: Nuottiviivasto, johon on lisätty xy-koordinaatisto havainnollistajana. X-akseli kuvaa aikaa ja y-akseli sävelkorkeutta. Ennen tahtilajia on nähtävissä G-nuottiavain.

Kuva 7: Sävelet ja niiden sijoittuminen nuottiviivastolle. Numero sävelen perässä kertoo oktaavialan.

Varhaiskasvatuksen puolella nuottiviivaston muodostamaan melodiaan perehtyminen saadaan tehtyä parhaiten yksinkertaisesti laulun muodossa. Tähän matematiikka saadaan mukaan esimerkiksi lyriikoiden ja laulun sanoihin yhdistettyjen leikin sekä havainnollistavien kuvien kautta. Esimerkkikappaleena Siinan Taikastudion Kymmenen pientä autoa, joka löytyy Youtubesta: https://www.youtube.com/watch?v=g_gfZYVc0YE. (Pappi, 2016, 89). Lauluun voi yhdistää Siinan videon mukaisesti sormilla laskemisen ja leikillisenä elementtinä auton ajelun niin, että lapsilla on käsissä esimerkiksi itse paperilautasesta askarreltu ratti tai muu vastaava. Lisäksi kappaleeseen voidaan muuttaa autojen tilalle muita esineitä tai eläimiä. (Hirvonen, 2019.)

Nuottiviivastolla olevan sävelen sävelkorkeuden määrittää sen tuottama taajuus. On esimerkiksi sovittu, että nuotin A1 taajuus on 440 Hz, kun sen sijainti on kuvan 8 mukaisesti keski-C:n yläpuolella. (Wright, 2009, 4.).

Kuva 8: Nuotin A, jonka taajuus on 440 Hz, sijainti nuottiviivastolla

Sävelten korkeuksien eroa toisistaan kutsutaan intervalleiksi. Näistä ehkä yleisin intervalli on oktaavi, joka tarkoittaa kaksinkertaista taajuuseroa sävelkorkeuksissa. Taajuuden yksikkö on $\frac{1}{sekunti}$ eli Hertsi (Hz). Yllä mainittiin nuotin A1 taajuudeksi 440 Hz, jolloin tästä oktaavia ylempänä olevan A2 nuotin taajuus on $2 \cdot 440\ Hz = 880\ Hz$. Toisaalta oktaavia alempana olevan A:n taajuus on $\frac{1}{2} \cdot 440\ Hz = 220\ Hz$. Tässä on tärkeää huomata, että intervallien ero on nimenomaan taajuuksien suhteessa, ei erotuksessa. Kahden eri taajuuden $f_1$ja f_2 suhde r saadaan siis laskettua kaavalla $r = \frac{f_1}{f_2}$. (Wright, 2009, 45–46).

Yksi oktaavi on jaettu 12 puolisäveleen. Tämä on havaittavissa selkeimmin pianon kosketti- mista, kun lasketaan esimerkiksi kahden C:n välissä olevat valkeat ja mustat painikkeet, kuten kuvassa 9.

Kuva 9: Pianon koskettimet, soinnut sekä oktaavi, joka on jaettu 12 puoliaskeleeseen.

Saamme laskettua myös muiden sävelten taajuudet. Oletetaan yhden puolisävelen välisen taajuussuhteen olevan r. Lisäksi tiedetään, että oktaavin päässä toisistaan olevan soinnun taajuuksien välinen suhde on 2. Koska oktaavin välissä puolisäveliä on 12, saadaan muodostettua kaava $r^{12} = 2$, jolloin $r = \sqrt[12]{2} = 2^{\frac{1}{12}}$. Näin olemme saaneet ratkaistua suhdeluvun yhden puolisävelen välille. Tällöin x-määrälle puolisäveliä saadaan suhde $(2^{\frac{1}{12}})^x = 2^{\frac{x}{12}}$. Tätä kutsutaan tasavireiseksi asteikoksi. Tasavireistä asteikkoa käytetään muun muassa pianon virittämiseen. (Wright, 2009, 47).

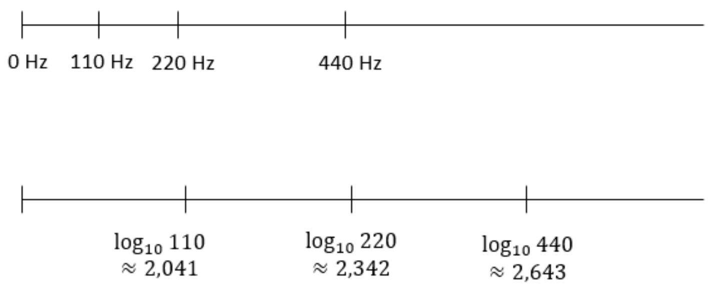
Nyt voidaan laskea esimerkiksi neljän puolisävelen välin suhde, joka siis on $2^{\frac{4}{12}} = 2^{\frac{1}{3}} = 1{,}25992$. Eli esimerkiksi nuotin A1 taajuuden ollessa 440 Hz, on neljän puolisävelen päässä korkeammalla olevan nuotin C#2 taajuus tällöin $440\ Hz \cdot 1{,}25992 = 554{,}365\ Hz$. Alempien taajuuksien laskemiseen pätee sama kaava. Mikäli lasketaan neljän puolisävelen päässä matalammalla olevan nuotin taajuutta, lisätään x:n tilalle -4, eli $2^{-\frac{4}{12}} = 2^{-\frac{1}{3}} = 0{,}793701$. Eli tällöin nuotin F1 taajuus on $440\ Hz \cdot 0{,}793701 = 349{,}228\ Hz$.

Tästä asiasta on mahdollista luoda vanhemmille oppijoille soveltavia tehtäviä; esimerkiksi nuottiviivastolle on asetettu jokin sointu ja oppijoita pyydetään laskemaan tämän taajuus, kun tiedetään vaikkapa A1-soinnun taajuudeksi 440 Hz. Lisäksi yhtälöä voidaan käyttää myös toiseen suuntaan, jolloin tehtävänannossa annetaan valmiiksi jokin taajuus ja oppilaan tulee laskea, mikä sointu on kyseessä. Myös yhteisenä tutkimuksena voidaan johtaa yllä oleva kaava, jonka avulla saadaan laskettua puolisävelten välisiä taajuuseroja.

Intervallit logaritmeissa sekä lukujonoissa

Intervalleista saa myös logaritmeihin liittyviä harjoitteita muokkaamalla potenssilaskut käänteiseksi. Lisäksi logaritmien oppimisen ymmärtämiseen voidaan käyttää sävelten taajuuksien suhteita. Kuten aiemmin mainittiin, sävelpareilla, joilla on sama intervalli, on myös sama taajuuksien välinen suhde. Tällöin esimerkiksi sävelen A oktaavien taajuuksille pätee $\frac{A_2}{A_1} = \frac{A4}{A3}$. Nyt hyödyntämällä logaritmien laskusääntöjä, saadaan $\log_b A_2 - \log_b A_1 = \log_b A_4 - \log_b A_3$, eli logaritmisella skaalalla oktaavien taajuudet sijoittuvat täsmälleen samalle etäisyydelle toisistaan. Tätä havainnoi kuva 10. (Wright, 2009, 55–56).

Tästä saadaan hyvä yhteys myös lukujonoihin. Intervallien ollessa taajuuksien suhteita huomataan saman intervallin päässä toisistaan olevien taajuuksien muodostavan geometrisen jonon; eli esimerkiksi oktaavit muodostavat geometrisen jonon, jossa jonon jäsenen suhde edelliseen on kaksinkertainen. Kun intervallit muutetaan logaritmiselle skaalalle, saadaan aikaan aritmeettinen lukujono, jossa peräkkäisten jonon jäsenten erotus on aina vakio. (Vatanen, 2015, 17,21).



Kuva 10: Ylemmällä suoralla sävelen A oktaavien taajuudet ja alemmalla suoralla samojen taajuuksien 10-kantaiset logaritmit.

Yleisimmät intervallit

Oktaavin lisäksi muita tavallisia intervalleja ovat priimi, sekunti, terssi, kvartti, kvintti, seksti ja septimi. Näistä intervalleista esimerkit ovat nähtävissä taulukossa 1. Priimiä, kvarttia, kvinttiä ja oktaavia kutsutaan puhtaiksi intervalleiksi, kun taas sekunti, terssi, seksti ja septimi ovat suuria intervalleja. (Wright, 2009, 6.)

Taulukko 1: Intervallit sekä niille esimerkkisävelväli

Intervalli	Esimerkkisävelväli
Priimi	C-C
Sekunti	C-D
Terssi	C-E
Kvartti	C-F
Kvintti	C-G
Seksti	C-A
Septimi	C-H
Oktaavi	C-C2

Vähennetyt intervallit ovat sävelaskelmiltaan suppeampia kuin puhtaat tai pienet intervallit. Esimerkiksi vähennetty kvintti sisältää kuusi puolisäveltä, kuten välin H-F, kun puhdas kvintti sisältää seitsemän, kuten väli C-G. (Opi pistenuotteja.)

Pienet intervallit ovat yhden puolisävelen suppeampia kuin suuret. Tällöin esimerkiksi pieni sekunti on väli E-F sisältäen yhden puolisävelen, kun taas suuri sekunti on väli G-A, joka sisältää kaksi puolisäveltä. Ylinousevat intervallit ovat taasen yhden puolisävelen laajempia kuin puhtaat tai suuret intervallit. Tällöin väli C-G# on esimerkiksi ylinouseva kvintti, joka sisältää kahdeksan puolisäveltä. (Opi pistenuotteja.)

Intervallien määritelmien avulla oppijoille voidaan muodostaa haastavampia sanallisia laskutehtäviä, joilla kehitetään erityisesti luetun ymmärtämistä. Esimerkiksi tehtävässä voidaan antaa esitietona H-sävelen taajuus sekä puhtaan kvintin määritelmä, ja tiedustella tältä pohjalta tasavireisesti viritetyn pianon antamaa taajuutta soinnusta, joka on puhtaan kvintin päässä annetusta H-sävelestä.

Kielen värähtely

Kappale käsittelee alkuun teorian tasolla taajuuksia ja sitä myöten muun muassa sitä, mihin kielisoittimien toiminta perustuu. Teorian jälkeen on havainnollistavia tehtäviä taajuuksien tutkimiseen. Kappaleen teoriaosuus soveltuu enimmäkseen lukioon, mutta siitä saa myös ideoita peruskoulun opetukseen. Havainnollistavat tehtävät sisältävät vinkkejä myös varhaiskasvatukseen ja peruskoulun pienemmille oppijoille.

Pythagoras huomasi aikanaan, kuinka soittimen kieltä puolittamalla saatiin nostettua sävelkorkeus oktaavilla ylemmäs. Tästä johtautui teoria, jonka mukaan kielen taajuus on kääntäen verrannollinen sen pituuteen, eli $f \propto \frac{1}{l}$. Nyt taajuuden f ja kielen pituuden l suhde saadaan ilmaistua yhtälöllä $f = \frac{k}{l}$, jossa k on jokin positiivinen vakio. Tämä ilmiö huomataan parhaiten kielisoittimissa, kuten viulussa, jossa soittaja painaa kielen otelautaa vasten ja saa näin aikaan eri taajuuksista säveltä muuttamalla kielen pituutta. (Wright, 2009, 50).

Voimme muodostaa kaavan, jonka avulla saamme laskettua sen kohdan, mistä kieltä pitää painaa, jotta saamme muodostettua esimerkiksi suuren terssin. Tällöin jos kielen pituus on l, niin muuttamalla kielen pituutta saadaan uudeksi pituudeksi ql, missä q on jokin positiivinen kerroin. Näin ollen laskemalla taajuuksien suhteet, saadaan $r = \frac{f_2}{f_1} = \frac{\frac{k}{ql}}{\frac{k}{l}} = \frac{l}{ql} = \frac{1}{q}$, jolloin $q = \frac{1}{r} = r^{-1}$. (Wright, 2009, 50–51).

Hyödyntämällä aiempia tuloksia, tiedetään, että suuren terssin taajuuden suhde $r = 2^{\frac{4}{12}} = 2^{\frac{1}{3}}$, jolloin $q = (2^{\frac{1}{3}})^{-1} \approx 0{,}8$. Tällöin halutessamme soittaa suuren terssin täytyy sormi asettaa otelaudalle niin, että alkuperäisestä kielen pituudesta soi $\frac{4}{5}$.

Tätä on helppo havainnoida oppilaiden kanssa, jolloin opetukseen ja laskuihin saadaan konkreettisuutta. Havainnointi voidaan suorittaa niin, että mitataan esimerkiksi kitaran E-kielen pituus, jonka jälkeen lasketaan haluttu uusi pituus. Kuvassa 11 nähdään, että kitaran paksun E-kielen pituus on 66 cm. Tällöin kun haluamme esimerkiksi suuren terssin suhteessa vapaasti soivaan E-kieleen, teemme laskutoimituksen $66\ cm \cdot \frac{4}{5} = 52{,}8\ cm$. Kuvasta 11 huomataan, että 52,8 cm kohdalla on neljäs otenauha. Siis painamalla sormella neljättä väliä soi kitaran E-kielestä 52,8 cm pituinen osa ja saamme G# -soinnun. Oppilaiden kanssa voi soittaa vielä vapaata E-kieltä ja uuden pituuden tuottamaa taajuutta, eli tässä tapauksessa G#-säveltä. Verrokkina voidaan tuottaa vastaavat sävelet esimerkiksi pianolla tai jollain sovelluksella.

Kuva 11. Kitaran kielet ja E-kielen pituus.

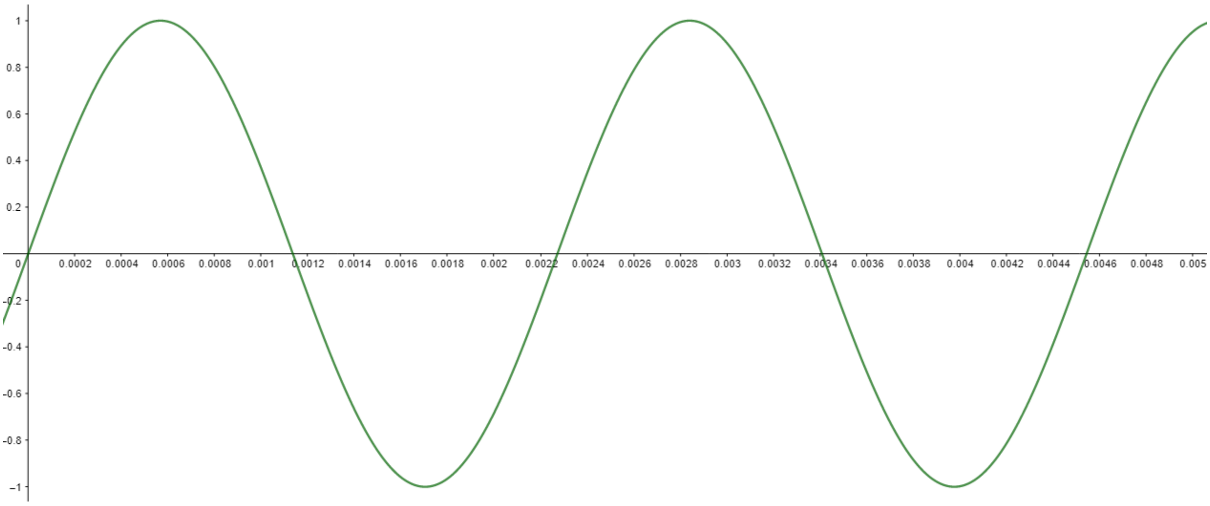
Pienempien oppijoiden kanssa taajuuksia ja sävelkorkeuksien suhteita voi tutkia esimerkiksi tekemällä yhdessä omat soittimet vesilasien, -pullojen sekä veden avulla. Kaatamalla eri määriä vettä samanlaisiin laseihin, ja napauttamalla niitä lusikalla, saadaan aikaan eri taajuuksia. Tässä tapauksessa mitä enemmän vettä laseissa on, sitä matalampi taajuus saadaan aikaan, sillä tällöin lasi värähtelee hitaammin. Laseihin voi halutessaan lisätä myös väriä, jolloin se voi auttaa joitain oppjoita hahmottamaan vesimäärät vielä paremmin. Lisäksi laseja voi kokeilla napauttaa eri materiaalista tehdyillä esineillä kuten metallilusikalla, muovilusikalla ja puisella kapulalla. Lapset voivat tehdä näin omaa musiikkia ja samalla oppia taajuuksien alkeita sekä mittaamista ja määriä mukavalla tavalla. (How to Make Science for Kids, 2021.) Esimerkkinä Ellington NHS -kanavan YouTube-video How to make music with water glasses! - Ayushman Choudhury tarjoaa hyvän esimerkin vesilaseista tehdystä soittimesta.

Toinen vastaava tapa tehdä musiikkia helposti, sekä tutkia samalla äänentaajuuksien eroja, on käyttää pulloja tai koeputkia ja puhaltaa niihin (OPIKE, 2012, 16). Tällöin sävel syntyy pulloon muodostuvan ilmapatsaan kautta. Tyhjä pullo synnyttää matalan äänen, kun taas vettä lisäämällä äänen taajuutta saadaan nostettua. (Science World, 2021.) Oppilaille voi antaa ohjeistukseksi tehdä pullosoittimet ryhmissä siten, että pulloihin laitetaan tasaisin suhtein vettä; esimerkiksi viiteen pulloon niin, että nesteiden suhteelliset määrät ovat $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \dots, \frac{5}{5}$. Näin soitinten tekoon saadaan mukaan mittaamista sekä laskemista. Pulloon puhaltamisen ohella vastaavaan ilmiöön perustuu myös viivaimen rämpyttely pöytää vasten; mitä pidempi osa viivaimesta on rämpytettävänä ja siten mitä lyhyempi osa pöytää vasten, sitä matalampi taajuus (OPIKE, 2012, 13). Vanhemmille tai musikaalisesti taitaville oppijoille harjoitteita voidaan soveltaa itsenäisemmäksi siten, että heitä pyydetään itsenäisesti tai pienryhmissä rakentamaan jokin tuttu melodia, kuten ”Tuiki, tuiki tähtönen” tai muu vastaava.

Ääniaalloista

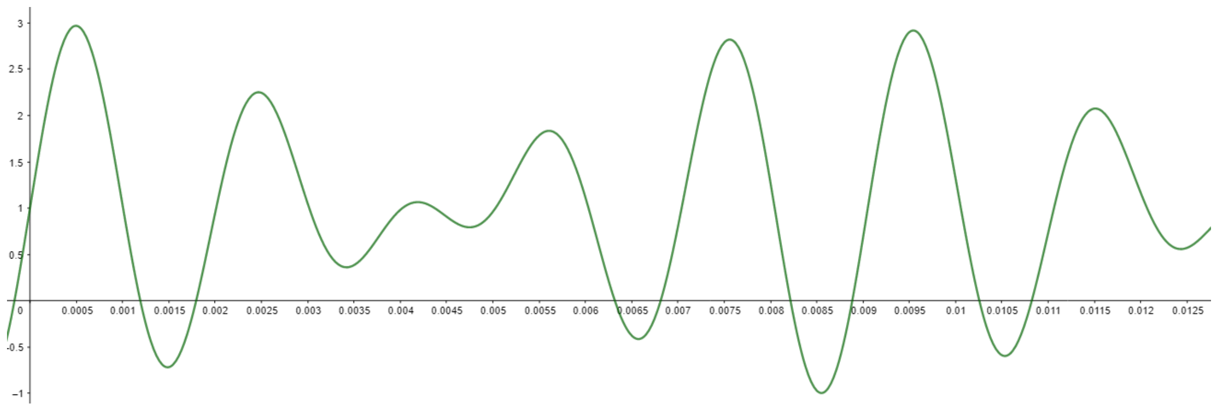
Kappale sisältää teoriaa ääniaalloista sinifunktion muodossa ja sitä myöten myös tietoa miten trigonometriset funktiot toimivat. Havainnollistava äänitystehtävä tutkimuksineen on myös sovellettavissa peruskouluasteelle, mutta teoriapuoli painottuu lukiomatematiikkaan.

Sävel, ja ääni yleensä, on ilmassa etenevää aaltoliikettä (Apiola). Tyypillisin funktio, joka kuvaa ääniaaltoa, on $y = A\sin(2\pi(ft + \phi))$. Funktiossa A on aallon amplitudi, joka vastaa äänen kovuutta, f on taajuus, joka kuvaa äänen korkeutta, ϕ kuvaa aallon vaihetta ajassa $t = 0$ ja t kuvastaa siis aikaa. (Naiman). Esimerkiksi 440 Hz taajuudella värähtelevä sävel A saadaan ilmaistua funktiolla $y = \sin(2\pi \cdot 440t)$, josta kuvaaja on esitetty kuvassa 12. Mikäli taajuutta korotettaisiin, niin tällöin jakson aika pienenee ja aaltoliike tihenee. (Rogness).

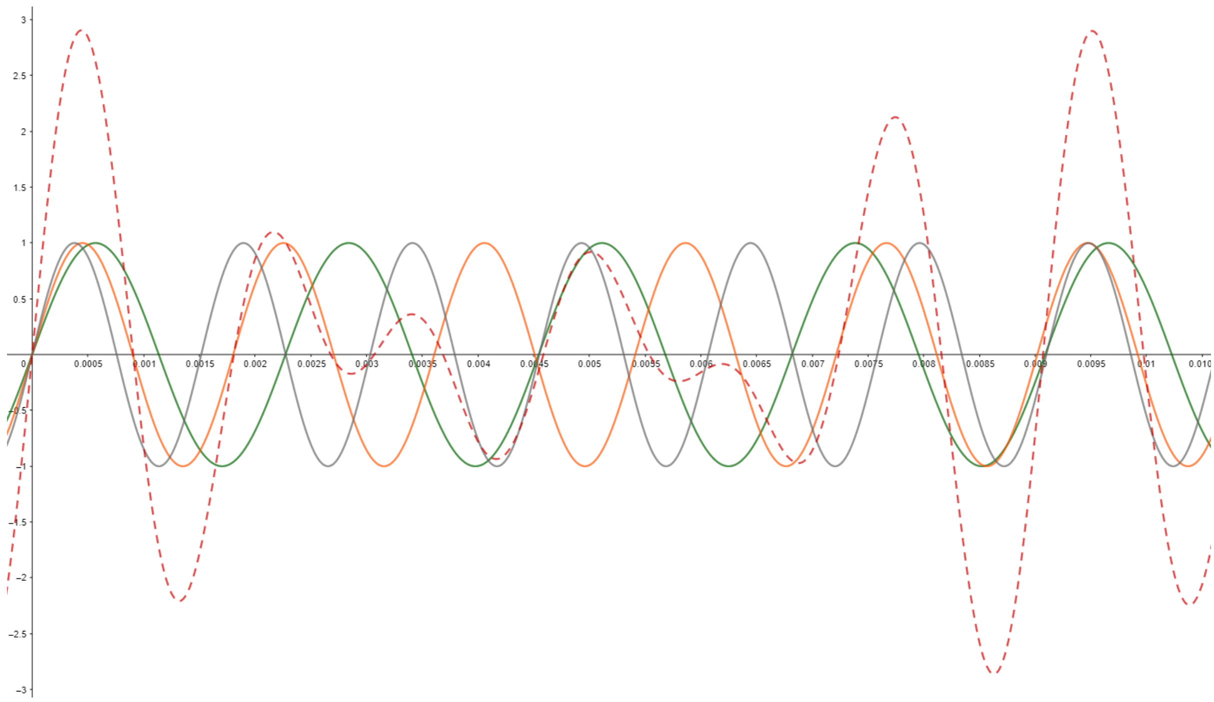


Kuva 12. Sävelen A (440 Hz) aaltoliikettä.

Kun säveliä soitetaan yhtä aikaa, summataan sävelten funktiot yhteen. Tällöin esimerkiksi sävelten A, C# ja E funktio yhdistettynä olisi $y = \sin(2\pi \cdot 440t) + \sin(2\pi \cdot 554{,}36t) + \sin(2\pi \cdot 659{,}25t)$. Tästä löytyy kuvaaja kuvasta 13. Kuten kuvasta on nähtävissä, aaltoliike on selvästi monimutkaisempi, mutta silti siinä on nähtävissä tietty kaavamaisuus. Kuvassa 14 nähdään kaikki kolme aaltoa erikseen ja lisäksi niiden summa katkoviivalla. (Rogness, n.d.).



Kuva 13. Sävelet A, C# ja E yhdistettynä.

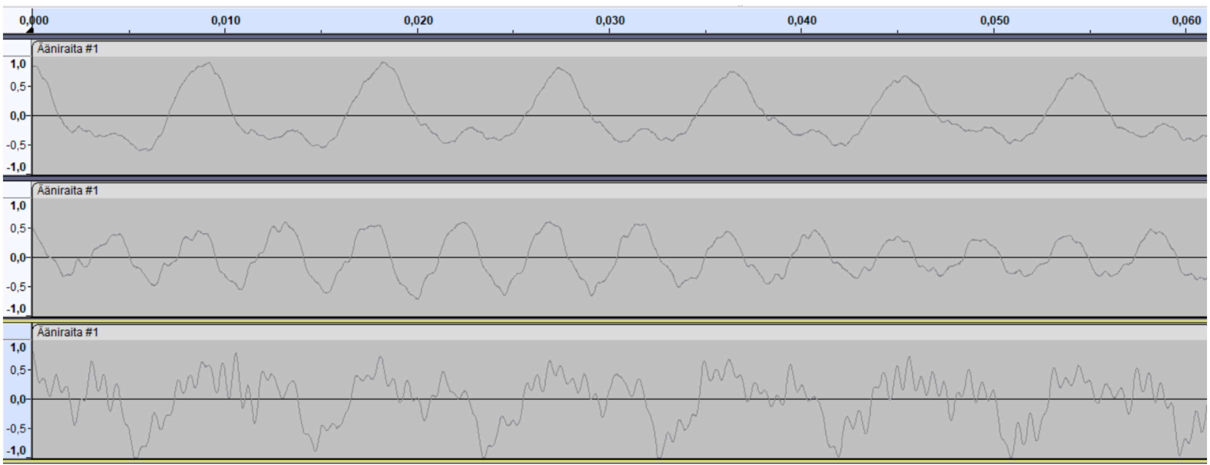


Kuva 14. Sävelten A, C# ja E tuottamat aaltofunktiot sekä näiden summafunktio katkoviivalla. Kuva havainnollistaa aaltojen konkreettisen summautumisen.

Ääniaaltoja ja aaltofunktioita voidaan tutkia oppilaiden kanssa äänittämällä erilaisista soittimista ja tavaroista lähteviä ääniä. Tähän voi käyttää esimerkkinä aiemmassa osiossa mainittuja vesilaseja, pulloja ja viivaimia sekä koululta löytyviä soittimia. Lisäksi oppilaiden kanssa voi äänittää omaa puhe- ja lauluääntä. Äänittäessä kannattaa soittimia soittaa eri voimakkuudella ja eri korkeuksilla. Esimerkiksi pianoa soittaessa voi kokeilla soittaa yhtä säveltä ja sen jälkeen useampaa säveltä yhtä aikaa. Tämän jälkeen oppilaat voivat tutkia pareittain tai pienryhmissä tuottamiansa ääniaaltoja ja niiden eroja. Mikä ero ääniaalloilla on soitettaessa eri voimakkuuksilla? Mitä eroja löytyy eri taajuuksilla soitetuista ääniaalloista? Entä mitä eroja löytyy eri soittimilla äänitetyistä aalloista? Tämä kehittää kuvaajien tulkintaa ja auttaa ymmärtämään aaltofunktiota. Lisäksi tutkimukseen on myös sovellettavissa laskutehtäviä, kuten äänitettävän aallon taajuuden laskemista. Äänitystä varten on saatavilla ilmaisia sovelluksia, kuten Audacity Windowsille.

Kuvissa 15 on äänitetty kitaralla kolme raitaa, joissa on selvästi huomattavissa taajuuksien välinen ero; tutkitaan sen tilannetta hieman tarkemmin. Matalammalla taajuudella äänitetyn ylimmän raidan ensimmäinen huippu on noin 0,0090 sekunnin kohdassa, kun taas korkeammalla taajuudella äänitetyn keskimmäisen raidan ensimmäinen huippu on noin 0,0045 sekunnin kohdassa. Tämä siis tarkoittaa, että keskimmäisellä raidalla sävel soi kaksinkertaisella taajuudella verrattuna ylimpään raitaan. Näiden jaksonpituuksien avulla saadaan laskettua taajuudet$f_1 = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}009\ s} \approx 111\ Hz\ ja\ f_2 = \frac{1}{0.0045s} \approx 222\ Hz.$

Lisäksi yhden raidan sisältä voidaan havaita äänenvoimakkuuden laskeminen huippujen pienemisenä. Alimman raidan eli sointujen kohdalla on selkeästi havaittavissa monimutkaisempaa aaltoliikettä, joka johtuu siitä, että tällöin kolmen eri sävelen aallot yhdistyvät. Äänitettäessä on hyvä ottaa huomioon, että aallot eivät ole niin puhtaita mitä teoreettisesti, sillä äänitettäessä aaltoon tulee mukaan paljon pieniä häiriötekijöitä, kuten mikrofonin laatu ja taustahäly.



Kuva 15. Audacitylla äänitettynä kolme kitararaitaa. Ylimmässä raidassa soi noin 110 Hz taajuudella A-sävel, keskimmäisessä noin 220 Hz taajuudella A-sävel ja alimmassa raidassa sointuna A-duuri, eli vastaavat soinnut kuin kuvassa 13, mutta eri taajuuksilla.

Vanhempien oppilaiden kanssa voi rakentaa myös Matlab-tiedoston, johon voi syöttää sävelasteikot ja joita voi soittaa Matlabin ”sound” -toiminnolla. Tätä varten Heikki Apiolan kirjoittama kattava ohje ja selostus löytyy sivulta http://math.aalto.fi/~apiola/intmath/musmat.html, erityisesti kappaleesta ”Sävelasteikkojen esittäminen ja soittaminen tietokoneohjelmalla”, sekä myös Apiolan kirjoittamasta Solmu-lehtikirjoituksesta, joka löytyy sivulta https://matematiikkalehtisolmu.fi/2007/1/apiola.pdf.

Lähteet:

Apiola, H. n.d. Matematiikkaa ja musiikkia. Saatavilla: http://math.aalto.fi/~apiola/intmath/musmat.html.

Fagerlund, J. 2020. Matemaattinen musiikki. Jyväskylän yliopisto. Musiikkikasvatus.

Hirvonen, S. [Siina & Taikaradio -orkesteri]. 18.2.2019. Siinan TaikaStudio, 9. Kymmenen pientä autoa (9/22) [video]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=g_gfZYVc0YE

How to Make Science Projects for Kids. 2021. How to Make a Water Xylophone. Saatavilla: http://howtomakescienceprojectsforkids.com/how-to-make-a-water-xylophone/#.YackGdBBxEY.

Marjanen, J. 2013. ”Ope, miks me lauletaan, vaikka meillä on matikan tunti?”, Musiikin ja matematiikan oppisisältöjen integrointi. Jyväskylän yliopisto. Musiikkikasvatus.

Kontiolahti, Ahokkalan koulu. n.d.(a). Älyn väläys. Tahti. Saatavilla: https://peda.net/kontiolahti/ahokkalan-koulu/musiikki2/musiikki/2-%C3%A4lyn-v%C3%A4l%C3%A4ys/2-4-tahti

Kontiolahti, Ahokkalan koulu. n.d.(b). Älyn väläys. Tahti. Saatavilla: https://peda.net/kontiolahti/ahokkalan-koulu/musiikki2/musiikki/2-%C3%A4lyn-v%C3%A4l%C3%A4ys/2-5-nuottiviivasto

LUMA Pohjanmaa. 25.11.2021. Matematiikkaa tanssien -webinaari.

Musiikkimatka. 2021. Saatavilla: https://musiikkimatka.fi/.

Naiman, D.Q. n.d. Mathematics of Music. Saatavilla: https://www.ams.jhu.edu/dan-mathofmusic/sound-waves/

Opi pistenuotteja. n.d. Intervallit. Saatavilla: https://www.opipistenuotteja.fi/13-intervallit/

Oppimateriaalikeskus OPIKE. 2012. Päivänselvää akustiikkaa. Saatavilla: https://www.opike.fi/files/products/product_365/Paivanselvaa_Akustiikka.pdf.

Pappi, O. 2016. Musiikkikasvatus varhaiskasvatuksessa, musiikkikasvatuksen kehittäminen Päiväkoti Nuppulassa. Savonia-ammattikorkeakoulu, sosiaali-, terveys- ja liikunta-ala. Saatavilla: https://www.theseus.fi/bitstream/handle/10024/122733/Pappi_Outi.pdf?sequence=1

Rajala, J. 2016. Musiikkikasvatus varhaiskasvatuksessa. Saatavilla: https://prezi.com/cs8sg3q9goug/musiikkikasvatus-varhaiskasvatuksessa/.

Rogness, J. n.d. Trigonometry in Nature, Sinusoidal waves as Sound. Saatavilla: https://www-users.cse.umn.edu/~rogness/math1155/soundwaves/

Science World. 2021. Musical Bottles. Saatavilla: https://www.scienceworld.ca/resource/musical-bottles/

Shah, S. 2010. An Exploration of the Relationship between Mathematics and Music. The University of Manchester. Manchester Institute for Mathematical Sciences. School of Mathematics. Saatavilla: http://eprints.ma.man.ac.uk/1548/1/covered/MIMS_ep2010_103.pdf

Vatanen, S. 2015. Musiikkiako matematiikan tunnilla? Pro gradu -tutkielma. Saatavilla: https://core.ac.uk/download/pdf/33738271.pdf

Wright, D. 2009. Mathematics and Music. Washington University in St. Louis. Department of Mathematics. Saatavilla: https://www.math.wustl.edu/~wright/Math109/00Book.pdf