Ongelmatehtäviä lukioon

Tehtäväsarja on laadittu osana LUMATIKKA-täydennyskoulutusohjelmaa, jonka toteutuksesta vastaa LUMA-keskus Suomi -verkosto yhteistyökumppaneineen. Ohjelman rahoittaa Opetushallitus. Tehtävät on koostanut Minna Hirvonen.
Voit kopioida itsellesi muokattavan version tehtäväsarjasta osoitteesta http://bit.ly/ongelmialukioon

LUMATIKKA

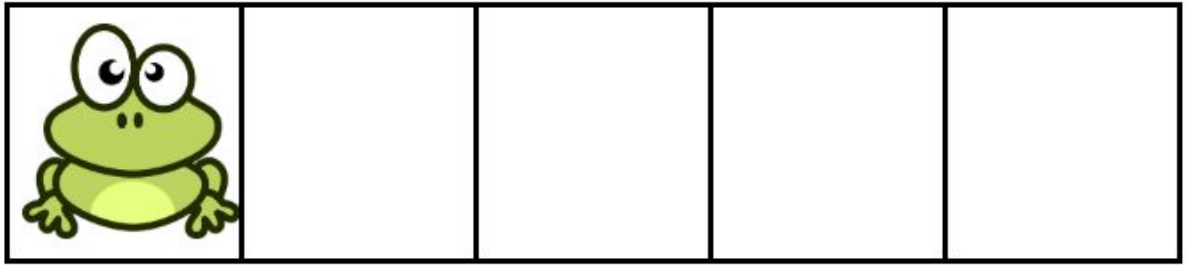
LUMA-KESKUS SUOMI
LUMA-CENTER FINLAND
LUMA CENTRE FINLAND

OPETUSHALLITUS RAHOITTAA HANKETTA

Tehtävä 1

Sammakko lähtee 5 × 1-ruudukon vasemmanpuoleisimmasta ruudusta ja hyppää aina yhden tai kaksi ruutua kerrallaan oikealle, kunnes se päätyy viimeiseen ruutuun. Kuinka monella eri tavalla sammakko voi päästä määränpäähänsä? (Se ei koskaan palaa takaisinpäin.)

Entä jos ruutuja on 20?

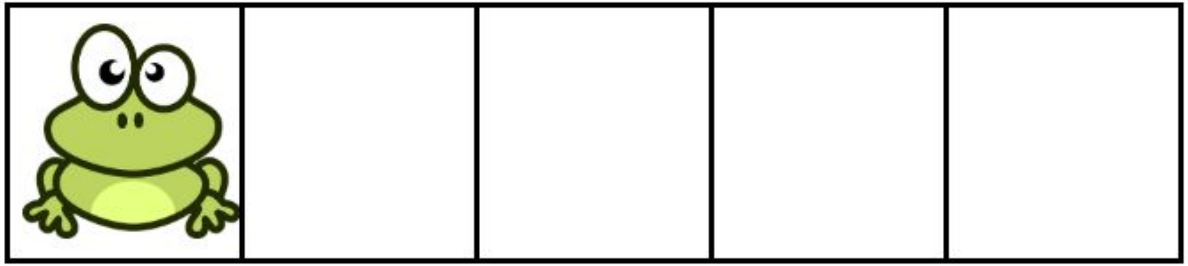


Tehtävä 1 – Ratkaisu

Voidaan ajatella, että kahteen ensimmäiseen ruutuun sammakko voi päätyä vain yhdellä tavalla: ensimmäisessä se jo on, ja toiseen se voi hypätä lyhyellä loikalla ensimmäisestä ruudusta. Muihin ruutuihin sammakko voi päätyä kahdella tavalla: lyhyellä hypyllä viereisestä tai pitkällä hypyllä sitä edeltävästä ruudusta. Huomataan, että tapoja päätyä tiettyyn ruutuun on yhtä monta kuin tapoja päätyä kahteen sitä edeltävään ruutuun on yhteensä.

Kyseessä on itse asiassa Fibonaccin lukujono: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,...

Siten viiden ruudun tapauksessa sammakko voi päätyä viimeiseen ruutuun viidellä eri tavalla. 20 ruudun tapauksessa vaihtoehtoja on 6765 kappaletta.



Tehtävä 2

Viisinumeroista lukua kutsutaan mielenkiintoiseksi, jos se koostuu keskenään erisuurista numeroista ja sen ensimmäinen numero on kaikkien muiden numeroiden summa. Montako tällaista lukua on olemassa?

Tehtävä 2 – Ratkaisu

Ensimmäinen numero (loppujen numeroiden summana) voi olla joko 6, 7, 8 tai 9. Kyseiset summat voidaan koostaa seuraavista lukuyhditelmistä:

$$6 = 0 + 1 + 2 + 3$$
$$7 = 0 + 1 + 2 + 4$$
$$8 = 0 + 1 + 2 + 5$$
$$8 = 0 + 1 + 3 + 4$$
$$9 = 0 + 1 + 2 + 6$$
$$9 = 0 + 1 + 3 + 5$$
$$9 = 0 + 2 + 3 + 4$$

Määritelmän mukaan ensimmäisen numeron on oltava loppujen summa, mutta muiden numeroiden järjestystä ei ole määrätty. Koska kaikki numerot ovat keskenään erisuuria, on kutakin summaa vastaavia mielenkiintoisia lukuja $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ kappaletta. Kaikkiaan viisinumeroisia mielenkiintoisia lukuja on siis $7 \times 24 = 168$ kappaletta.

Tehtävä 3

Anna ja Brita päättävät ottaa toisistaan mittaa 100 metrin juoksussa. Kun Anna tulee maaliin, Brita on vasta 95 metrin kohdalla. He päättävät kokeilla uudestaan, mutta tällä kertaa Annan antaa hieman tasoitusta ja lähtee viisi metriä kauempaa. Tytöt juoksevat samalla nopeudella kuin ensimmäiselläkin kerralla. Miten kilpailu nyt päättyy?

Tehtävä 3 – Ratkaisu

Anna voittaa etumatkasta huolimatta.

Merkitään kirjaimella t aikaa, joka Annalla kului 100 metrin juoksemiseen.

Annan nopeus on $\frac{100}{t}$, Britan puolestaan $\frac{95}{t}$.

Tällöin Annalla kuluu 105 metrin juoksemiseen

$$\frac{105t}{100} = \frac{21t}{20} = \frac{399t}{380},$$

kun taas Britalla kuluu 100 metrin juoksemiseen

$$\frac{100t}{95} = \frac{20t}{19} = \frac{400t}{380}.$$

Tehtävä 4

Eräässä tv-ohjelmassa kilpailijalla on edessään kolme ovea. Yhden takana on urheiluauto, kahden takana vuohi. Kilpailijan tehtävänä on valita yksi ovista. Mikäli sen takana on auto, hän voittaa auton itselleen. Kun kilpailija on valinnut oven, juontaja avaa toisen niistä ovista, joita kilpailija ei valinnut. Sen takaa paljastuu vuohi. Juontaja antaa kilpailijalle mahdollisuuden muuttaa valintaansa. Kannattaako kilpailijan tarttua tarjoukseen?



Tehtävä 4 – Ratkaisu

Kannattaa. Tilannetta voi havainnollistaa seuraavalla taulukolla

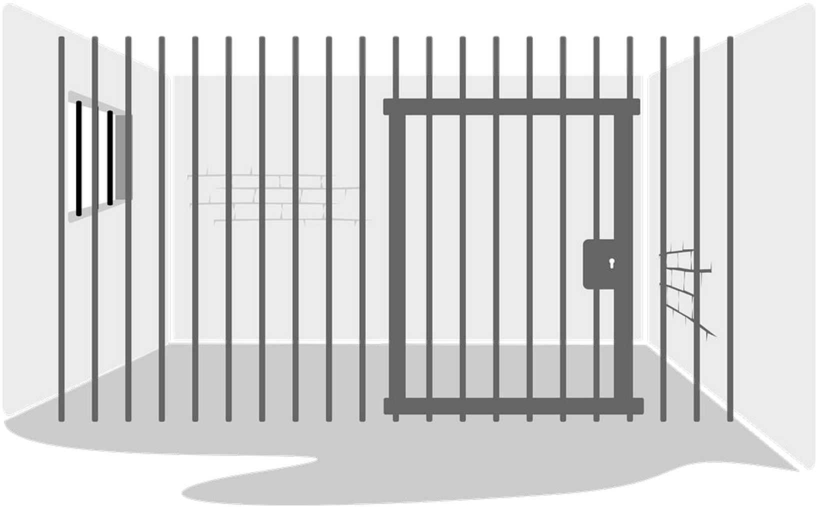
Valitun oven takana	**Toisen oven takana**	**Kolmannen oven takana**	**Alkuperäinen valinta**	**Vaihtaminen**
Auto	Vuohi	Vuohi	Voitto	Ei voittoa
Vuohi	Auto	Vuohi	Ei voittoa	Voitto
Vuohi	Vuohi	Auto	Ei voittoa	Voitto

Taulukosta nähdään, että vaihtamalla voiton todennäköisyys on $\frac{2}{3}$, kun taas alkuperäisessä ovessa pitäytymällä kilpailija voittaa vain todennäköisyydellä $\frac{1}{3}$.

Tehtävä 5

Vankilassa on 100 vankia kukin omissa selleissään. Eräässä huoneessa, jota kutsumme lamppuhuoneeksi, on hehkulamppu. Hehkulamppu on aluksi sammuksissa. Kerran päivässä vanginvartija valitsee satunnaisesti yhden vangin, joka pääsee käymään lamppuhuoneessa. Tällöin vanki voi halutessaan sytyttää tai sammuttaa lampun. Lisäksi hänellä on mahdollisuus todeta, että kaikki sata vankia ovat käyneet lamppuhuoneessa.

Mikäli toteamus pitää paikkaansa, kaikki vangit vapautetaan. Jos vanki tekee virheen, kaikki vangit teloitetaan. Vangeilla on yksi ilta aikaa kokoontua yhteen ja suunnitella toimintastrategia, ja sen jälkeen he eivät voi pitää yhteyttä toisiinsa.

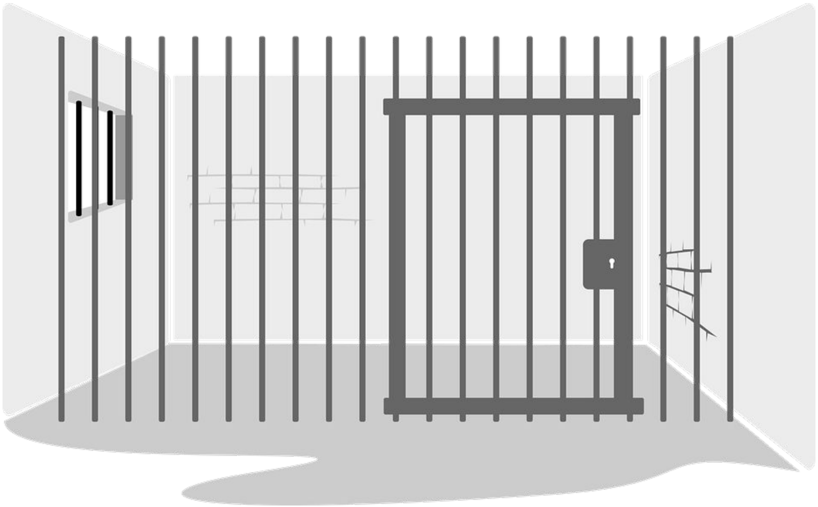


Laadi vangeille toimiva suunnitelma.

Tehtävä 5 – Ratkaisu

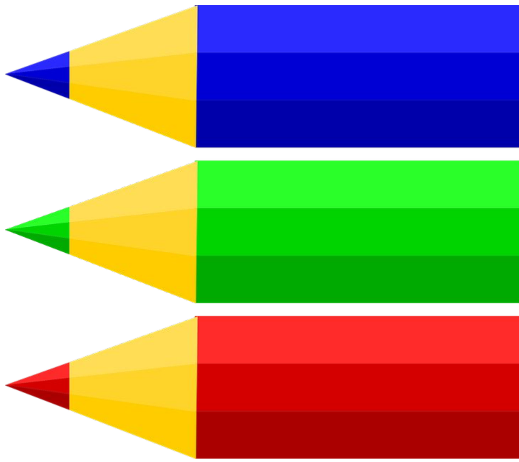
Alla eräs suunnitelma, jolla vältetään vankien tuomitseminen kuolemaan:

Vankien keskuudesta valitaan yksi johtaja. Kun joku muista vangeista kutsutaan lamppuhuoneeseen ensimmäistä kertaa, hän sytyttää lampun, mikäli se ei ole päällä. Muissa tapauksissa hän ei tee mitään. Kun johtaja menee huoneeseen, hän sammuttaa lampun, mikäli se on päällä. Kun johtaja on sammuttanut lampun 99 kertaa, hän voi olla varma, että kaikki vangit ovat käyneet huoneessa ja voi todeta tämän vanginvartijalle.



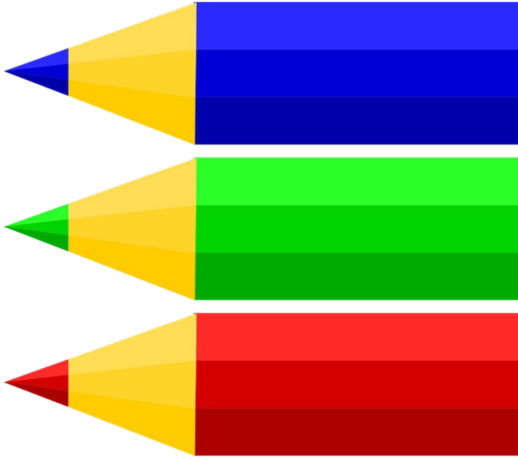
Tehtävä 6

- Jokainen tason piste on joko punainen tai sininen. Osoita, että tasosta on mahdollista löytää kaksi samanväristä pistettä, joiden välinen etäisyys on täsmälleen 1.
- Jokainen avaruuden piste on joko punainen, sininen tai vihreä. Osoita, että avaruudesta on mahdollista löytää kaksi samanväristä pistettä, joiden välinen etäisyys on täsmälleen 1.



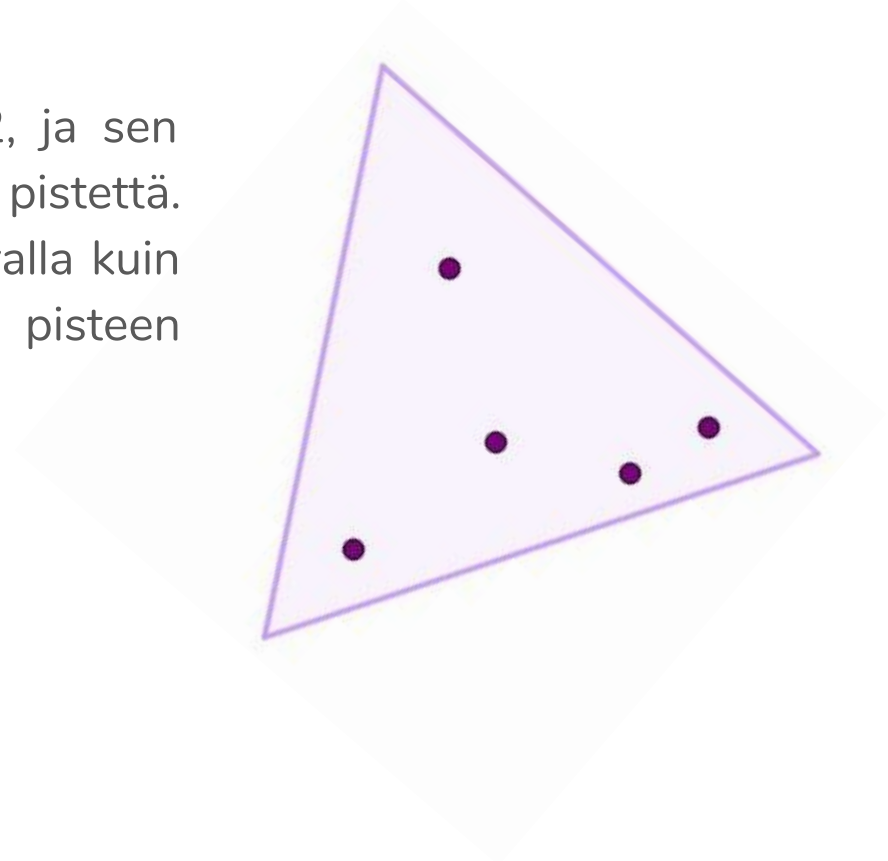
Tehtävä 6 – Ratkaisu

- Tarkastellaan tasasivuisen kolmion kärkipisteitä, kun sivun pituus on 1. Koska kärkiä on kolme ja kukin kärkipiste on joko punainen tai sininen, vähintään kaksi kärkeä ovat keskenään samanvärisiä.
- Tarkastellaan tetraedrin kärkipisteitä, kun särmän pituus on 1. Koska kärkiä on neljä ja kukin kärkipiste on joko punainen, sininen tai vihreä, vähintään kaksi kärkeä ovat keskenään samanvärisiä.



Tehtävä 7

Tasasivuisen kolmion sivun pituus on 2, ja sen sisälle on asetettu satunnaisesti viisi pistettä. (Pisteet eivät välttämättä ole samalla tavalla kuin kuvassa.) Osoita, että joidenkin kahden pisteen välinen etäisyys on korkeintaan 1.



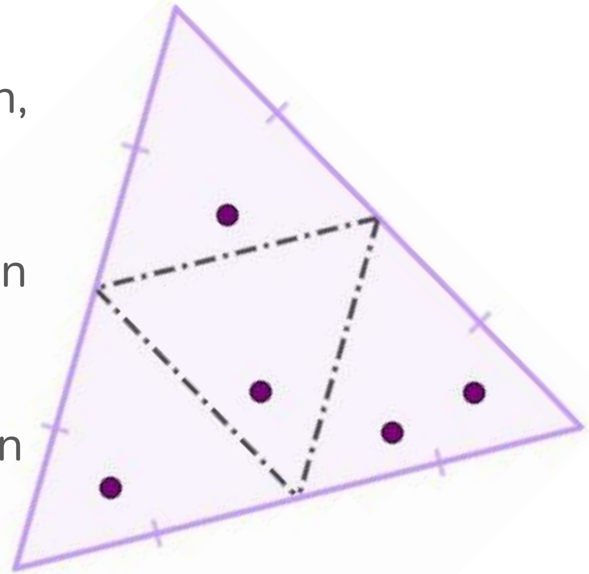
Tehtävä 7 – Ratkaisu

Jaetaan kolmio neljään pieneen tasasivuiseen kolmioon, joiden sivun pituus on 1.

Nyt vähintään kaksi pistettä ovat yhden pienen kolmion sisä- tai kärkipisteinä tai sen sivuilla.

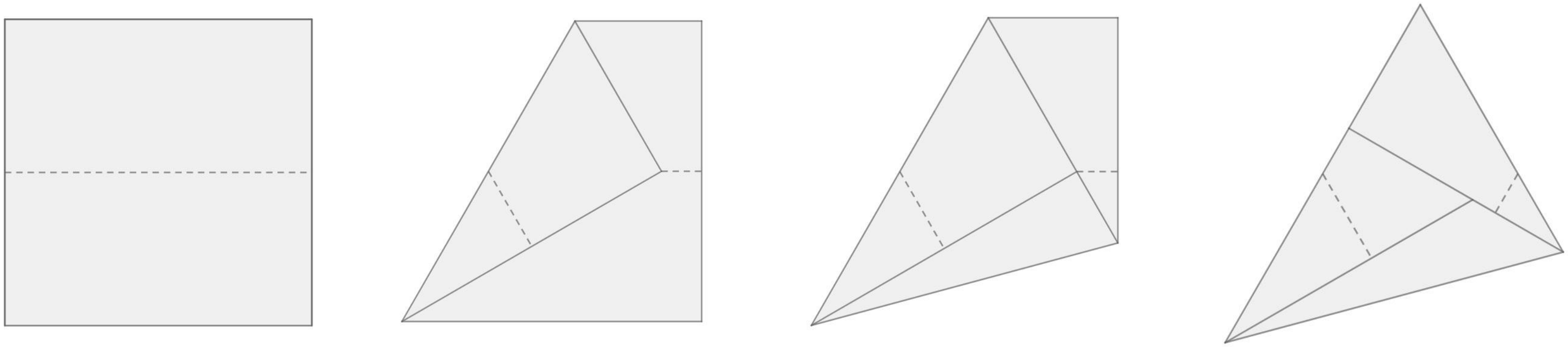
Tällöin näiden kahden pisteen välinen etäisyys on korkeintaan 1.

Tässä ja edellisen tehtävän ratkaisussa sovellettu idea tunnetaan kyyhkyslakkaperiaatteena.



Tehtävä 8

1. Taita neliönmuotoinen paperi puoliksi kannan suuntaisesti ja avaa taitos.
2. Taita vasen yläkulma paperin keskiviivalle kuvan mukaisesti.
3. Taita sitten oikea alakulma keskiviivalle.
4. Taita vielä oikea yläkulma edellisten taitosten päälle siten, että muodostuu kolmio.



Tutki näin muodostuvaa kolmiota.

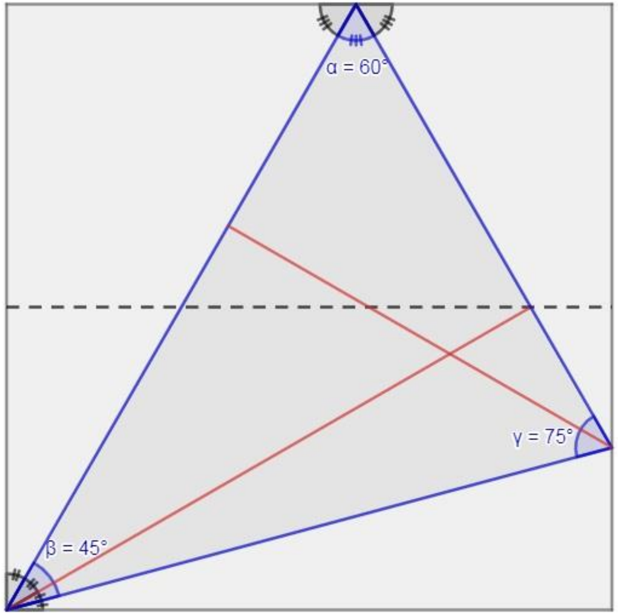
Tehtävä 8 – Esimerkkinä kulmien suuruus

Oheiseen kuvaan on merkitty tehdyt taitokset. Ensimmäinen, paperin puolittava aputaitos on merkitty katkoviivalla. Myöhemmät taitokset on merkitty sinisellä, ja siniset janat muodostavat samalla kolmion sivut. Punaiset janat kuvaavat sitä, mihin alkuperäisen neliön sivut kuvautuvat tehtyjen taitosten jälkeen.

Tehtyjä taitoksia tutkimalla huomataan, että identtisiä kulmia α muodostuu kolme kappaletta päällekkäin, ja yhdessä ne muodostavat oikokulman. Siten kulman α suuruus on 60 astetta.

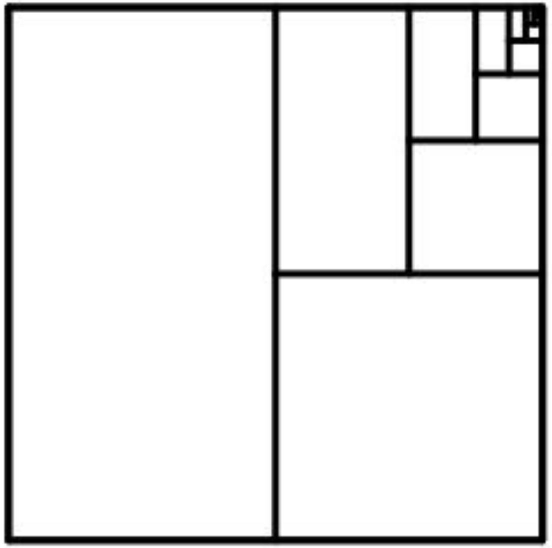
Myös kulman β suuruutta määritettäessä voidaan hyödyntää taitoksia. Huomataan, että vasempaan alanurkkaan syntyy neljä kulmaa, jotka yhdessä muodostavat suoran kulman. Koska kulmat muodostetaan taittelemalla (taitokset voi ajatella suorakulmaisten kolmioiden peilaamisena: peilaussuorina käytetään lopputuloksena muodostuvan kolmion sivuja!), syntyy itse asiassa kahdenlaisia kulmia, kaksi kappaletta kumpaakin. Kulma β muodostuu kahdesta erilaisesta kulmasta ja sen suuruus on siten puolet suorasta kulmasta, siis 45°.

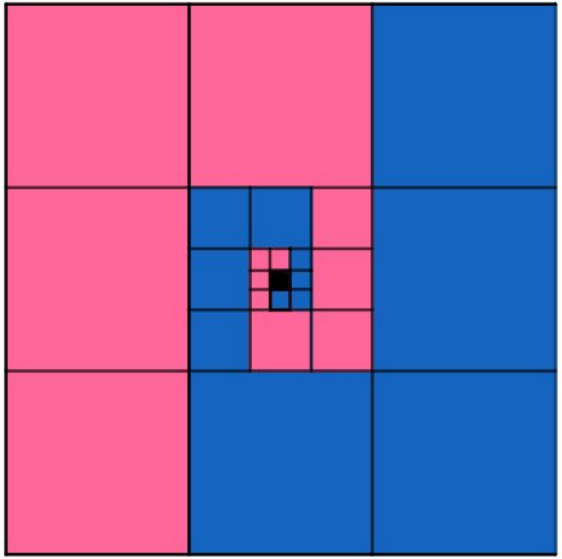
Kulman γ suuruus saadaan vähentämällä 180 asteesta kolmion muiden kulmien suuruudet.
Siten $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 60° - 45° = 75°$

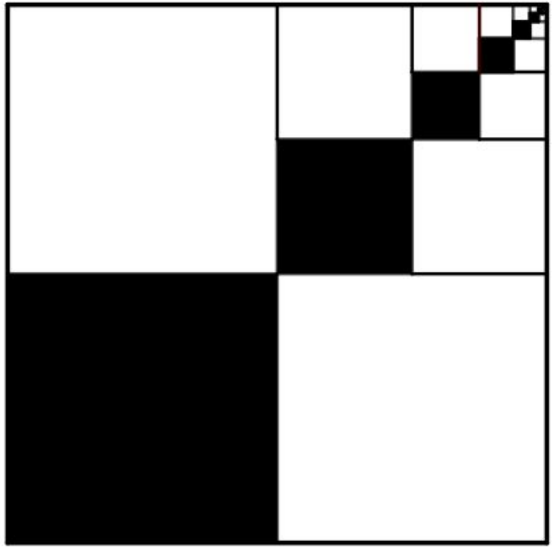


Tehtävä 9

Keksitkö, mitä kuvissa osoitetaan?







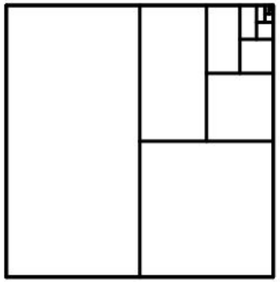
Tehtävä 9

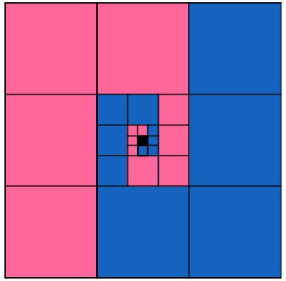
Kuvissa on esitetty geometristen sarjojen summat:

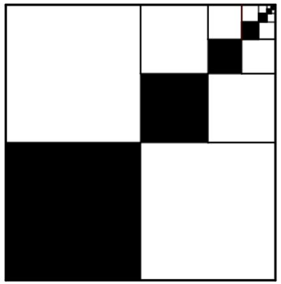
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots = 1$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \dots = \frac{1}{3}$$

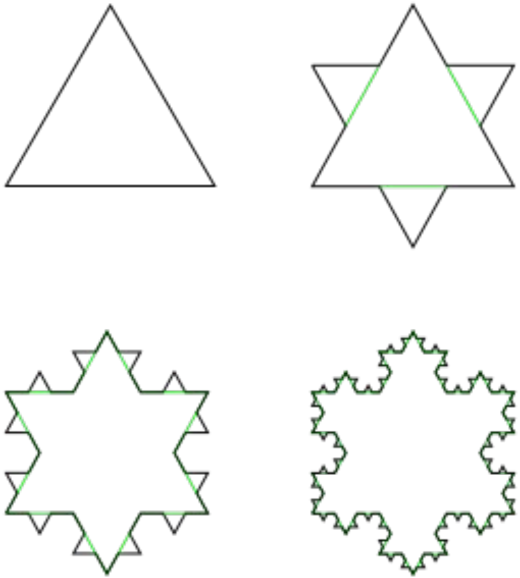




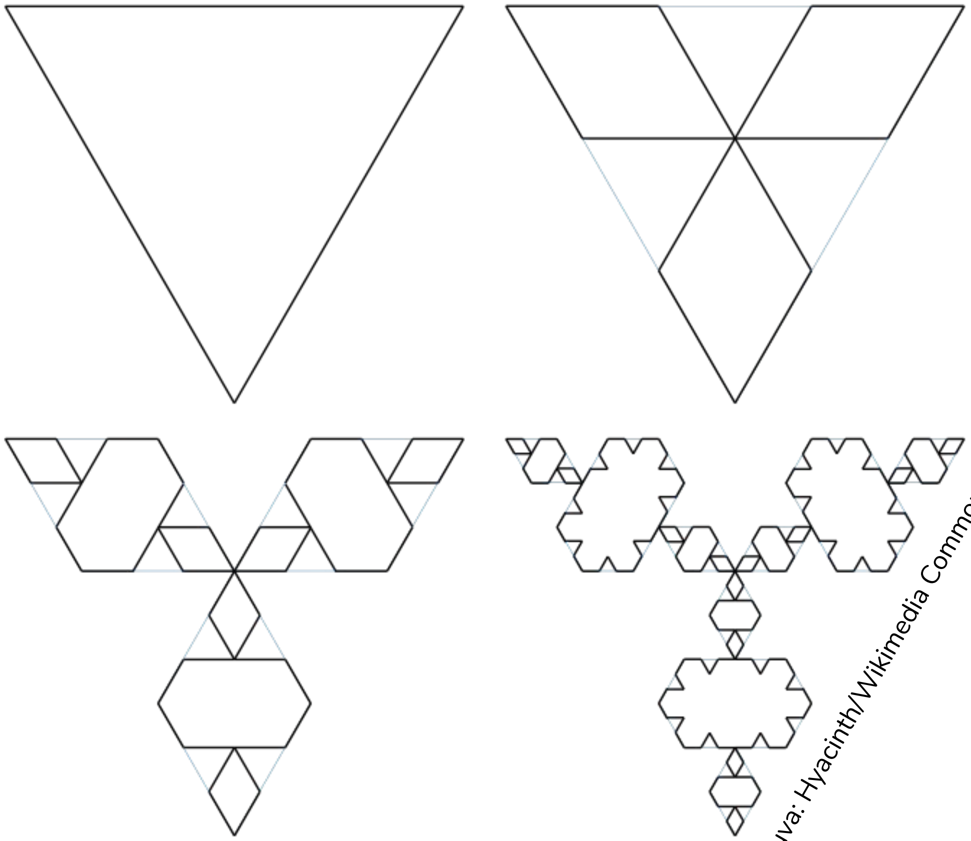


Tehtävä 10

Tutki oheisia kuvioita.



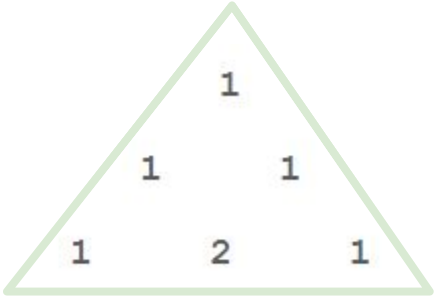
Kuva: Wxs/Wikimedia Commons, CC BY-SA 3.0

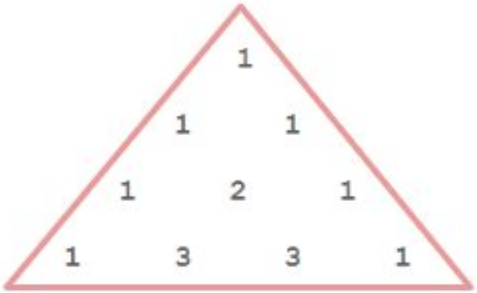


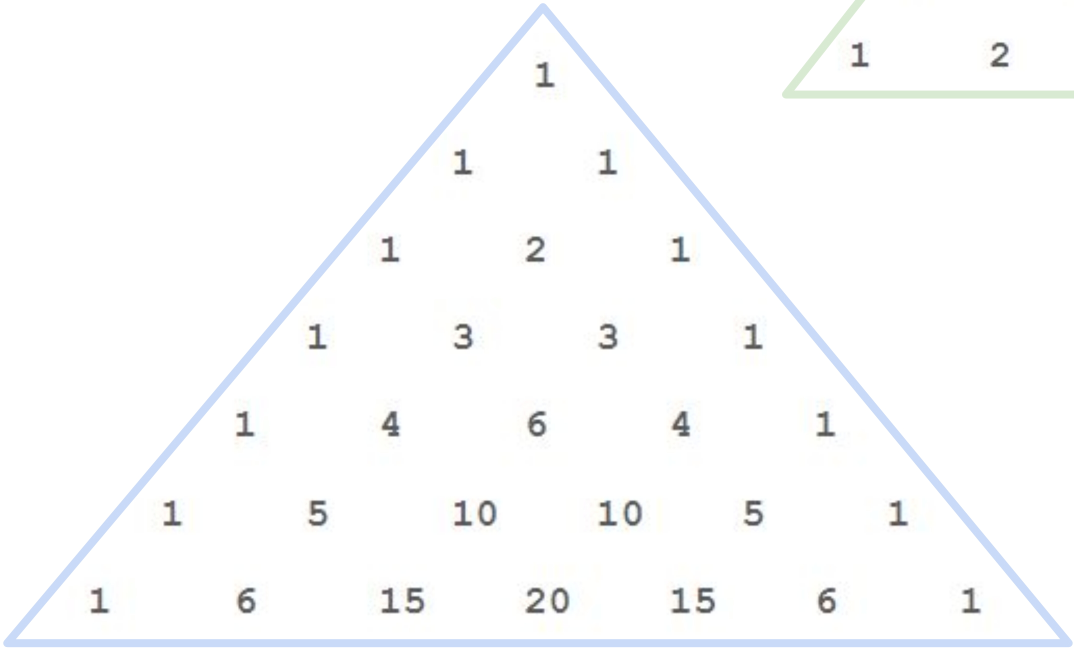
Kuva: Hyacinth/Wikimedia Commons

Tehtävä 11

Tutki oheisia kolmioita.







Ideoita tutkimustehtäviin

- Tehtävä 10:
    - Päätellään, miten fraktaalit muodostuvat ja piirretään muutamia iteraatioita.
    - Vertaillaan kuvioita keskenään. (Fraktaalit tunnetaan nimillä Kochin lumihiutale ja Kochin antilumihiutale.)
    - Tutkitaan piirejä ja pinta-aloja sekä niiden raja-arvoja.
- Tehtävä 11:
    - Päätellään, miten Pascalin kolmio muodostuu ja jatketaan kolmiota.
    - Etsitään säännönmukaisuuksia: rivisummat, symmetria, vinoriveillä esiintyvät luvut, alkioiden lukumäärä...
    - Tutkitaan, miten Pascalin kolmio liittyy binomikertoimiin.
    - Tutkitaan, miten Pascalin kolmio liittyy binomin potenssin $(a+b)^n$ kehittämiseen.
    - Väritetään kaikki parittomat luvut. (Väritettävän kolmion kannattaa olla melko suuri.)

Lähteitä

- Tehtävä 2: http://mattebloggen.com/2015/12/f15/
- Tehtävä 4: https://en.wikipedia.org/wiki/Monty_Hall_problem
- Tehtävä 5: https://www.cut-the-knot.org/Probability/LightBulbs.shtml

Kuvat: Pixabay