

VÄITELLEN LISÄÄ MATIKKAPUHETTA LUOKKAAN!

Päivi Portaankorva-Koivisto

Tämä materiaali on tuotettu osana LUMATIKKA-täydennyskoulutusohjelmaa.
Ohjelman toteutuksesta vastaa LUMA-keskus Suomi -verkosto
yhteistyökumppaneineen. Ohjelman rahoittaa Opetushallitus.



VÄITELLEN LISÄÄ MATIKKAPUHETTA LUOKKAAN

Päivi Portaankorva-Koivisto, Helsingin yliopisto

Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten pitkittäisarvioinnissa, vuosina 2005–2012, seurattiin samoja oppilaita kolmannelta luokalta yhdeksännelle luokalle. Tutkimuksessa havaittiin, että opetuksessa käytettävistä työtavoista hyödyllisiä olivat sellaiset, joissa oppilaat neuvovat toisiaan ja selittävät ratkaisujaan toisille oppilaille. Nämä näyttivät parantavan oppimista sekä niiden oppilaiden kohdalla, jotka omaksuivat nopeasti asioita, että niiden, joiden oppiminen oli hitaampaa. Lisäksi havaittiin, että yhteistoiminnalliset opetusmenetelmät tuottivat hyviä tuloksia sekä osaamisen että asenteiden suhteen, ja näin oli erityisesti poikien kohdalla. Väittely on eräs tapa kytkeä yhteen sekä selittäminen että yhteistoiminnallisuus.

Lukiolaisilta edellytetään, että he kykenevät rakentamaan päteviä perusteluja ja arvioimaan toisten päättelyä. Näitä taitoja tulisi hallita sekä suullisesti että kirjallisesti. Väitellessä jokainen saa mahdollisuuksia kehittää ja yhdistellä ideoitaan ja keksiä esimerkkejä perusteluidensa tueksi tai vastaväitteitä kumotakseen toisen perustelun. Väittely eroaa myös selvästi perinteisestä ”vain opettaja ja oppikirja edustavat oikeaa tietoa” ajattelusta, sillä väitellessä oikeaa tietoa muodostetaan yhteisöinä. Jotta jokainen voisi harjaannuttaa perustelutaitojaan, voidaan jossain vaiheessa kurssia pitää väittelytuokio.

MITEN VÄITTELYÄ VOISI TOTEUTTAA?

Väittelyä voidaan tarkastella kahdella tavalla. Se voi olla retorista, jolloin tavoitteena on suostutella kaikin mahdollisin keinoin kuuntelija hyväksymään väitöksen. Tai se voi olla dialogista, jolloin pyritään siihen, että keskustelijoiden kesken syntyy jokin yhteinen, moniääninen, näkemys siitä, miten eri näkemykset suhteutuvat toisiinsa. Molemmissa tapauksissa väittelyllä on kolme vaihetta. Aluksi opiskelija tekee joitakin pikaisia oletuksia asiasta. Seuraavaksi hän joutuu vakuuttamaan itsensä siitä, etteivät hänen oletuksensa ole virheellisiä. Lopuksi hänen on löydettävä matemaattisesti pätevä sanallinen perustelu, kaava, teoreema tai esimerkki, jolla vakuuttaa toiset. Kuuntelijoiden tulee myös osata kuunnella huolella ja ymmärtää esitetyt perusteet voidakseen sitten tarpeen tullen keksiä vastaesimerkkejä.

Väittely sopii erityisen hyvin kurssin kertaukseksi, jolloin opiskelijat voivat käyttää kaikkea kurssilla oppimaansa väittelensä tukena. Samalla tulee palautetuksi mieleen kaikki kurssin asiat. Itse väittelyn toteuttamiseen on olemassa monia erilaisia tapoja, joita voit katsella alla olevasta taulukosta.

Väittelytapa	Kuvaus
Mikä ei kuulu joukkoon? tehtävä	Valitse esimerkeistä se, joka ei kuulu joukkoon ja perustele, miksi näin on. Which One Doesn't Belong (www.wodb.ca)
Väitekortit – puolesta vai vastaan	Väitekorkeissa on väitteitä, joista voi joko olla samaa mieltä tai olla eri mieltä tai ehkä jopa molemmat vaihtoehdot voivat perustellusti pitää paikkansa.
Käsittekartta	Väittelyn pohjalla on joko opiskelijoiden itsensä kehittämä tai muualta löydetty käsittekartta, josta heidän tulee selvittää, onko se perustellusti oikein koottu.
Virheellinen tai puutteellinen tehtävänratkaisu	Opiskelijat saavat tutkittavakseen ratkaisun, jossa on tarkoituksella puutteita tai virheitä. Heidän tulee miettiä, miten korjata tai parantaa ratkaisua, ja perustella, miksi näin tulee tehdä.
Sarjakuva	Väittelyn pohjana voi olla jokin hauska sarjakuva. http://www.comicmath.com/calvin-and-hobbes-mathcomics.html
Lehtileike tai video	Väittelyn pohjana on jokin lehtileike, jossa matematiikkaa käytetään tai tulkitaan virheellisesti. https://www.facebook.com/wrongmathematics/
Eri ratkaisutavat	Väittelyn pohjana on kaksi tai useampi tapa ratkaista sama matematiikan ongelma. Opiskelijoiden tulee pohtia käyttötarkoituksia ja perustella, milloin mikin tavoista toimii parhaiten. Esimerkkinä yhtälöparin ratkaisu graafisesti, sijoittamalla tai yhteenlaskemalla.
Väite tai määritelmä	Opiskelijat saavat jonkin väitteen tai määritelmän ja heidän tulee perustella, miksi se pitää paikkansa. Esimerkiksi väite: "Jos luonnollinen luku n on pariton, niin n^2 on pariton."
Ilmiö	Opiskelijoiden tehtävänä on tarkastella jotain ilmiötä, tehdä havaintoja, selittää ja perustella, mitä tapahtuu ja miksi.
Keksikää esimerkki	Opiskelijoiden tulee keksiä esimerkki jostain opitusta käsitteestä tai menetelmästä tai esimerkki, jossa opittu menetelmä ei toimi.

MITÄ OPETTAJAN TULEE HUOMIOIDA?

Opettajajohtoisessa työskentelyssä: anna riittävästi aikaa, jotta opiskelijat voivat muodostaa oman mielipiteensä, kerää taululle yhteenveto (samaa mieltä / eri mieltä / ei kumpaakaan), kirjaa taululle opiskelijoiden perusteluja, pyri siihen, että mahdollisimman monet näkemykset tulevat esille. Lopuksi vetäkää yhteen, mihin lopputulokseen lopulta päädyitte, ja keskustelkaa perusteluiden laadusta ja vakuuttavuudesta.

Opiskelijälähtöisessä työskentelyssä: jaa opiskelijat pienryhmiin, ryhmissä opiskelijat kirjoittavat nimensä pienelle lappuselle, sitten ryhmän jäsenet nostavat vuorollaan nurinpäin olevasta väitekorttipinosta yhden kortin ja lukevat sen ääneen. Lukijan tulee odottaa hetki, jotta kaikki saavat muodostaa mielipiteensä. Sitten jokainen laittaa oman nimilappunsa pöydälle yhtä aikaa. Mikäli he ovat samaa mieltä väitteen kanssa, niin lähelle väitekorttia, ja mikäli ovat eri mieltä väitteen kanssa, niin kauas väitekortista. Näin vältetään se, että jonkun ryhmän jäsenen kanta dominoisi muiden mielipiteitä. Lopuksi ryhmät keskustelevat vastauksista ja hakevat yksimielisyyttä tai erilaisten näkökulmien hyväksymistä. Ryhmätyöskentelyn lopuksi opettaja voi kysyä, mitkä väitteet herättivät eniten keskustelua ja mikä perustelu lopulta oli vakuuttavin.

LUETTAVAA:

Legrand, M. (2001). Scientific debate in mathematics courses. Teoksessa *The teaching and learning of mathematics at university level* (ss. 127-135). Springer, Dordrecht.

Metsämuuronen, J. (2013). Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten pitkittäisarviointi vuosina 2005–2012. *Koulutuksen seurantaraportti*, 4.

Osborne, J., Erduran, S., & Simon, S. (2004). Enhancing the Quality of Argumentation in School Science. *Journal of Research in Science Teaching*, 41(10), 994-1020.

MAB3 VÄITEKORTIT

1. Toimitaan neljän hengen ryhmissä.
2. Jokainen ryhmän jäsen kirjoittaa nimensä pienelle lapulle.
3. Ryhmän jäsenet nostavat vuorollaan nurinpäin olevasta väitekorttipinosta yhden väitteen ja lukevat sen ääneen. Sitten lukija odottaa hetken ja huutaa "hep" tms.
4. Silloin kaikki laittavat oman nimensä pöytään:
 - Jos olet sitä mieltä, että kortin väite on tosi, laita nimilappusi väitteen lähelle.
 - Jos olet sitä mieltä, että kortin väite on epätosi, laita nimilappusi kauas väitteestä.
5. Lopuksi keskustellaan vastauksista ja haetaan yksimielisyyttä tai erilaisten näkökulmien hyväksymistä.

Ristikulmien puolittajat muodostavat keskenään yhtä suuren kulman kuin vieruskulmien puolittajat.

Tasakylkisen kolmion huippukulma on aina terävä kulma.

Kolmion sivut ovat 5 cm, 5 cm ja 6 cm. Kolmion pinta-ala voidaan laskea $A_{kolmio} = \frac{5 \cdot 5}{2}$.

Kolmion sivut ovat 6 cm, 8 cm ja 10 cm. Kolmion kulmat voidaan ratkaista trigonometriaa käyttämällä.

Neliö ei ole suunnikas.

Ympyrällä on kaksi tangenttia.

Lieriön tilavuus voidaan laskea pohjan ala kertaa lieriön sivun pituus.

Sekä neliön lävistäjät että vinoneliön lävistäjät ovat keskenään yhtä pitkät.

MAB6 VÄITEKORTIT

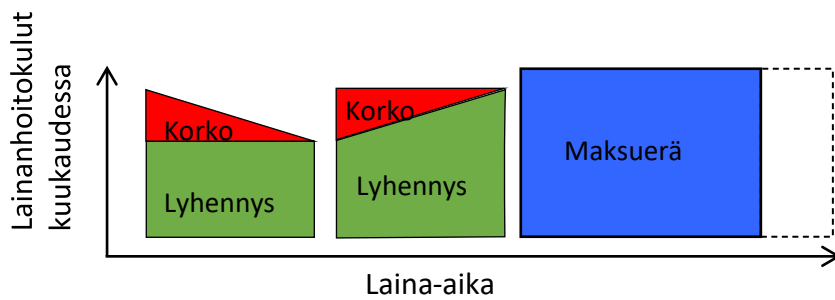
1. Toimitaan neljän hengen ryhmissä.
2. Jokainen ryhmän jäsen kirjoittaa nimensä pienelle lapulle.
3. Ryhmän jäsenet nostavat vuorollaan nurinpäin olevasta väitekorttipinosta yhden väitteen ja lukevat sen ääneen. Sitten lukija odottaa hetken ja huutaa "hep" tms.
4. Silloin kaikki laittavat oman nimensä pöytään:
 - Jos olet sitä mieltä, että kortin väite on tosi, laita nimilappusi väitteen lähelle.
 - Jos olet sitä mieltä, että kortin väite on epätosi, laita nimilappusi kauas väitteestä.
5. Lopuksi keskustellaan vastauksista ja haetaan yksimielisyyttä tai erilaisten näkökulmien hyväksymistä.

Mikaelille on edullisempaa, jos hän saa isältään Mikolta 60 000 € lahjana kuin jos hän saa saman 60 000 € perintönä.

Talletuksen korko riippuu ainoastaan korkokannasta.

Koronkorko noudattaa eksponentiaalista mallia.

Koron heilahtelut vaikuttavat eri lainatyyppien
lainoihin samalla tavalla.



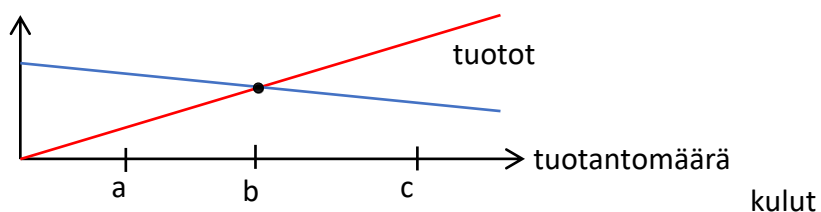
Kryptovaluutat ovat yhtiöiden tai valtioiden luomia
virtuaalivaluuttoja. Niiden arvo riippuu
tarjonnasta.

Kuluttajien ostovoimaan voidaan vaikuttaa vain
yleistä hintatasoa muuttamalla.

Tutki vaihtokurssin muutosta. Sen mukaan euro
devalvoitui suhteessa Englannin puntaan.

14.11.2018	1 EUR	0,870 GBP
3.1.2019	1 EUR	0,903 GBP

Yritys tekee nollatuloksen (a), yrityksen tulos on
voitollinen (b) ja yritys tuottaa tappiota (c)



MAA4 VÄITEKORTIT

1. Toimitaan neljän hengen ryhmissä.
2. Jokainen ryhmän jäsen kirjoittaa nimensä pienelle lapulle.
3. Ryhmän jäsenet nostavat vuorollaan nurinpäin olevasta väitekorttipinosta yhden väitteen ja lukevat sen ääneen. Sitten lukija odottaa hetken ja huutaa "hep" tms.
4. Silloin kaikki laittavat oman nimensä pöytään:
 - Jos olet sitä mieltä, että kortin väite on tosi, laita nimilappusi väitteen lähelle.
 - Jos olet sitä mieltä, että kortin väite on epätosi, laita nimilappusi kauas väitteestä.
5. Lopuksi keskustellaan vastauksista ja haetaan yksimielisyyttä tai erilaisten näkökulmien hyväksymistä.

Vektori on suure, jolla on suunta.

Yhdensuuntaiset vektorit ovat aina samansuuntaisia.

Jos drone lentää tyynellä ilmalla 50 km/h ja alkaa tuulla 20 m/s, näillä tiedoilla voi laskea dronen nopeuden.

Seuraavat laskutoimitukset ovat päteviä
vektoreille

$$t(s\vec{a}) = ts(\vec{a})$$

$$t(\vec{a} + \vec{b}) = t\vec{a} + t\vec{b}$$

$$(t + s)\vec{a} = t\vec{a} + s\vec{a}.$$

Vektoreiden $\vec{u} = 4\vec{i}$ ja $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$ summavektorin
pituus on 6.

Vektorit $\vec{u} = 5\vec{i}$ ja $\vec{v} = 8\vec{i} + 4\vec{j}$ muodostavat
tasakylkisen kolmion kaksi sivua.

Vektoreiden pistetulo on vektori.

Suunnikkaan lävistäjät muodostavat suoran
kulman.

MAA5 VÄITEKORTIT

1. Toimitaan neljän hengen ryhmissä.
2. Jokainen ryhmän jäsen kirjoittaa nimensä pienelle lapulle.
3. Ryhmän jäsenet nostavat vuorollaan nurinpäin olevasta väitekorttipinosta yhden väitteen ja lukevat sen ääneen. Sitten lukija odottaa hetken ja huutaa "hep" tms.
4. Silloin kaikki laittavat oman nimensä pöytään:
 - Jos olet sitä mieltä, että kortin väite on tosi, laita nimilappusi väitteen lähelle.
 - Jos olet sitä mieltä, että kortin väite on epätosi, laita nimilappusi kauas väitteestä.
5. Lopuksi keskustellaan vastauksista ja haetaan yksimielisyyttä tai erilaisten näkökulmien hyväksymistä.

Yhtälö $|a| = |b|$ toteutuu jos ja vain jos luvut ovat yhtä kaukana nolasta eli jos ja vain jos luvut a ja b ovat sama luku.

Käyrän pisteet toteuttavat yhtälön

$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$

Se on erään muuttujan x funktion kuvaaja.

Suorat ovat yhdensuuntaiset jos ja vain jos niillä on sama kulmakerroin.

Suorat $4x - 6y - 12 = 0$ ja $2x + 6y - 30 = 0$ leikkaavat toisensa suorassa kulmassa.

Ympyrän keskipiste on $(1, 1)$ ja sen säde on 1.
Suora $y = 2x + 1$ on ympyrän tangentti.

Yhtälö $y^2 = x - 2y$ esittää vasemmalle aukeavaa paraabelia.

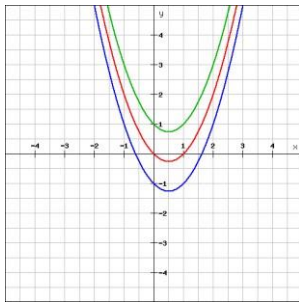
Ympyröiden $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 - 4 = 0$ ja $x^2 + y^2 - 4 = 0$ keskipisteet ovat suoralla, joka kulkee origon kautta.

Suorat $y = 2x + 3$, $y = -x - 1$ ja $y = -4x + 3$ muodostavat tasakylkisen suorakulmaisen kolmion.

MAA9 VÄITEKORTIT

1. Toimitaan neljän hengen ryhmissä.
2. Jokainen ryhmän jäsen kirjoittaa nimensä pienelle lapulle.
3. Ryhmän jäsenet nostavat vuorollaan nurinpäin olevasta väitekorttipinosta yhden väitteen ja lukevat sen ääneen. Sitten lukija odottaa hetken ja huutaa "hep" tms.
4. Silloin kaikki laittavat oman nimensä pöytään:
 - Jos olet sitä mieltä, että kortin väite on tosi, laita nimilappusi väitteen lähelle.
 - Jos olet sitä mieltä, että kortin väite on epätosi, laita nimilappusi kauas väitteestä.
5. Lopuksi keskustellaan vastauksista ja haetaan yksimielisyyttä tai erilaisten näkökulmien hyväksymistä.

Integraalifunktiolla saadaan selville, kuinka monta villiä tiikeriä on jäljellä, kun kannan muutosnopeus tiedetään.

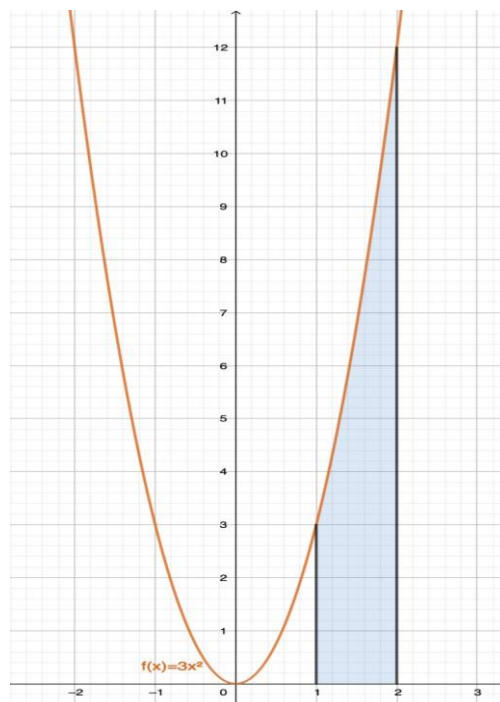


Käyrien muutosnopeus ei ole sama.

Funktiolla $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ ja $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x$ on sama derivaattafunktio.

Funktion $f(x) = 6x + 3$ integraalifunktiot muodostavat käyräparven.

Paraabeli $f(x) = 3x^2$ ja x -akselin väliin jäävän siniseksi värjätyyn alueen pinta-ala on 6.



Pitää paikkansa, että

$$\int_0^1 2e^2 dx = 2e - 2$$

Pyörähdyskappaleen poikkileikkaus on aina ympyrä.

Pyörähdyskappale, jonka tilavuus on

$$\int_1^3 \pi f(x)^2 dx$$

on kartio.

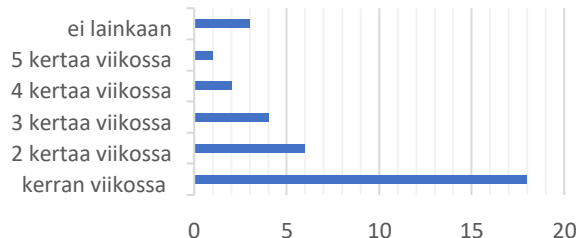
MAA10 VÄITEKORTIT

1. Toimitaan neljän hengen ryhmissä.
2. Jokainen ryhmän jäsen kirjoittaa nimensä pienelle lapulle.
3. Ryhmän jäsenet nostavat vuorollaan nurinpäin olevasta väitekorttipinosta yhden väitteen ja lukevat sen ääneen. Sitten lukija odottaa hetken ja huutaa "hep" tms.
4. Silloin kaikki laittavat oman nimensä pöytään:
 - Jos olet sitä mieltä, että kortin väite on tosi, laita nimilappusi väitteen lähelle.
 - Jos olet sitä mieltä, että kortin väite on epätosi, laita nimilappusi kauas väitteestä.
5. Lopuksi keskustellaan vastauksista ja haetaan yksimielisyyttä tai erilaisten näkökulmien hyväksymistä.

Seuraavassa aineistossa sekä moodi että keskiarvo ovat yhtä suuret.

1, 1, 6, 3, 1, 4, 3, 3, 2

Harrastaa liikuntaa

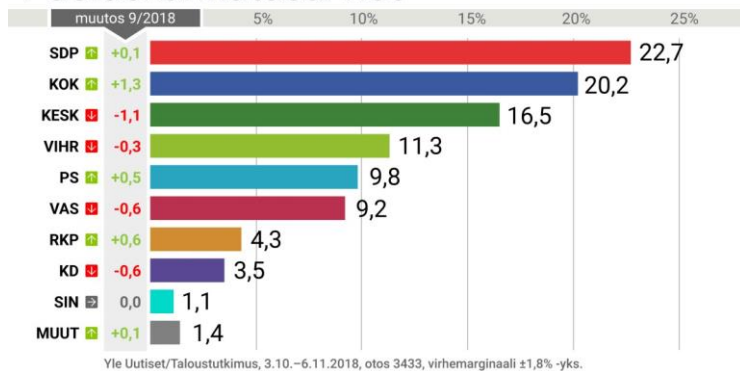


Kaaviosta näkee helposti, että puolet haastatelluista harrastaa liikuntaa kerran viikossa.

Sekä ylioppilastutkinnon kokeiden arvosanat

L, E, M, C, B, A ja I, että ylioppilastodistuksen arvosanat ovat molemmat diskreettejä muuttujia.

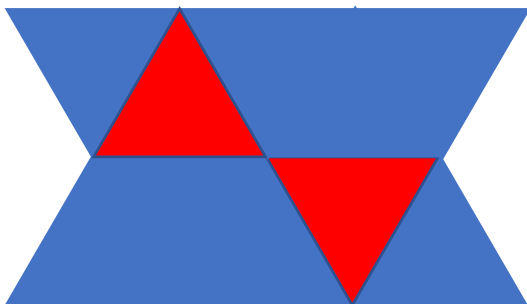
Puoluekannatusarviot



Kannatusmittauksen perusteella voidaan sanoa, että SDP on suosituin puolue.

Lähde: YLE Uutiset
8.11.2018
Virhemarginaali +/-
1,8 %-yks.

Tapahtuman ”sataa koko illan” vastatapahtuma on ”illalla ei sada lainkaan”.



Pelissä pelaajan tulee osua punaiselle alueelle. Se toteutuu 20 % todennäköisyydellä.

Kaksoset Mikko ja Minella myöhästyvät koulusta kerran viikossa. He myös saattavat unohtaa matematiikan kirjansa kotiin ja näin tapahtuu kerran kahdessa viikossa. Todennäköisyys, että he tulevat myöhässä tunnille ja ovat unohtaneet kirjansa on 5 %.

Jääkaapissa on maitoa 70 % todennäköisyydellä ja tuoremehua 40 % todennäköisyydellä. Voidaanko sanoa, että jos nyt marssin jääkaapille saan juotavaa todennäköisyydellä, joka lasketaan $0,7 + 0,4$?