Ongelmatehtäviä

Monelle eri asteelle

Tehtäväsarja on laadittu osana LUMATIKKA-täydennyskoulutusohjelmaa, jonka toteutuksesta vastaa LUMA-keskus Suomi -verkosto yhteistyökumppaneineen. Ohjelman rahoittaa Opetushallitus.

Tehtävät on pyritty järjestämään siten, että helpoimmat tehtävät ovat materiaalin alkupuolella ja haastavimmat viimeisinä. Tehtäviä ei ole jaoteltu luokka-asteen mukaan, ja monet tehtävät sopivatkin useille eri luokkatasoille. Muokkaa ja kokeile rohkeasti! Useimpiin tehtäviin on tarjolla ratkaisuehdotus, joka esitetään heti tehtävän jälkeen omalla sivullaan.

Mukavia hetkiä ongelmanratkaisun parissa!

LUMATIKKA

LUMA-KESKUS SUOMI
LUMA-CENTER FINLAND
LUMA CENTRE FINLAND

OPETUSHALLITUS RAHOITTAA HANKETTA

1. **Absoluuttinen vs. suhteellinen**

   Tehtäväsarja löytyy diaesityksenä linkin takaa tai lyhytosoitteesta bit.ly/absoluuttista.

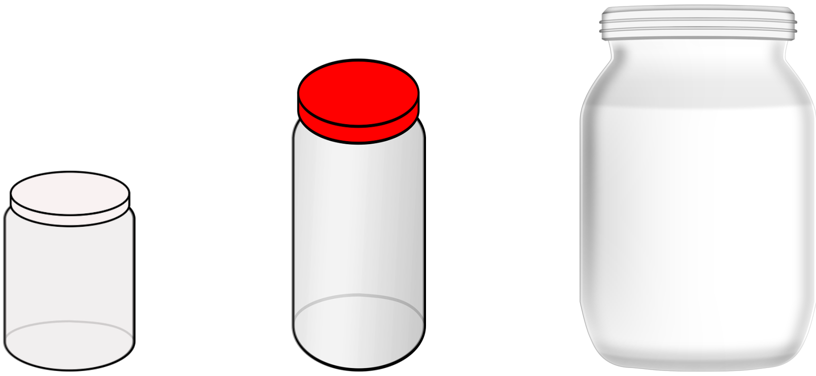
   Tehtäväsarja sisältää samasta tehtävästä neljä eri versiota, jotka soveltuvat käytettäviksi varhaiskasvatuksesta toiselle asteelle. Alkuperäinen tehtävä on lyhyen matematiikan ylioppilaskoetehtävä keväältä 2018.

2. Tehtävään tarvitaan useita erikokoisia ja -muotoisia lasipurkkeja, esimerkiksi mauste-, lastenruoka- ja hillopurkkeja.

   Pohditaan yhdessä lasten kanssa, millaisia purkit ovat. Ovatko kaikki samanlaisia? Mitä eroa niillä on?

   Mitä oikeastaan tarkoittavat pieni, suuri, kapea, leveä, matala tai korkea? Entä pyöreä, kulmikas, kova tai läpinäkyvä?

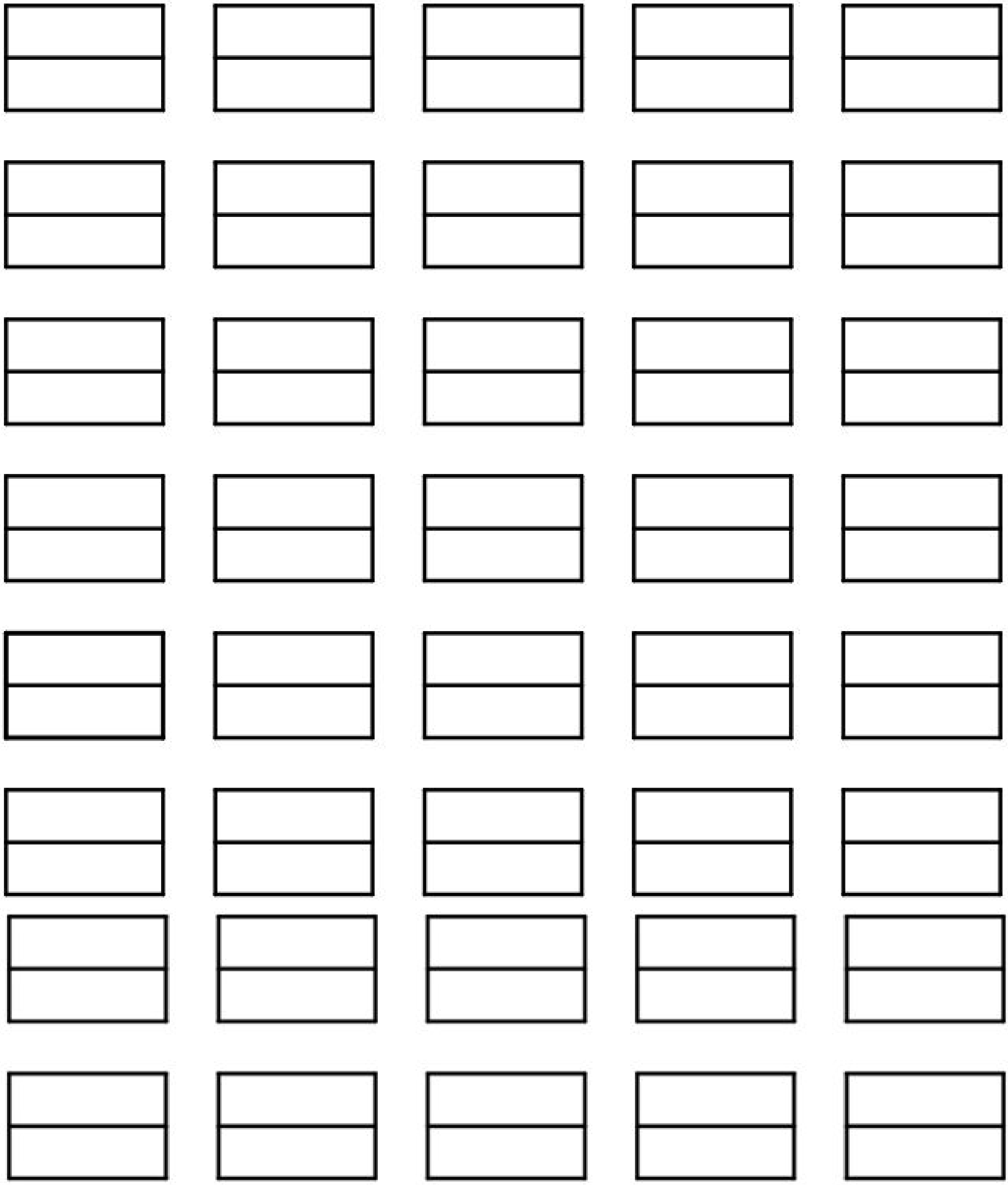
   Pyydetään lapsia valitsemaan mielestään suurin purkki. Miten voitaisiin selvittää, onko se todella kaikkein suurin?



Tehtävä pohjautuu Skolverketin videoon “Glasburkar”. Alkuperäinen materiaali saatavilla lyhytosoitteessa bit.ly/purkit.
Kuvat: Pixabay

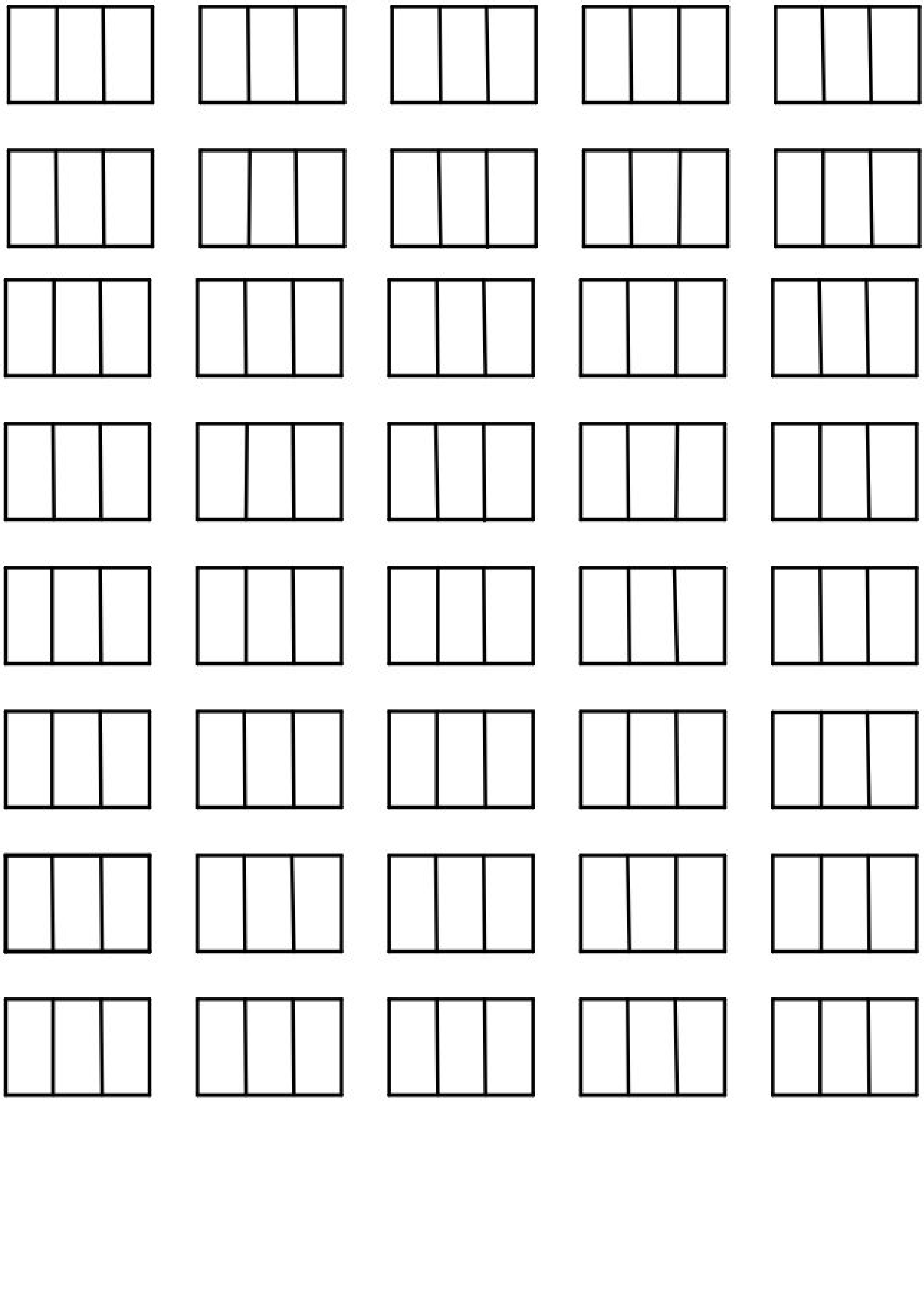
3. Monellako eri tavalla voit värittää liput, jos sinulla on käytössäsi

  - sininen ja punainen värikynä?
  - sininen, punainen ja keltainen värikynä?



Entä jos lipuissa onkin kahden raidan sijasta kolme raitaa? Monellako eri tavalla voit nyt värittää liput, jos käytössäsi on

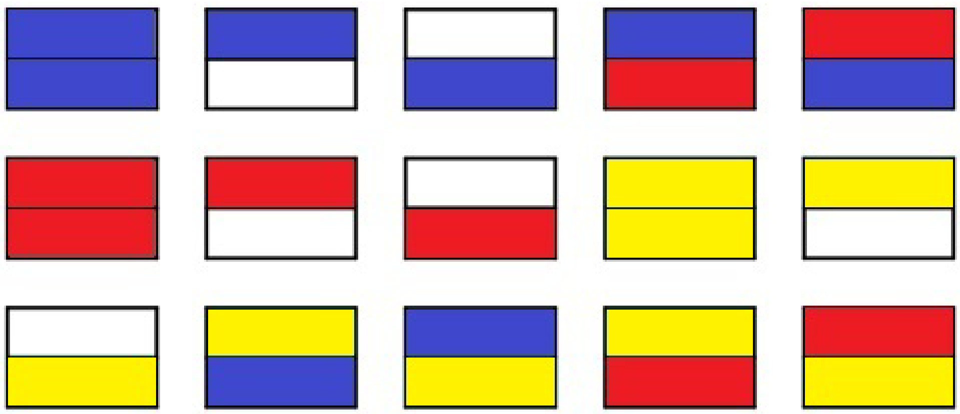
- sininen ja punainen värikynä?
- sininen, punainen ja keltainen värikynä?



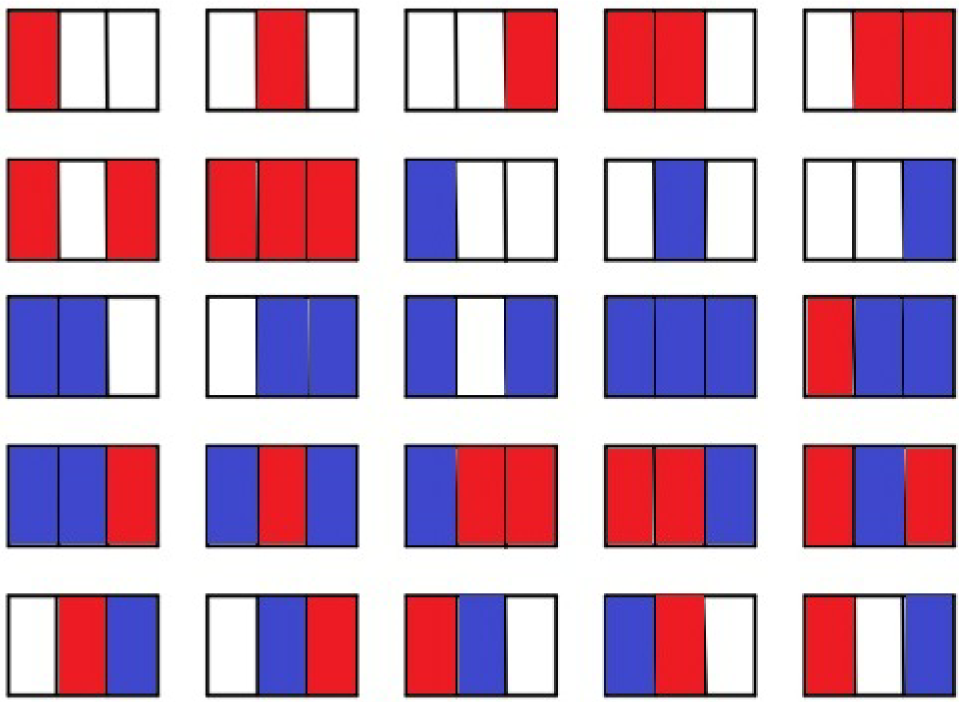
Ratkaisu tehtävään 3:

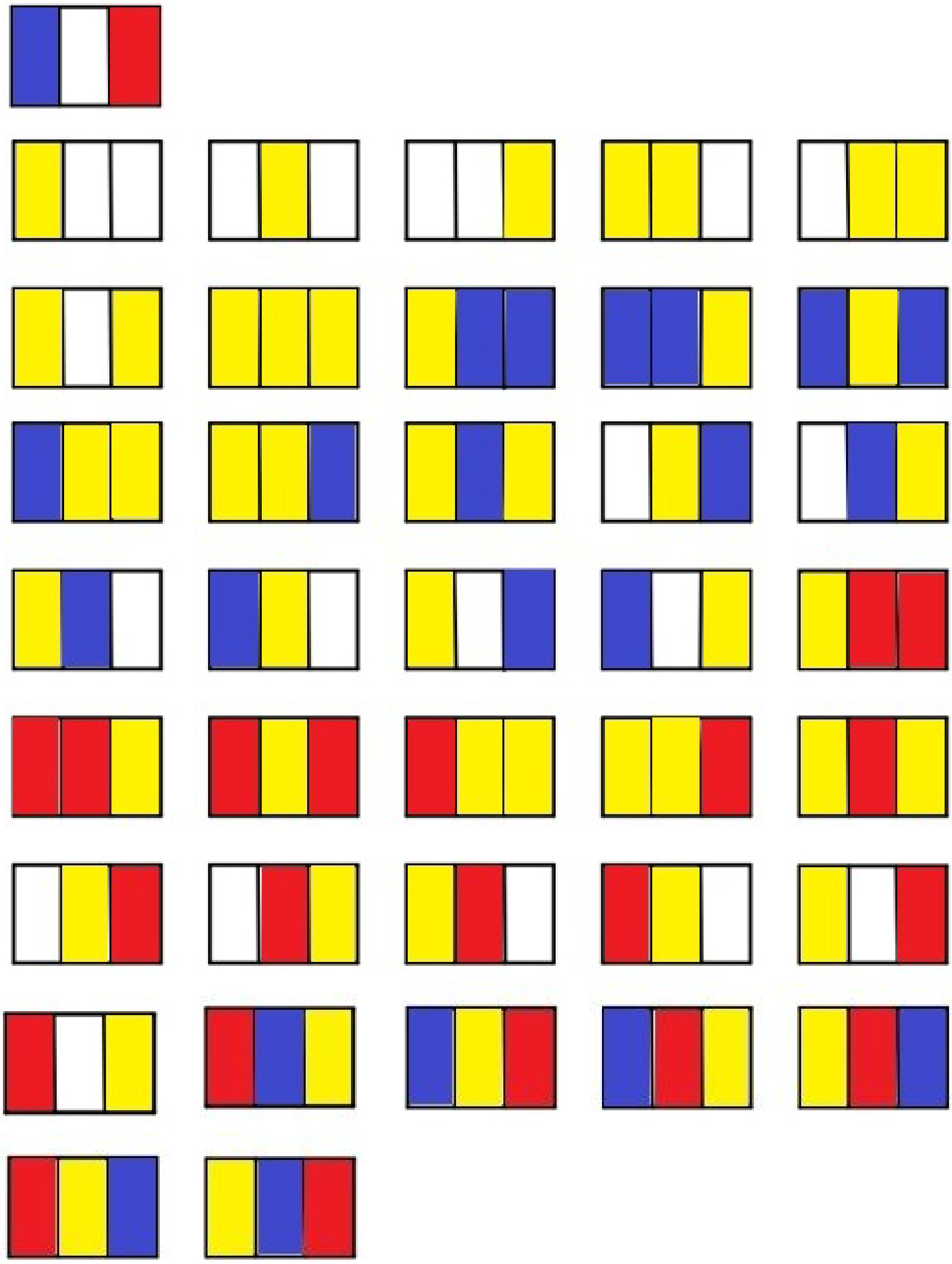
Tässä ratkaisussa on tulkittu, että ainakin yksi raita pitää värittää, mutta osa alueista saa jäädä valkoisiksi. Se, sallitaanko valkoiset raidat vai ei, vaikuttaa tietysti ratkaisuiden lukumäärään.

- Jos käytössä on punainen ja sininen värikynä, kaksiraitaiset liput voi värittää kahdeksalla eri tavalla.
- Jos käytössä on lisäksi keltainen värikynä, tapoja on 15.



- Jos käytössä on punainen ja sininen värikynä, kolmiraitaiset liput voi värittää 26 eri tavalla
- Jos käytössä on lisäksi keltainen värikynä, tapoja on 63.





VINKKI! Tehtävän vaikeustasoa voi säädellä käytettävien värien ja lipun raitojen lukumäärää muokkaamalla. Tehtävä on helpompi, jos valkoisia alueita ei sallita. Ei haittaa, vaikka kaikkia vaihtoehtoja ei löytyisikään!

4. Seuraavaa tehtävää varten kannattaa tulostaa oheinen talo sekä leikata sukat irti paperista.

   Herra Hajamielinen asui suuressa talossa, ja valitettavasti hänellä oli tapana unohdella tavaroitaan milloin mihinkin. Eräänkin kerran hän oli lähdössä aamulla kotoaan, mutta huomasi pukeutuessaan, että vaatekaapissa oli jäljellä yksi ainoa sukka. Koko talon läpi käytyään hän löysi yhden sukan television takaa, kaksi portaiden alta, kolme kylpyhuoneesta ja yhden pesukoneesta. Kuinka monta paria sukkia oli yhteensä?

Kuvat: Pixabay

5. Järjestäytykää riviin eri tavoilla. Voitte järjestäytyä esimerkiksi pituuden, jalkaterän koon, pikkurillin pituuden, hiusten pituuden ja iän mukaan. Tuleeko riveistä erilaisia?

   Mitkä mitat voitte arvioida silmämääräisesti, mitkä vaativat tarkempia mittauksia? Onko jotakin, mitä ei tarvitse mitata lainkaan?

   Onnistuuko järjestäytyminen esimerkiksi paidan värin perusteella?

   Mitä muita tapoja järjestäytyä keksitte? Entä keksittekö ominaisuuksia, joiden perusteella ette voi järjestäytyä?

Kuva: Pixabay

6. Valitkaa jokin matka, jonka haluatte mitata (esimerkiksi matka huoneen ovelta takaseinälle).

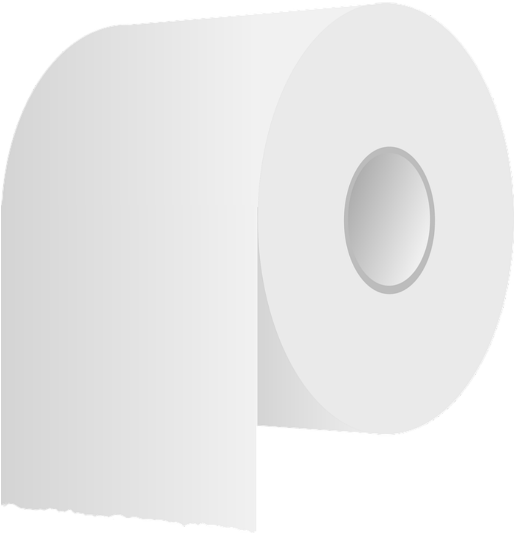
   Mitatkaa matka eri tavoin: voitte mitata matkan ainakin harppauksin, tavallisin askelin ja jalkaterinä. Mitä muita tapoja keksitte?

   Kirjatkaa jokaisen mittaajan tulokset ylös. Tutkikaa tuloksia. Paljonko huoneen pituus on esimerkiksi harppauksina tai jalkaterinä? Entä ovatko eri mittaajat saaneet erilaisia tuloksia? Mistä erot voisivat johtua?

   Miten pituuksia yleensä mitataan? Miksi? Miten mittaustuloksesta saataisiin mahdollisimman tarkka?

Yksikkö Mittaaja	Harppaus	Askel	Jalkaterä		

7. Selvittäkää, kuinka paljon vessapaperirullassa on paperia. Päättäkää yhdessä, haluatteko tutkia arkkien lukumäärää vai paperin pituutta (vai kenties molempia).



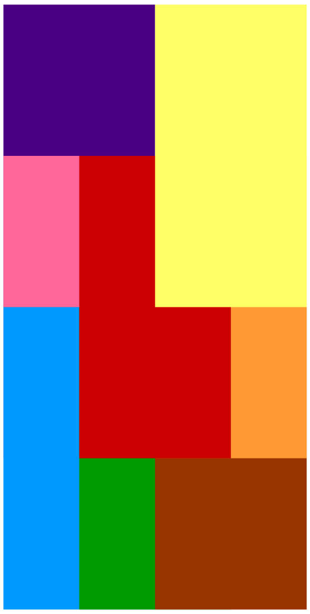
Ennen kuin ryhdytte tekemään tarkkoja mittauksia, arvioikaa, kuinka paljon paperia on. Voitte arvata arkkien lukumäärän tai pohtia esimerkiksi sitä, kuinka pitkälle paperi riittäisi, jos sitä lähdettäisiin rullaamaan auki. Kokeilkaa, kuinka lähelle totuutta arvionne osuivat!

Vessapaperia näyttäisi olevan melkoisen paljon, mutta miten voisitte selvittää paperin määrän hieman tarkemmin? Kokeilkaa eri tapoja, luovatkin ratkaisut on sallittu! Käyttäkää vaikkapa metrimittaa tai askelia. Hyödyntäkää esimerkiksi omaa pituuttanne tai verratkaa tuttuihin etäisyyksiin: montako kertaa paperi yltäisi huoneen päästä päähän?

Jos laskette arkkeja, miettikää, millä eri tavoin voitte laskea. Lasketaanko yhdessä vai jaetaanko vastuuta (esim. oma pätkä jokaiselle)? Jos kokeilette useita tapoja, pääsettekö samaan lopputulokseen? Miten voisitte varmistua siitä, ettei matkan varrella tule laskuvirheitä? Täsmääkö määrä pakkauksessa luvattuun?

Tehtävä muokattu aiemmille LUMATIKKA-kursseille osallistuneiden opettajien ja varhaiskasvattajien laatiman harjoituksen pohjalta,
Kuva: Pixabay

8. Pinoon on kasattu kahdeksan samankokoista korttia oheisen kuvan mukaisesti. Pystytkö selvittämään, missä järjestyksessä ne on ladottu?

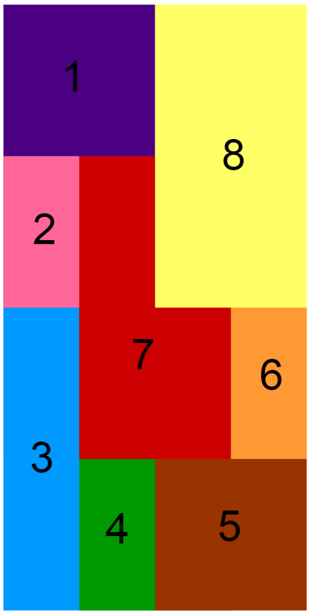


Lähde: Moscovich, I. (2009). Yli 500 ajatuspeliä: Ivan Moscovichin älytehtäviä tieteen, luonnon ja tekniikan aloilta. Königswinter: Ullmann.

Ratkaisu tehtävään 8:

Kortit on ladottu kuvan mukaisessa järjestyksessä, siis numerolla 1 merkitty kortti ensimmäisenä ja numerolla 8 merkitty kortti viimeisenä.

VINKKI! Tehtävän tekemisessä voi hyödyntää eri värisiä, keskenään samankokoisia paperinpaloja, jolloin tehtävä sopii monen ikäisille oppijoille. Tehtävää voi muokata myös niin, että käytettäviä kortteja on vähemmän.



9. Jennyn tekee mieli jäätelöä. Kioskissa on tarjolla neljää eri makua: suklaa, mansikka, päärynä ja vanilia. Jenny haluaa kahden pallon jäätelötötterön.

   Kuinka monella eri tavalla Jenny voi valita jäätelönsä?

   Keksi oma samankaltainen ongelma, ja anna kaverin ratkaista se!

Lähde: Skolverket.se. Alkuperäinen tehtävä saatavilla lyhytosoitteessa bit.ly/problembanken.
Kuva: Pixabay

Ratkaisu tehtävään 9:

Jenny voi valita kaksi makua kuudella tavalla ($4 \cdot 3 : 2 = 6$). Ensimmäiseen makuun on tarjolla neljä ja toiseen kolme eri vaihtoehtoa. Lukujen tulo pitää jakaa kahdella, sillä pallojen järjestyksellä ei ole väliä. (Muuten pitäisimme eri valintoina esimerkiksi mansikka-suklaatötteröitä, joissa yhdessä on alimmaisena suklaajäätelöä ja päällimmäisenä mansikkajäätelöä ja toisessa taas päinvastoin.)

Lisäksi Jenny voi valita tötteröönsä kaksi palloa samaa makua, minkä voi tehdä neljällä eri tavalla. Näin ollen Jennyllä on yhteensä 10 tapaa valita jäätelönsä.

10. Jokaisessa laatikossa on kolme säkkiä, jokaisessa säkissä viisi pussia ja jokaisessa pussissa neljä karkkia.

    Kuinka monta karkkia on neljässä pussissa?
    Kuinka monta pussia on kahdeksassa säkissä?
    Kuinka monta karkkia on kolmessa laatikossa?
    Kuinka monta pussia on viidessä laatikossa?
    Kuinka monta karkkia on kahdessa säkissä?

    Äiti halusi pakata 60 karkkia. Montako pussia, säkkiä ja laatikkoa hän tarvitsi?

    Villellä on kaksi laatikkoa enemmän kuin Kallella. Kuinka monta karkkia enemmän Villellä on?

    Keksi itse lisää vastaavia tehtäviä!

Kuvat: Pixabay

Ratkaisu tehtävään 10:

Neljässä pussissa on 16 karkkia. (4 pussia × 4 karkkia/pussi)
Kahdeksassa säkissä on 40 pussia. (8 säkkiä × 5 pussia/säkki)
Kolmessa laatikossa on 180 karkkia. (3 laatikkoa × 3 säkkiä/laatikko × 5 pussia/säkki × 4 karkkia/pussi)
Viidessä laatikossa on 75 pussia. (5 laatikkoa × 3 säkkiä/laatikko × 5 pussia/säkki)
Kahdessa säkissä on 40 karkkia. (2 säkkiä × 5 pussia/säkki × 4 karkkia/pussi)

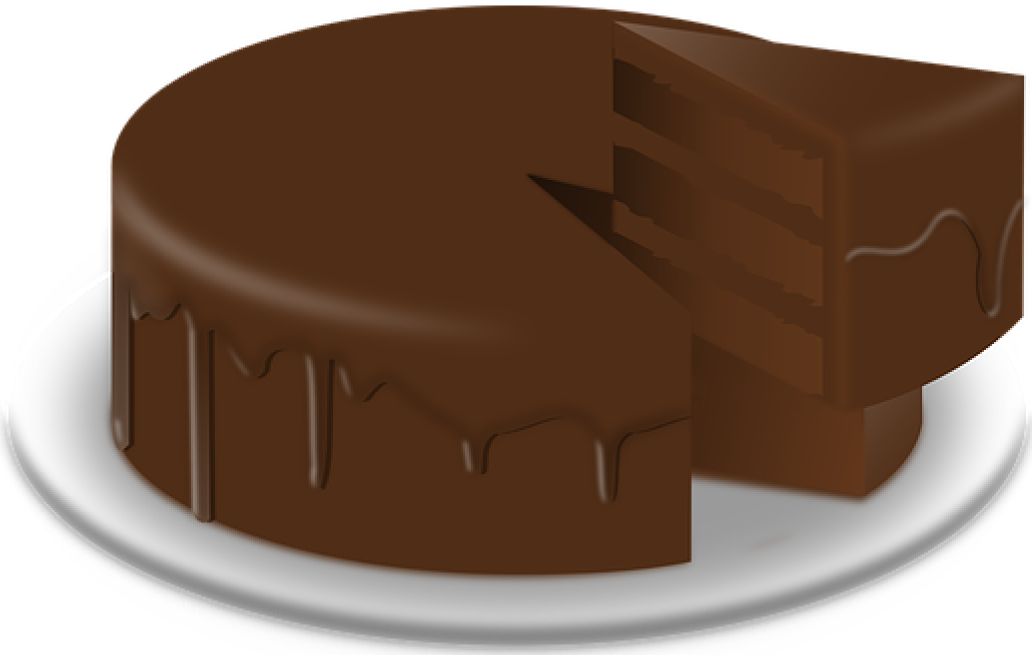
Äiti tarvitsi 60:lle karkille 15 pussia. (60 karkkia ÷ 4 karkkia/pussi)
15 pussille hän tarvitsi kolme säkkiä. (15 pussia ÷ 5 pussia/säkki)
Kolmelle säkille hän tarvitsi yhden laatikon. (3 laatikkoa ÷ 3 säkkiä/laatikko)

Yhteensä äiti tarvitsi siis 15 pussia, kolme säkkiä ja yhden laatikon.

Villellä on 120 karkkia enemmän kuin Kallella. (2 laatikkoa × 3 säkkiä/laatikko × 5 pussia/säkki × 4 karkkia/pussi)

VINKKI: Tehtävää voi helpottaa vähentämällä sisäkkäisten pakkausten määrää. Jätä esimerkiksi säkit tai laatikot kokonaan pois.

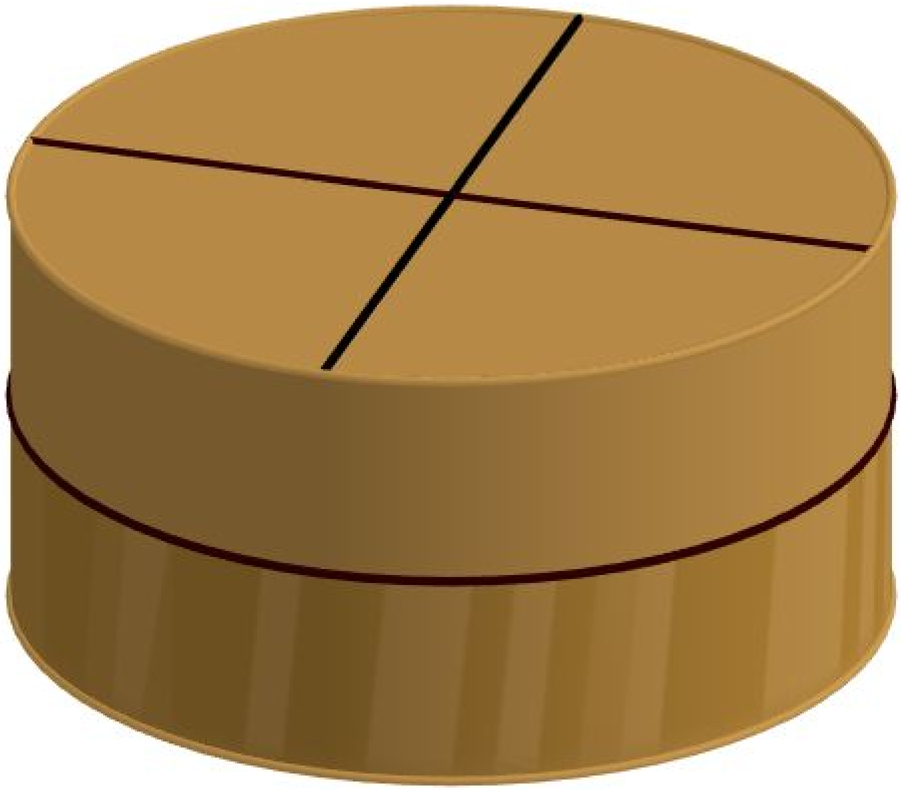
11. Miten voit kolmella suoralla leikkauksella jakaa tavallisen täytekakkupohjan kahdeksaan yhtä suureen osaan?



Kuva: Pixabay

Ratkaisu tehtävään 11:

Jaetaan kakku neljään yhtä suureen ympyräsektoriin kahdella leikkauksella ja tehdään lisäksi yksi pohjan kanssa yhdensuuntainen leikkaus.



12. Apua, joku on jättänyt tavarat hujan hajan!

Opettaja osasi antaa seuraavat vihjeet:

- Teippi on kynien ja liimapuikkojen välissä.
- Vesivärit ovat kynien alapuolella.
- Sekä vesivärit että pensselit ovat saksien vasemmalla puolella.

Osaisitko sinä sijoittaa tavarat oikeaan järjestykseen?

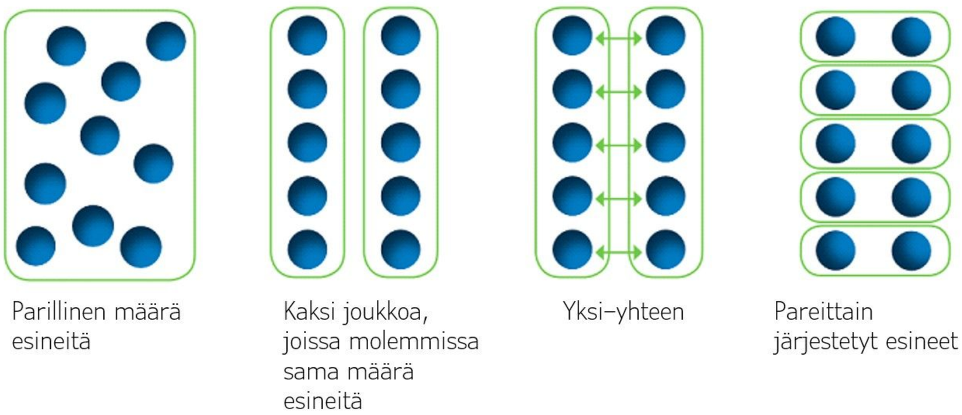
Ratkaisu tehtävään 12:

Kuvat: Pixabay

13. Kokonaisluvun parillisuus voidaan määritellä kahdella vaihtoehtoisella tavalla. Kokonaislukua sanotaan parilliseksi, jos

- se voidaan ilmoittaa luvun kaksi monikertana. (määritelmä A)
- luku voidaan ilmoittaa kahden yhtä suuren kokonaisluvun summana. (määritelmä B)

Tutki oheisia kuvia.



Mitkä kuvista liittyvät määritelmiin A ja B?

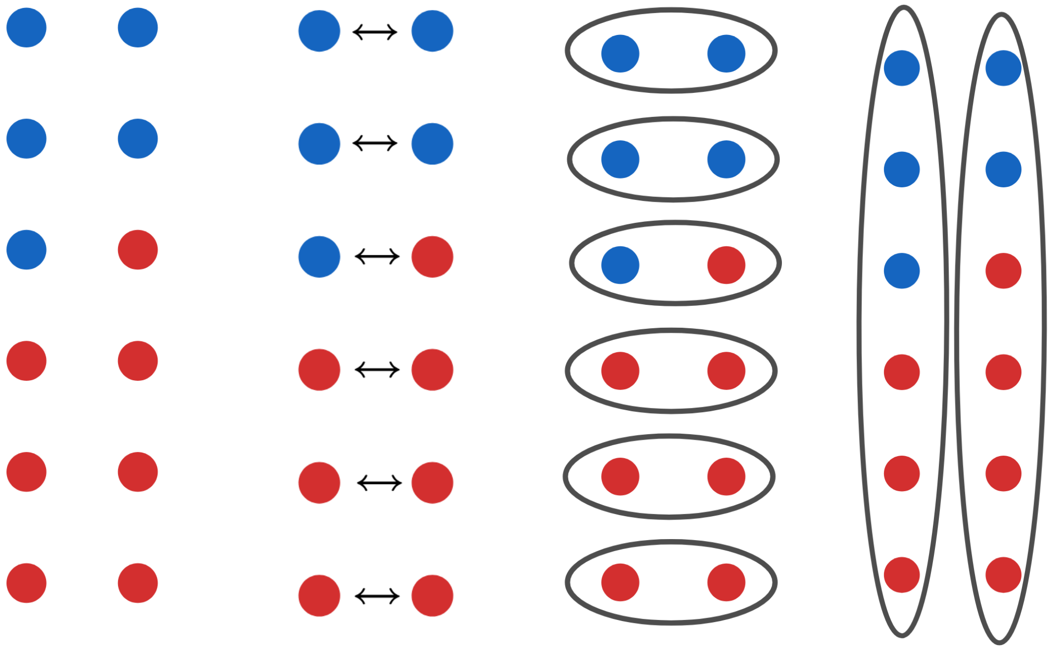
Pohdi erilaisia tapoja havainnollistaa parillista ja paritonta kokonaislukua.

Osoita, että kahden parittoman luvun summa on parillinen.

Ratkaisu tehtävään 13:

Voidaan vaikkapa tutkia esimerkkitapauksia ja havaita säännönmukaisuuksia, piirtää kuvia tai tutkia asiaa konkreettisilla esineillä.

Ohessa muutama esimerkkikuva, joissa toinen parittomista luvuista on kuvattu sinisellä ja toinen punaisella.



Formaali todistus:

Olkoot n ja m luonnollisia lukuja. Tällöin luvut $2n + 1$ ja $2m + 1$ ovat parittomia ja

$(2n + 1) + (2m + 1) = 2n + 2m + 2 = 2(n+m+1) = 2k$,

missä $k = n + m + 1$ on kokonaisluku.

Summa on siis luvun 2 monikerta (määritelmä A), ja on siis osoitettu, että kahden mielivaltaisen parittoman luvun summa on parillinen.

Itse asiassa lauseketta voidaan edelleen muokata määritelmää B vastaavaksi:
koska $2k = k + k$, kaksi parintonta lukua voidaan ilmaista kahden yhtäsuuren kokonaisluvun summana.

14. Olen jokaisena syntymäpäivänäni puhaltanut niin monta kynttilää, kuin olen täyttänyt vuosia. Yhteensä olen puhaltanut 55 kynttilää. Kuinka vanha olen?

Tehtävä muokattu teoksesta Moscovich, I. (2009). Yli 500 ajatuspeliä: Ivan Moscovichin älytehtäviä tieteen, luonnon ja tekniikan aloilta. Königswinter: Ullmann.
Kuva: Pixabay

Ratkaisu tehtävään 14:

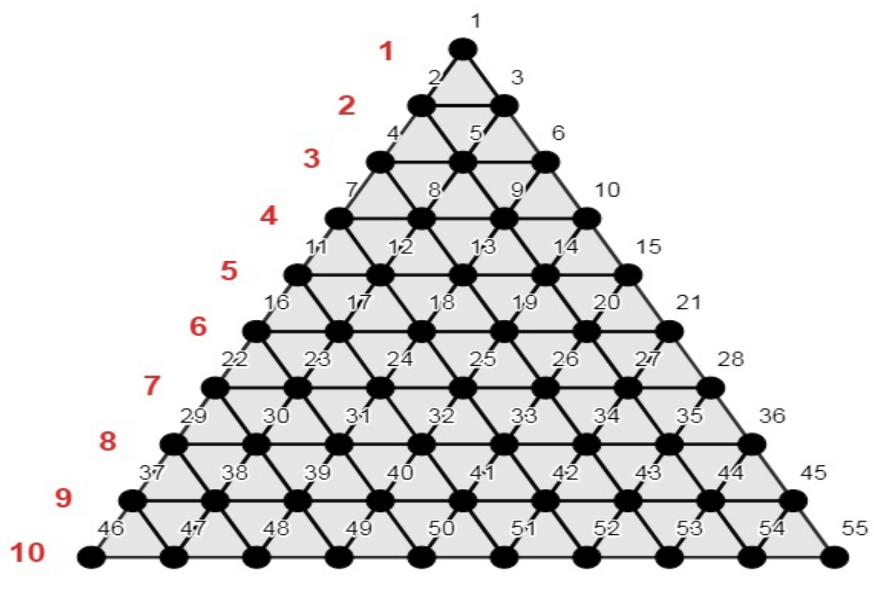
Henkilö on 10-vuotias.

Vastauksen löytää kokeilemalla todennäköisesti melko lyhyessä ajassa.

Asiaa voidaan kuitenkin havainnollistaa myös kolmiolukujen avulla. N:s kolmioluku saadaan, kun lukuja 1, 2, ... , n vastaava määrä pisteitä asetetaan allekkain tasakylkisen kolmion muotoon. N:s kolmioluku on pisteiden kokonaismäärä kolmiossa.

Esimerkiksi kolmas kolmioluku saadaan siis asettamalla ensimmäiseen riviin yksi piste, toiseen riviin kaksi pistettä ja kolmanteen riviin kolme pistettä. Pisteitä on kuviossa yhteensä kuusi kappaletta, joten kolmas kolmioluku on kuusi.

N:s kolmioluku on siis itse asiassa n ensimmäisen kokonaisluvun summa. Tätä tietoa voidaan hyödyntää tehtävän ratkaisussa. Kolmiolukuja tutkimalla havaitaan, että 55 on kymmenes kolmioluku ja siten henkilö on 10-vuotias.



Lisää kolmioluvuista: https://en.wikipedia.org/wiki/Triangular_number

Lyhytosoite: bit.ly/kolmiokuvut.

Ratkaisussa voidaan tietysti käyttää tuttua kaavaa *n* ensimmäisen kokonaisluvun summan laskemiseksi. Tällöin yhtälöstä $n(n + 1)/2 = 55$ saadaan ratkaisuksi $n = 10$.

VINKKI: Tehtävää voidaan helpottaa tai vaikeuttaa muokkaamalla kynttilöiden määrää. Alla taulukko avuksi:

Kynttilöitä	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136	153	171	190	210
Ikä	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

15. Rosvo-Roope on kirjoittanut Kelmi-Kallelle salaisen viestin, jonka avulla Kelmi-Kalle löytää ryöstösaaliin luo.

Viestin mukaan matka lipputangolta aarrekätkölle on seuraavanlainen:

5 metriä pohjoiseen
2 metriä länteen
3 metriä pohjoiseen
5 metriä itään ja
8 metriä etelään

Mikä on pienin määrä askelia, jonka Kalle-kelmi joutuu ottamaan matkalla aarteen luo, jos hän lähtee lipputangolta ja hänen askeleensa pituus on 30 senttimetriä?

Kuva: Pixabay

Ratkaisu tehtävään 15:

Pohjois-eteläsuunnassa Kelmi-Kallen on kuljettava

8 metriä pohjoiseen (ensin 5 metriä, myöhemmin 3 metriä)
8 metriä etelään

Tämä tarkoittaa, että pohjois-eteläsuunnassa hänen ei tarvitse liikkua lainkaan.

Länsi-itäsuunnassa Kelmi-Kallen on kuljettava

2 metriä länteen
5 metriä itään

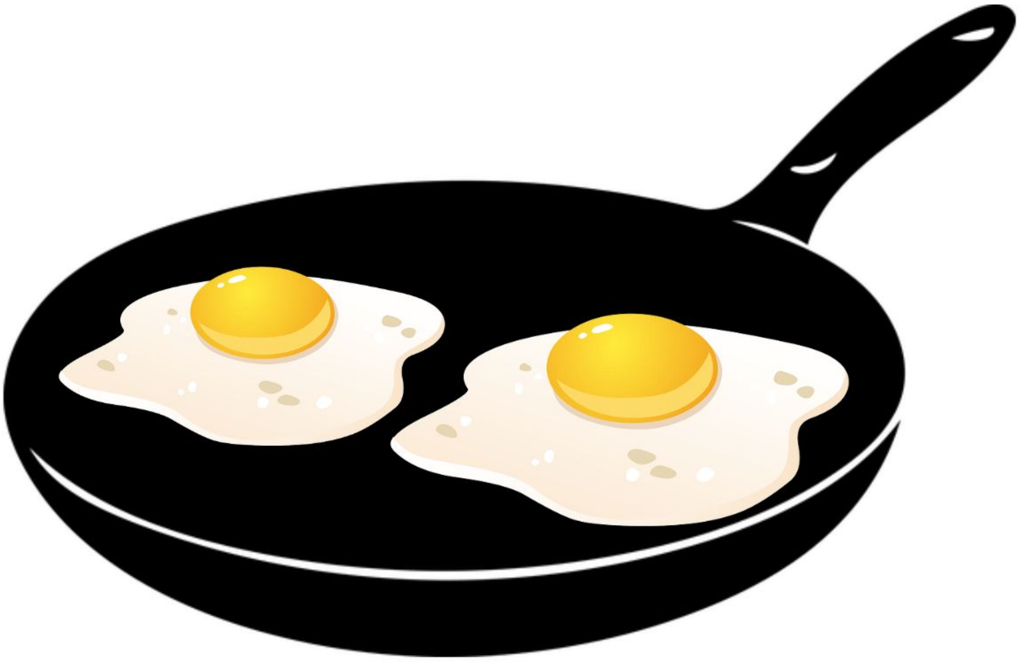
Koska itä ja länsi ovat vastakkaisissa suunnissa, riittää siis, että Kelmi-Kalle kulkee 3 metriä itään. Koska yhden askeleen pituus on 30 senttimetriä, täytyy hänen ottaa vähintään 10 askelta.

VINKKI!

Tiedon askeleen pituudesta voi jättää pois tehtävänannosta. Tällöin oppilaiden tulee lisäksi arvioida (esimerkiksi omia askeliaan mittaamalla), kuinka pitkä Kelmi-Kallen askel voisi olla.

Voidaan myös selvittää, kuinka monta askelta Kelmi-Kalle säästää, jos hän ei turhaan kulje Rosvo-Roopen ohjeessa mainittuja matkoja vaan keksii käyttää lyhyintä mahdollista reittiä.

16. Kananmunan paistamiseen kuluu 30 sekuntia per puoli, siis yhteensä minuutti. Paistinpannuun mahtuu vain kaksi munaa kerrallaan. Kuinka nopeasti pystyt paistamaan kolme kananmunaa?



Mukaillen: Pietiläinen, Kimmo. (1996.) *Toiset 200 ongelmaa*. Helsinki: Art House.
Kuva: Pixabay

Ratkaisu tehtävään 16:

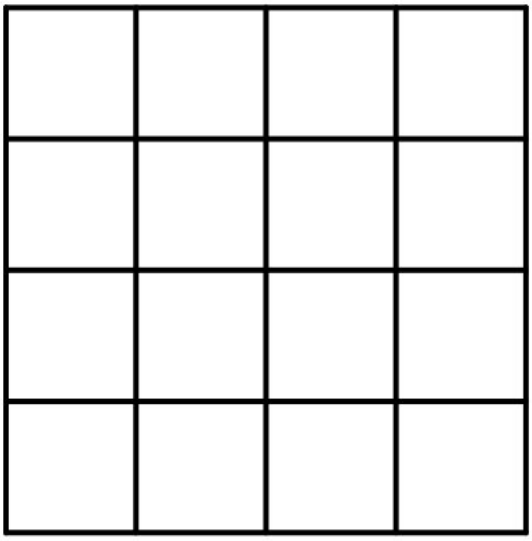
Kananmunat voi kypsentää puolessatoista minuutissa seuraavasti:

Pannulle rikotaan kaksi kananmunaa ja niitä paistetaan 30 sekuntia. Tämän jälkeen yksi kananmuna käännetään, toinen nostetaan pois paistinpannulta ja sen tilalle pannaan kolmas kananmuna paistumaan. Puolen minuutin kuluttua toinen kananmunista on valmis ja voidaan nostaa pois. Toinen käännetään, ja myös odottamassa ollut kananmuna paistetaan toiselta puolelta. Kun aikaa on kulunut yhteensä 1,5 minuuttia, on kaikki kananmunat paistettu.

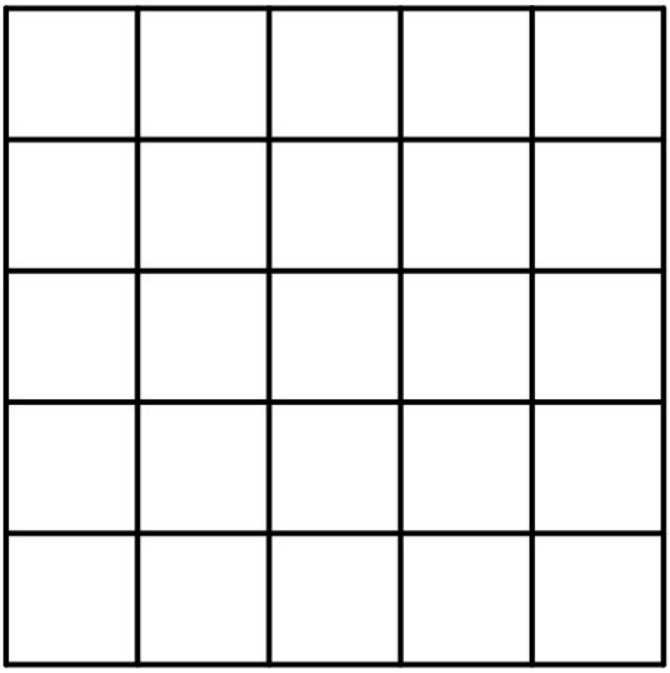
Nopeammin kananmunien kypsentäminen ei onnistu, sillä pannulla on koko ajan kaksi kananmunaa paistumassa eikä enempää kananmunia mahdu pannulle samanaikaisesti.

17.

Laske neliöiden lukumäärä 4*4-ruudukossa:



Entä kuinka monta neliötä on vastaavassa 5*5-ruudukossa?

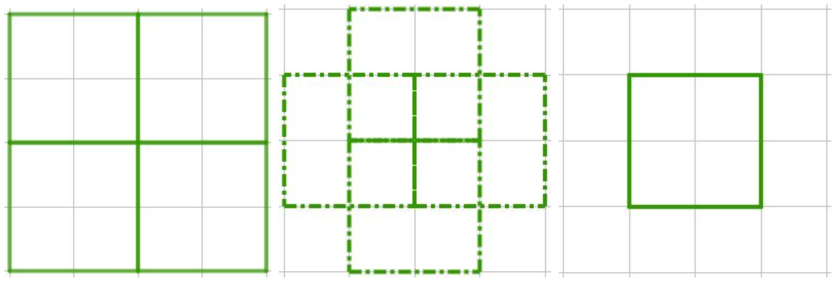


Osaatko yleistää tuloksen? Keksitkö, millä laskutoimituksella saat selville esimerkiksi 10*10-kokoisessa ruudukossa olevien neliöiden määrän?

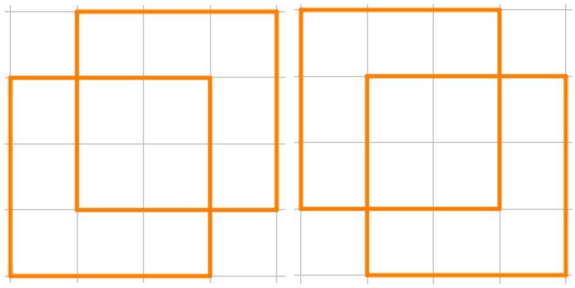
Tehtävä muokattu Oulun yliopiston LUMA-keskuksen tuottaman materiaalin pohjalta, alkuperäinen saatavilla: https://ouluma.fi/2010/07/nelioita-etsimassa/. Lyhytosoite: bit.ly/neliot.

Ratkaisu tehtävään 17:

Pieniä, yhden ruudun kokoisia neliöitä on 16 kappaletta.
2*2-kokoisia neliöitä löytyy yhteensä yhdeksän kappaletta seuraavasti:



3*3-kokoisia neliöitä löytyy neljä kappaletta:



Lisäksi ruudukko itsessään muodostaa yhden 4*4-kokoisen neliön.

Siten neliöiden kokonaismäärä on 16+9+4+1=30

Vastaavasti 5*5-ruudukosta löytyy 25 kappaletta 1*1-neliöitä, 16 kappaletta 2*2-neliöitä, yhdeksän kappaletta 3*3-neliöitä, neljä kappaletta 4*4-neliöitä sekä yksi 5*5-neliö. Yhteensä neliöitä on siis 55 kappaletta.

Yleistäen n*n-kokoisesta ruudukosta löytyvien neliöiden lukumäärä on
$n^2 + (n-1)^2 + \dots + 2^2 + 1^2$.

Siten neliöiden lukumäärä esimerkiksi 10*10-ruudukossa on
$10^2 + 9^2 + 8^2 + 7^2 + 6^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 385$.

18. Jos ryhmän jokainen oppilas kättelee jokaista oppilasta yhden kerran, kuinka monta kättelyä tapahtuu?

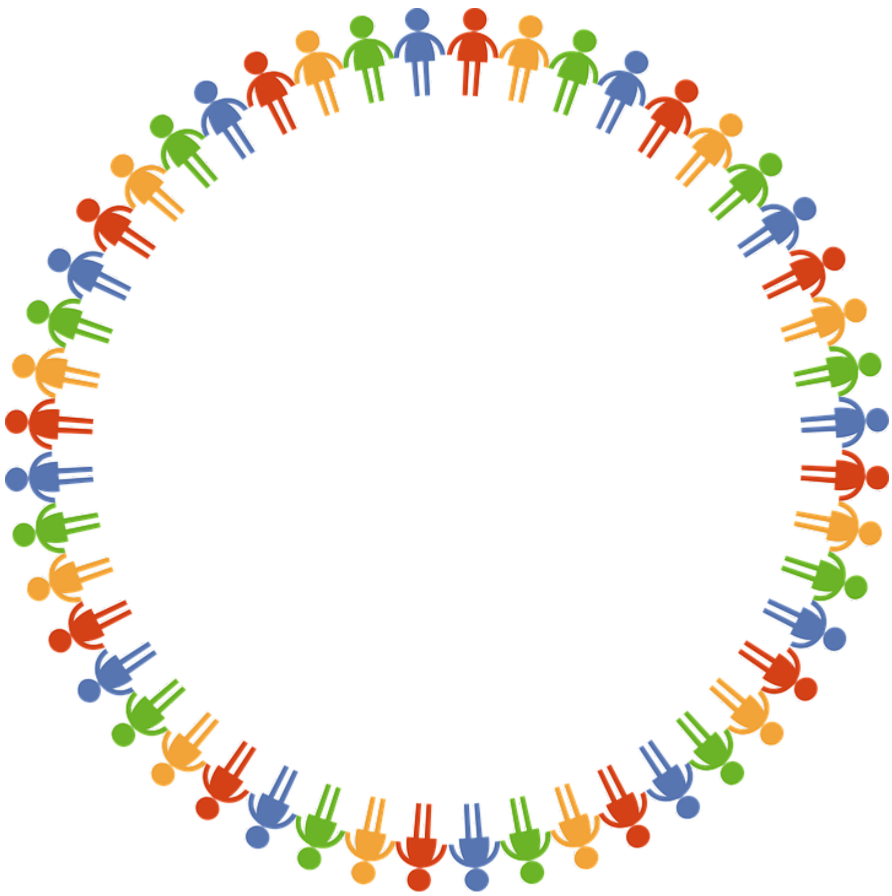
Näin pääset alkuun:

Jos kolme oppilasta kättelee toisiaan siten, että jokainen kättelee jokaista yhden kerran, kuinka monta kättelyä tapahtuu?

Entä jos kättelijöitä on viisi?

Kun kättelijöiden määrä kasvaa, tarvitaan jokin systemaattinen tapa tehdä kättelyt. Mikä tällainen tapa voisi olla? Miettikää oppilaiden kanssa yhdessä jokin hyvä tapa suorittaa kättelyt ja ratkaiskaa, kuinka monta kättelyä tapahtuu, kun luokan kaikki oppilaat kättelevät!

Entä jos kättelijöitä on 100 tai n kappaletta?



Kuva: Pixabay

Ratkaisu tehtävään 18:

Jokainen kättelee kaikkia muita kuin itseään. Jos kättelijöitä on n kappaletta, kättelijät kättelevät yhteensä n(n - 1) ihmistä. Koska kättely on kuitenkin kaksisuuntainen (jos Anna kättelee Eetua, myös Eetu kättelee Annaa, mutta silti tapahtuu vain yksi kättely), pitää lauseke jakaa kahdella.

Yleisessä tapauksessa tapahtuu siten $\frac{n(n-1)}{2}$ kättelyä.

Jos kättelijöitä on viisi, tapahtuu kättelyitä siis 10 kappaletta, sillä $5 \cdot 4 : 2 = 10$.
Jos kättelijöitä on 100, tapahtuu kättelyitä siis 4950 kappaletta, sillä $100 \cdot 99 : 2 = 4950$.

Tehtävän voi ratkaista monella muullakin tavalla. Matti Lehtisen ratkaisuja yleiseen tapaukseen löytyy Solmu-lehden numerosta 2/1998-1999:
https://matematiikkalehtisolmu.fi/1998/3/lehtinen/. Lyhytosoite: bit.ly/solmulehti.

Asiaa voi tutkia myös ohjelmoimalla: ohjelmaan syötetään kättelijöiden määrä ja saadaan tulokseksi tarvittavat kättelyt.

Pythonilla esimerkiksi näin:

```
n = 10
yhteensa = 0
for a in range(1,n+1):
    for b in range(a+1,n+1):
        print(a,"ja",b,"kättelevät")
        yhteensa += 1
print("yhteensä",yhteensa,"kättelyä")
```

Algoritmi on kuitenkin hidas, kun n on suuri. Mikä olisi tehokkaampi tapa vastauksen selvittämiseen?

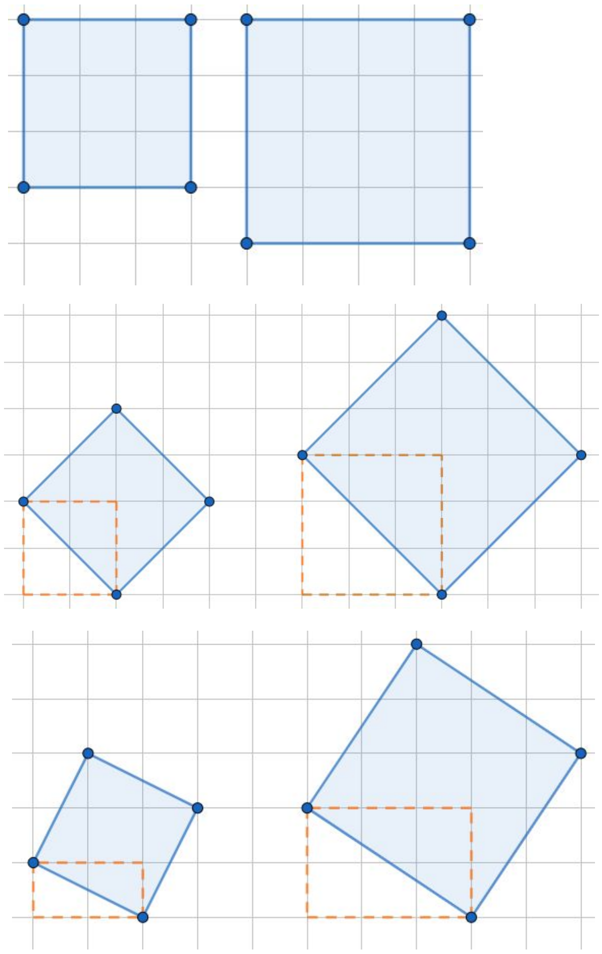
19. Muodosta geolaudalla sellaisia neliöitä, että niiden pinta-alat ovat kokonaislukuja.

Muodosta neliöt, joiden pinta-alat ovat 9 ja 16.
Muodosta neliöt, joiden pinta-alat ovat 8 ja 18.
Muodosta neliöt, joiden pinta-alat ovat 5 ja 13.

Miksi on mahdollista muodostaa neliö, jonka pinta-ala on 10, mutta ei neliötä, jonka pinta-ala on 11 tai 12?

Virtuaalinen geolauta: https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/
Lyhytosoite: bit.ly/virtuaalilauta.

Ratkaisu tehtävään 19:

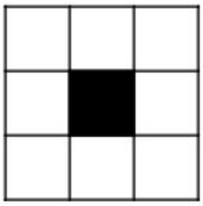


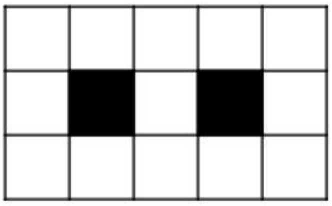
Kuviin on merkitty oranssilla katkoviivalla neliöiden konstruoinnissa hyödynnetyt apukuviot.

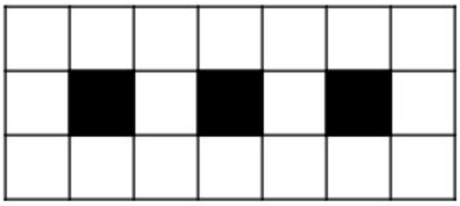
Neliö, jonka pinta-ala on 10, voitaisiin muodostaa hyödyntämällä suorakulmiota, jonka sivujen pituudet ovat 1 ja 3. Tämän suorakulmion lävistäjä toimisi neliön sivuna.

Jotta neliö voitaisiin muodostaa geolaudalle, sen pinta-alan on oltava joidenkin kahden kokonaisluvun neliöiden summa. Lukujen 11 ja 12 kohdalla näin ei ole.

20. Enes istuttaa pensaita kävelykadun varteen. Jokaisen pensaan ympäryksen hän laatoittaa kuten kuvassa: valkoiset ruudut esittävät laattoja, ja mustat ruudut kohtia, joihin pensaat istutetaan.







Kuinka monta laattaa tarvitaan kahden pensaan ympärille?
Entä neljän?
Entä viiden?
Entä kymmenen?
Entä sadan?
Entä n-kappaleen?

Kuinka monta pensasta Enesin on istutettava, jos hän haluaa käyttää 208 laattaa?

Keksi itse vastaava ongelma, ja anna kaverin ratkaista se!

Ratkaisu tehtävään 20:

Kun pensaita on n kappaletta, on laatoista ja pensaista muodostuvan suorakulmion leveys $2n + 1$ laattaa. Asiaa voi ajatella esimerkiksi siten, että ensin asetetaan paikoilleen laatta ja sitten istutetaan pensas. Tämä toistetaan jokaisen pensaan kohdalla, ja lisäksi viimeisen pensaan istuttamisen jälkeen tarvitaan vielä yksi laatta.

Suorakulmion korkeus on kolme laattaa. Koska pensaiden kohdalle ei tarvita laattoja, tulee pensaiden määrä vähentää laskulausekkeesta. Siten tarvittavien laattojen lukumäärä on

$3(2n + 1) - n = 6n + 3 - n = 5n +3.$

Tällöin vastaavasti kahden pensaan ympärille tarvitaan 13, neljän pensaan ympärille 23, viiden pensaan ympärille 28, kymmenen pensaan ympärille 53 ja sadan pensaan ympärille 503 laattaa.

208 laattaa tulee käytettyä, kun pensaita istutetaan 41 kappaletta.

21. Tommi ja Annika ovat leiponeet suuren purkillisen keksejä.

Annika haluaisi viedä keksit jalkapallojoukkueensa päättäjäisiin, Tommi taas tarjota ne jääkiekkojoukkueelleen. Sisarukset eivät pääse sopuun, joten äiti ehdottaa, että keksit vietäisiin sittenkin Tommin ja Annikan luokan kevätjuhlaan.

Annikan jalkapallojoukkueessa on 15 kenttäpelaajaa ja maalivahti, kun taas Tommin jääkiekkojoukkueen koko on 12 jäsentä. Sisarusten luokalla on 24 oppilasta.

Montako keksejä on, kun jako menee tasan, jaettiinpa herkut sitten jalkapalloilijoille, jääkiekkoilijoille tai Tommin ja Annikan luokalle?

Kuva: Pixabay

Ratkaisu tehtävään 21:

Keksejä on 48, 96 tai 144 — tai jokin muu luvun 48 monikerta, jos keksit vain mahtuvat purkkiin!

Keksien lukumäärän on nimittäin oltava jaollinen sekä 16:lla että 24:llä (ja toki myös luvulla 12, mutta kaikki luvut, jotka voi jakaa tasan luvulla 24, voi jakaa tasan myös luvulla 12).

Luvulla 16 jaollisia ovat luvut 16, 32, 48, 64, 80, 96, 112, 128, 144, 160,...
Luvulla 24 jaollisia ovat luvut 24, 48, 72, 96, 120, 144, 168,...
Listasta huomataan, että luvut 48, 96 ja 144 ovat jaollisia sekä luvulla 16 että luvulla 24.

22. Lisää laskutoimituksiin plus- ja miinusmerkkejä siten, että tulos on oikea.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 10

1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 20

1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 30

1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 40

1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 50

1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 60

1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 70

1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 80

1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 90

1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 100

Tehtävä ideoitu Alexander Bogomolnyn tuottaman materiaalin pohjalta. Alkuperäinen saatavilla Cut the Knot -sivustolla.
Lyhytosoite: bit.ly/laskutoimitukset.

Ratkaisu tehtävään 22:

Tehtävän jujuna on, että kaikkiin väleihin ei välttämättä tarvita laskutoimitusmerkkejä. Mukana voi siis olla myös kaksi- tai kolminumeroisia lukuja. Tämän voi tarvittaessa kertoa tehtävänannossa tai jättää oppilaiden itse hoksattavaksi.

Alla on tarjottu yksi mahdollinen esimerkkiratkaisu kuhunkin kohtaan. Muitakin mahdollisuuksia on.

12 - 3 - 4 + 5 - 6 + 7 + 8 - 9 = 10

1 + 2 + 34 - 5 - 6 - 7 - 8 + 9 = 20

1 - 2 + 34 - 5 - 6 + 7 - 8 + 9 = 30

1 + 2 + 34 + 5 + 6 - 7 + 8 - 9 = 40

1 + 2 + 3 - 4 + 56 - 7 + 8 - 9 = 50

1 + 2 + 3 + 4 + 56 - 7 - 8 + 9 = 60

1 + 2 - 3 + 4 + 56 - 7 + 8 + 9 = 70

1 + 2 + 3 - 4 - 5 + 6 + 78 + 9 = 80

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 78 - 9 = 90

1 + 2 + 3 - 4 + 5 + 6 + 78 + 9 = 100

VINKKI: Sen sijaan, että yritettäisiin löytää ratkaisut kaikkiin kohtiin, voidaan yrittää löytää yhteen kohtaan mahdollisimman monta erilaista ratkaisua. Esimerkiksi tehtävään

1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 100

tunnetaan ainakin 12 erilaista ratkaisua. Mikä on pienin määrä plus- tai miinusmerkkejä, jolla summan saavuttaminen onnistuu?

23. *Helpompi versio:*

Valitse mikä tahansa kokonaisluku väliltä 1-9. Kerro luku 37 ensin valitsemallasi luvulla ja sitten luvulla 3. Mitä tapahtuu?

Kokeile samaa uudestaan, mutta valitse eri luku kuin ensimmäisellä kerralla.
Vertaile vastauksia kaverisi kanssa. Mitä näyttäisi tapahtuvan? Miksi temppu toimii?

Hieman haastavampi versio:
Valitse mikä tahansa kokonaisluku väliltä 1-9. Kerro luku 37037 ensin valitsemallasi luvulla ja sitten luvulla 3. Mitä tapahtuu?

Kokeile samaa uudestaan, mutta valitse eri luku kuin ensimmäisellä kerralla.
Vertaile vastauksia kaverisi kanssa. Mitä näyttäisi tapahtuvan? Miksi temppu toimii?

Seuraava temppu toimii vain, jos olet vähintään 10-vuotias:

Kerro luku 3367 iälläsi ja sitten luvulla 3. Mitä tapahtuu? Kokeile samaa esimerkiksi (vähintään 10-vuotiaiden) sisarustesi ja vanhempiesi i'iällä. Mitä huomaat? Miksi temppu toimii?

Tehtävä muokattu teoksesta Gardner, M. (1987). Riddles of the sphinx: And other mathematical puzzle tales. Washington, D.C.: Mathematical Association of America.
Kuva: Pixabay

Ratkaisu tehtävään 23:

Helpompi versio:

Vastaukseksi tulee k*111, missä k on valittu luku väliltä 1-9. Siis jos oppilas on valinnut esimerkiksi luvun 5, tulee vastaukseksi tällöin 555. Temppu toimii, koska 37*3=111.

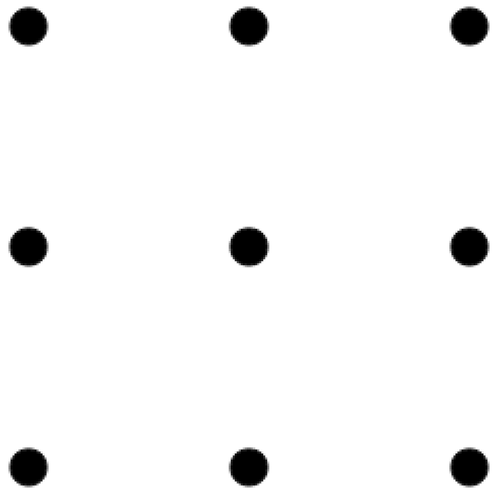
Hieman haastavampi versio:

Vastaukseksi tulee k*111111, missä k on valittu luku väliltä 1-9. Siis jos oppilas on valinnut esimerkiksi luvun 5, tulee vastaukseksi tällöin 555555. Temppu toimii, koska 37037*3=111111.

Vähintään 10-vuotiaille:

Vastaukseksi tulee kuusinumeroinen luku, jossa esiintyy ikä kolme kertaa peräkkäin. Siis esimerkiksi 12-vuotiaalla vastaukseksi tulee 121212. Temppu toimii, koska 3367*3=10101.

24. Yhdistä alla olevat pisteet korkeintaan neljällä suoralla viivalla nostamatta kynää paperista.

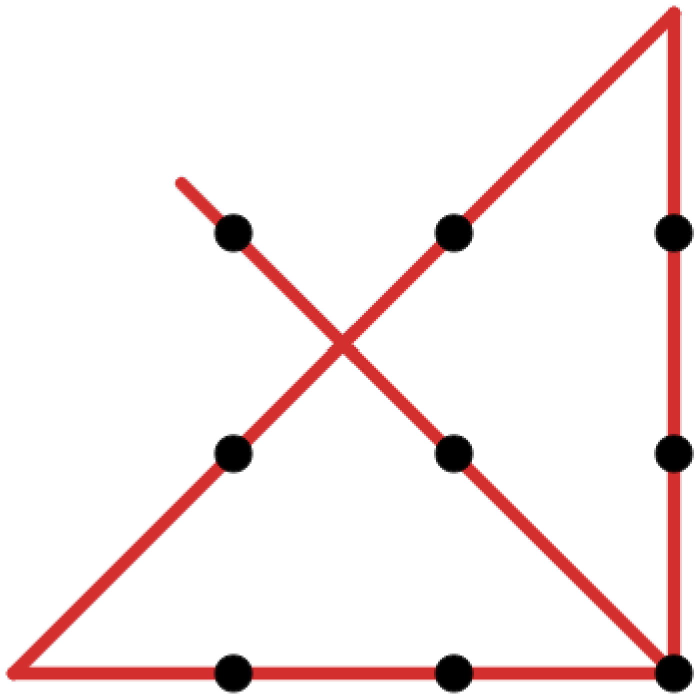


Klassinen tehtävä tunnetaan nimellä *Nine dots puzzle*.

Tehtävänanto Wikipediassa: https://en.wikipedia.org/wiki Thinking_outside_the_box#Nine_dots_puzzle.

Lyhytosoite: bit.ly/9pistetta.

Ratkaisu tehtävään 24:

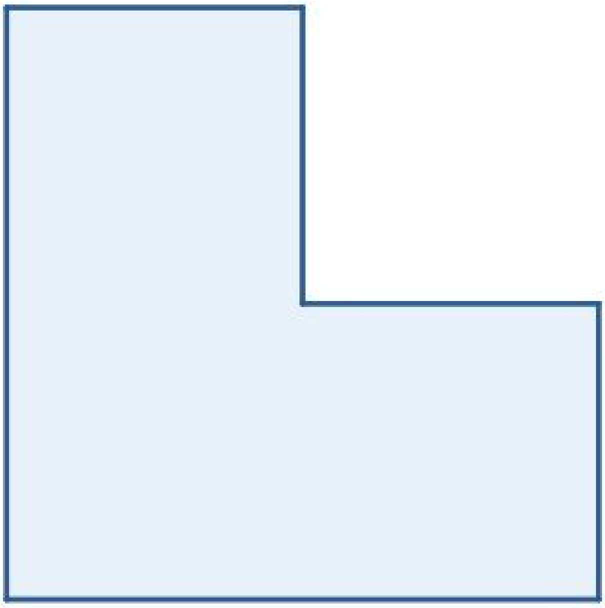


Perinteisen ratkaisun lisäksi on kehitetty joukko muita ratkaisutapoja, oheisen linkin takana joitakin esimerkkejä: https://www.mycoted.com/Nine_Dots. Lyhytosoite: bit.ly/eriratkaisuja.

25. Jaa oheinen neliö neljään samanlaiseen osaan mahdollisimman monella eri tavalla.

Montako tapaa keksit?

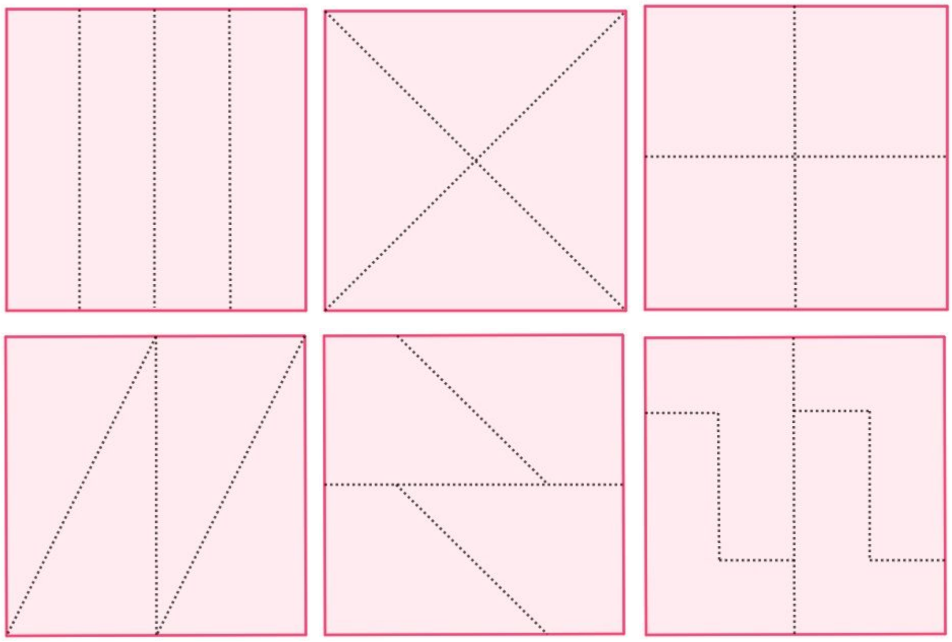
Entä onnistuuko sinisen kuvion jakaminen neljään samanlaiseen osaan?



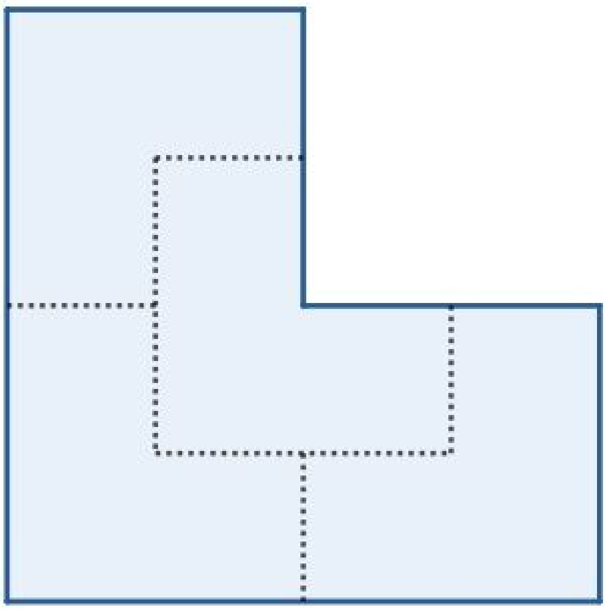
Jälkimmäisen tehtävän lähde: Pietiläinen, Kimmo. (1996.) *Toiset 200 ongelmaa*. Helsinki: Art House.

Ratkaisu tehtävään 25:

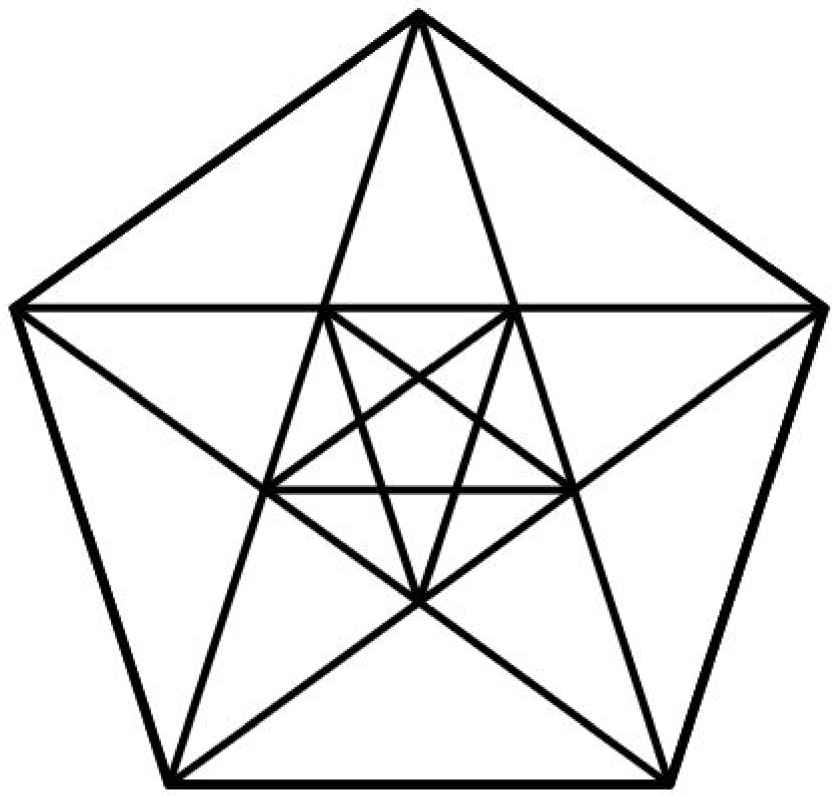
Erilaisia tapoja jakaa neliö neljään samanlaiseen osaan (muitakin on!):



Sinisen kuvion jakaminen neljään osaan on mahdollista. Osat ovat itse asiassa yhdenmuotoisia alkuperäisen kuvion kanssa:



26. Laske A-kirjainten määrä alla olevassa kuviossa.



Huomaa, että A-kirjain määritellään seuraavasti:

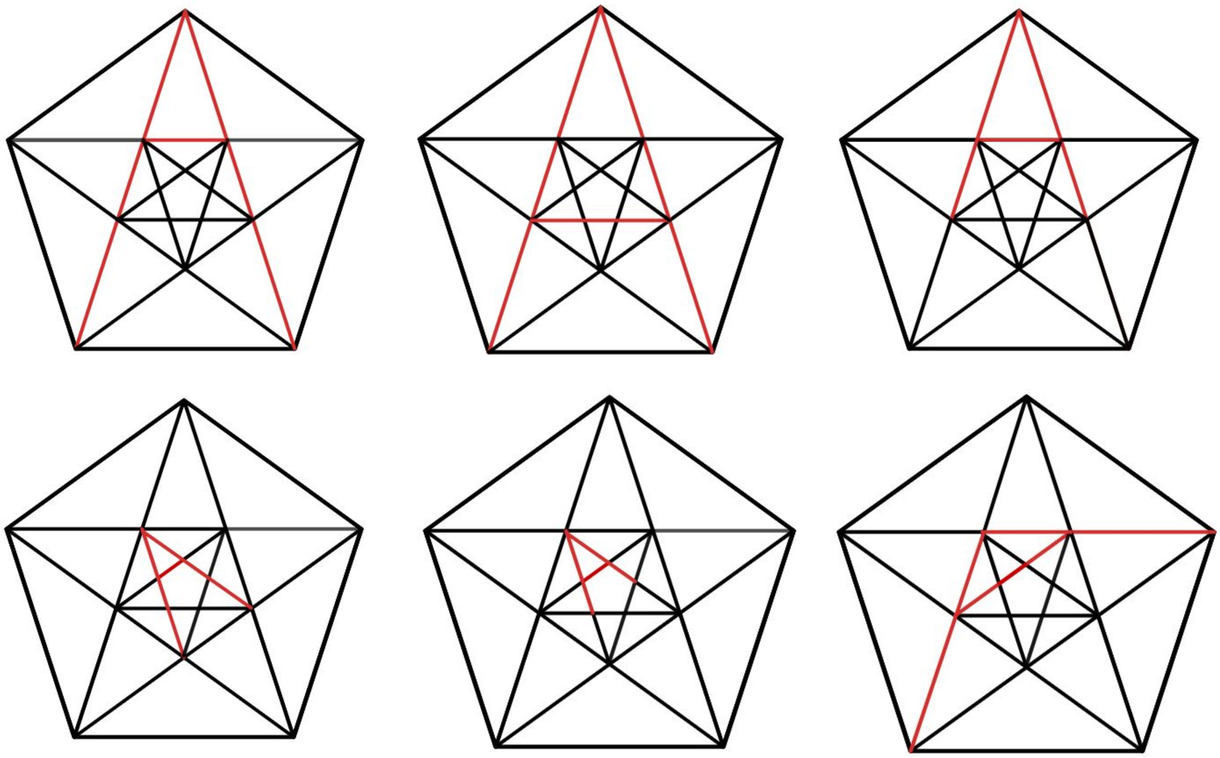
A-kirjaimen kyljet ovat keskenään yhtä pitkät, ja poikkiviiva erottaa kirjaimesta tasakylkisen kolmion. Jos kyljet yhdistettäisiin poikkiviivan kanssa yhdensuuntaisella janalla, syntyisi kaksi yhdenmuotoista kolmiota. A-kirjaimen leveydellä tai poikkiviivalla erotettavan kolmion koolla ei ole väliä.

Alla olevassa esimerkkikuvassa oranssi, vihreä ja sininen kuvio ovat A-kirjaimia, punainen ei.

Tehtävän lähde: Gardner, M. (1987). Riddles of the sphinx: And other mathematical puzzle tales. Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Ratkaisu tehtävään 26:

Kuviossa on kuutta eri tyyppiä A-kirjaimia, viisi kappaletta kutakin. Yhteensä A-kirjaimia on siis 30 kappaletta.

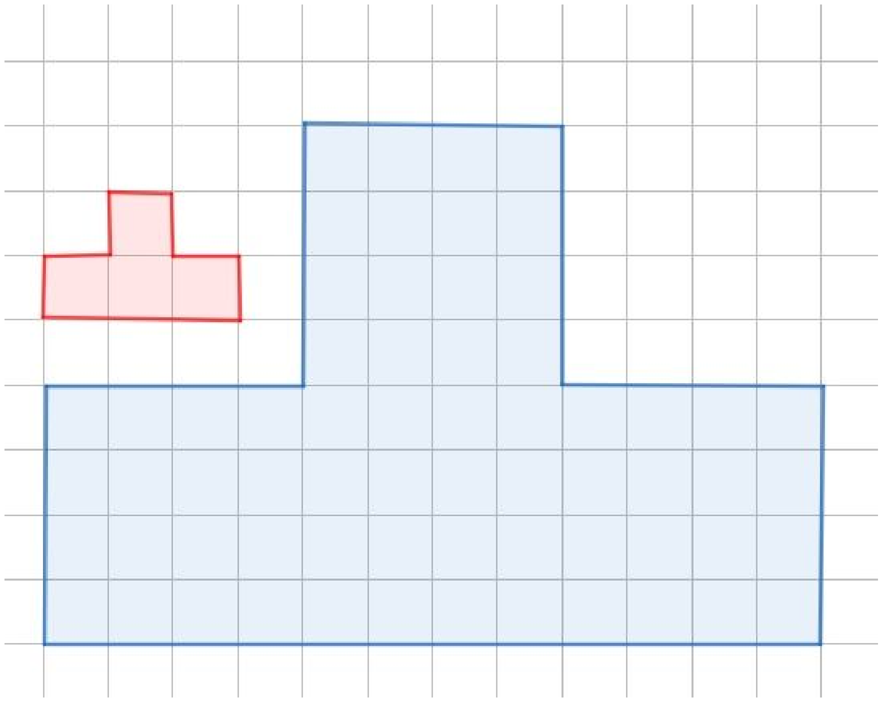


27. Uima-altaan pohja on tarkoitus laatoittaa punaisilla laatoilla.

Mitä samaa ja mitä erilaista on uima-altaan pohjassa ja laatoissa?

Montako laattaa tarvitaan peittämään uima-altaan pohja?

Laattoja ei saa leikata, vaan ne tulisi käyttää kokonaisina. Miten laatat tulisi asetella?

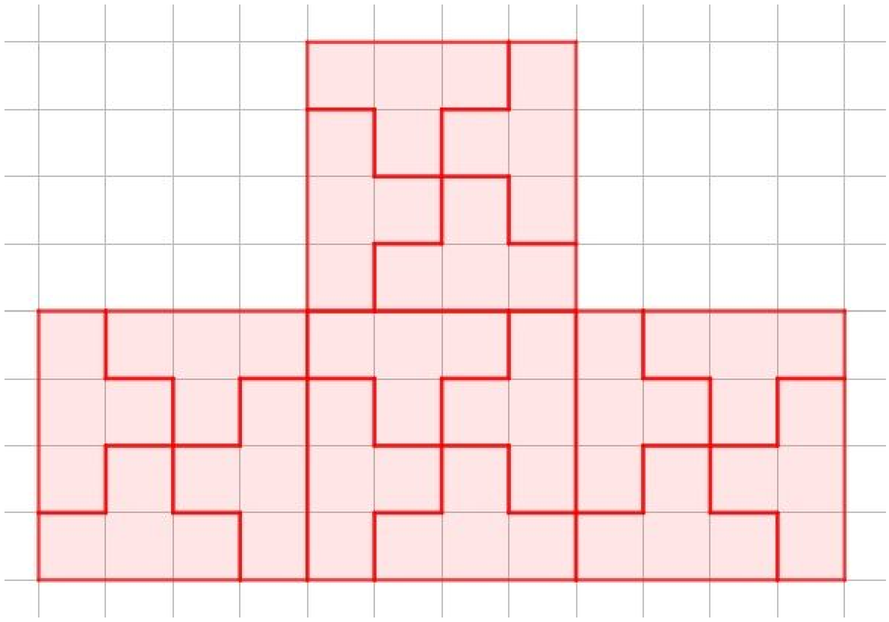


Tehtävä muokattu teoksesta Moscovich, I. (2009). Yli 500 ajatuspeliä: Ivan Moscovichin älytehtäviä tieteen, luonnon ja tekniikan aloilta. Königswinter: Ullmann.

Ratkaisu tehtävään 27:

Uima-altaan pohja ja laatat ovat yhdenmuotoisia yhdenmuotoisuussuhteella 4:1.

Yhden laatan pinta-ala on neljä ruutua ja uima-altaan pohjan pinta-ala on 64 ruutua, joten laattoja tarvitaan 16 kappaletta. Laatat voidaan asettaa esimerkiksi seuraavalla tavalla:



28. Monien vuosien jälkeen kaksi matematiikkaa rakastavaa ystävystä, Hypatia ja Pythagoras, tapaavat jälleen. He keskustelevat näin:

Pythagoras: “Oletko naimisissa? Onko sinulla lapsia? Jos on, kuinka monta ja minkä ikäisiä?”
Hypatia: “Kyllä, olen naimisissa ja minulla on kolme lasta, joiden ikien tulo on 36.”
Pythagoras: “En voi päätellä heidän ikiään. Voitko antaa vinkin?”
Hypatia: “Ok! Entä jos kerron, että heidän ikiensä summa on sama kuin numero osoitteessasi.”
Pythagoras: “En voi vieläkään päätellä heidän ikiäänsä. Voitko antaa lisävinkin?”
Hypatia: “Viimeinen mahdollisuus! Vanhimmalla heistä on vaalea tukka!”
Pythagoras: “Ahaa! Nyt tiedän tarkalleen, minkä ikäisiä lapsesi ovat!”

Kuinka vanhoja Hypatian lapset ovat? Ratkaise arvoitus matemaattisen perustelun avulla. Minkälaista matemaattista päättelyä erilaiset perustelut edellyttävät?

Google on käyttänyt tämän päättelytehtävän sovellusta osana työhaastatteluitaan.
Kuva: Pixabay

Ratkaisu tehtävään 28:

Taulukoidaan lukukolmikot, joiden tulo on 36, ja lasketaan niiden summat:

Nuorimman ikä	Keskimmäisen ikä	Vanhimman ikä	Ikien summa
1	1	36	38
1	2	18	21
1	3	12	16
1	4	9	14
1	6	6	13
2	2	9	13
2	3	6	11
3	3	4	10

Koska tieto ikien summasta ei ollut riittävä, pystytään päättelemään, että ikien summan täytyy olla 13 (taulukosta nähdään, että muihin summiin voidaan päätyä vain yhdellä tavalla). Lisätieto kertoi, että yksi lapsista on vanhempi kuin muut, ja sen avulla Pythagoras pystyi päättelemään lasten iät. Hypatian lapset ovat siis 2-, 2-ja 9-vuotiaita.

29.

Neljä kaverusta haluaa ylittää joen, mutta silta kestää vain kahden ihmisen painon kerrallaan. Heillä on mukanaan vain yksi lyhty, eivätkä he uskalla kulkea sillalla ilman sitä, sillä pimeä on jo laskeutunut. Aarolla menee sillan ylittämiseen 1 minuutti, Bealla 2 minuuttia, Christinalla 5 minuuttia ja Danielilla 8 minuuttia. Jos kaksi henkilöä liikkuu yhdessä, kulkevat he hitaamman vauhtia. Kuinka nopeasti he pystyvät ylittämään joen?

Tehtävä Wikipediassa: https://en.wikipedia.org/wiki/Bridge_and_torch_problem. Lyhytosoite: bit.ly/lyhtyongelma.

Kuva: Pixabay

Ratkaisu tehtävään 29:

Koska lamppuja on vain yksi, on kuljettava pareittain siten, että toinen palaa viemään lampun takaisin lähtöpisteeseen.

Kaverukset voivat ylittää joen seuraavasti:

Aaro ja Bea ylittävät joen (2 minuuttia)
Aaro palaa takaisin (1 minuutti)
Christina ja Daniel ylittävät joen (8 minuuttia)
Bea palaa takaisin (2 minuuttia)
Aaro ja Bea ylittävät joen (2 minuuttia)

Näin menetellen joen ylittämiseen kuluu 15 minuuttia.

Toinen vaihtoehto on, että ensimmäinen lähtöpisteeseen palaaja on Bea ja toinen Aaro, mutta kokonaismatka-aika on tällöin sama.

30. Luokallinen oppilaita oli matkalla leirikouluun, ja kesken pitkän bussimatkan pysähdyttiin huoltoasemalle jaloittelemaan. Huoltoaseman omistaja ei osannut laskea kovin hyvin, joten kaikkien huoltoasemalla myytävien tuotteiden hinnat olivat tasaeuroja.

Koko luokalle ostettiin jäätelöt 54 eurolla. Juotavaksi 15 oppilasta otti kaakaon (yhteensä 30 euroa) ja kolme valitsi teen (yhteensä 3 euroa). Lisäksi 3 oppilasta valitsi kahvin ja 6 oppilasta mehun.

Kassalla loppusummaksi ilmoitettiin 103 euroa. Opettaja tajusi heti, ettei summa voi olla oikein. Mistä hän sen tiesi?

Tehtävä muokattu teoksesta Pietiläinen, Kimmo. (1996.) *Toiset 200 ongelmaa*. Helsinki: Art House.
Kuva: Pixabay

Ratkaisu tehtävään 30:

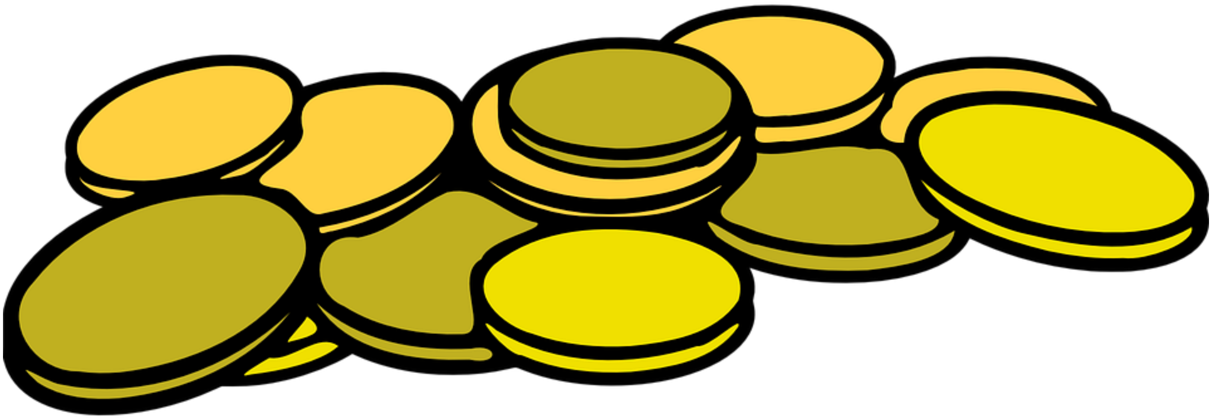
Loppusumma ei ole jaollinen kolmella. Jos merkitään kahvin hintaa kirjaimella k ja mehun hintaa kirjaimella m, saadaan ostosten loppusummaksi nimittäin

$54 + 30 + 3 + 3k + 6m = 87 + 3k + 6m = 3*(29+k+2m)$,

mikä toden totta on jaollinen kolmella.

31. Sinulla on yhdeksän kolikkoa ja vaaka. Yksi kolikoista on kuitenkin väärennetty ja kevyempi kuin muut. Mikä on pienin määrä punnituksia, joilla voit saada selville, mikä kolikoista ei ole aito?

    Entä montako punnitusta vähintään tarvitaan, jos sinulla on 81 kolikkoa, joista yksi on väärennetty?



Tehtävä Wikipediassa: https://en.wikipedia.org/wiki/Balance_puzzle#Nine-coin_problem. Lyhytosoite: bit.ly/kolikot.
Kuva: Pixabay

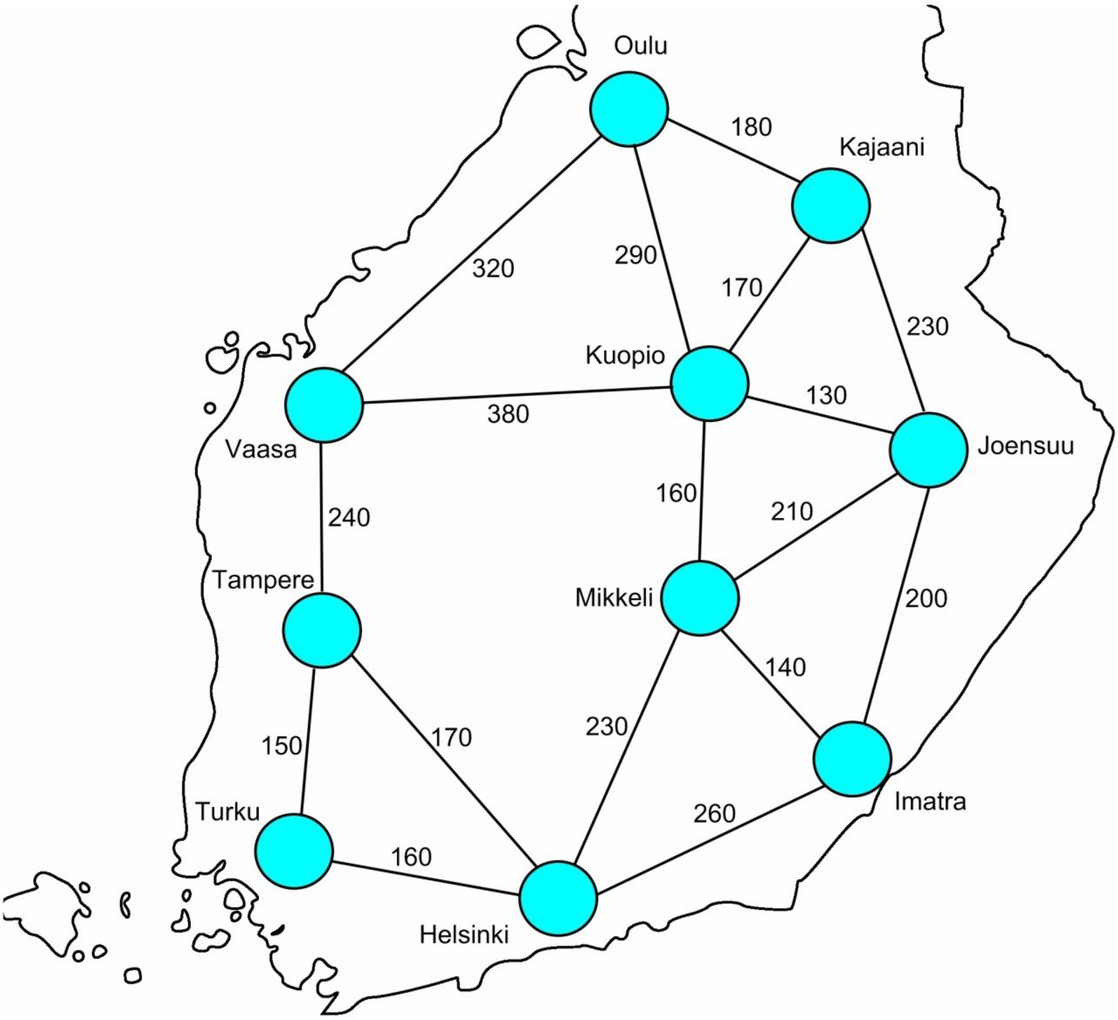
Ratkaisu tehtävään 31:

Väärennetty kolikko voidaan löytää kahdella punnituksella. Tällöin kumpaankin vaakakuppiin asetetaan ensin kolme kolikkoa, jolloin kolme kolikkoa jää pois ensimmäisestä punnituksesta. Väärennetty kolikko on tällöin vaakakupissa, jonka sisältö on kevyempi tai jos vaaka on tasapainossa, väärennetty kolikko on niiden kolmen kolikon joukossa, jotka eivät ole vaa'alla.

Sitten samaa ideaa sovelletaan niihin kolmeen kolikkoon, joiden joukossa väärennetyn kolikon tiedetään olevan: kumpaankin vaakakuppiin asetetaan yksi kolikko, ja kolmas kolikko jää vaa'an ulkopuolelle.

Vastaavasti 81 kolikon tapauksessa tarvitaan neljä punnitusta. Ensimmäistä punnitusta varten kolikot jaetaan ensin 27 kolikon ryhmiin, joihin sovelletaan samaa ideaa kuin edellä. Kun on saatu selville, minkä 27 kolikon joukossa väärennetty kolikko on, tehdään yksi punnitus käyttäen yhdeksän kolikon ryhmiä. Viimeiselle yhdeksälle kolikolle tarvitaan vielä kaksi punnitusta.

32. Suomen tietoverkkoa uusitaan uudella valokaapelitekniikalla. Koska uusi tekniikka on kallista, halutaan kaupunkien välille rakentaa mahdollisimman edullinen kaikki kaupungit yhdistävä verkko.



- Mikä on minimimäärä valokaapelia, jolla tekniikan uusiminen voidaan toteuttaa?
- Millaiset toimet johtavat edullisimman ratkaisun löytymiseen?
- Suunnittele toimintaohje, jota seuraamalla ongelma voidaan ratkaista.

Ratkaisu tehtävään 32:

Yleisiä vihjeitä:

- Verkon ei tarvitse olla suljettu silmukka.
- Verkko saa haarautua.
- Kuhunkin kaupunkiin tarvitaan vain yksi yhteys.
- Kokeile, että poistat yhden yhteyden ja otat toisen tilalle!

Toimintaohje 1:

1. Valitse yhteydet järjestyksessä lyhimmästä pisimpään.
2. Älä valitse yhteyttä, jos kaupunkien välillä on jo yhteys.
3. Toista, kunnes olet käynyt läpi kaikki yhteydet.

Soveltaminen:

Etäisyydet on käyty läpi lyhimmästä pisimpään. Jos kaupunkien välillä on jo yhteys, kyseinen yhteys on yliviivattu.

> Kuopio-Joensuu (130), Mikkeli-Imatra (140), Turku-Tampere (150), Turku-Helsinki (160), Mikkeli-Kuopio (160), Kuopio-Kajaani (170), ~~Tampere-Helsinki (170)~~, Kajaani-Oulu (180), ~~Joensuu-Imatra (200), Joensuu-Mikkeli (210),~~ Mikkeli-Helsinki (230), ~~Joensuu-Kajaani (230),~~ Tampere-Vaasa (240), ~~Helsinki-Imatra (260), Kuopio-Oulu (290), Oulu-Vaasa (320), Vaasa-Kuopio (380)~~

Nyt tarvittavan valokaapelin määrä voidaan laskea jäljelle jääneistä yhteyksistä:
130 + 140 + 150 + 160 +160 + 170 + 180 + 230 + 240 = 1560

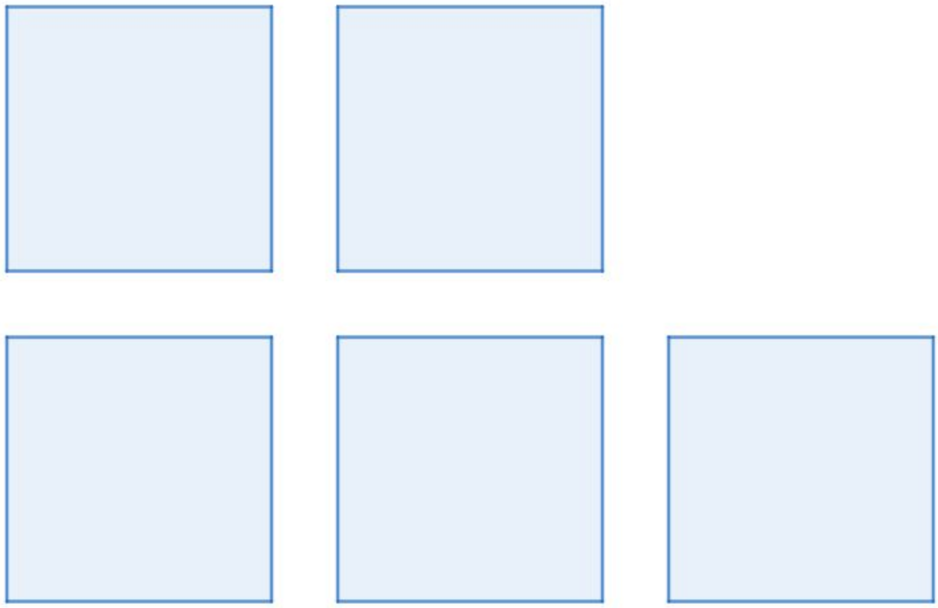
Menetelmä tunnetaan **Kruskalin algoritmina**.

Toimintaohje 2:

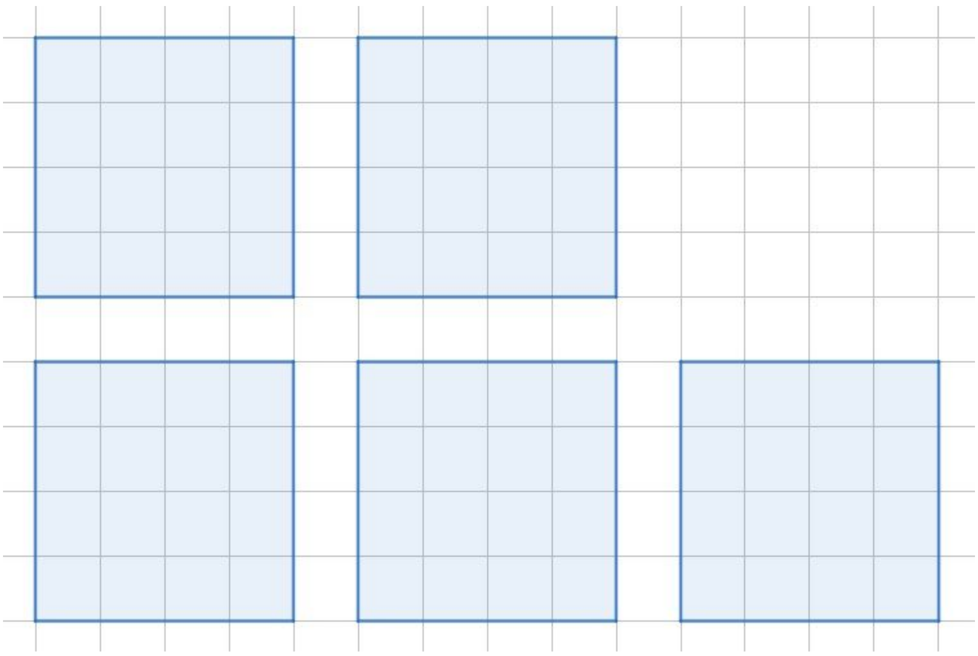
1. Valitse tarkasteluun mikä tahansa kaupunki. Valitse kaupunkiin liittyvistä yhteyksistä lyhin.
2. Toista kunnes olet käynyt läpi kaikki kaupungit.
3. Jos kaikkien kaupunkien välillä ei ole yhteyttä, ota tarkasteluun ne yhteydet, jotka yhdistävät jo valitut verkot. Valitse niistä yhteyksistä lyhin.
4. Toista kunnes kaikkien kaupunkien välillä on yhteys.

Katso Mika Koposen esimerkki algoritmin soveltamisesta. Lyhytosoite: bit.ly/valokaapeli.
Menetelmä tunnetaan **Borůvkan algoritmina**.

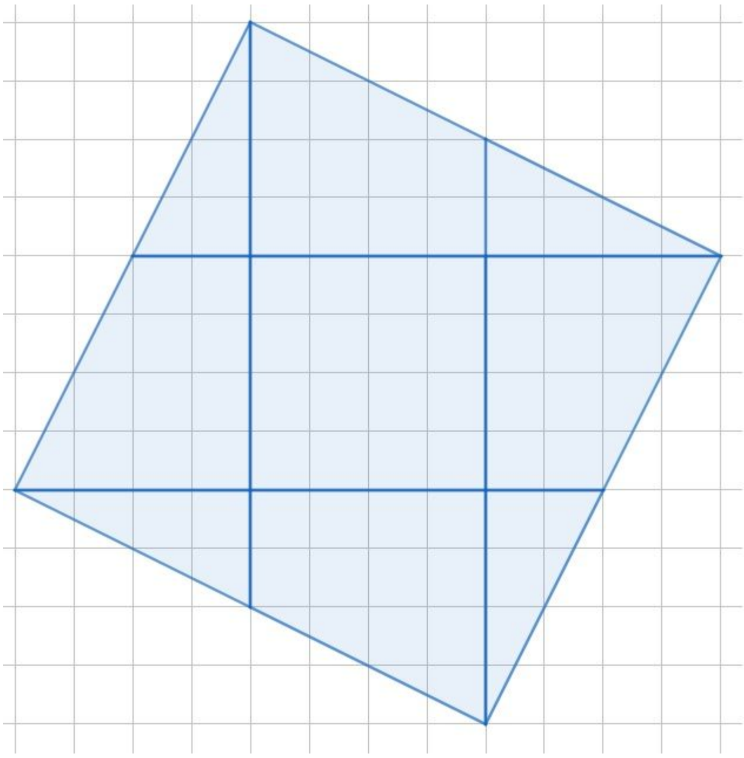
33. Onko viidestä pienestä neliöstä mahdollista muodostaa yksi suurempi neliö tekemällä vain suoria leikkauksia?



Vinkki! Ruuduista voi olla apua:



Ratkaisu tehtävään 33:

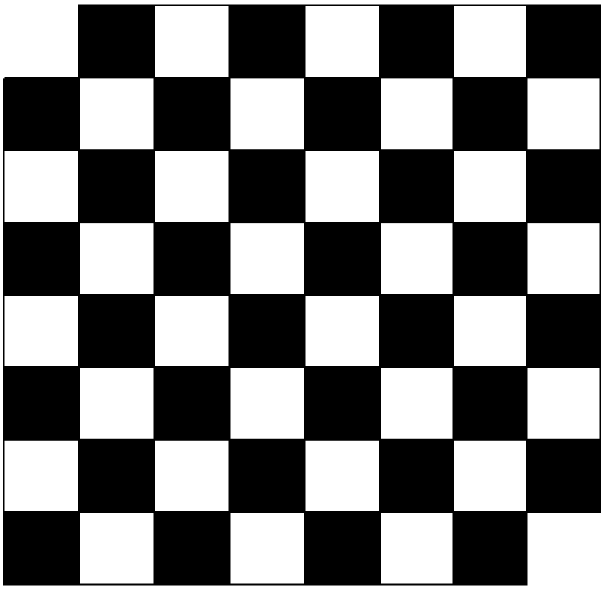


Selitys vinkkiin: Koska kaikki neliöt ovat keskenään yhdenmuotoisia, voidaan yleisyyden kärsimättä hyödyntää kuvaa, jossa pienen neliön sivun pituus on 4 yksikköä. Tällöin suuren neliön pinta-ala on 80 ruutua ja sivun pituus $\sqrt{80}$, mikä muokkautuu edelleen muotoon $2\sqrt{20}$.

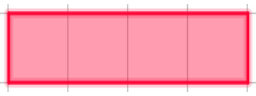
Pythagoraan lauseesta tiedetään, että jos suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat 2 ja 4, on hypotenuusan pituus $\sqrt{20}$, sillä $2^2 + 4^2 = 20.$ Tätä tietoa hyödyntäen on leikattu neljä alkuperäistä neliötä kahtia suorakulmaiseksi kolmioksi ja puolisuunnikkaaksi siten, että kolmion hypotenuusan ja puolisuunnikkaan pisimmän sivun pituudet ovat $\sqrt{20}$.

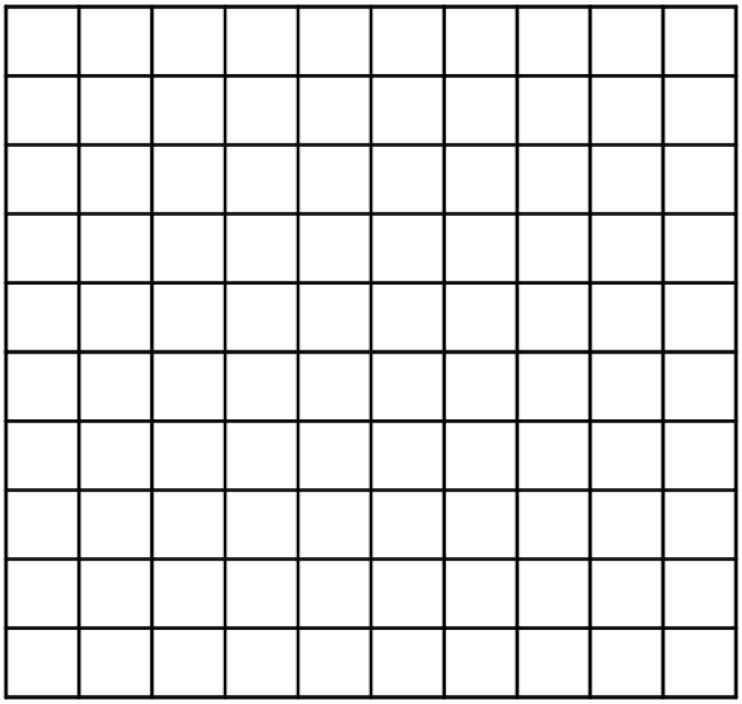
Suuri neliö on tämän jälkeen rakennettu siten, että kukin sivu muodostuu kahdesta osasta, joiden kummankin pituus on $\sqrt{20}$.

34. Shakkilaudasta poistetaan kaksi ruutua vastakkaisista kulmista. Pystytkö peittämään laudan dominopalikoilla, joiden koko on 2*1 shakkilaudan ruutua?



Entä voidaanko 10*10-lauta peittää palikoilla, joiden koko on 4*1 ruutua?



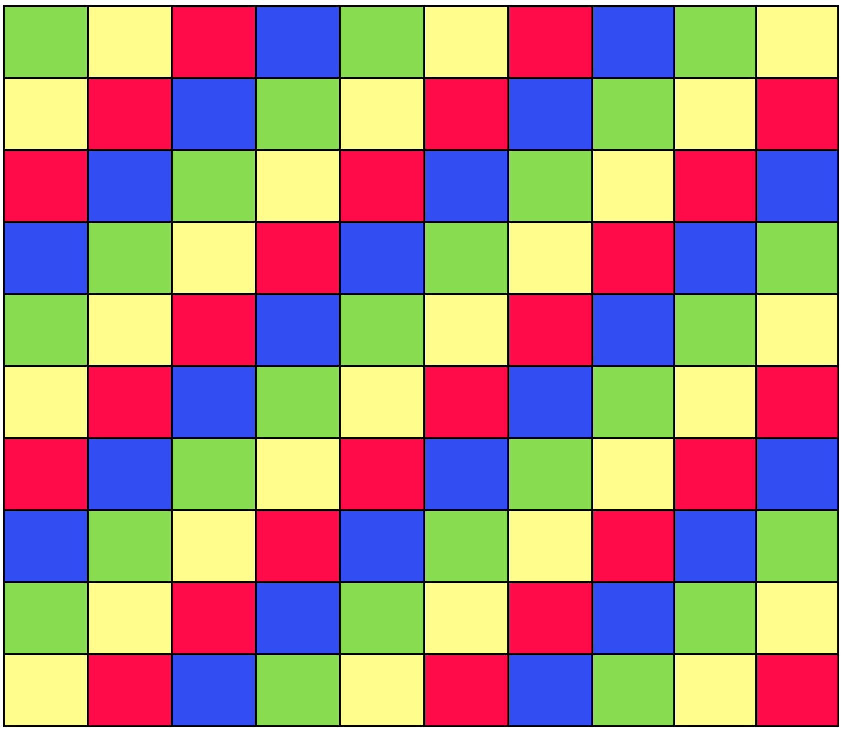


Lähde: Colomb, S. W. (1996). Polyominoes: Puzzles, Patterns, Problems, and Packings. Princeton, NJ: Princeton University Press.

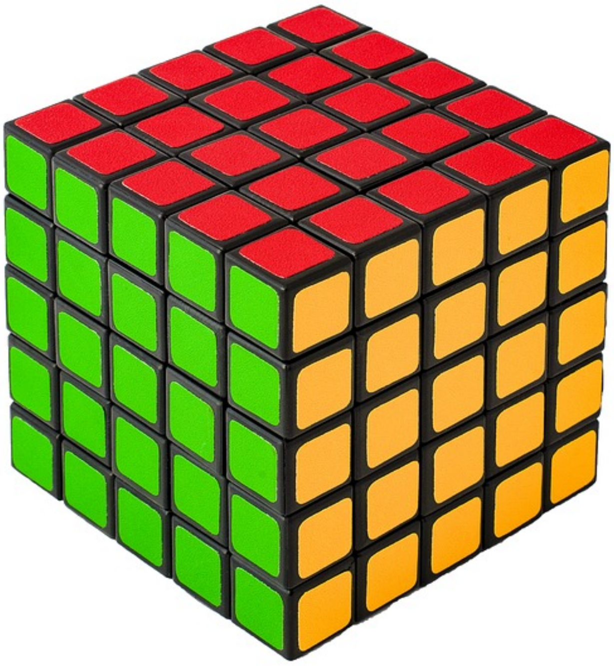
Ratkaisu tehtävään 34:

Rikkinäisen shakkilaudan peittäminen dominopalikoilla ei ole mahdollista, sillä poistetut ruudut ovat keskenään samanvärisiä ja dominopalikka puolestaan peittää aina täsmälleen yhden valkoisen ja yhden mustan ruudun.

Myös jälkimmäinen tehtävä on mahdoton. Jos lauta väritetään neljällä värillä oheisen kuvan mukaisesti, peittää 4*1-palikka aina yhden kutakin väriä riippumatta siitä, mihin kohtaan lautaa se asetetaan. Koska vihreitä ruutuja on 25, keltaisia 26, punaisia 25 ja sinisiä 24 kappaletta, ei lautaa voida peittää kyseisillä palikoilla.



35. Eräs turhautunut Rubikin kuution ratkoja oli päättänyt hajottaa Rubikin kuutionsa pikkukuutioiksi. Jälkikäteen hän huomasi, että lopputuloksena oli yhtä monta kokonaan mustaa kuutiota kuin sellaista kuutioita, joiden sivutahkoista täsmälleen yksi oli värillinen. Kuinka suuri oli alkuperäinen kuutio?



Kuva: Pixabay

Ratkaisu tehtävään 35:

Merkitään kirjaimella x pikkukuutioiden lukumäärää yhdellä ehjän Rubikin kuution särmällä.

Kuutioita, joissa on täsmäälleen yksi värillinen sivutahko, on $6(x-2)^2$ kappaletta (ks. kuva). Kokonaan mustien kuutioiden lukumäärä on $(x-2)^3$, sillä “uloimmassa kerroksessa” pikkukuutioita on väriä ainakin yhdessä tahkossa. Tästä saadaan yhtälö

$$
\begin{aligned}
& (x-2)^3 = 6(x-2)^2 \\
\iff & (x-2)^3 - 6(x-2)^2 = 0 \\
\iff & (x-2)^2[(x-2)-6] = 0 \\
\iff & (x-2)^2(x-8) = 0,
\end{aligned}
$$

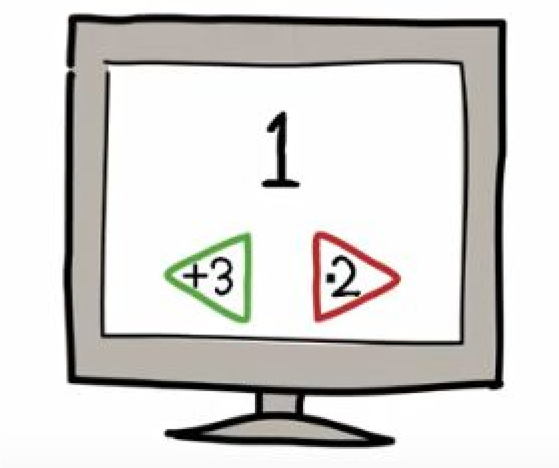
josta tulon nollasäännöllä saadaan

$$
\begin{aligned}
& x-2 = 0 \text{ tai } x-8 = 0 \\
\iff & x = 2 \text{ tai } x = 8
\end{aligned}
$$

Siten alkuperäisen kuution koko on $8 \times 8 \times 8$. Periaatteessa alkuperäisen Rubikin kuution koko voisi olla myös $2 \times 2 \times 2$, mutta ratkaisu ei ole kovin mielekäs, sillä tällöin kokonaan mustia sekä yhdeltä tahkoltaan värillisiä pikkukuutioita ei kumpiakaan syntyisi yhtäkään.

36. Sinulla on kone, jossa on näyttö ja kaksi nappia.

Näytöllä on aluksi luku 1. Kun painat vasenta nappia, lukuun lisätään 3. Kun painat oikeaa nappia, luku kerrotaan kahdella.



Etsi jokin näppäilysarja, jolla saat aikaan luvun 20.
Etsi jokin näppäilysarja, jolla saat aikaan luvun 121.
Etsi lyhin näppäilysarja, jolla saat aikaan luvun 121.
Tehtävä on saatavilla videomuodossa täältä. Lyhytosoite: bit.ly/nappailysarja.

Tehtävän on alunperin laatinut Antti Laaksonen Datatähti 2017 -ohjelmointikisaa varten. Alkuperäisen tehtävänannon löydät ~~täältä~~. Lyhytosoite: bit.ly/datatahti.

Ratkaisu tehtävään 36:

Ohessa ratkaisu kahteen ensimmäiseen kohtaan.
Luvun kolme lisääminen on merkitty **vihreällä** ja luvulla kaksi kertominen **punaisella** nuolella.

Luku 20 saadaan aikaan esimerkiksi seuraavasti:
1 ⇒ 4 ⇒ 7 ⇒ 10 ⇒ 20

Luku 121 saadaan aikaan esimerkiksi seuraavasti:
1 ⇒ 4 ⇒ 7 ⇒ 14 ⇒ 28 ⇒ 56 ⇒ 59 ⇒ 118 ⇒ 121

37. Tiina on huomannut, että hänen kellonsa jätättää tasan 2 minuuttia tunnissa. Tiina säätää kellon oikeaan aikaan. Paljonko kello näyttää, kun kello on taas oikeassa ajassa?

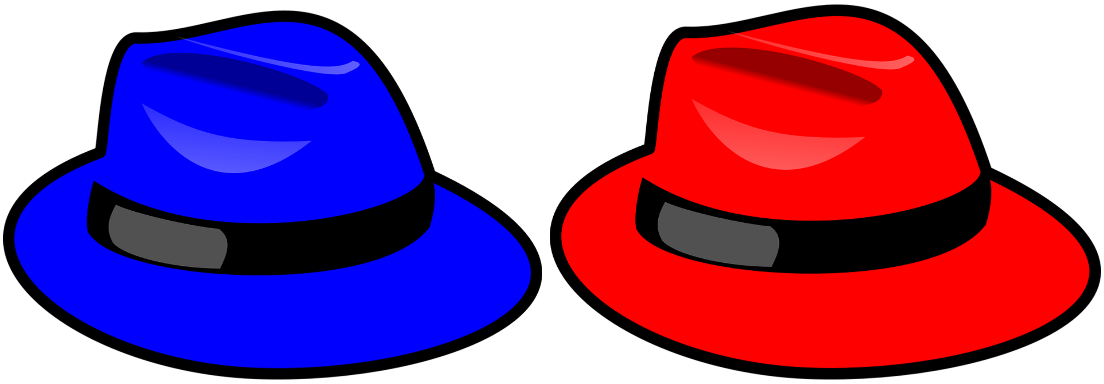
Ratkaisu tehtävään 37:

Mietitään ratkaisua kahden analogisen kellon avulla. Oletetaan, että toinen jätättää ja toinen näyttää oikeaa aikaa. Jos kello jätättää 2 minuuttia tunnissa, voidaan päätellä, että 30 tunnin kuluttua minuuttiviisarit ovat molemmissa kelloissa samassa kohtaa. Nyt 30 tunnin aikana tuntiviisari on kuitenkin jäänyt jälkeen tunnin verran (30 x 2 min = 60 min). Jotta myös tuntiviisari olisi oikeassa ajassa, täytyy aikaa kulua 12-kertainen määrä, siis 12 x 30 h = 360 h = 15 päivää (sillä analogisen kellon tapauksessa kellotaulussa on 12 tuntia). Kello näyttää siis oikeaa aikaa tasan 15 päivän välein. Kun kello seuraavan kerran on oikeassa ajassa, se näyttää siis samaa aikaa kuin säädettäessä. Digitaalisen kellon tapauksessa aikaa tähän kuluisi tuplasti.

38. Hattupeliin osallistuu kolme pelaajaa. Kun pelaajat astuvat huoneeseen, kunkin pelaajan päähän asetetaan joko punainen tai sininen hattu, jonka värin pelinjohtaja määrittää heittämällä kolikkoa. Hattujen värit eivät riipu toisistaan.

    Yksikään vanki ei näe omaa hattuaan, mutta jokainen vangeista näkee kahden muun vangin hatut. Pelaajat saavat sopia pelistrategiasta ennen pelin alkua, mutta pelihuoneeseen astumisen jälkeen kommunikointi on ehdottomasti kielletty. Pelaajien on määrä arvata oman hattunsa väri. Jos vähintään yksi pelaaja arvaa värin oikein eikä kukaan tee väärää arvausta, pelaajat jakavat keskenään kolmen miljoonan euron suuruisen palkinnon. Arvaukset tehdään samanaikaisesti, mutta halutessaan arvauksen saa jättää väliin.

    Mitä strategiaa pelaajien kannattaa noudattaa ja kuinka suuri voittotodennäköisyys tällöin on?



Lähde: https://www.nytimes.com/2001/04/10/science/why-mathematicians-now-care-about-their-hat-color.html
Lyhytosoite: bit.ly/hatut.
Kuvat: Pixabay

Ratkaisu tehtävään 38:

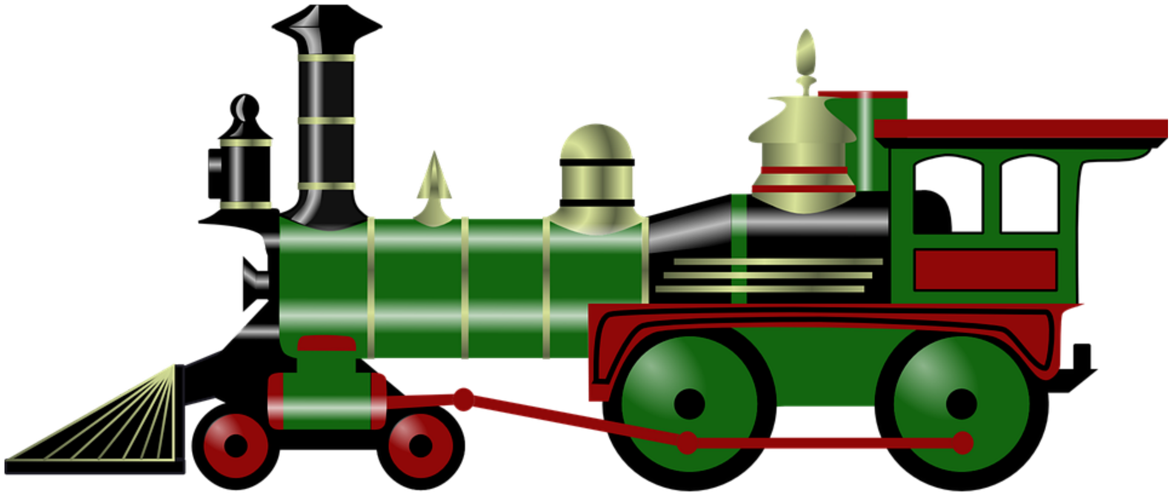
Hattujen värit voivat olla seuraavat:

SSS
SSP
SPS
PSS
PPS
PSP
SPP
PPP

Huomataan, että erilaisia vaihtoehtoja on kahdeksan kappaletta. Kahdessa tapauksessa kahdeksasta kaikki hatut ovat keskenään samanvärisiä ja kuudessa tapauksessa kahdeksasta yksi hattu on erivärinen kuin kaksi muuta.

Sen vuoksi pelaajat sopivat, että jos pelaaja näkee kahden muun vangin hattujen olevan punaisia, hän arvaa oman hattunsa olevan sininen. Jos taas vanki näkee kahden muun vangin hattujen olevan sinisiä, hän arvaa oman hattunsa olevan punainen. Tällä taktiikalla pelaajat voittavat kuudessa pelissä kahdeksasta. (Itse asiassa *joka toinen arvaus* on silti väärä, mutta väärät arvaukset kasaantuvat sellaisiin peleihin, joissa kaikilla on pelaajilla on samanvärinen hattu. Tällöin nimittäin jokainen pelaajista näkee kaksi samanväristä hattua ja arvaa oman hattunsa värin väärin.)

39. Antti, Bert ja Carl matkustivat höyryjunalla. Junan ikkuna oli auki, ja kun juna sukelsi tunneliin, kaikkien kolmet kasvot likaantuivat. Kun miehet huomasivat toistensa likaiset kasvot, he alkoivat nauraa toisilleen. Yhtäkkiä Bert lakkasi kuitenkin nauramasta, koska tajusi myös omien kasvojensa likaantuneen. Miten hän sen saattoi tietää?



Lähde: Moscovich, I. (2009). Yli 500 ajatuspeliä: Ivan Moscovichin älytehtäviä tieteen, luonnon ja tekniikan aloilta. Königswinter: Ullmann.
Kuva: Pixabay

Ratkaisu tehtävään 39:

Kuvitellaan, että Bertin kasvot ovat puhtaat ja tarkastellaan tilannetta Antin kannalta: Antti näkee Bertin puhtaat kasvot ja Carlin likaiset kasvot. Omia kasvojaan hän ei tietenkään näe. Carl taas näkee Bertin puhtaat kasvot ja Antin kasvot eikä tiedä, että hänen omansa ovat likaiset. Koska Carl nauraa ja Bertin kasvot ovat puhtaat, on Antin kasvojen oltava likaiset. Tilanne on symmetrinen Carlin kannalta tarkasteltuna.

Jos siis Bertin kasvot olisivat puhtaat, Antti ja Carl voisivat päätellä omiensa olevan likaiset. Koska molemmat nauravat, asia ei oletettavasti ole näin. Tästä Bert voi päätellä, että hänen kasvonsa ovat likaiset.