

Ymmärrystä murtolukuihin, osa 1

Teksti: Heidi Filppa ja Emilia Manninen, Oulun yliopisto

Tässä tekstissä kerromme murtolukukäsitteen ymmärtämisen kannalta keskeisistä kohdista, murtoluvun eri merkityksistä ja erilaisista murtolukujen visuaalisista esitystavoista.

Heidi ja Emilia ovat lounaalla pitseriassa. Heidi on syönyt pitsastaan kaksi kolmasosaa ja Emilia on syönyt kokonaan oman pitsansa. Kumpi meistä on syönyt enemmän pitsaa?

Näiden tietojen perusteella ei oikeastaan voida sanoa varmasti, kumpi söi enemmän. Heidi saattoi tilata perhepitsan, josta siis söi kaksi kolmasosaa. Emilia on voinut tilata lasten pitsan, joka voi olla pienempi kuin Heidin syömä osuus perhepitsasta. Jos ei tiedetä, minkä kokoiset pitsat on tilattu, ei voida varmasti sanoa, kumpi on syönyt enemmän. Murtolukujen avulla voidaan ilmaista suhteellinen osuus kokonaisuudesta, ja on oleellista aina määritellä mistä kokonainen muodostuu.

Pohjustetaan murtoluvun käsitettä jakamalla kokonainen yhtä suuriin osiin.

POPS2014, 1–2

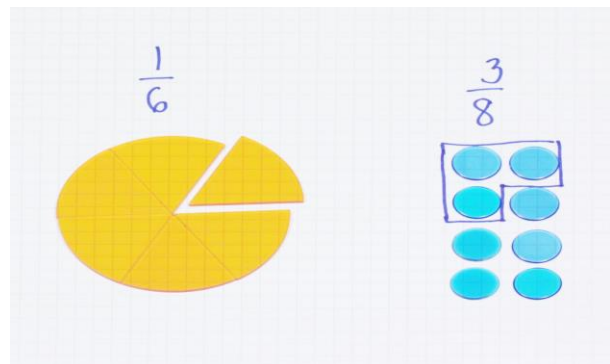
Opitaan murtoluvun käsite – – .

POPS2014, 3–6

Murtoluvun monta merkitystä

Murtoluku-käsite pitää sisällään monta eri merkitystä. Yksi merkityksistä on **osa joukosta tai kokonaisuudesta**. Yleensä tähän liitetään piirretty kuva tai konkreettinen väline, josta on korostettu osa murtoluvun mukaisesti.

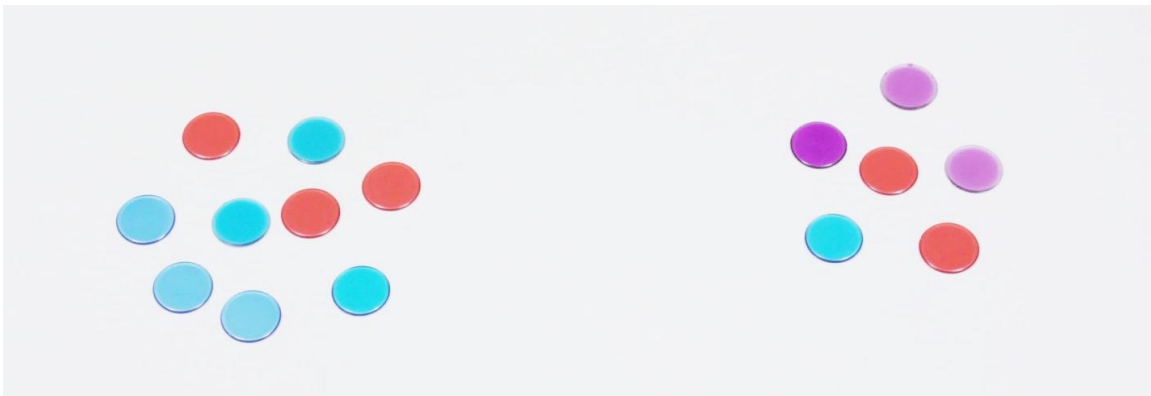
Murtoluvun voi ajatella myös **jakolaskuna**. Yksi neljäsosa on yhtä suuri kuin yksi jaettuna



Kuva 1: Murtoluku osana joukosta tai kokonaisuudesta.

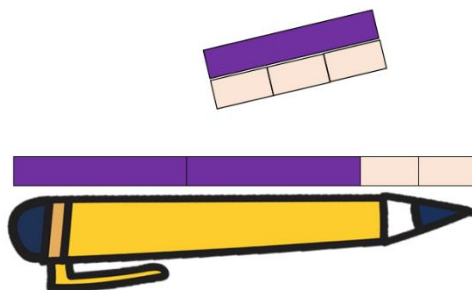
neljällä. Tähän voidaan liittää murtoluvun tai jakolaskun eri merkintätavat: $1:4$ ja $\frac{1}{4}$.

Kolmas murtoluvun merkitys on **suhde**. Murtoluvulla yksi kolmasosaa voidaan tarkoittaa punaisten nappien suhdetta sinisiin nappeihin tai punaisten nappien suhdetta kaikkiin nappeihin. On tärkeää määritellä, millaisesta tilanteesta on kyse. Usein suhdetta merkitään käyttämällä kaksoispistettä, kuten yhden suhde kolmeen tai yhden suhde kymmeneen tuhanteen. Mehutiivistepulloissa ja kartoissa voi nähdä käytettävän näitä merkintöjä. Merkintä $1:7$ mehupullossa tarkoittaa siis, että tiivistettä laitetaan yksi osa ja vettä seitsemän osaa. Osia on siis yhteensä kahdeksan, joka vastaa yhtä kokonaista. Tässä tapauksessa suhteen avulla ilmoitetaan mehutiivisteiden suhde veteen nähden, ei mehutiivisteiden osuutta valmiista mehusta.



Kuva 2: Murtoluvun merkitys suhteena.

Murtoluvun voi ajatella myös **mittana tai pisteinä lukusuoralla**. Otetaan esimerkkinä tilanne, jossa halutaan mitata, kuinka pitkä tämä kynä on. Käytetään mittavälineenä värisauvaa. Huomataan, että kynä on kahden värisauvan mittainen ja hieman yli.



Kuva 3: Murtoluku mittana

haluta pyöristää ylöspäin kolmeksi värisauvaksi vaan halutaan ilmaista mittaustulos tarkemmin. Mittayksikkö eli tässä tapauksessa värisauva jaetaan pienempiin yhtä suuriin osiin jäljelle jääneen kynän pituuden mukaan. Todetaan, että jäljelle jäänyt osuus on yhtä pitkä kuin kaksi kolmasosaa värisauvasta, ja mittaustulokseksi saadaan siis kaksi kokonaista ja kaksi kolmasosa

värisauvaa. Tämän murtoluvun merkityksen ymmärtäminen edesauttaa mittayksikkömuunnoksissa.

Murtoluku toimii myös **operaattorina**, esimerkiksi kun "otetaan puolet jostakin". Tämähän tarkoittaa puolikkaalla eli $\frac{1}{2}$ kertomista. Vastaus voi olla kokonaisluku tai murtoluku: puolet kuudesta on yhtä kuin kolme, eli $\frac{1}{2} \cdot 6 = 3$, mutta puolet murtoluvusta $\frac{1}{2}$ on $\frac{1}{4}$.

Jos kaikkia murtoluvun eri merkityksiä ei hallita, jää murtoluvun käsitteen rakentuminen vajaaksi ja se aiheuttaa haasteita, kun murtoluvun eri merkityksiä pitäisi osata hyödyntää.

Murtoluvun kirjoitusasu poikkeaa kokonaislukujen kirjoitusasusta ja oppilaat voivat ajatella osoittajan ja nimittäjän erillisinä lukuina, vaikka tosiasiasa on kyse kahden luvun suhteesta ja siis oikeastaan yhdestä luvusta. Murtolukuihin eivät päde monet muutkaan kokonaislukuihin liittyvät ominaisuudet, joten sekin tuo omat haasteensa.

Murtolukumallit

Murtolukuja on ehdottoman tärkeää esittää konkreettisesti ja visuaalisesti monipuolisesti eri tavoin. Murtolukumalleja on kolme: alue-, pituus- ja joukkomalli.

Aluemalleista tyypillisin on ympyrän muotoinen ja se on erittäin käyttökelpoinen. On kuitenkin tärkeää, että oppilaat huomaavat, että minkä tahansa muodon voi jakaa yhtä suuriin osiin. Murtokakkujen lisäksi erilaiset rakennuspalikat ja ruutupaperi ovat hyviä välineitä havainnollistamaan murtolukuja. Yksi hyvä harjoitus, jossa voi kartoittaa oppilaan ymmärrystä murtoluvusta ja aluemallista, on etsiä kuvioden joukosta sellaiset, jotka on jaettu oikein neljäsosiin.



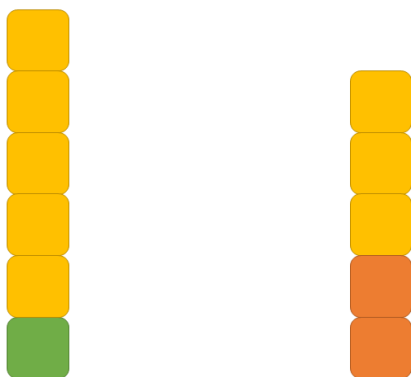
Kuva 4: Keltainen sauva on puolet eli yksi kahdesosa oranssista sauvasta, ja yksi keltainen sauva voidaan jakaa viidesosiin valkoisia sauvoja käyttämällä.

Pituusmallissa vertaillaan alueiden sijaan pituuksia. Lukusuora on hyvä väline siihen ja sen käyttö auttaa oppilasta ymmärtämään murtoluvun lukuna ja siten tukee murtoluvun käsitteen rakentumista. Värisauvojen käyttö auttaa myös kokonaisen käsitteen hahmottamisessa: mikä tahansa sauva voi olla kokonainen ja se voidaan jakaa osiin pienempien sauvojen avulla.

Kuvassa neljä keltainen sauva on puolet eli yksi kahdesosa oranssista sauvasta, ja yksi keltainen sauva voidaan jakaa viidesosiin valkoisia sauvoja käyttämällä. Erityisesti pituusmalleja tulisi hyödyntää enemmän opetuksessa, sillä niiden käytöllä on havaittu olevan suuri merkitys murtolukujen ymmärtämisessä. Pituusmalleja voidaan hyödyntää arkielämän konteksteissa, kuten mittaamisessa ja musiikissa, joissa murtolukuja usein käytetään.

Joukkomallissa kokonainen muodostuu jostakin rajatusta joukosta, useista objekteista, vaikkapa tietyn luokan oppilaista tai irtokarkkipussin kärkeistä. Yksi joukon objekti on siis yksi osa kokonaisesta joukosta. Joukkomallissa osat voivat olla fyysisesti eri kokoisia tai näköisiä, kuten vaikkapa luokan oppilaat tai pussin karkit. Joukkomallin hyödyntäminen auttaa monien tosielämän ja murtolukuihin liittyvien yhteyksien ymmärtämisessä.

Kun jakamisen periaate hallitaan, voidaan jo alkuopetuksessa tutustua murtoluvun käsitteeseen jakamalla yksi kokonainen yhtä suuriin osiin. Oppilaalle tarjotaan kokemuksia osiin jakamisesta konkreettisten välineiden avulla, esimerkiksi leikkaamalla pitkän langan neljän oppilaan kesken siten, että jokainen saa yhtä pitkän pätkän lankaa, tai jakamalla kartonkiarkki kuudelle oppilaalle yhtä suuriksi osiksi. On tärkeää painottaa, että jokainen saa



Kuva 5: Yksi kokonainen

yhtä paljon eli että osat ovat aina yhtä suuria. Ei ole tarvetta kiirehtiä murtoluvun matemaattiseen merkintään symbolikielellä, vaan pohjustaa käsitettä aluksi puhutun eli luonnollisen kielen avulla tukien ja välittömiä kokemuksia tarjoten.

Näissä esimerkeissä voitaisiin käyttää multilink-kuutioita tai mitä tahansa muita rakennuspalikoita, kuten legoja. Aloitetaan murtolukuihin tutustuminen määrittelemällä yksi kokonainen. Tässä on rakennettuna torni

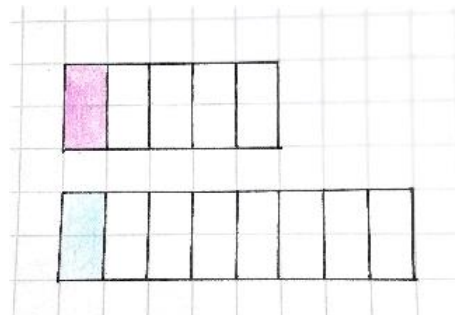
multilink-kuutioista, joka on nyt siis yksi kokonainen ja se muodostuu yhteensä kuudesta kuutiosta. Kuutioista yksi on vihreä ja loput ovat keltaisia. Siis yksi kuudesta on vihreä ja viisi kuudesta ovat keltaisia.

Toinen torni koostuu viidestä kuutiosta, eli nyt yksi kokonainen sisältää viisi kuutiota. Näistä kaksi on oranssia ja kolme keltaisia. Siis kaksi viidestä on oransseja ja kolme viidestä on keltaisia.

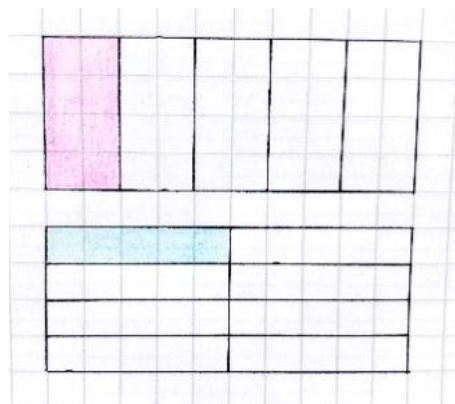
Haastavampana tehtävänä voi olla rakentaa sellainen kuuden kuution torni, jossa yksi kolmasosa on oransseja. Tehtävää voi yhdessä pohtia ja kysyä voidaanko kuuden kuution torni jakaa kolmeen yhtä suureen osaan? Todetaan, että voidaan: yksi osa muodostuu kahdesta kuutiosta. Kuinka monta kuutiota on oransseja, jos tornista yksi kolmesta on oranssi? Yksi kahden kuution osuus eli kaksi kuutiota.

Oppilaat voivat rakentaa itse torneja opettajan ohjeiden mukaan. Oppilaiden on hyvä antaa myös itse rakentaa torneja vapaasti ja niistä voidaan yhdessä keskustella: montako yhtä suurta osaa tornissa on ja kuinka monta samanväristä osaa tornista löytyy. Taitojen karttuessa oppilaat voivat myös tehdä samantyyppisiä tehtäviä toisilleen. Erilaisia torneja voi rakentaa valmiiksi ja pyytää oppilasta etsimään tietyn kriteerin täyttävä torni.

Murtolukujen vertailu



Kuva 6: Kuvan perusteella oppilas saattaisi tehdä johtopäätöksen, että yksi viidesosa ja yksi kahdeksasosa ovat yhtä suuria.

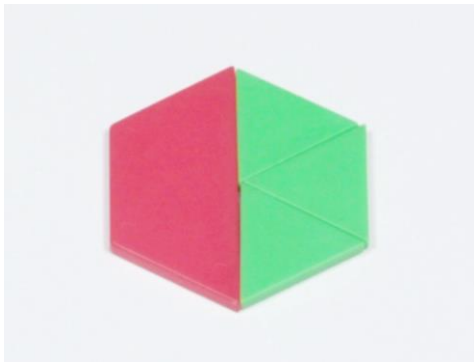


Kuva 7: Kuvassa on kaksi 40 ruudun kokoista aluetta, joka on ylemmässä jaettu viiteen yhtä suureen osaan ja alemmassa kahdeksaan osaan.

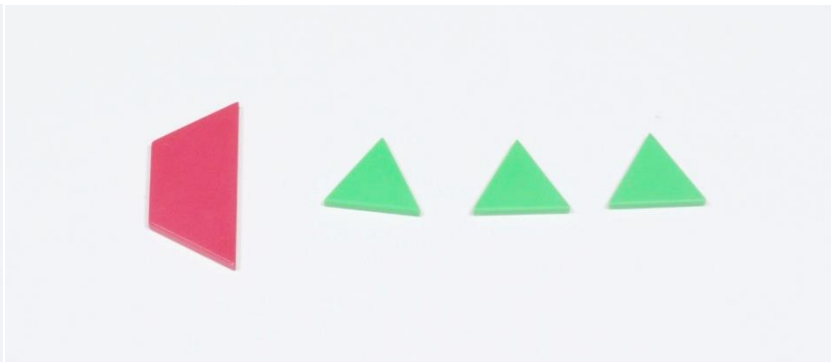
Vertailussa on tärkeää huomata, että kokonaisten täytyy olla yhtä suuret. Kuvan kuusi perusteella oppilas saattaisi tehdä johtopäätöksen, että yksi viidesosa ja yksi kahdeksasosa ovat yhtä suuria. Tämä on tietenkin virheellinen päätelmä, sillä kokonaiset eivät ole yhtä suuria.

Kokonaislukujen ominaisuuksien yleistäminen murtolukuihin tuottaa usein vaikeuksia murtolukujen suuruusvertailussa. Jos oppilas ymmärtää murtoluvun yksi viidesosa kahtena lukuna, yhtenä ja viitenä, hän voi ajatella, että kyseinen murtoluku on pienempi kuin yksi kahdeksasosa, sillä viisi on pienempi kuin kahdeksan. Konkretian ja piirustusten käyttö auttaa jälleen oppilasta tämänkin asian hahmottamisessa. Kuvassa seitsemän on kaksi 40 ruudun kokoista aluetta, joka on ylemmässä jaettu viiteen yhtä suureen osaan ja alemmassa kahdeksaan osaan. Yksi viidesosa koostuu kahdeksasta ruudusta ja yksi kahdeksasosa viidestä ruudusta. Violetti alue on suurempi kuin sininen, joten yksi viidesosaa on suurempi kuin yksi kahdeksasosa.

Toisaalta, kokonainen on myös jaettava yhtä suuriin osiin. Jos pinta-alan sijaan oppilas ajattelee vain lukumäärää, hän voisi päätellä, että kuvan kahdeksan kuusikulmiossa punaisia on yksi neljäsosa ja vihreitä kolme neljäsosaa vaikka todellisuudessa punaisen osuus kuusikulmiosta on puolet eli yksi kahdesosa kuten vihreiden osuuskin on. Jos samoja palasia ajatellaan pinta-alamallin sijaan joukkomallina, palojen koolla ei ole merkitystä vaan ainoastaan niiden lukumäärällä. Tällöin punaisia palasia on yksi neljäsosa ja vihreitä kolme neljäsosaa. Joukkomallissa palat on syytä selkeyden vuoksi asetella erilleen toisistaan kuten kuvassa yhdeksän.



Kuva 8



Kuva 9

Murtolukujen vertailua on hyvä harjoitella myös pituusmallin avulla lukusuoralla. Oppilaat voivat harjoitella etsimällä murtoluvuille paikat tyhjällä lukusuoralla. Murtoluvut voivat olla aluksi piirrettyinä kuvina ja myöhemmin symbolikielellä ilmaistuna.