



Binäärimatematiikka



- Tietokoneen toiminnan perusta:
 - 2-kantaiset eli binääriluvut
- Tietokoneessa kaikki koostuu nolista ja ykkösistä!



LUMA-KESKUS SUOMI
LUMA-CENTER FINLAND
LUMA CENTRE FINLAND



Miksi binäärimatematiikkaa?

- Tietokone osaa käsitellä vain nollia ja ykkösiä eli **kaikki** on **binääriä** tietokoneelle
- Binäärilukujen ymmärtäminen vahvistaa ymmärrystä muistakin lukujärjestelmistä, kuten tutuista kymmenkantaisista luvuista
 - Muita yleisesti käytettyjä lukujärjestelmiä ovat esim. 16-kantaiset eli heksadesimaaliluvut: käytettävissä numerot 0..9, A=10, B, C, D ja F=15
 - Arvellaan, että 10-kanta perustuu ihmisen 10 sormeen, eli jos meillä olisi 8 sormea (kuten Simpsonsneilla), saattaisi yleiskäytössä olla 8-kantaiset luvut
 - Binäärit ovat kuitenkin näitä selvästi helpompia – voi käsitellä jo pienten oppilaiden kanssa!
- Jos asian oppiminen on yhtään haasteellista, ymmärrät paremmin miltä oppilaista tuntuu opetella kymmenlukujärjestelmää

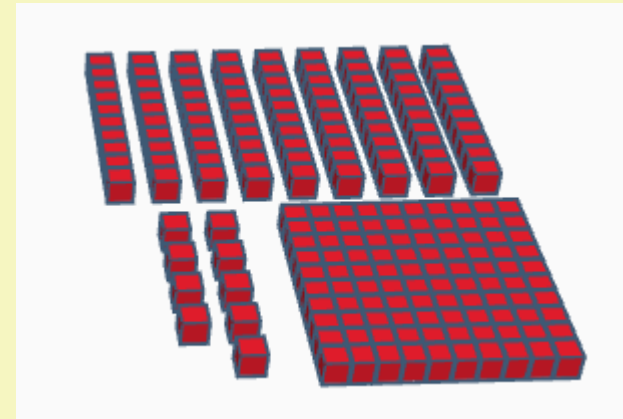
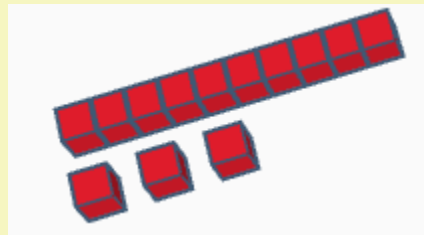
Aloitetaan tutuista numeroista

- Lienet tottunut käyttämään kymmentä numeroa
- Aloita pohtimalla miten yhdeksää suuremmat luvut niistä muodostuvat
- Mitä tarkoittaa esim. 13?



Kymmenlukujärjestelmästä

- $13 = 10 + 3$
 - Ensimmäinen numero kertoo, että lukuun tarvitaan yksi kymppi
 - Toinen numero kertoo, että lukuun tarvitaan lisäksi 3 kappaletta ykkösiä (vrt. 10-lukujärjestelmän välineet)

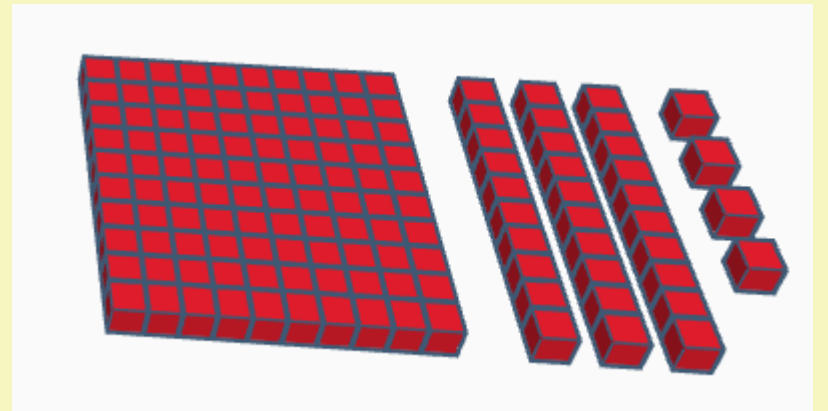


10-lukujärjestelmän välineet:

- 10-sauva koostuu kymmenestä ykköskuutiosta
- 100-levy koostuu kymmenestä 10-sauvasta (eli sadasta ykköskuutiosta). Niitä tarvittaisi myös 9 kpl, jolloin päästäisi lukuun 999 asti
- Suurempien lukujen muodostamiseen tarvittaisi kymmenestä 100-levystä (eli sadasta 10-sauvasta tai tuhannesta ykköskuutiosta) koostuvia 1000-kuutioita jne

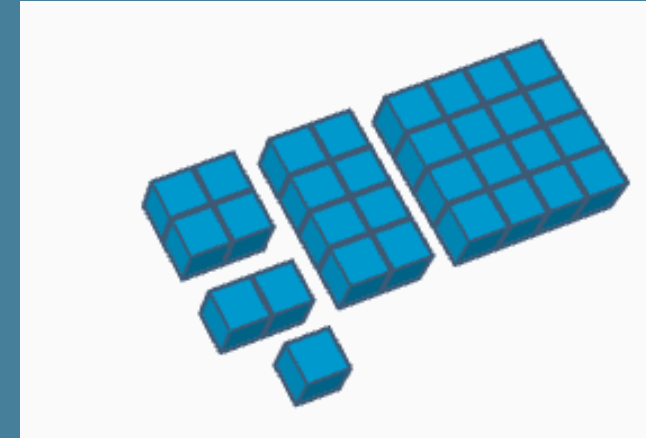
Kymmenlukujärjestelmästä







- $134 = 100 + 30 + 4 = 1 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 1$
- Numerot kertovat miten monta satasta, kymppiä ja ykköstä tarvitaan luvun muodostamiseen
 - Isompiin lukuihin tonneja, kymppitonneja jne
- Matematiikkatermein kyse on *potensseista eli toistuvista kertolaskuista*, esim. $100 = 10 \cdot 10 = 10^2$ (10 potenssiin 2)
- Potenssin määritelmän mukaan $10^0 = 1$, eli ykkönnenkin hoituu



Binääriluvuista

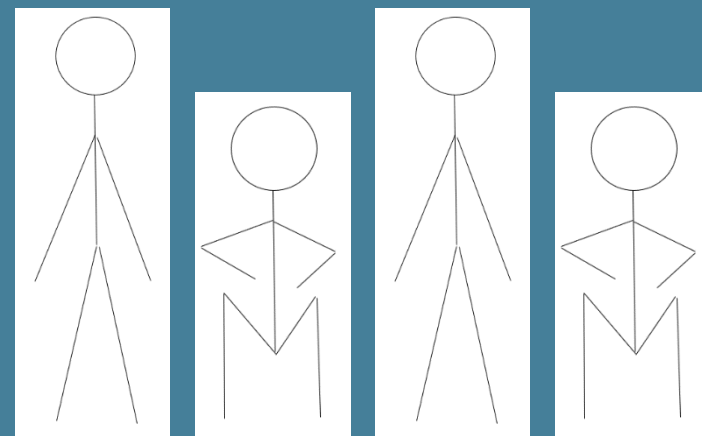
- Tietokone tuntee vain kaksi numeroa, 0 ja 1, ja niistä muodostuvat kaikki luvut! (ja kaikki muukin: kuvat, äänet jne!)
- “Normaali” kymmenkantainen luku kertoo siis montako kertaa luvussa on mukana 1, 10, 100, 1000... (isoimmasta alkaen)
- Kaksikantainen luku eli binääriluku kertoo “montako kertaa” luvussa on mukana 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64... (isoimmasta alkaen)
- “Montako kertaa” = nolla tai yksi kertaa. Kukin luku joko on mukana (1) tai ei ole mukana (0)
 - Vertaa 10-lukujärjestelmän välineisiin: 2-lukujärjestelmässä jokaista “palikkaa” tarvitaan vain yksi kappale!
- Oheisen kuvan välineillä voi muodostaa luvut 0-31
 - Huomaa merkintätapa: esim. 5 = 1 0 1 (4 ja 1 mukana, 2 ei)
 - Pienempien kanssa esim. 1, 2 ja 4 (ja ehkä 8) nystyrän LEGO-palikoilla pääsee pitkälle!



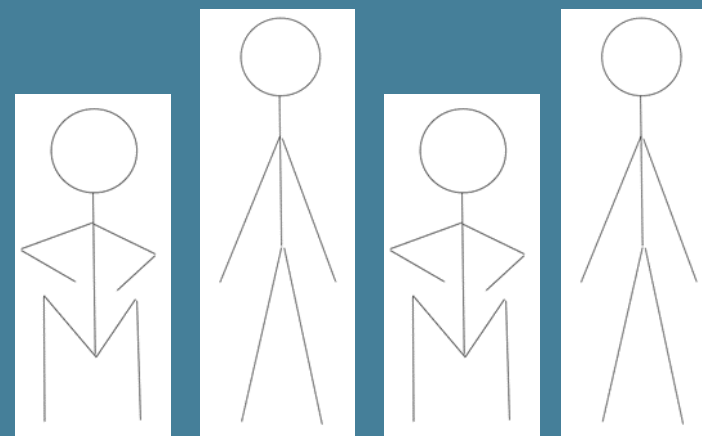
	1 = 1
	2 = 1 0
	3 = 1 1
	4 = 1 0 0
	5 = 1 0 1
	6 = 1 1 0

”Ihmisbitit”

- Binäärilukuja voi hyvin harjoitella toiminnallisen jumppatuokion muodossa!
- Esim. 4 lasta voi muodostaa ”4-bittisen tietokoneen”
 - Ykköset seisoo, nollat kyykkyy!
- Kaksi ryhmää voi muodostaa luvut peilikuvina, jolloin vastapuolen seisovien ykkösbittien summa on helpompi nähdä ja laskea
 - Samoin helpottaa, jos ”ihmisbiteillä” on oman bitin arvoa kuvaava numerolappu



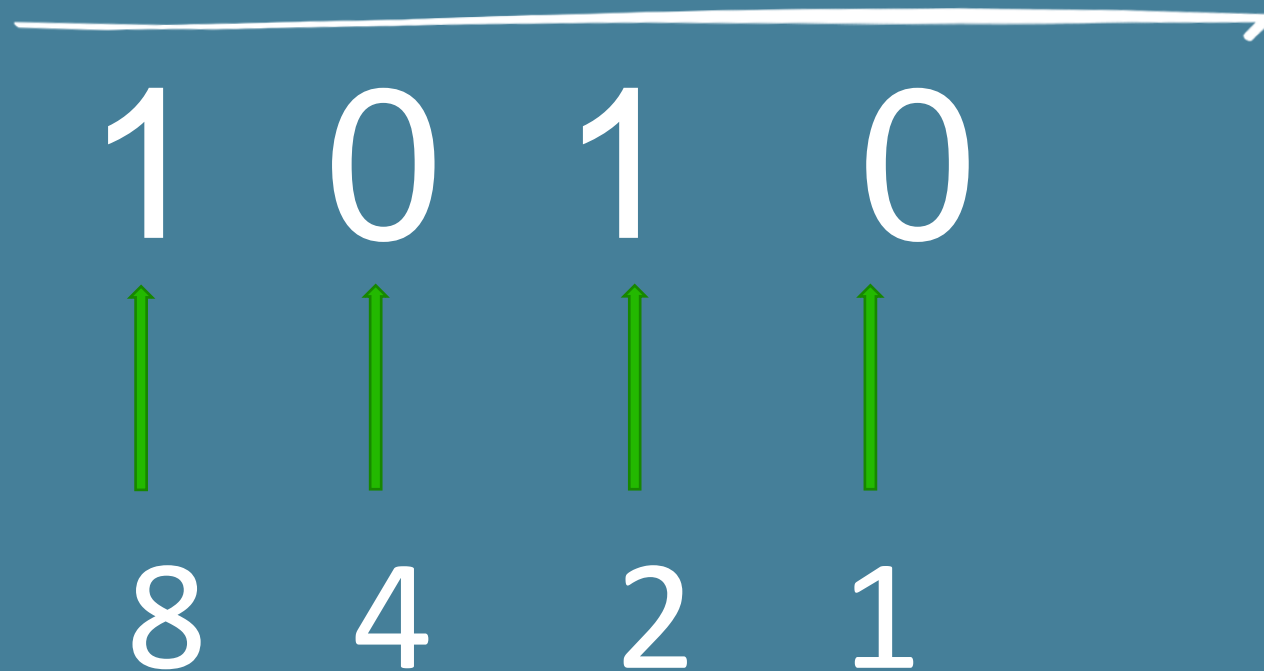
$$8 + 0 + 2 + 0 = 10$$



$$0 + 4 + 0 + 1 = 5$$

*Seuraavalla kalvolla
vastaava esimerkki
isommalla luvulla*

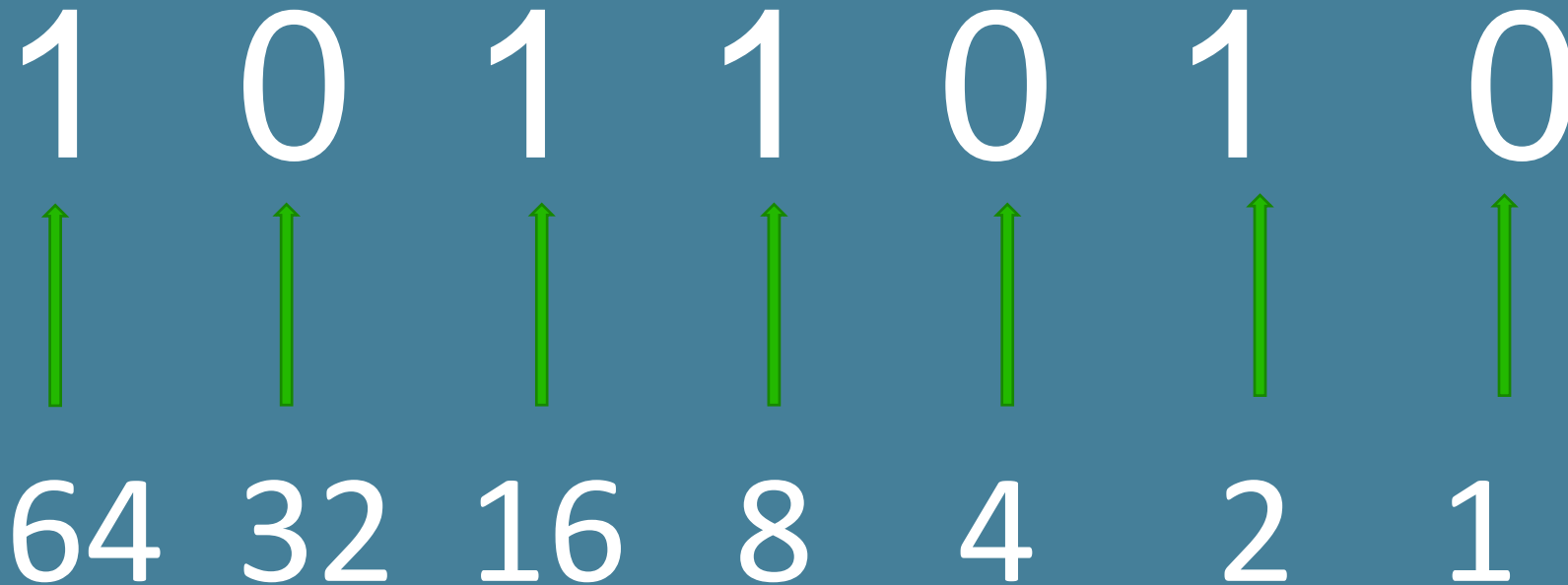
Esimerkkiluku



- Tietokone esittää bittien arvot sähköllä
 - 1 – jännite päällä
 - 0 – ei jännitettä

- Numeroja 0 ja 1 kutsutaan biteiksi. Bitin arvo kertoo onko vastaava 2:n potenssi mukana luvussa (1) vai ei (0)
- Tässä $2^3 = 2*2*2=8$ ja $2^1 = 2$ ovat mukana, $2^2 = 2*2 = 4$ ja $2^0 = 1$ eivät ole. Esimerkkiluku on siis $8+2 = 10$

Isompi esimerkkiluku

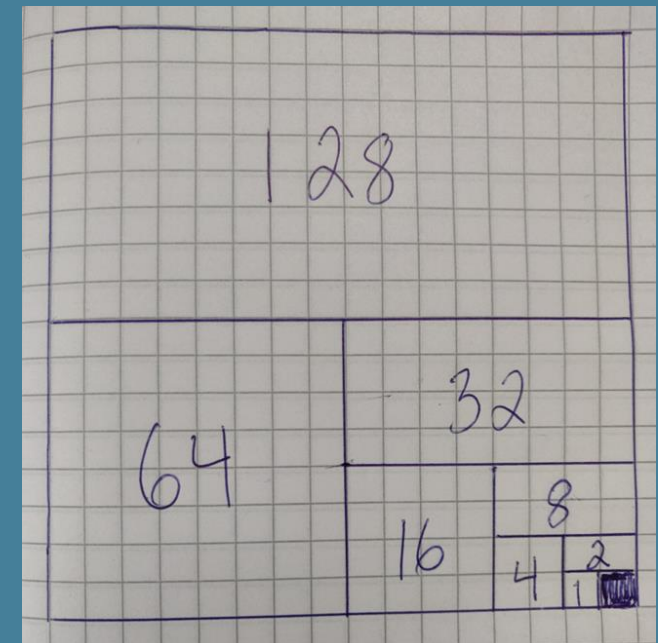
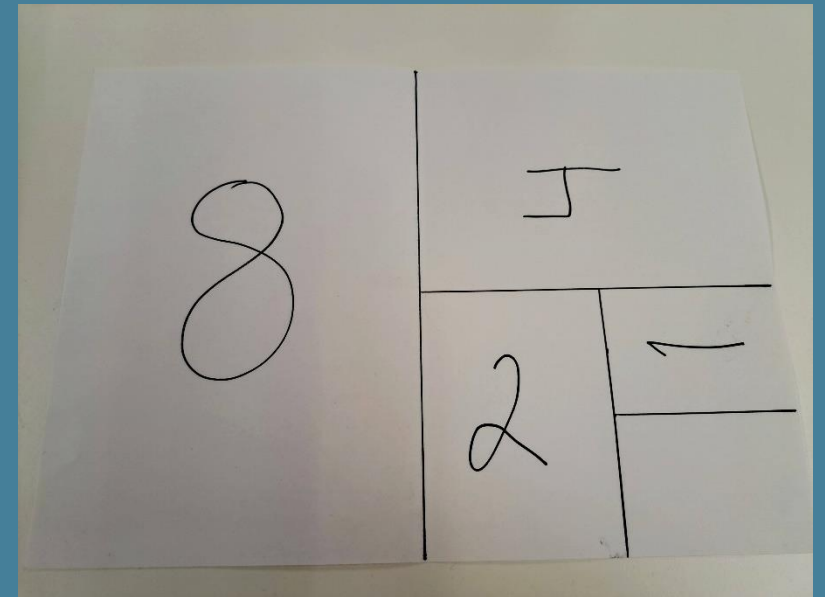


- Tietokone esittää bittien arvot sähköllä
 - 1 – jännite päällä
 - 0 – ei jännitettä

- Numeroja 0 ja 1 kutsutaan biteiksi. Bitin arvo kertoo onko vastaava 2:n potenssi mukana luvussa (1) vai ei (0)
- Tässä esim. $2^4 = 2*2*2*2=16$ on mukana, $2^2 = 2*2 = 4$ ei ole. Esimerkkiluku on siis $64+16+8+2 = 90$
- Vertaa edelliseen esimerkkiin: merkitsevämmät (isommat) bitit muodostavat luvusta osuuden $64+16 = 80$ ja vähemmän merkitsevät (pienemmät) bitit loput eli $8 + 2 = 10$

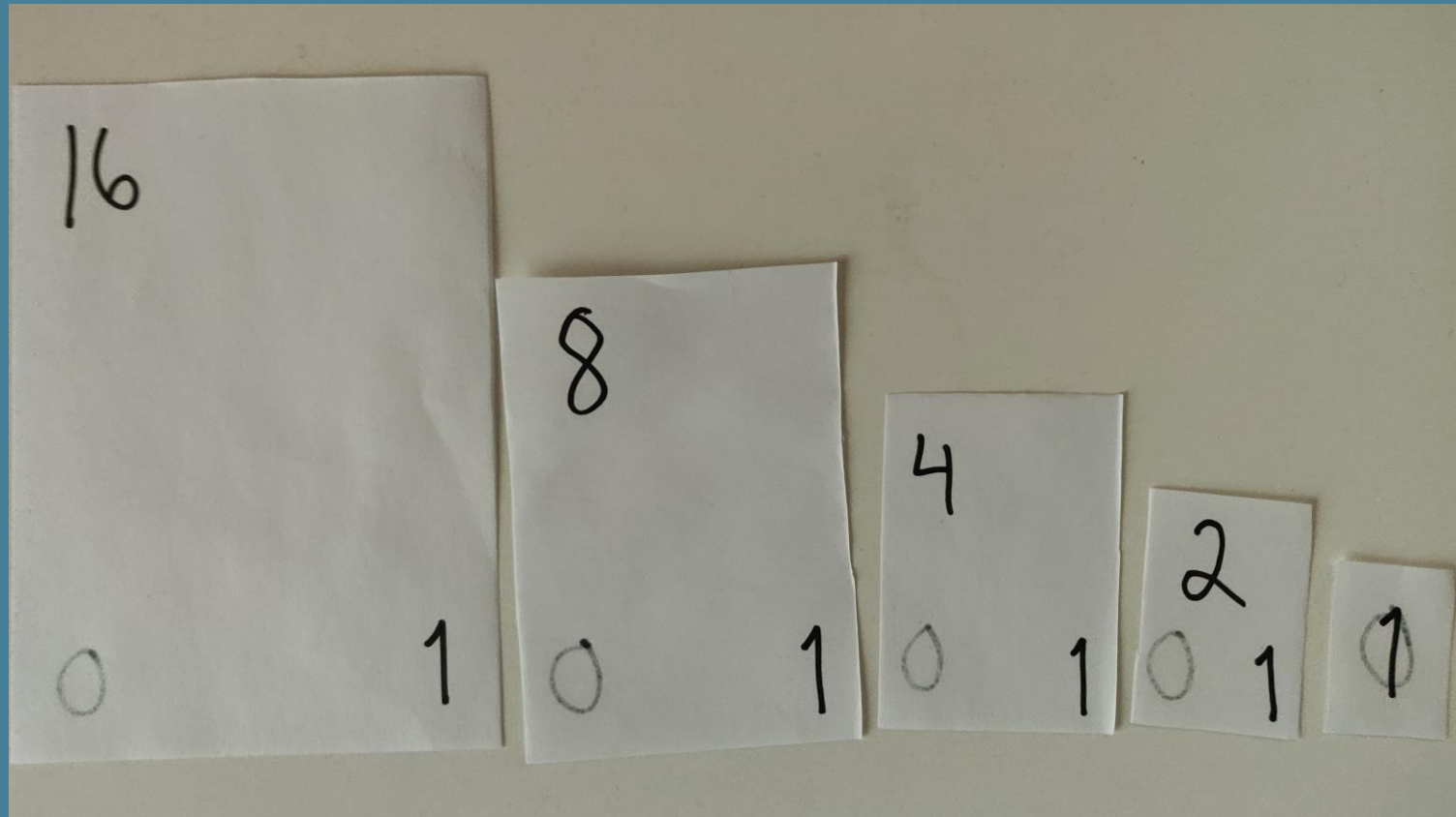
Binäärilukujen visualisointi

- Kuvien mukaisilla ”palapeleillä” voi harjoitella binäärilukujen muodostamista
- Ylempi on helppo tehdä A4-arkkia puolittamalla (sopivan monta kertaa). Tällä versiolla voi muodostaa luvut 0-15
- Alemman kuvan palapelillä voi muodostaa luvut 0-255
 - 255 on suurin luku, minkä voi esittää 8 bitillä (1111 1111). Lukuun törmää eri yhteyksissä, esim. Sphero-robottien ohjelmoinnissa maksiminopeus on 255 juuri tästä syystä.
- Palapeli-idea auttaa ymmärtämään kokonaisuuden ja suuruusluokat: kokoamalla kaikki pienemmät palat saa yhtä vaille sen luvun, mitä seuraava pala edustaa.
 - Merkitsemätön 1-palan kokoinen pala ei siis ole käytössä, sitä ei tarvita (vrt. 10-lukujärjestelmän välineiden 9 kappaletta per kokoluokka).
- Myös jo mainitut LEGO-palikat soveltuvat binäärilukujen opetteluun (1, 2, 4 ja 8 kiinnitysympyrän paloilla saa luvut 0-15).
- ...tai kuminauhoilla kiinnitetyt tulitikku/hammastikkuniput missä 1, 2, 4, 8, 16... tikkua (keksi itse lisää)



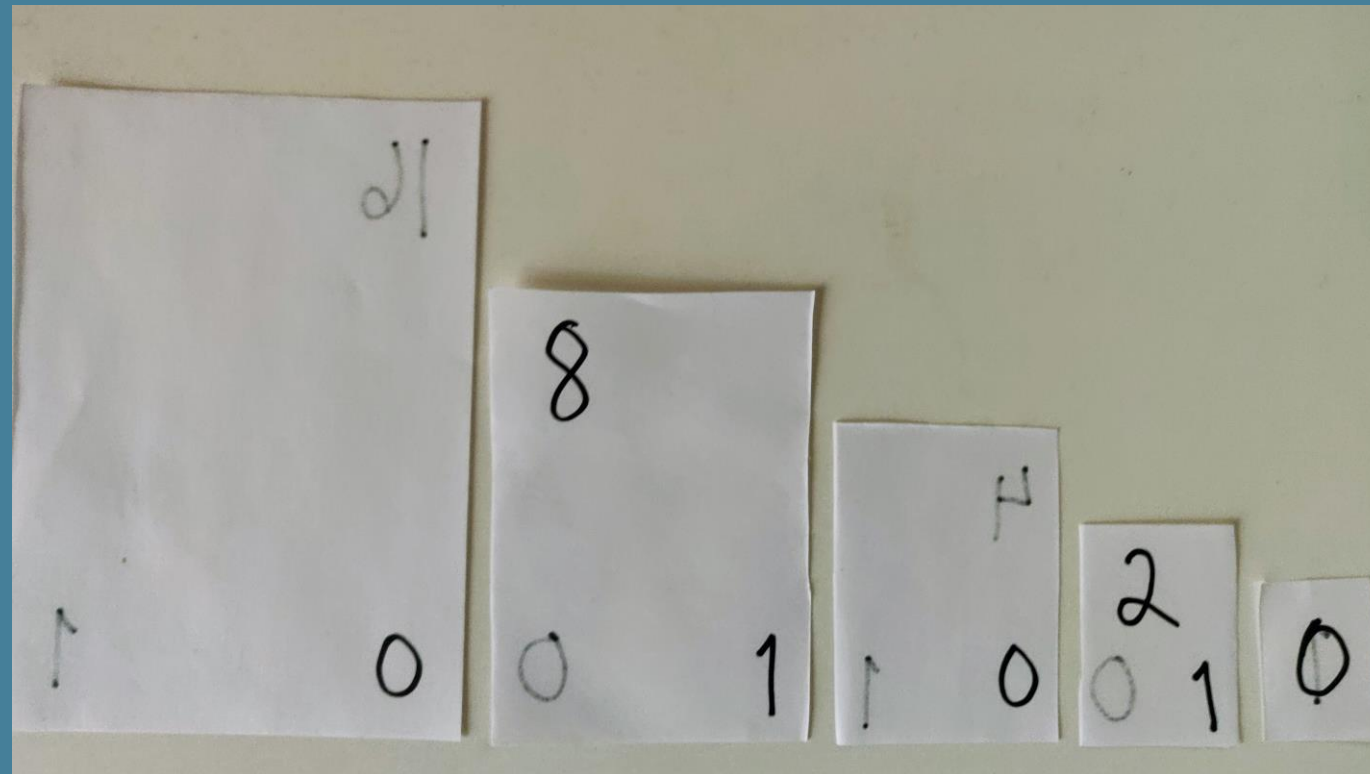
Binäärilukuharjoittelua

- Binääripalapeleihin voi merkitä etupuolelle ykkösbitit ja niitä vastaavat 10-kantaiset luvut ja kääntöpuolelle nollat
- Suuruusjärjestyksessä palat muodostavat ykkösbittejä vastaavien desimaalilukujen summan
- Pinta-alat auttavat hahmottamaan "bittien" suuruusluokat
- Näillä paloilla (5 bitillä) luvut 0..31
- Pienempien kanssa voi käyttää esim. 3 bittiä (luvut 0-7) tai 4 bittiä (luvut 0-15).



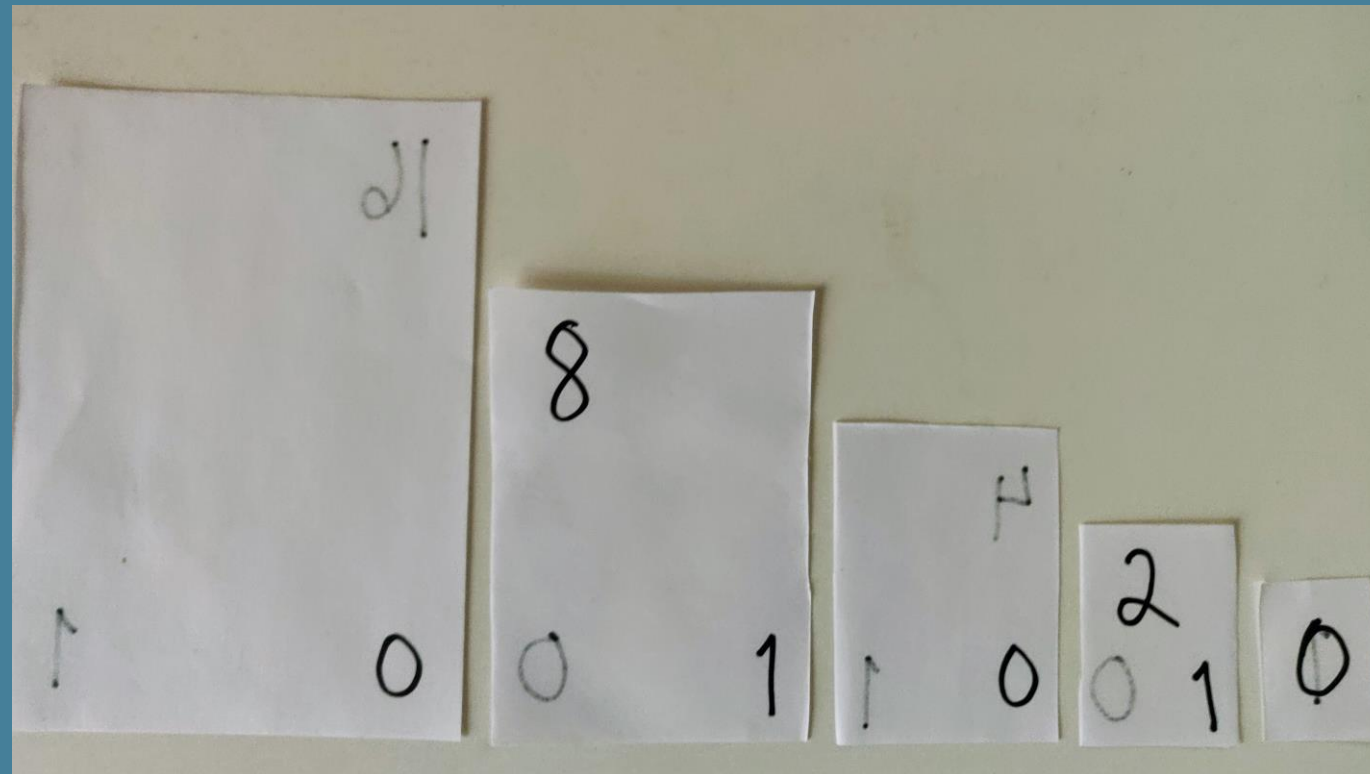
Binäärilukuharjoittelua

- Mikä luku? Binäärimuodossa 01010
- Muodosta palapelillä tai "ihmisbiteillä"



Binäärilukuharjoittelua

- Mikä luku? Binäärimuodossa 01010
- → desimaalilukuna $8+2 = 10$



Binääriluvuista algoritmeihin

- Käännä kaikki palat nolapuoli ylöspäin
- Ala laskea ykkösestä ylöspäin, kääntäen aina kyseiseen binäärilukuun tarvittavat luvut esiin
- Huomaatko säännönmukaisuuden?
- Palojen kääntelyyn voi laatia **algoritmin!**

Binääriluvuista algoritmeihin



- Käännä kaikki palat nolupuoli ylöspäin
- Ala laskea ykkösestä ylöspäin, kääntän aina kyseiseen binäärilukuun tarvittavat luvut esiin
- Huomaatko säännönmukaisuuden?
- Palojen kääntelyyn voi laatia **algoritmin!**

1. Pienin pala ykköseksi
2. Toiseksi pienin ykköseksi, pienin nolaksi
3. Pienin ykköseksi (eli toistetaan kohta 1)
4. Kolmanneksi pienin ykköseksi, kaikki sitä pienemmät nolliksi
- 5-7. Toistetaan kohdat 1-3 (nelonen valmiina – lisätään 1-3)
8. Neljänneksi pienin ykköseksi, kaikki sitä pienemmät nolliksi
- 9-15. Toistetaan kohdat 1-7 (kasi valmiina – lisätään 1-7)
16. Viidenneksi pienin ykköseksi, kaikki sitä pienemmät nolliksi
- 17-31. Toistetaan kohdat 1-15 (16 valmiina – lisätään 1...15)

Binääriluvuista algoritmeihin

- Oheisen algoritmin voi toteuttaa liikunnallisesti pienempienkin lasten kanssa hyödyntäen aiemmin esiteltyjä ”ihmisbittejä”
- Esim. ”4-bittinen elävä tietokone”, missä 4 lapsella omaa bittiä vastaava numerokyltti (1, 2, 4, 8)
- Lasketaan 1..15 niin että kuhunkin lukuun tarvittavat ”bitit” seisovat ja muut istuvat
 - Varsinkin tässä 2 ryhmää toistensa peilikuvina helpottaa!
- Pohditaan miksi 1-bitti saa jumpata niin paljon enemmän kuin muut

1. Pienin pala ykköseksi
2. Toiseksi pienin ykköseksi, pienin nolllaksi
3. Pienin ykköseksi (eli toistetaan kohta 1)
4. Kolmanneksi pienin ykköseksi, kaikki sitä pienemmät nollliksi
- 5-7. Toistetaan kohdat 1-3 (nelonen valmiina – lisätään 1-3)
8. Neljänneksi pienin ykköseksi, kaikki sitä pienemmät nollliksi
- 9-15. Toistetaan kohdat 1-7 (kasi valmiina – lisätään 1-7)
16. Viidenneksi pienin ykköseksi, kaikki sitä pienemmät nollliksi
- 17-31. Toistetaan kohdat 1-15 (16 valmiina – lisätään 1...15)

Binääriluvuista algoritmeihin

- Myös binäärilukujen muodostaminen desimaaliluvuista voidaan kuvata algoritmina:
 - Jaa desimaaliluku kahdella – kirjaa jakojäännös binäärilukuun
 - Toista edellistä askelta jakolaskun tuloksella kunnes jää 0
- Esimerkkiluku 30 tuottaa binäärikoodin 11110 seuraavasti
 - $30 / 2 = 15$, jakojäännös 0
 - $15 / 2 = 7$, jakojäännös 1
 - $7 / 2 = 3$, jakojäännös 1
 - $3 / 2 = 1$, jakojäännös 1
 - $1 / 2 = 0$, jakojäännös 1

Binäärilukuja harjoitellessa luvut voi muodostaa itselle mielekkäällä logiikalla, esim. miettimällä ensin mikä on suurin 2 potenssi, mikä lukuun mahtuu, vähentämällä se luvusta, ja jatkamalla vähennyslaskun tuloksesta. Esim.

- $30 - \mathbf{16} = 14$
- $14 - \mathbf{8} = 6$
- $6 - \mathbf{4} = 2$
- $2 - \mathbf{2} = 0$

Lihavoidut luvut kertovat binäärilukuun tarvittavat 2:n potenssit

Binäärilukujen yhteenlasku

- Osaathan perinteisen yhteislaskun allekkain? Esim. $11 + 19$

$$\begin{array}{r} 1 \text{ (muistiin)} \\ 11 \\ + 19 \\ \hline 30 \end{array}$$

Binäärimatematiikassa sama mutta helpommin! Tarvitsee osata vain nämä summat:

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1$$

$$1 + 1 = 10$$

$$1 + 1 + 1 = 11 \text{ (jos myös muistinumero ykkönen)}$$

Binäärilukujen yhteenlasku

- Osaathan perinteisen yhteislaskun allekkain? Esim. $11 + 19$

$$\begin{array}{r} 1 \text{ (muistiin)} \\ 11 \\ + 19 \\ \hline 30 \end{array}$$


Sama binäärilukuina, IHAN samalla tavalla:

$$\begin{array}{r} 01011 \\ + 10011 \\ \hline 11110 \end{array}$$

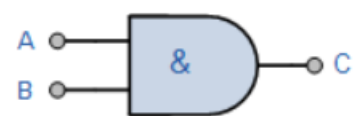
Huomaa, että
 $1+1 = 10$ (eli 2)
 $1 + 1 + 1 = 11$ (eli 3)
ja tietenkin
 $0 + 0 = 0$
 $0 + 1 = 1$
 $1 + 0 = 1$
 $1 + 0 + 0 = 1$ (termien
järjestyksestä
riippumatta)

Summan toteutus tietokoneessa

- ”Kahden bitin summa” XOR-portilla (”exclusive or” eli ”poissulkeva tai”)
 - Tämä ei vielä ota vastaan eikä tuota muistibittiä

Symbol	Truth Table		
 <p>A 2-input Ex-OR Gate symbol with inputs A and B, and output S. The symbol is a blue triangle with a double line on the left side and a '=' sign inside. Below it is the text '2-input Ex-OR Gate'.</p>	B	A	S
	0	0	0
	0	1	1
	1	0	1
	1	1	0

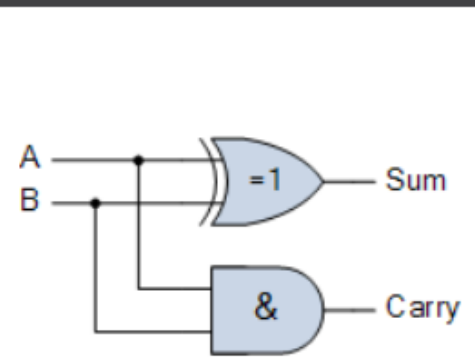
- Muistibitti saadaan tuotettua AND- eli JA-portilla
 - Tämäkään ei ota vastaan muistibittiä

Symbol	Truth Table		
 <p>A 2-input AND Gate symbol with inputs A and B, and output C. The symbol is a blue D-shaped gate with an ampersand (&) inside. Below it is the text '2-input AND Gate'.</p>	B	A	C
	0	0	0
	0	1	0
	1	0	0
	1	1	1

Huomaa **totuustaulut** (truth table)

Summan toteutus tietokoneessa

- Yhdistetään XOR & AND **puolisummaimeksi**
 - Tuottaa muistibitin, muttei ota sitä vastaan – siihen tarvitaan kokosummain

Symbol	Truth Table			
	B	A	SUM	CARRY
	0	0	0	0
	0	1	1	0
	1	0	1	0
	1	1	0	1

- **Kokosummain** (full adder) on jo hieman monimutkaisempi looginen piiri, jonka **totuustaulussa** (truth table) on 8 riviä (kaikki kolmen sisääntulobitin kombinaatiot)
 - Summattavien lukujen vastinparibitit ja mahdollinen muistibitti
- Kahden 8-bittisen luvun summaamiseen tarvitaan 8 kokosummaina ketjutettuna
- Nykytietokoneet käsittelevät jopa 64-bittisiä lukuja

Binääriluvut tietokoneissa

- Kahdeksaa bittiä kutsutaan tietotekniikassa tavuksi
- Tavulla voi siis esittää luvut 0:sta (0000 0000) 255:een (1111 1111)
 - Isommat luvut vaativat enemmän bittejä (16, 32, 64)
- Tavulla voi esittää valtaosan merkeistä (numerot, kirjaimet ja erikoismerkit), 7-bitin ASCII-koodilla ja sen laajennuksilla
 - Tietokone käsittelee siis kirjaimetkin numeroina, esim. A = 65 = 1000001
- Musiikkikappaleet, videot, kuvat jne – kaikki ovat tietokoneissa ”vain numeroita” (esitettynä pelkillä nolilla ja ykkösillä)
 - Pikselit ovat kuvapisteen väriarvoja: mustavalkokuvassa 0=musta, 255=valkoinen. Värikuvissa käytetään kolmea arvoa (Red, Green, Blue)

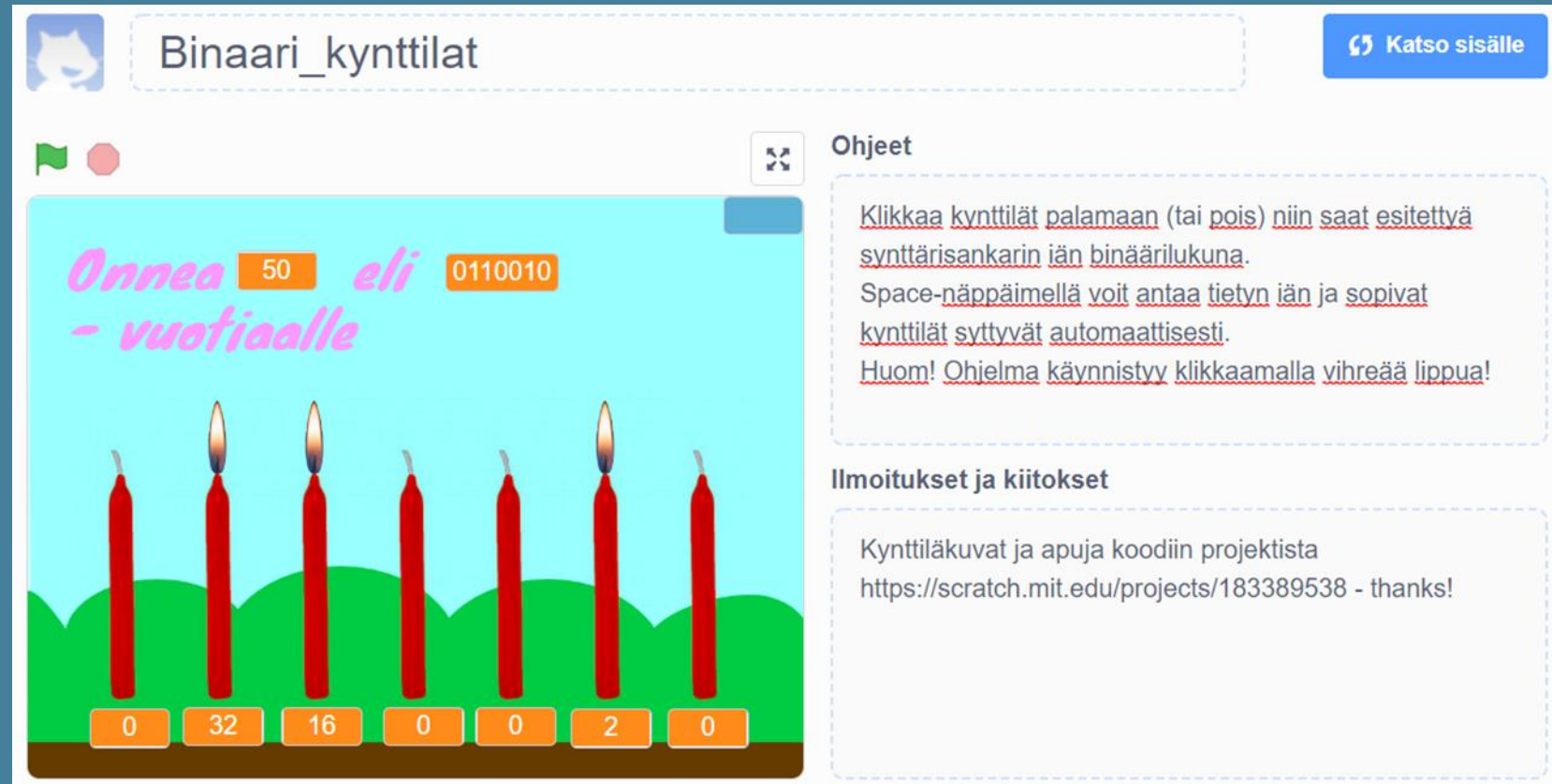
Binäärikynttilät

- Loppukevennyksenä materiaalin kehittäjän perheessä käytetty (sukulaisia hämmentänyt) tapa esittää syntymäpäiväsankarin ikä kakkukynttilöissä binäärimuodossa
 - Säästää valtavan määrän kynttilöitä, varsinkin iäkkäämmillä sankareilla!
 - Paljonkohan sankari täytti näissä kaksissa peräkkäisissä juhlissa?



Binäärikynttilät

- Halutessasi voit testaila Scratch-ohjelmoinnilla toteutettuja ”binäärikynttilöitä”
- Tutustu projektiin osoitteessa <https://scratch.mit.edu/projects/525123933>
- ”Binäärikynttilät” sopivat binäärilukujen harjoitteluun muutenkin
 - Oikeat (LED-)kynttilät
 - Taululle piirretyt kynttilät ja postit-lapuista liekit tms



The screenshot shows a Scratch project titled "Binaari_kynttilat". The main stage features a birthday cake with seven red candles. Above the candles, the text "Onnea 50 eli 0110010 - vuotiaalle" is displayed. Below the candles, a row of seven orange boxes contains the binary digits: 0, 32, 16, 0, 0, 2, 0. The project title "Binaari_kynttilat" is in the top left, and a "Katso sisälle" button is in the top right. A "Ohjeet" (Instructions) section on the right explains the game mechanics: clicking candles turns them on or off, and the spacebar triggers automatic candle lighting. A "Ilmoitukset ja kiitokset" (Credits) section at the bottom right thanks the user for the code and provides a URL: <https://scratch.mit.edu/projects/183389538>.



LUMA-KESKUS SUOMI
LUMA-CENTER FINLAND
LUMA CENTRE FINLAND



Ota yhteyttä info@lumatikka.luma.fi!

Yhteistyössä / I samarbete med



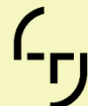
LAPIN YLIOPISTO
UNIVERSITY OF LAPLAND



UNIVERSITY OF
EASTERN FINLAND



Vaasan yliopisto
UNIVERSITY OF VAASA



Tampereen yliopisto



LUT
University



TURUN
YLIOPISTO