



Ongelmatehtäviä

Tämä tehtäväsarja sisältää muutamia ongelmatehtäviä ratkaisuehdotuksineen. Tehtävät on poimittu eri lähteistä ja lähde on ilmoitettu aina tehtävän yhteydessä. Ratkaisuehdotuksissa on kuvattu yksi tapa ratkaista ongelma – ehkä keksit itse paremman, tai oppilaasi keksivät!

Tehtäväsarja on koottu osana LUMATIKKA-täydennyskoulutusohjelmaa. Ohjelman toteutuksesta vastaa LUMA-keskus Suomi -verkosto yhteistyökumppaneineen. Ohjelman rahoittaa Opetushallitus.

Tehtävät ja ratkaisuehdotukset on koonnut Inkeri Sundqvist.

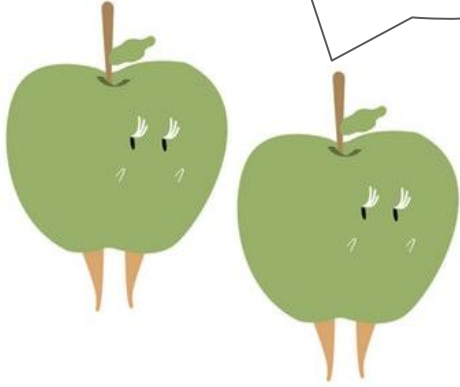
Tehtäväsarjasta voi kopioida itselleen muokattavan version osoitteesta <http://bit.ly/ongelmaiaalakouluun>



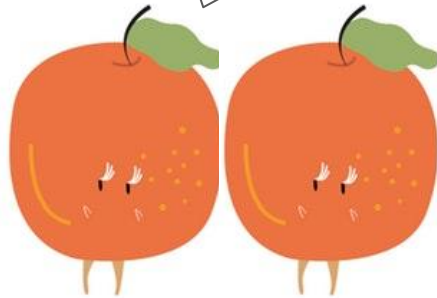
**LUMA-KESKUS SUOMI**  
**LUMA-CENTER FINLAND**  
**LUMA CENTRE FINLAND**



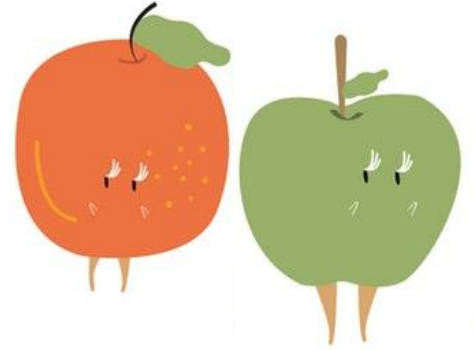
Me maksamme  
yhteensä 6  
senttiä!



Me maksamme  
yhteensä 8  
senttiä!



Kuinka paljon  
me maksamme  
yhteensä?



# Hassut hedelmät

Kenguru-kilpailutehtävä 2019

# Hassut hedelmät – Opettajalle

Tehtävään on kaksi ratkaisutapaa. Nousevatko molemmat tavat esiin oppilaiden ratkaisuissa? Miten eri ratkaisutapoja kannattaisi käsitellä luokkahuonekeskustelussa?

## TAPA 1

Kaksi omenaa maksaa 6 senttiä ja kaksi appelsiinia 8 senttiä, eli yhteensä nämä neljä hedelmää maksavat:

$$6 + 8 = 14$$

Yksi omena ja yksi appelsiini maksavat puolet tästä:

$$14 : 2 = 7$$

Vastaus: 7 senttiä

## TAPA 2

Jos kaksi omenaa maksaa 6 senttiä, yksi omena maksaa tästä puolet, eli:

$$6 : 2 = 3$$

Vastaavasti yksi appelsiini maksaa:

$$8 : 2 = 4$$

Yksi omena ja yksi appelsiini maksavat siis yhteensä:

$$3 + 4 = 7$$

Vastaus: 7 senttiä

Mutta entäpä jos kaksi omenaa maksaisi yhteensä 5 senttiä ja kaksi appelsiinia 7 senttiä?

Tehtävä mukaillen Kenguru-kilpailutehtävää (2019) Maunulan yhteiskoulun ja Helsingin matematiikkalukion verkkosivuilla osoitteessa:

<https://www.mayk.fi/tietoa-meista/kenguru/> | Opettajan ohje vapaasti suomentaen Göteborgin yliopiston *Arbeta vidare* ohjeesta:

<http://ncm.gu.se/2664>



Samma Sammakko syö  
tavallisesti täsmälleen 5  
hämähäkkiä päivässä. Sellaisina  
päivinä, joina Samma loikkii

erittäin paljon, hän syö täsmälleen 10 hämähäkkiä. Hän  
söi 60 hämähäkkiä 9 päivän aikana. Kuinka monena  
päivänä Samma Sammakko loikki erittäin paljon?

# Samma sammakko – Opettajalle

Jos Samma olisi syönyt jokaisena yhdeksästä päivästä viisi hämähäkkiä, niin hän olisi syönyt yhteensä:

$$9 * 5 = 45$$

eli 45 hämähäkkiä.

Mutta hän söikin yhdeksän päivän aikana 60 hämähäkkiä, eli

$$60 - 45 = 15$$

eli viisitoista hämähäkkiä enemmän.

Jos Samma loikkii erittäin paljon päivässä, niin hän syö *viisi hämähäkkiä enemmän* kuin tavallisena päivänä. Viidentoista extrahämähäkin syöminen tarkoittaa siis, että Samma loikkii erittäin paljon

$$15 : 5 = 3$$

eli kolmena päivänä.

# Samma sammakko – Opettajalle

Samma Sammakko -tehtävä on poimittu Kenguru-kilpailutehtävien (2019) joukosta. Kenguru-tehtävät ratkaisuineen löytyvät Maunula yhteiskoulun / Helsingin matematiikkalukion verkkosivuilta osoitteesta <https://www.mayk.fi/tietoa-meista/kenguru/>

Göteborgin yliopisto julkaisee tehtäviin myös *Arbeta vidare* opettajan ohjetta, joka sisältää ajatuksia siitä, mikä tehtävissä on matemaattisesti olennaista ja miten tehtäviä kannattaa työstää luokassa. Samma Sammakko tehtävän yhteydessä tuodaan esiin (vapaasti suomentaen), että oppilaat tarvitsevat harjaannusta osatakseen tulkita tehtävänannon kaltaisia tekstejä, joissa informaatiota annetaan paljon tiiviissä muodossa. Tehtävänannosta on hyvä keskustella yhdessä, koska tehtävän ratkaiseminen luonnollisesti edellyttää, että ymmärtää, mitä on kysytty. Ohjeessa myös huomautetaan, että tehtävänannon *ymmärtäminen* on eri asia kuin tietää, mitä pitää tehdä seuraavaksi. Ruotsinkieliset *Arbeta vidare* -ohjeet löytyvät verkko-osoitteesta <http://ncm.gu.se/2664>



# Kummitustalo

Kummitustalossa on neljä kerrosta. Ylimmässä kerroksessa asuu neljä kummitusta. Alemmassa kerroksessa asuu aina **kaksinkertainen** määrä kummituksia kuin kerrosta ylempänä.

Kuinka monta kummitusta talossa asuu?



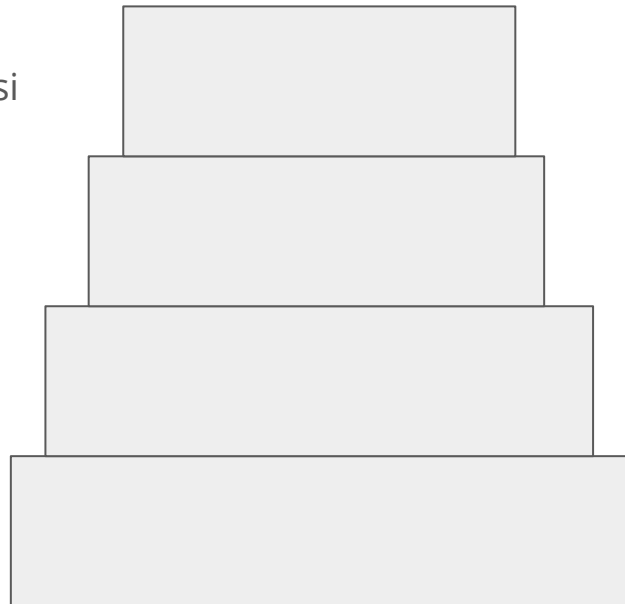


# Kummitustalo – Opettajalle

Oppilaat voivat piirtää omat nelikerroksiset kummitustalot A4-paperille tai kummitustalon pohja voi olla printattuna valmiiksi (esim. <http://bit.ly/kummitustalo>). Kummituksia voivat esittää vaikkapa multilink-palikat.

Syvemmälle ongelmaan:

1. Kuinka monta kummitusta talossa asuisi, jos siinä olisikin viisi kerrosta?
2. Kuinka monta kummitusta talossa asuisi, jos ylimmässä kerroksessa asuisi 5 / 6 / 7 kummitusta?
3. Kuinka monta kummitusta talossa asuisi, jos kummitusten määrä kolminkertaisuisi / nelinkertaistuisi / viisinkertaistuisi kerroksesta toiseen?
4. Keksitkö kaavan, jolla kummitusten määrän voi selvittää olipa kerroksia mikä määrä tahansa?
5. Keksi oma tehtävä kummitustalosta!



# Kummitustalo – Ratkaisu

Kerros	Kummituksia
4	4
3	8
2	16
1	32
Yhteensä	60



## Elli-etana

Etana Elli kiipeää muuria ylös hyvin hitaasti. Joinakin päivinä se nousee kymmenen senttimetriä, joinakin päivinä se nousee kaksikymmentä senttimetriä, joinakin päivinä se nukkuu eikä liiku lainkaan ja toisina päivinä se on syvässä unessa, jolloin se valuu kymmenen senttimetriä alaspäin.

Muuri on sata senttimetriä korkea. Kymmenessä päivässä Elli on puolivälissä muurin korkeutta eli noussut viisikymmentä senttimetriä. Mitä on voinut tapahtua kymmenen päivän aikana? Esitä useita erilaisia mahdollisuuksia!

Lähde: Suomi-Chile tutkimushankkeen avoin ongelmatehtävä sivustolta

<https://blogs.helsinki.fi/matematiikandidaktiikka/ongelmanratkaisua/tietoa-ja-tutkimusta/>

Opettajan ohje löytyy teoksesta Ahtee, M., Hannula, M. ja Laine, A. (2016) Iloa ongelmanratkaisuun, Otava

Minkä alennuksen valitsisit?

ALENNUS  
50 €

ALENNUS  
20%

PUOLEEN  
HINTAAN!

# Minkä alennuksen valitsisi? – Ratkaisuehdotus

Tarkastellaan aluksi 20% alennusta ja alennusta, joka lupaa tuotteen “puoleen hintaan”, eli 50% alennuksella. Näistä kahdesta parempi valinta olisi 50% alennus.

Entä kannattaisiko valita 50 euron vai 50% alennus? Asiaa voidaan tutkia vaikkapa taulukoimalla:

# Minkä alennuksen valitsisi? – Ratkaisuehdotus

Tuotteen alkuperäinen hinta euroina	Hinta, kun alennus 50 €	Hinta, kun alennus 50%
60	10	30
70	20	35
80	30	40
90	40	45
100	50	50
110	60	55
120	70	60
130	80	65

# Minkä alennuksen valitsisi? – Ratkaisuehdotus

Taulukon perusteella näyttää siltä, että 50 euron alennus on kannattavampi valinta, jos alkuperäinen hinta on alle 100 euroa.

Jos tuotteen alkuperäinen hinta on tasan 100 euroa, alennettu hinta on sama molemmilla alennuksilla.

Jos tuotteen alkuperäinen hinta on yli 100 euroa, tuottaa 50% alennus huokeamman loppuhinnan.

Ylemmillä luokilla voisi olla mahdollista tuottaa myös matemaattisempi perustelu tutkien, millä alkuperäisellä tuotteen hinnalla alennukset ovat yhtä suuret ja millä puolestaan toinen on toista suurempi.

Mitä tapahtuu pinta-alalle?

Suorakulmion yksi sivu kasvaa 10% ja viereinen sivu pienenee 10%. Mitä tapahtuu suorakulmion pinta-alalle?



# Mitä tapahtuu pinta-alalle? – Ratkaisuehdotus

Kenties ensimmäinen ajatus on, että suorakulmion pinta-ala pysyy ennallaan. Tehdään siis *hypoteesi*: suorakulmion pinta-ala pysyy ennallaan.

Kokeillaan hypoteesin paikkansapitävyyttä jollain suorakulmiolla.

Otetaanpa vaikka neliö [neliö on myös suorakulmio], jonka sivun pituus on 10. Pinta-ala on  $10 * 10 = \mathbf{100}$ .

Sitten sivujen pituudet alkavat muuttua. Kasvavan sivun pituudeksi tulee

$$1,1 * 10 = 11$$

Pienenevän sivun pituudeksi tulee

$$0,9 * 10 = 9.$$

Pinta-ala on siis  $11 * 9 = \mathbf{99}$ .

Pinta-ala ei siis pysynyt ennallaan, jos toinen sivu kasvoi ja toinen pieneni 10%. Tämä on *vastaesimerkki*, joka osoitti, että hypoteesi ei pitänyt paikkaansa. [Tämä ei vielä osoita, etteikö voisi löytyä myös sellaista suorakulmiota, jolle hypoteesi pätee. Pystyimme kuitenkin vastaesimerkillä osoittamaan, että hypoteesi ei päde ainakaan *kaikilla* suorakulmioilla.]

# Mitä tapahtuu pinta-alalle? – Ratkaisuehdotus

Kokeillaan sitten selvittää, mitä pinta-alalle tapahtuu, jos kyseessä on mikä tahansa suorakulmio.

Suorakulmion pinta-ala  $A$  on sivun pituus kerrottuna viereisen sivun pituudella, eli

$$A = \text{sivun pituus} * \text{viereisen sivun pituus}$$

Kun sivun pituus kasvaa 10%, on uusi pituus

$$1,1 * \text{sivun pituus}$$

Kun viereisen sivun pituus puolestaan pienenee 10%, on uusi pituus

$$0,9 * \text{viereisen sivun pituus}$$

Lasketaanpa nyt uuden suorakulmion pinta-ala, eli kasvanut pituus kerrottuna pienenneellä pituudella:

$(1,1 * \text{sivun pituus}) * (0,9 * \text{viereisen sivun pituus})$	kertolasku on liitännäinen, joten termien järjestystä voidaan vaihtaa
$= 1,1 * 0,9 * \text{sivun pituus} * \text{viereisen sivun pituus}$	sivun pituus * viereisen sivun pituus on alkuperäisen suorakulmion pinta-ala $A$
$= 0,99 * A$	saatiin tulos, että jos suorakulmion toisen sivun pituus kasvaa 10% ja toisen pienenee 10%, on uuden suorakulmion pinta-ala 99% alkuperäisen suorakulmion pinta-alasta