

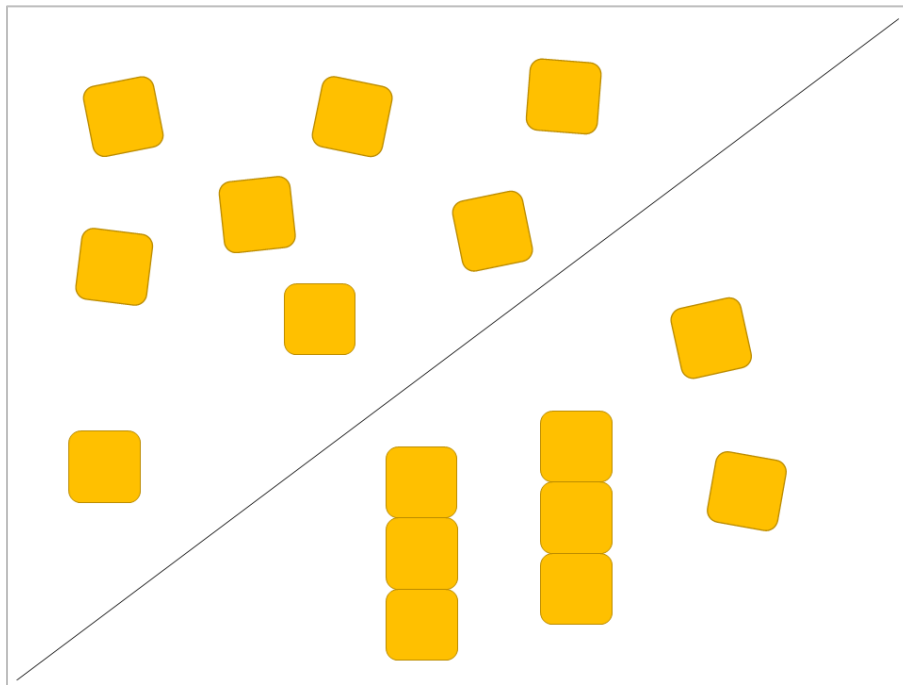
# Ymmärrystä murtolukuihin, osa 2

Teksti: Heidi Filppa ja Emilia Manninen, Oulun yliopisto

Tässä tekstissä kerromme murtolukujen laventamisesta ja supistamisesta, murto- ja sekaluvuista sekä kuinka murtoluvut liittyvät desimaalilukuihin ja prosentteihin.

## Murtoluku ja sekaluku

Aluksi murtolukujen harjoittelussa pitäydytään yhdessä kokonaisessa tai sitä pienemmissä osissa. Kokonaista suurempien murtolukujen käsittelyä ei kuitenkaan ole tarvetta siirtää kovin paljon myöhemmäksi, sillä niiden opettelu erikseen voi aiheuttaa oppilaalla sekaannusta ja hämmennystä. Sekalukuja kannattaa sisällyttää opetukseen pikkuhiljaa aloittaen tavanomaisista ja helpoista sekaluvuista, kuten kaksi kokonaista ja yksi kahdesosaa. Sekalukujen ja murtolukujen yhteyttä on hyvä harjoitella välineiden avulla ja piirtämällä kuvia. Rakennuspalikat ovat tässäkin erittäin käyttökelpoisia.



Kuva 1: Tehtävänä on ilmoittaa murtoluku  $8/3$  sekalukuna käyttäen multilink-kuutioita apuna. Ensin oppilaan täytyy tunnistaa murtoluvun nimittäjästä, että yksi kokonainen muodostuu kolmesta osasta. Sen jälkeen kuutioista rakennetaan niin monta kolmen palikan tornia kuin mahdollista. Niitä saadaan kaksi ja yli jää kaksi kuutiota. Vastaus on siis kaksi kokonaista ja kaksi kolmasosaa.

Vastaavanlaisia tehtäviä on hyvä tehdä myös toiseen suuntaan eli muuttaa sekaluku murtoluvuksi. Rakennettuaan palikoilla sekalukua vastaavat tornit, palikat irrotetaan toisistaan ja niiden lukumäärä voidaan laskea.

Konkreettisten kokemusten lisäksi harjoitellaan murtoluvun symbolikieltä. Luonnollinen kieli tukee sen oppimista, ja oppilaiden välinen ”matikkapuhe” on tärkeää tässäkin matematiikan osa-alueessa. Voi olla, että oppilas osaa muuttaa sekaluvun  $\frac{21}{4}$  murtoluvuksi  $5\frac{1}{4}$ , mutta ei tiedä, että  $5\frac{1}{4}$  tarkoittaa samaa kuin  $5 + \frac{1}{4}$ . Tässäkin toimintavälineiden ja puhutun kielen kautta voidaan tukea asian oppimista.

## Laventaminen ja supistaminen

Konkreettisten välineiden ja piirtämisen tärkeyttä ei voi liikaa korostaa murtolukujen laventamisen ja supistamisen eli yksinkertaistamisen yhteydessä, jotta ne eivät jää oppilaan mieleen vain temppuina tai ulkoa opittuina toimintoina. Yksi tärkeä osa murtoluvun käsitettä on, että sama (murto-)luku voidaan ilmaista äärettömän monella eri tavalla, koska murtoluvussa on kyse kahden luvun suhteesta toisiinsa.

Välineiden, kuten murtokakkujen avulla oppilas voi kokeilemalla löytää ekvivalentteja murtolukuja. Murtokakkujen palasia voi asetella päällekkäin ja huomata, että yksi kolmasosa on yhtä suuri kuin kaksi kuudesosaa. On hyvä hoksauttaa oppilasta, että jos palasten kokoa pienennetään, niitä tarvitaan useampi, jotta niiden koko vastaa isompien palasten kokoa.

Kun symbolinen kieli otetaan käyttöön laventamisen ja supistamisen harjoittelussa, on tärkeää muistaa käyttää oikeita käsitteitä. Laventamisessa ja supistamisessa on aina kyse murtoluvun kertomisesta yhdellä:

Jos luku  $\frac{1}{3}$  halutaan laventaa kuudesosiksi, täytyy tietysti ensiksi miettiä, kuinka kolmeen osaan jaettu kokonainen saadaan jaetuksi kuuteen osaan. Huomataan, että jokainen kolmasosa tulee jakaa vielä puoliksi, jotta osia tulisi yhteensä kuusi. Siis nimittäjä kolme tulee kertoa luvulla kaksi. Se ei pelkästään riitä, sillä silloin osoittajan ja nimittäjän suhde muuttuu ja murtoluvun suuruus muuttuu myös. Jotta suhde pysyy samana, myös osoittaja on kerrottava samalla luvulla. Nyt siis murtolukua  $\frac{1}{3}$  kerrotaan murtoluvulla  $\frac{2}{2}$  eli **yhdellä kokonaisella**. Jos mikä tahansa luku kerrotaan luvulla yksi, ei luvun suuruus muutu miksiäkään vaan se säilyy entisellään. Siis, vaikka murtoluvun  $\frac{1}{3}$  kirjoitusasu muuttuu kahdeksi kuudesosaksi, pysyy sen suuruus samana. Tässä kohtaa on varottava sanomasta, että kerrotaan murtoluku kahdella, sillä se voi aiheuttaa sekaannusta kun harjoitellaan

murtolukujen kertomista kokonaisluvuilla: oppilas päätyy kertomaan kahdella sekä osoittajan että nimittäjän, jolloin murtoluvun suuruus ei tietenkään muutu miksikään.

## Murtoluku, desimaaliluku ja prosentti

### Hyödynnetään murtoluvun, desimaaliluvun ja prosentin välisiä yhteyksiä.

(POPS 2014)

Opetussuunnitelman mukaan opetuksessa on hyödynnettävä murtoluvun, desimaaliluvun ja prosentin välisiä yhteyksiä. Ennen desimaalilukuihin tutustumista oppilaat ovat jo harjoitelleet murtoluvun käsitettä.

Harjoiteltaessa murto- ja desimaalilukujen yhteyksiä, on hyvä lähteä liikkeelle kymmenesosista kuten  $\frac{1}{10} = 0,1$  ja  $\frac{3}{10} = 0,3$  sekä puolikkaasta  $\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0,5$ .

Desimaalilukujen kirjoitettu asu on usein oppilaille entuudestaan tutumpi arkielämän kontekstista kuin murtolukujen merkintätapa, mutta ymmärrys desimaaleista osana paikkajärjestelmää ei ole muodostunut. Tästä syystä desimaalilukuja opeteltaessa on varsinkin alussa puhuttava lukuja ääneen matematiikan kielellä, jotta paikkajärjestelmän hallinta vahvistuu sekä murto- ja desimaalilukujen yhteys saadaan näkyväksi. On tärkeää saada oppilaat huomaamaan, että murtolukumuoto ja desimaalilukumuoto tarkoittavat yhtä suurta lukua. Esimerkiksi tämä kirjoitettu luku 8,15 luetaan 8 kokonaista, 15 sadasosaa, sen sijasta miten usein luonnollisella kielellä sanotaan: kahdeksan pilkku viisitoista. Toisaalta, jos vain sanomme luvun ”6 kokonaista, 2 kymmenesosaa”, se ei paljasta onko kyseessä murtoluku vai desimaaliluku matematiikan symbolikielellä kirjoitettuna. Myös oppilaita tulee ohjata puhumaan murto- ja desimaalilukuja matematiikan kielellä.

Toiminnallisuus ja konkretia ovat tärkeitä aiheeseen johdateltaessa. Opetuksessa voi hyödyntää 10 ruudun ruudukkoa, jossa koko ruudukko edustaa yhtä kokonaista ja yksi ruutu yhtä kymmenesosaa siitä. Oppilaalle annetaan tehtäväksi värittää ruudukosta kaksi kymmenesosaa. Yhdessä todetaan, että ruudukosta väritetään kaksi ruutua ja se voidaan ilmaista symbolikielellä kahdella eri tavalla:  $\frac{2}{10}$  ja 0,2. Seuraavaksi annetaan tehtäväksi värittää yksi viidesosa ruudukosta. Oppilaiden ratkaisut voivat poiketa toisistaan ja olla esimerkiksi seuraavanlaisia: osa värittää joka viidennen ruudun, osa miettii, miten ruudukko jaetaan viiteen osaan ja joku voi lähteä laskemaan, montako ruutua viidesosa on kymmenestä ruudusta. Kun kaikki ovat saaneet omalla tavallaan ruudut väritettyä, lasketaan, montako ruutua on väritetty ja huomataan, että niitä on 2. Eli 2 ruutua

kymmenestä ruudusta on väritetty, joka on yhtä kuin 2 kymmenesosaa. Tyypillinen väärinymmärrys on, että yksi viidesosaa on yhtä suuri kuin 0,5, mutta toiminnallisuus ja puheen rinnalla auttavat oppilasta huomaamaan, että yksi viidesosa ja viisi kymmenesosaa eivät ole yhtä suuria. Ei ole tarkoituksenmukaista oppia ulkoa murto- ja desimaaliluvun yhteyttä, vaan toiminnallisuuden myötä ohjataan oppilaita huomaamaan, että murtoluku kannattaa laventaa kymmenes- tai sadasosiksi, jonka jälkeen siitä saadaan helposti desimaalilukumuoto.

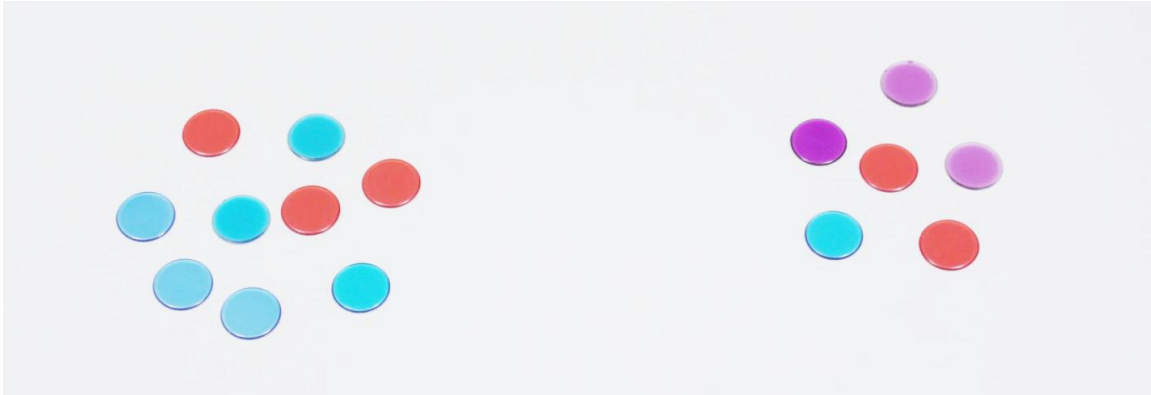
Jo ennen kuin prosentin käsitettä opetellaan koulussa, on oppilas saanut omassa arkielämässään paljonkin kokemuksia prosentteihin liittyen. Yksi tyypillisimmistä esimerkeistä on puhelimen akun varauksen taso, joka näkyy prosentteina puhelimen ruudulla. Oppilaiden aiempia kokemuksia on hyvä hyödyntää opetuksessa ja samalla tarkistaa, onko hänellä syntynyt virheellisiä käsityksiä prosenttiin liittyen.

Murto- ja desimaalilukujen ymmärtäminen on prosentin käsitteen pohjana. Käsite prosentti tarkoittaa sadasosaa eli kun oppilaat ovat oppineet murto- ja desimaalilukujen yhteydessä sadasosan käsitteen, he itse asiassa osaavat jo prosentin. Vastaavalla tavalla kuin murtolukujen yhteydessä painotetaan kokonaisen määrittämisen tärkeyttä, on prosenttien yhteydessäkin väliä sillä, mitä yksi kokonainen eli 100 prosenttia edustaa. Voidaan sanoa, että puolen litran vesipullo on avaamattomana täynnä eli vettä on 100 prosenttia. Yhtä lailla avaamattomassa 1,5 litran vesipullossa on 100 % vettä. On kuitenkin hyvin selvää, että toisessa pullossa vettä on määrällisesti enemmän, vaikka sitä onkin molemmissa pulloissa prosentuaalisesti saman verran. On todella tärkeää, että oppilas ymmärtää, että prosentti on aina osuus jostakin määrätystä kokonaisuudesta, ihan samalla tavalla kuin murtolukukin. Toisaalta on tärkeää ymmärtää, että yksi kokonainen on 100% ja 1% on yksi sadasosa.

Aikaisemmin murto- ja desimaalilukuja harjoiteltaessa käytettyjä tehtäviä voi käyttää myös prosenttien yhteydessä vaihtamalla käsitteet.



Kuva 2: Jos punainen sauva on yksi kokonainen (eli sata prosenttia), mikä sauvoista on puolet (eli 50 %) punaisesta?



Kuva 3: Kuinka suuri osuus (eli kuinka monta prosenttia) värinapeista on sinisiä?

Prosentin ja murtoluvun yhteyden ymmärtäminen edesauttaa sitä, ettei myöhemmässä vaiheessa prosenttilaskennassa tarvitse opetella erikseen valmiita kaavoja eri tilanteisiin, vaan oppilas voi hyödyntää ymmärrystään käsitteistä.

Murtoluvun ja prosenttien välistä yhteyttä on hyvä havainnollistaa esimerkiksi seuraavanlaisen tehtävän ratkaisun avulla:

*Jalkapallojoukkue on pelannut kauden aikana 25 ottelua, joista voitettuja otteluita on 80 %. Kuinka monta ottelua joukkue voitti kauden aikana?*

Ratkaisun tueksi kannattaa piirtää kuva, esimerkiksi palkki, joka edustaa siis sataa prosenttia eli kaikkia pelattuja otteluita. Voittoa on 80 %, jolloin häviöitä tai tasapelejä on 20 %. Koska 20 % mahtuu viisi kertaa sataan prosenttiin, häviöitä tai tasapelejä on viidesosa pelatuista otteluista. Palkki voidaan siis jakaa viiteen yhtä suureen osaan, joista neljä vastaa voitettuja otteluita. Pelattuja otteluita on yhteensä 25, joten selvitetään, kuinka paljon siitä on yksi viidesosa. 25 jaettuna viidellä on yhtä kuin viisi, joten yksi viidesosa vastaa viittä ottelua. Tämän jälkeen voidaan ratkaista, kuinka monta peliä on neljä viidesosaa: neljä kertaa viisi on yhtä kuin 20 (kirjotetaan auki myös yhteenlaskumuoto).