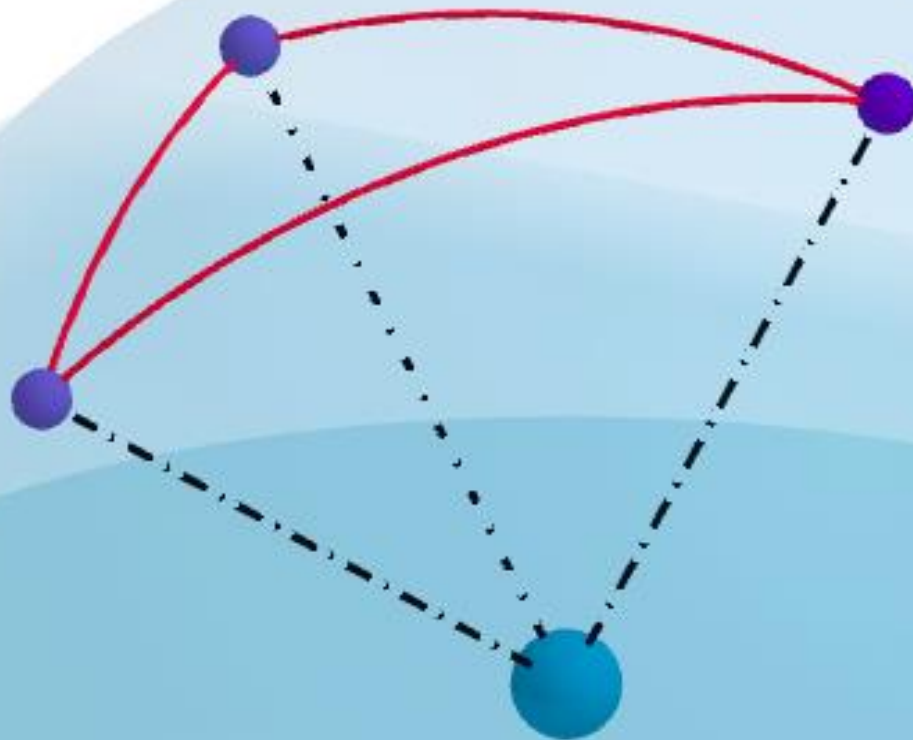


Koulumatematiikan tarina

– ongelmien ja oivallusten kautta esitettynä



Materiaali on osa LUMATIKKA-täydennyskoulutusohjelmaa, jonka toteutuksesta vastaa LUMA-keskus Suomi -verkosto yhteistyökumppaneineen. Ohjelman rahoittaa Opetushallitus. Alustuksen on koostanut FT Martina Aaltonen.

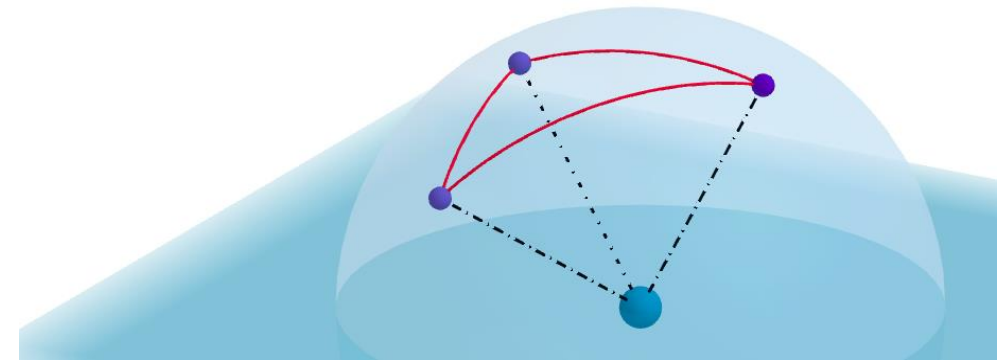


LUMA-KESKUS SUOMI
LUMA-CENTER FINLAND
LUMA CENTRE FINLAND



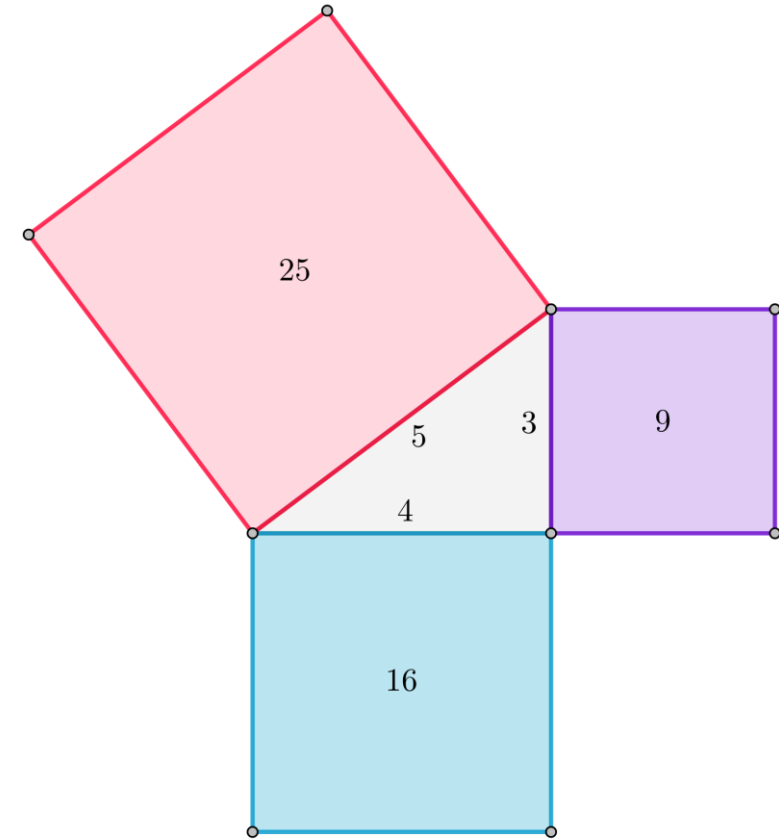
Matematiikan tarina alkaa luonnollisista luvuista

Ensimmäisessä osassa mietitään luonnollisten lukujen ominaisuuksia



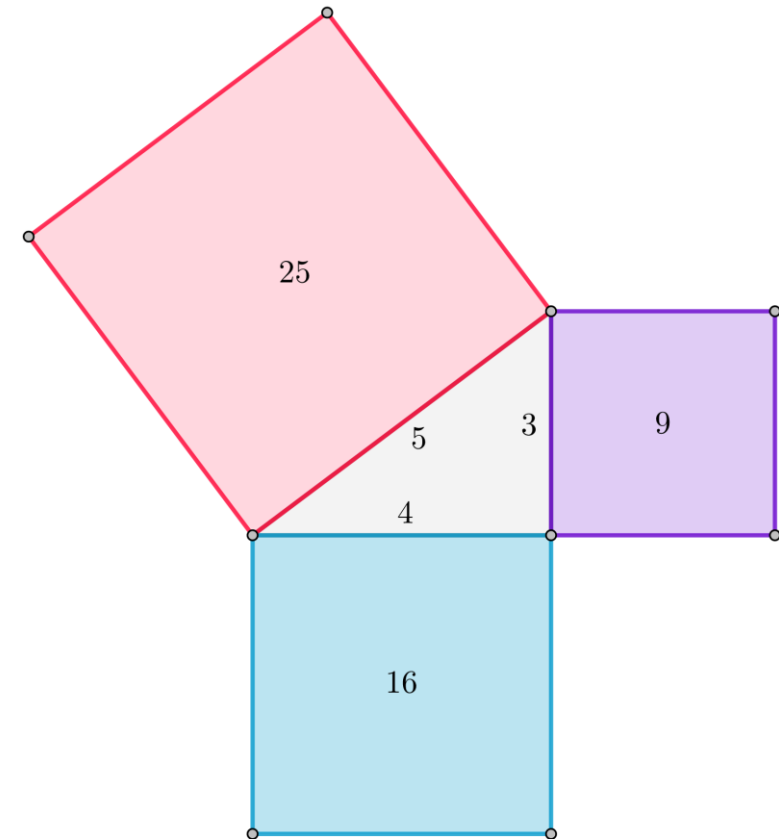
Luonnolliset luvut (muinainen Babylonia)

- Luonnollisilla luvuilla on keskenään eroavia ominaisuuksia
- Mitä yhteistä on luonnollisilla luvuilla:
 - a) 2, 4, 9, 16, 25
 - b) 1, 3, 6, 10, 15
 - c) 1, 3, 5, 7, 11ja kolmikoilla
 - d) (3, 4, 5), (5, 12, 13) ja (8, 15, 17)



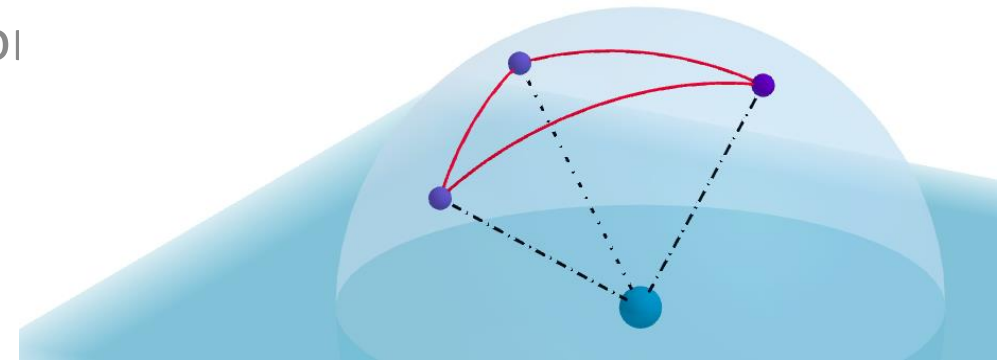
Luonnolliset luvut (muinainen Babylonia)

- Luonnollisilla luvuilla on keskenään eroavia ominaisuuksia
- Mitä yhteistä on luonnollisilla luvuilla:
 - a) 2, 4, 9, 16, 25
(neliöluvut)
 - b) 1, 3, 6, 10, 15
(kolmioluvut)
 - c) 1, 3, 5, 7, 11
(alkuluvut)
 - d) (3, 4, 5), (5, 12, 13) ja (8, 15, 17)
(Pythagoraan kolmikoita)



Monimutkainen maailma tarvitsee monimutkaisia lukuja

Toisessa osassa tutustutaan siihen, missä, milloin ja miksi erilaiset luvut ja lukujärjestelmät ovat ilmestyneet matematiikan historiassa.



Lukujen historiaa

Missä vaiheessa historiaa seuraavat luvut tulivat osaksi matematiikkaa?

a) luonnolliset luvut

1, 2, 3, ...

b) luku 0

0

c) murtoluvut

$1/2, 2/3, \dots$

d) negatiiviset kokonaisluvut

-1, -2, -3, ...

e) irrationaaliluvut

$\sqrt{2}, \pi, \dots$

Lukujen historiaa

a) luonnolliset luvut

muinaiset babylonialaiset

c) murtoluvut

muinaiset babylonialaiset

e) irrationaaliluvut

Pythagoralaiset 600 e.a.

b) luku 0

Ptolemaios 130 j.a.

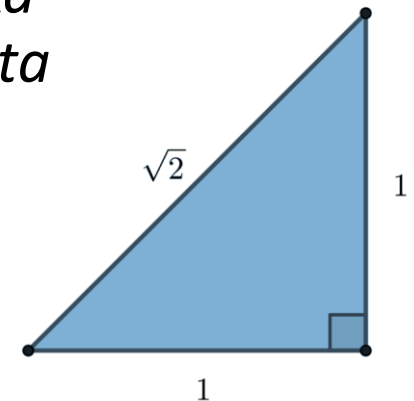
d) negatiiviset luvut

Kiina 100 e.a. Intia 700 j.a.

Eurooppa 1600 j.a.

Miten irrationaaliluvut löydettiin?

Pythagoralaisilla oli teoria harmoniasta, jonka mukaan kaikki maailmassa voitaisiin selittää vain luonnollisia lukuja ja murtolukuja käyttäen. Se kuitenkin murtui heidän huomattessaan, että on olemassa kolmio, ja vieläpä hyvin yksinkertainen sellainen, jonka hypotenuusaa ei voida ilmaista murtolukuna

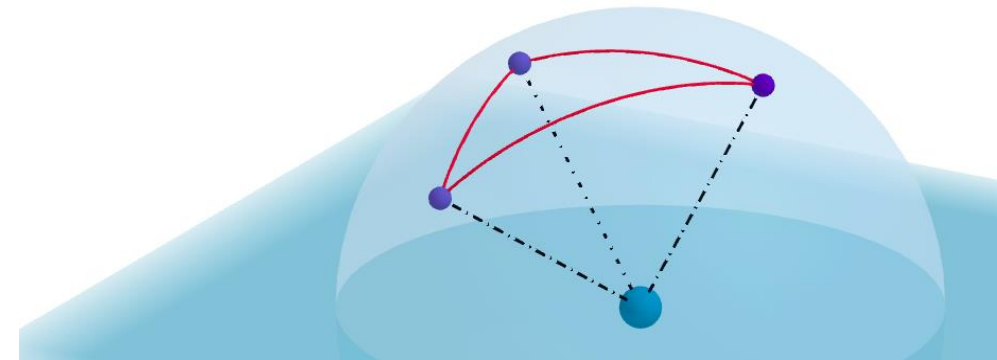


Kymmenjärjestelmä

- Nykyisin käytössä olevat numerosymbolit 1,2,3,4,5,6,7,8,9 ja paikkaan perustuva kymmenjärjestelmä ovat peräisin 600-luvun Intiasta
0,01
- Ne tulivat Eurooppaan Arabian islamilaisen kulttuurin mukana 1200 - 1500-luvulla (Fibonacci)
0,1
- Arabit lisäsivät numerosymbolien joukkoon symbolin 0 ja ottivat käyttöön desimaaliluvut
1
- 10
- 100

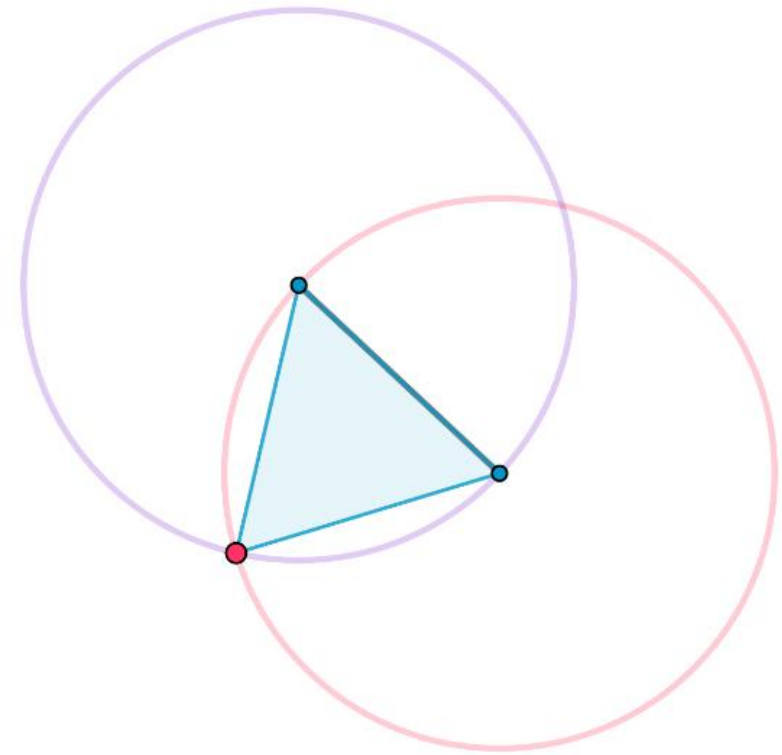
Kuvioita harpilla ja viivaimella

Kolmannessa osassa siirrytään antiikkiin laskemaan pinta-aloja ja piirtämään säännöllisiä monitahokkaita harpilla ja viivaimella



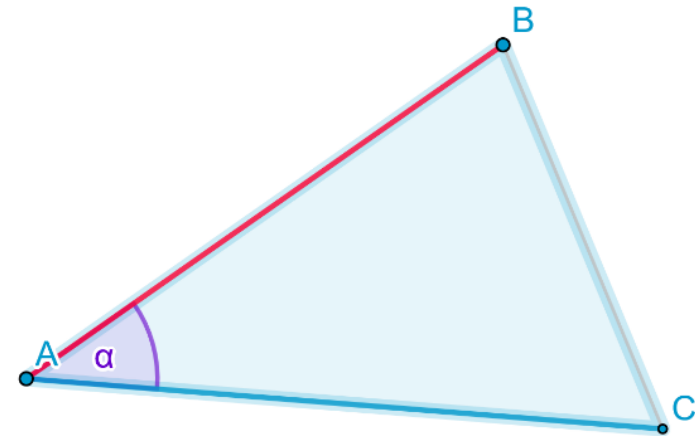
Harppi ja viivain konstruktiot

- Mitä pelkän harpin ja viivaimen avulla voidaan konstruoida geometrisesti?
- Janat ja kulmat voidaan puolittaa
- Kaikkia kulmia ei voida jakaa kolmeen yhtä suureen osaan, esimerkiksi 60 asteen kulmaa
- Janalle voidaan aina piirtää keskinormaali
- Tasasivuinen kolmio, neliö ja säännöllinen 5-kulmio voidaan piirtää, mutta ei esimerkiksi säännöllistä 9-kulmiota



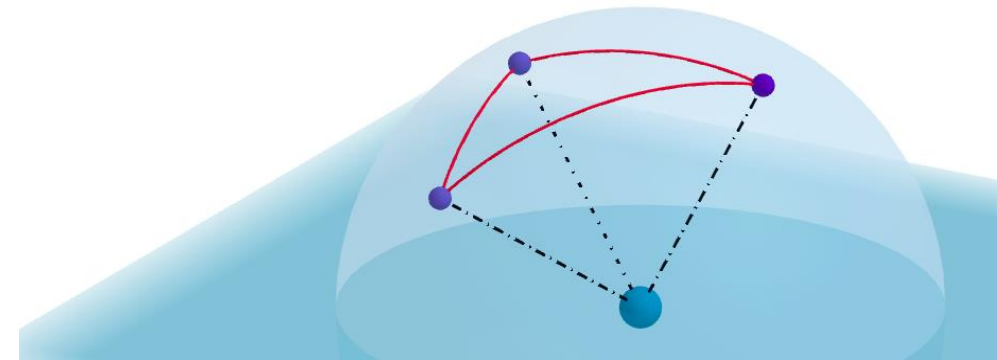
Kolmioiden yhtenevyysslauseet (Euklides)

- Mistä ominaisuuksista kolmio voidaan tunnistaa?
- Esimerkiksi tuntemalla kaksi sen sivua ja niiden välinen kulma (sks)
- Kolmioiden yhtenevyysslauseet löytyvät Eukleideen *Alkeista*
- Eukleides toi aksiomaattisen lähestymistavan matematiikkaan



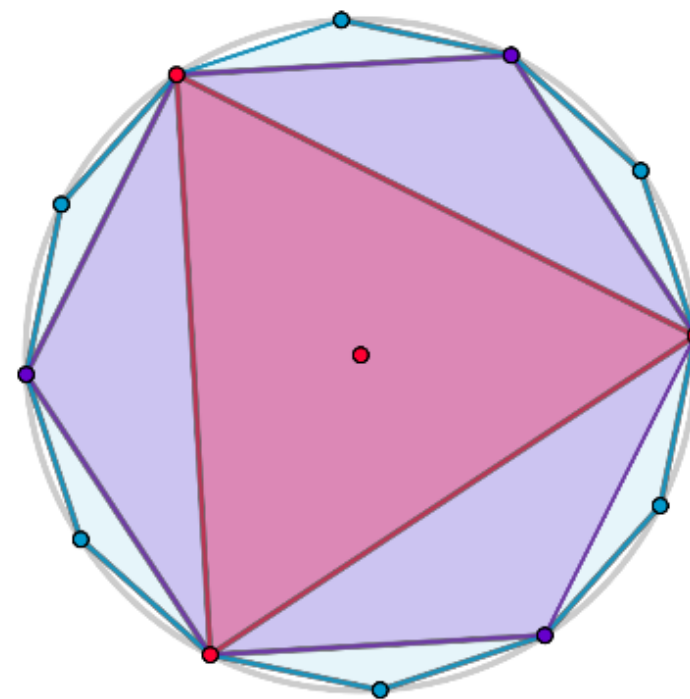
Monimutkaisia lukuja harpilla ja viivaimella

Neljännessä osassa konstruoidaan irrationaaliluvut $\sqrt{2}$ ja π geometrisesti



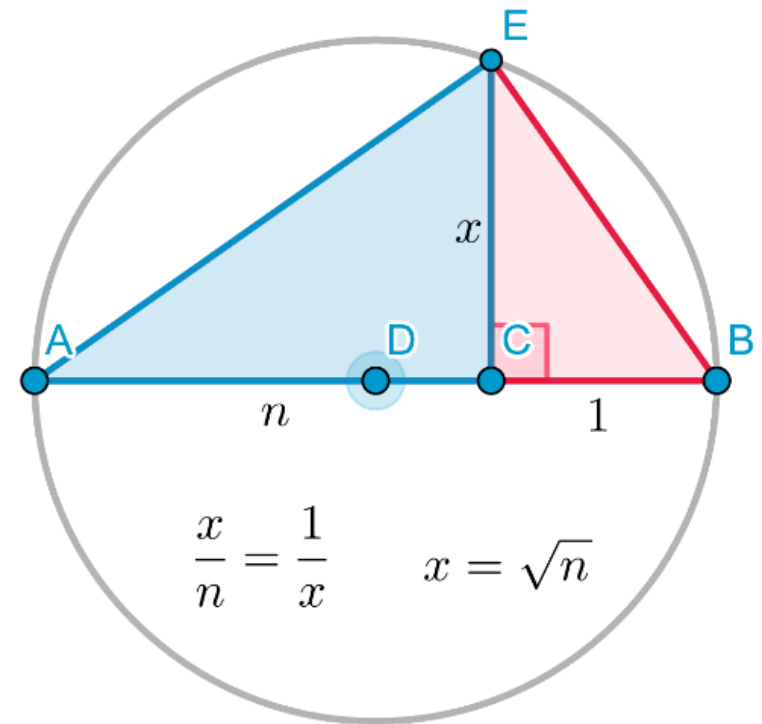
Luku π geometrisesti (Arkhimedes)

- Luku π saadaan yksikköympyrän pinta-alana $A = \pi 1^2 = \pi$
- Lukua π voidaan arvioida sellaisen säännöllisen monikulmion pinta-alan avulla, jonka kärjet ovat yksikköympyrän kehällä
- Laskemalla säännöllisen 96-kulmion pinta-ala saadaan arvio
$$\pi \approx 3,14$$



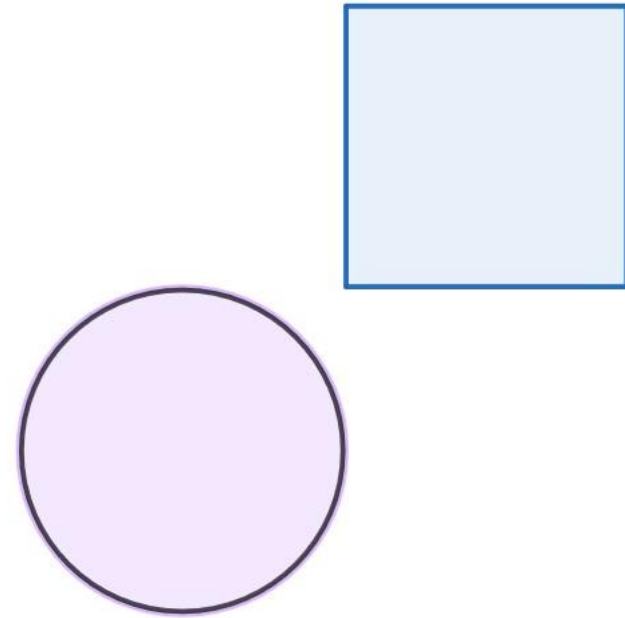
Luonnollisten lukujen neliöjuuret geometrisesti

- Kaikille luonnollisten lukujen juurille ei vielä tänäkään päivänä saada tarkkaa numeerista arvoa laskimella
- Kuitenkin jo antiikissa osattiin konstruoida kaikkien luonnollisten lukujen neliöjuuret geometrisesti



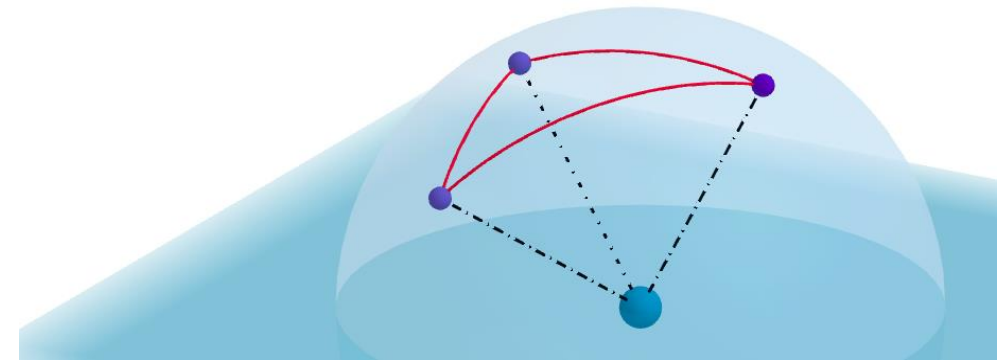
Klassinen ongelma: Voidaanko luvun π neliöjuuri tuottaa geometrisesti?

- Lukua $\sqrt{\pi}$ ei pystytty antiikissa konstruoimaan geometrisesti, sitkeistä yrityksistä huolimatta
- Tämä oli ympyrän neliöimisenä tunnettu klassinen ongelma: *Voidaanko ympyrästä tehdä pelkkää harppia ja viivainta käyttäen neliö, jolla on sama pinta-ala kuin ympyrällä?*
- *Ympyrän neliöiminen* todistettiin mahdottomaksi tehtäväksi vuonna 1882



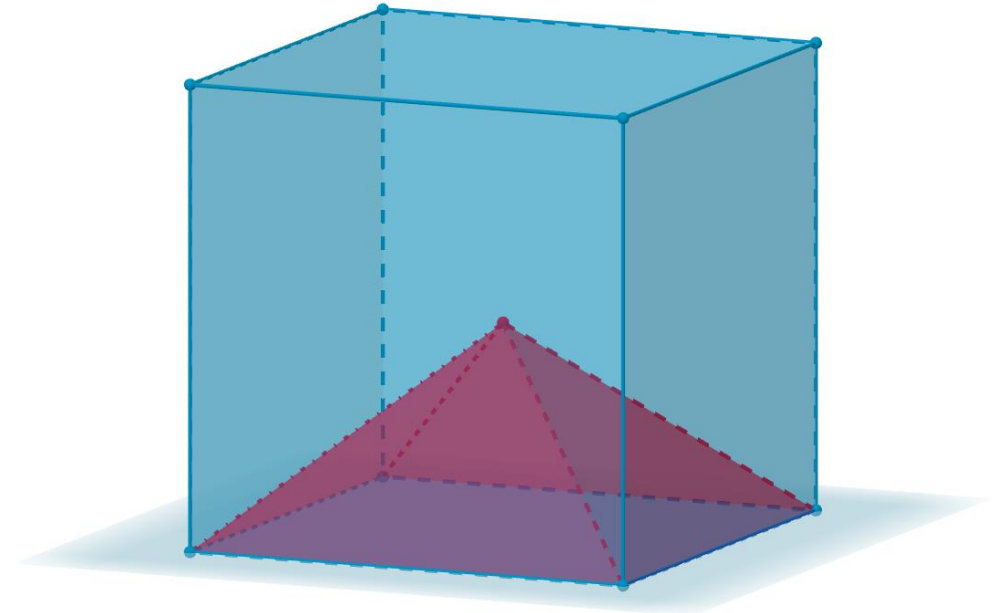
Avaruuskappaleiden tilavuuksia, pinta-aloja ja muotoja

Viidennessä osassa ihmetellään pallon ja sylinterin sekä pyramidin ja kuution tilavuuksien ja pinta-alojen välisiä suhteita, ja tutustutaan Platonin kappaleisiin



Pyramidi ja kuutio (Eudoksos)

- Montako pyramidia kuutioon mahtuu?

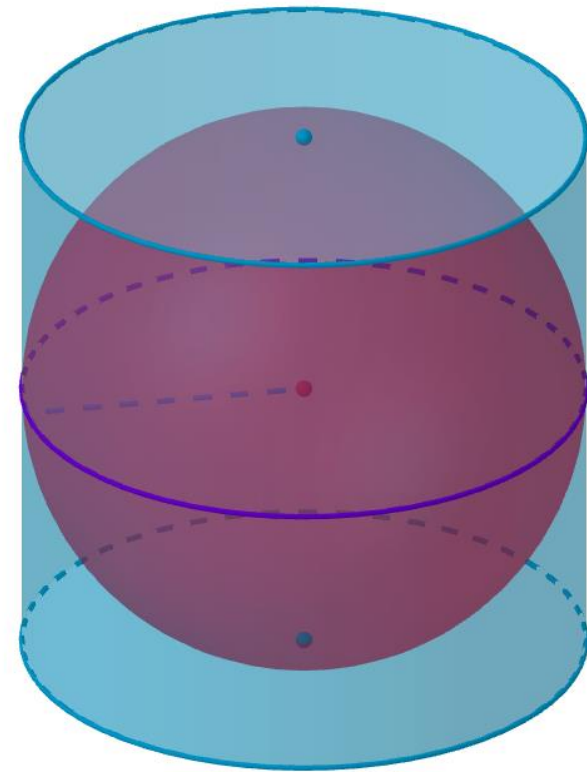


Pallon ja kartion tilavuuksien ja pinta-alojen suhteet (Arkhimedes)

300 e.a.a

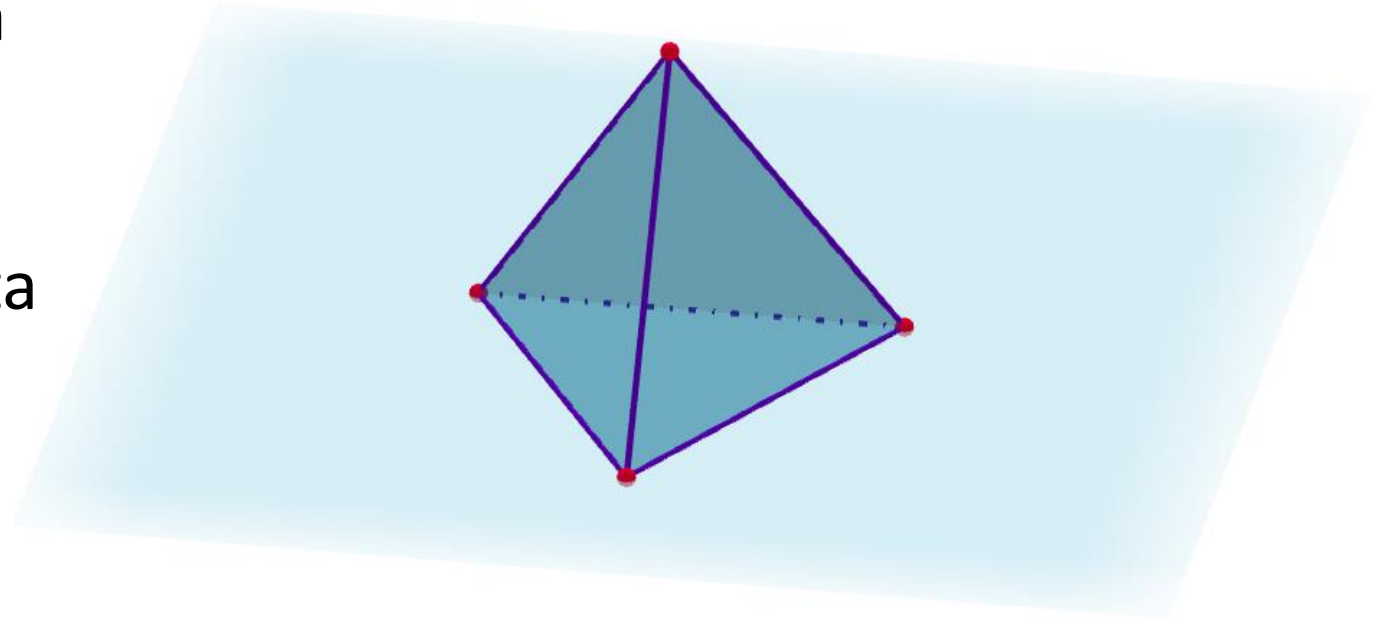
Arkhimedeksen tuloksia:

- Pallon pinta-ala on neljä kertaa lilareunaisen ympyrän pinta-ala
- Pallon pinta-ala on kaksi kolmasosaa (suljetun) sylinterin pinta-alasta
- Pallon tilavuus on kaksi kolmasosaa (suljetun) sylinterin tilavuudesta



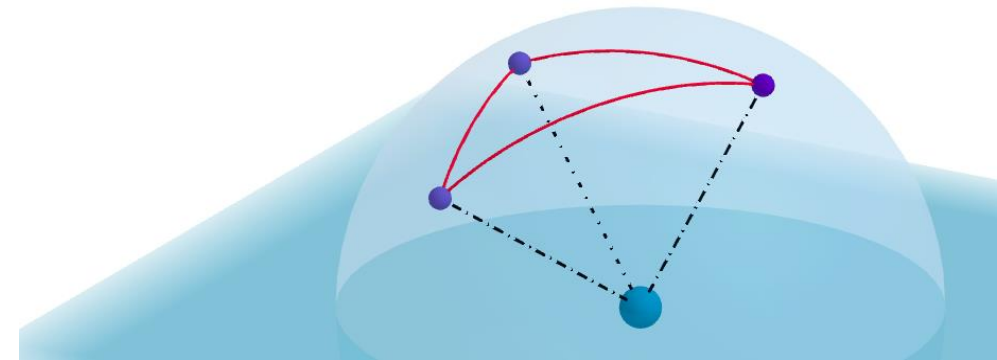
Platonin kappaleet

- Platonin kappaleiden sivut ovat yhteneviä säännöllisiä monikulmioita
- Platonin kappaleiden kulmissa kohtaa yhtä monta sivua
- Platonin kappaleita on täsmälleen viisi erilaista



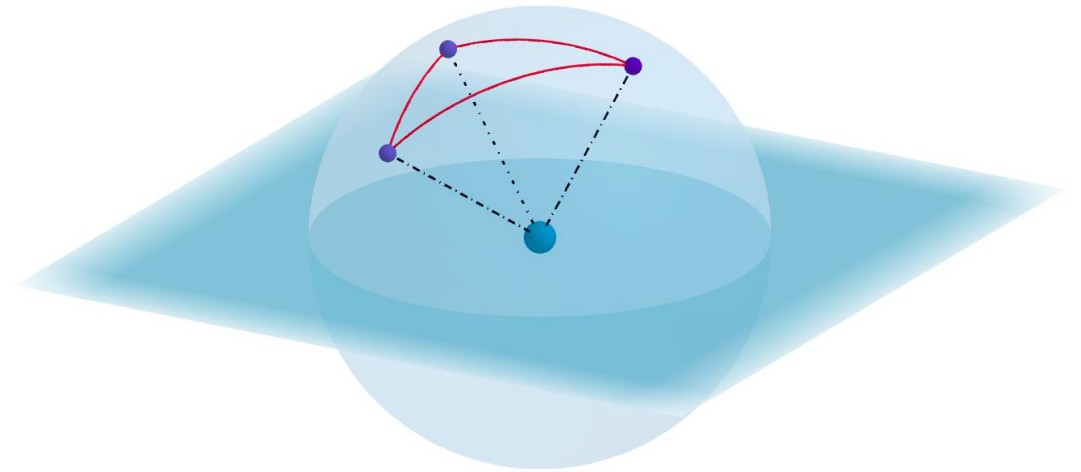
Kolmioita ympyrässä

Kuudennessa osassa pysähdytään trigonometrian syntyyn johtaneiden kysymysten ja oivallusten ääreen



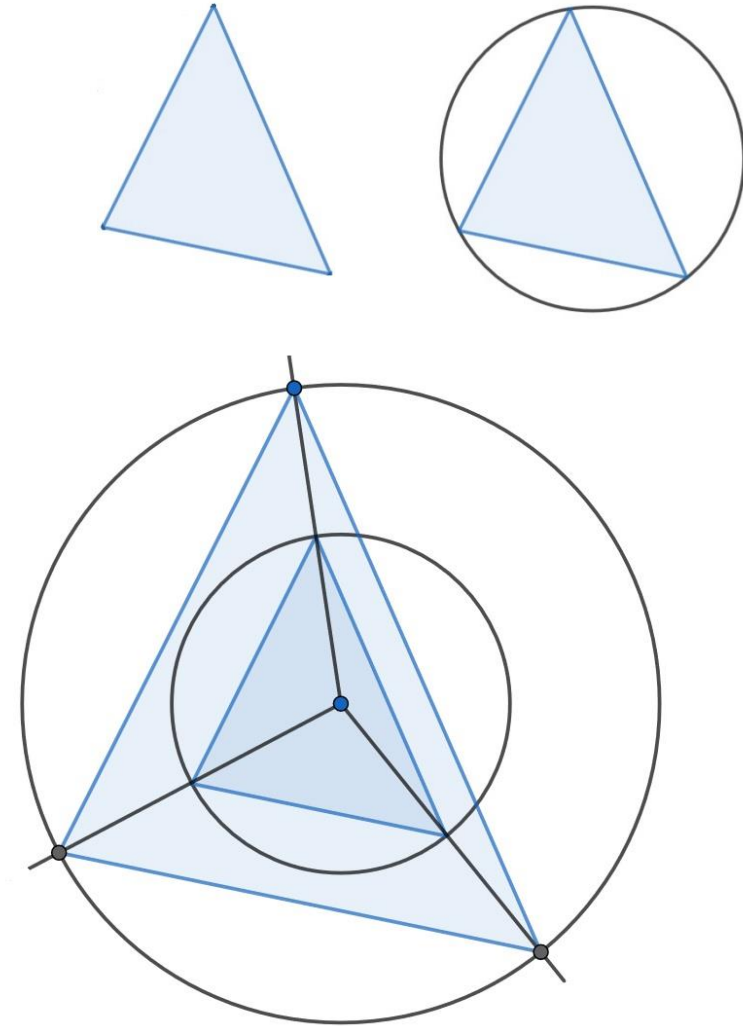
Tähtitaivas ja trigonometria

- Trigonometria sai syntynsä antiikissa pimeän tähtitaivaan ihmettelystä ja se kehittyi pitkälle yhdessä tähtitieteen kanssa Ptolemaioksen töissä
- Ptolemaioksen maakeskisessä maailmankuvassa taivas kaareutui maan yllä ja taivaankappaleet olivat pisteitä pallonkuorilla



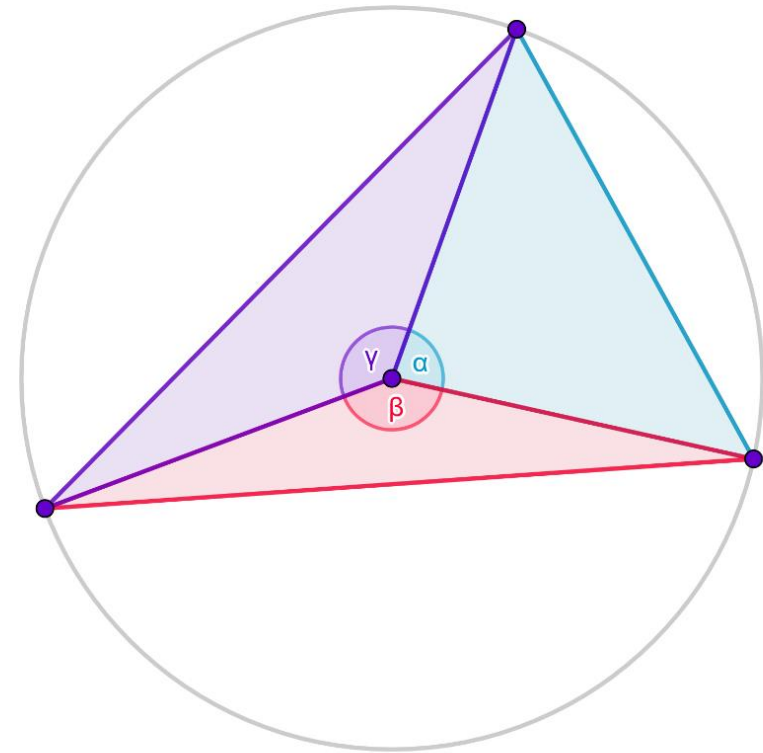
Trigonometriaa tasossa -kolmiot ja ympyrä

- Kolmion trigonometriset ominaisuudet, eli sivujen väliset suhteet ovat samat kahdella yhdenmuotoisella kolmioilla
- Jokaisen kolmion ympäri voidaan piirtää ympyrä niin, että kolmion kärjet ovat ympyrän kehällä
- Tällöin kolmion sivuista tulee ympyrän jäniteitä
- Standardiksi valitun ympyrän, kuten yksikköympyrän, sisälle voidaan piirtää minkä tahansa kolmion kanssa yhdenmuotoinen kolmio, jonka kärjet ovat ympyrän kehällä



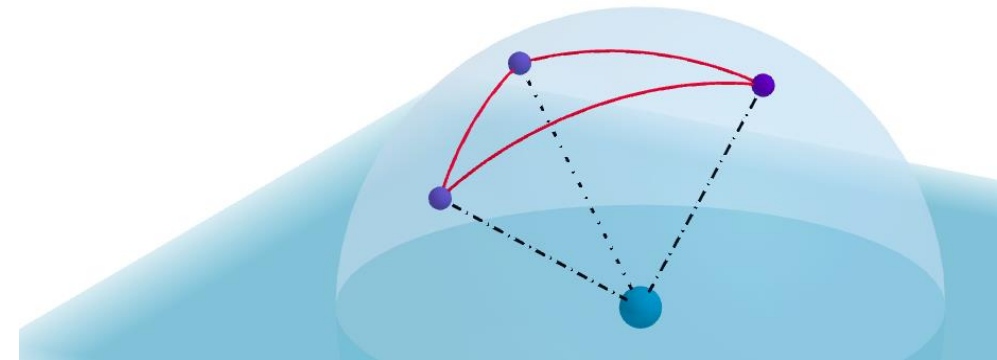
Ensimmäinen trigonometrinen taulu (Hippharkos)

- Hippharkos kirjasi trigonometrisia tutkimuksiaan varten taulukkoon kahtakymmentä keskuskulmaa vastaavat jänteen pituudet erään ympyrän suhteen
- Taulukon avulla voidaan selvittää sini kulmalle, joka on puolet taulukossa esiintyvistä keskuskulmista. Miten?



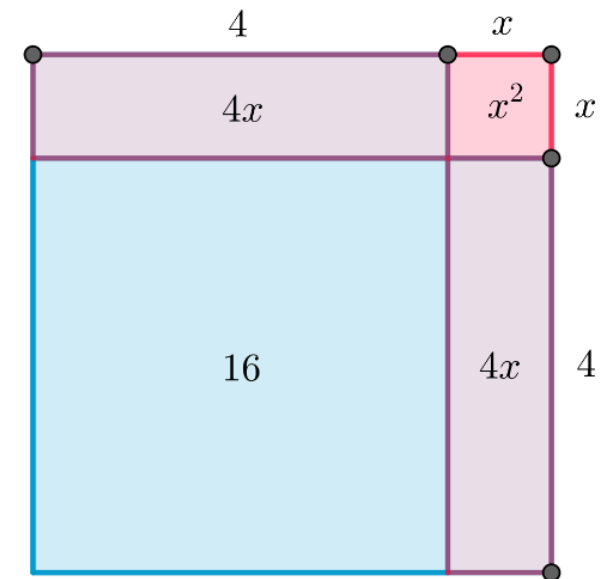
Yhtälöiden ratkaisemista algebran säännöillä

Seitsemännessä osassa etsitään yhtälöille ratkaisuja algebran avulla ja täydennetään toisen asteen yhtälö neliöksi



Toisen asteen yhtälön täydentäminen neliöksi

- Neliöksi täydentämällä toisen asteen yhtälöstä tuli pinta-aloja koskeva yhtälö, joka oli luonnollinen jo antiikissa
- Mitä ratkaisuja yhtälölle $(x + 4)^2 = 25$ saatiin antiikissa?



$$x^2 + 8x = 9$$

$$\Rightarrow (x + 4)^2 = 25$$

Diophanteen yhtälöt

- Antiikissa yhtälöille etsittiin vain kokonaisluku (ja murtoluku) arvoisia ratkaisuja. Miksi?
- Tällaisia yhtälöitä kutsutaan nykyään Diophanteen yhtälöiksi
- Diophantos kutsui toista viereisistä yhtälöistä absurdiksi. Kumpaa?

$$4x + 20 = 4$$

$$4x = 20$$

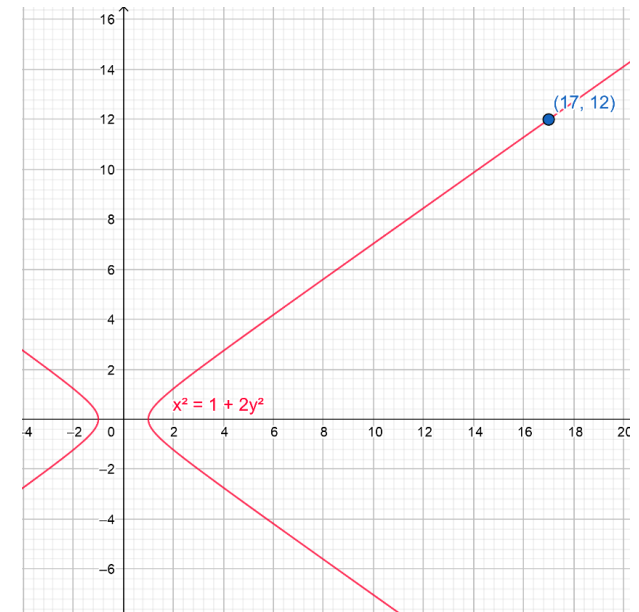
Mihin Diophanteen yhtälöitä sovellettiin?

- Esimerkiksi yhtälön $x^2 = 1 + 2y^2$ ratkaisuksista saatiin murtolukuarvoisia arvioita luvulle $\sqrt{2}$
- Yhtälöllä on ratkaisut $(17, 12)$ ja $(408, 577)$, jotka tuottavat luvulle $\sqrt{2} \approx 1,414214$ arviot kahden ja neljän desimaalin tarkkuudella

$$17/12 \approx 1,416667$$

$$408/577 \approx 1,414216$$

- Intiassa osoitettiin 800-luvulla, että yhtälöllä $x^2 = 1 + 2y^2$ on äärettömästi ratkaisuja

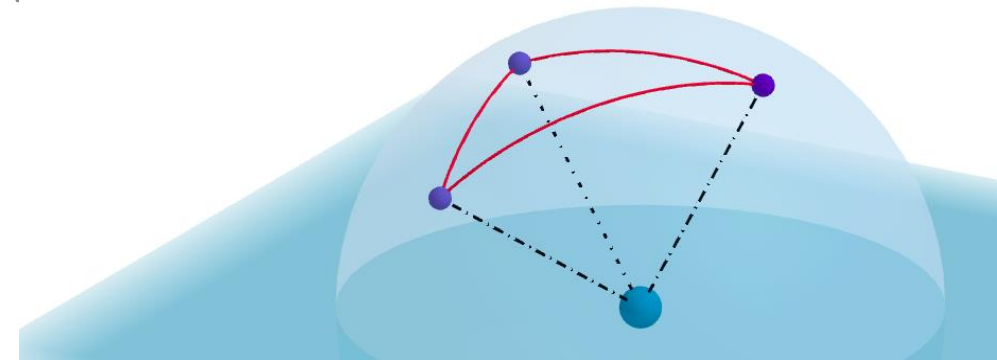


Mistä tulee sana algebra?

Algebra tulee arabian sanasta al-jabr ja se tuli osaksi matematiikkaa 800-luvulla vaikuttaneen persialaisen matemaatikon Al-Khwarizmin arabiankielisen yhtälöiden ratkaisemista käsittelevän kirjan *Al-jabr w'al muqabala* (Palautumisen ja vastustamisen taito) kautta.

Luvut lukusuoralla ja kuviot koordinaatistossa

Kahdeksannessa osassa luvut sijoitetaan lukusuoralle ja geometriset kuviot koordinaatistoon



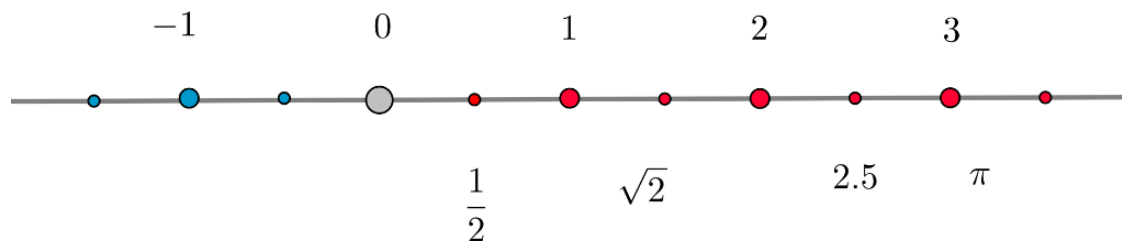
Symbolit ja kaavat

- Milloin matematiikkaa alettiin ilmaista kaavoja ja symboleja käyttäen?
- Matematiikkaa ilmaistiin pitkään tavallista kirjallista kieltä käyttämällä
- Matematiikan symbolinen kieli ja kaavat yleistyivät vasta keskiajan jälkeen 1500-luvulla
- Mitä hyötyjä ja haittoja on matematiikan ilmaisemisessa symbolien ja kaavojen avulla?

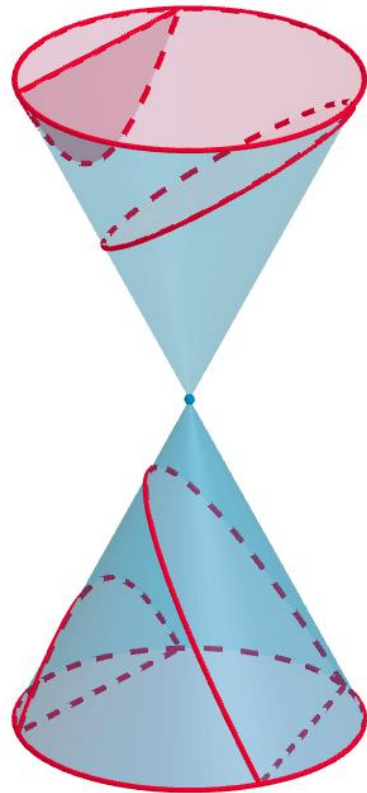
 $+, -, \times$ $=, \leq, \geq$ x, y $f(x)$ x^2, x^3 \sqrt{x}

Luvut lukusuoralle (Descartes)

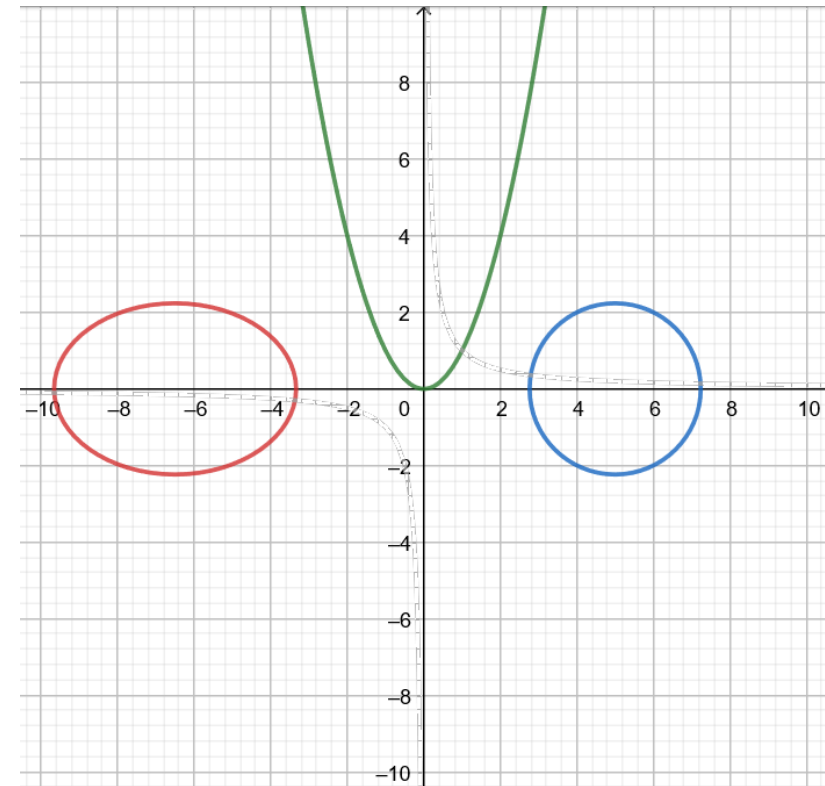
- Lukusuoralle saatiin 1600-luvulla sijoitettua algebrallisesti ja geometrisesti luontevalla tavalla, niin luonnolliset luvut, murtoluvut, irrationaaliluvut, kokonaisluvut kuin desimaaliluvutkin
- Lukusuoralla myös nolla ja negatiiviset luvut saivat modernin geometrisen tulkinnan etäisyyden käsitteen avulla



Kartesinen koordinaatisto

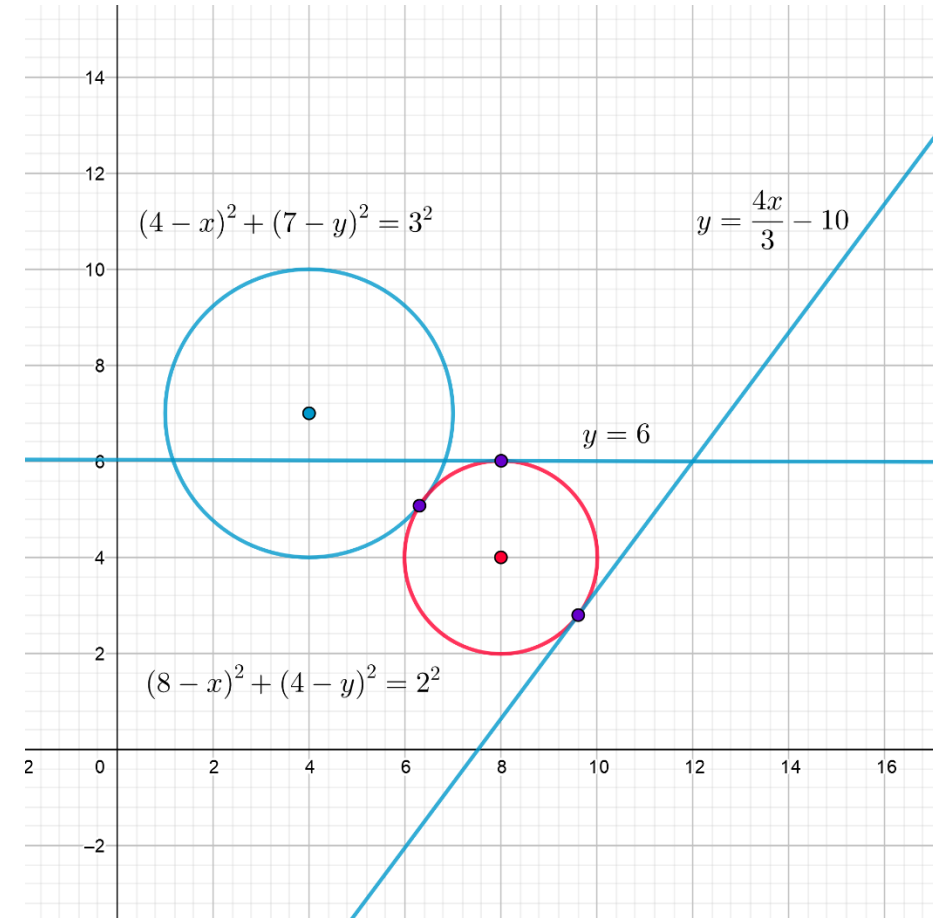


- Ympyrä, suora, ja kaikki klassiset kartioleikkaukset sijoittuivat puolestaan 1600-luvulla luontevasti Descartesin esittelemään karteesiseen tasokoordinaatistoon
- Klassisista kartioleikkauksista tuli kahden muuttujan polynomiyhtälöiden kuvaajia



Analyttinen geometria (Descartes 1600-luku)

- Analyttisen geometrian keinoin monet klassiset geometrian tulokset saivat uuden analyttisen todistuksen
- Descartes antoi esimerkiksi analyttisen ratkaisun klassiselle Apolloniuksen ongelmalle, jossa tehtävänä on määrittää kaikki ympyrät, jotka sivuavat kolmea annettua geometrista objektia



Kiitos!

