ESIMERKKEJÄ LUKIOON SOPIVISTA PERUSTELU- JA TODISTAMISTEHTÄVISTÄ

Teksti: Antti Viholainen, Itä-Suomen yliopisto

Perustelutaitojen oppiminen on keskeinen matematiikan prosessitavoite. Ratkaisujen perustelemista pidetään yleensä tärkeänä kaikilla koulumatematiikan osa-alueilla ja luokka-asteilla. Asioiden perusteleminen on tärkeä tuki matematiikan syvällisen ymmärryksen kehittymisessä. Perustelut mm. selittävät matemaattisten käsitteiden välisiä suhteita ja vastaavat miksi-kysymyksiin. Lisäksi perustelut opettavat matematiikan esittämistä eri esitystapoja käyttäen. Matemaattisessa mielessä riittävän täsmällisiä perusteluja kutsutaan *todistuksiksi*.

Matematiikan opetuksessa käytettävät perustelut voidaan jakaa oppijalle esitettäviin perusteluihin ja oppijan konstruoimiin perusteluihin.

- *Oppijalle esitettävät perustelut* ovat joko oppimateriaaleissa olevia valmiiksi laadittuja perusteluja tai opettajan oppitunnilla esittämiä perusteluja. Näissä oppijan tehtävänä on pyrkiä ymmärtämään esitetty perustelu. Ymmärtämistä voidaan tukea esimerkiksi havainnollistusten, selitysten ja opetuskeskustelujen avulla.

- *Oppijan konstruoimat perustelut* ovat yleensä oppijan vastauksia perustelemista edellyttäviin tehtäviin. Jonkinlaista perustelemista edellytetään yleensä kaikissa tehtävissä yksinkertaisimpia mekaanisia tehtäviä lukuun ottamatta. Monissa laskutehtävissä ja ongelmanratkaisutehtävissä perustelu saattaa syntyä ”sivutuotteena” tehtävän ratkaisijan kirjatessa ylös ratkaisun etsimisprosessin vaiheet. Sen sijaan ”Osoita”, ”Perustele” ja ”Todista” –tyyppisissä tehtävissä ainoa kysytty asia on perustelu.

Konstruktivistinen oppimisnäkemys korostaa oppijan omaa aktiivisuutta oppimisprosessissa ja tiedon konstruoinnissa. Tästä näkökulmasta katsoen oppijan itse konstruoimia perusteluja voidaan lähtökohtaisesti pitää oppimisen kannalta suositeltavampina kuin oppijalle esitettäviä valmiita perusteluja. Perustelun laatiminen voi monissa tapauksissa olla kuitenkin oppijalle haastavaa. Oppija voi konstruoida perustelun myös ohjatusti ja tuetusti.

Seuraavaksi käsittelemme esimerkkejä lähestymistavoista perustelemiseen ja todistamiseen. Geneeristen esimerkkien ja visualisoinnin käyttö konkretisoivat ja avaavat todistuksen perusideoita. Niinpä näillä lähestymistavoilla on tärkeä ymmärtämistä tukeva pedagoginen merkitys.

Antti Viholainen
Itä-Suomen yliopisto
LUMATIKKA-ohjelma

Geneeriseen esimerkkiin perustuvat todistukset

Geneeriseen esimerkkiin perustuvan todistuksen ideana on, että perustelu tehdään ensin konkreettisessa tilanteessa, mutta siten, että sama idea on suoraan yleistettävissä yleiseen tilanteeseen. Geneerinen esimerkki auttaa siten yleisemmän ja abstraktimman perustelun konstruoimista.

Esimerkki 1

Osoita, että $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Tämän esimerkin yhteydessä kannattaa aluksi tutkia tilannetta muutamilla pienillä *n*:n arvoilla ja todeta laskemalla, että ainakin niissä tapauksissa tulos pätee. Tämä auttaa heikoimpiakin oppilaita ymmärtämään väitteen sisällön.

Tämän jälkeen todistetaan väite summaa laskematta tapauksessa $n = 10$ seuraavasti:

Olkoon S_{10} kysytty summa. Laskemalla rivit yhteen saadaan kysytty summa kaksinkertaisena.

$$\begin{array}{rcccccccccc}
S_{10} = & 1\,+ & 2\,+ & 3\,+ & 4\,+ & 5\,+ & 6\,+ & 7\,+ & 8\,+ & 9\,+ & 10 \\
S_{10} = & 10\,+ & 9\,+ & 8\,+ & 7\,+ & 6\,+ & 5\,+ & 4\,+ & 3\,+ & 2\,+ & 1 \\
\hline
2S_{10} = & 11\,+ & 11\,+ & 11\,+ & 11\,+ & 11\,+ & 11\,+ & 11\,+ & 11\,+ & 11\,+ & 11
\end{array}$$

Saadaan siis, että $2S_{10} = 10 \cdot 11$ eli että $S_{10} = \frac{10 \cdot 11}{2}$. Tämä on todistettavan kaavan mukainen tulos.

Tämän jälkeen on helppo havaita, että samantapainen päättely toimii *n*:n ollessa mikä tahansa luonnollinen luku. Nyt voidaan siirtyä tarkastelemaan yleistä tilannetta vastaavaa ideaa käyttäen:

$$\begin{array}{rccccc}
S_n = & 1\,+ & 2\,+ & \ldots\,+ & (n-1) & n \\
S_n = & n\,+ & (n-1)\,+ & \ldots\,+ & 2\,+ & 1 \\
\hline
2S_n = & (n+1)\,+ & (n+1)\,+ & \ldots\,+ & (n+1)\,+ & (n+1)
\end{array}$$

Nyt nähdään, että $2S_n = n \cdot (n-1)$, eli $S_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

Myös geneeriseen esimerkkiin pohjautuvissa todistuksissa oppijoille kannattaa jättää tehtäväksi mahdollisimman paljon. Esimerkiksi yleisen todistuksen konstruointi geneerisen esimerkin pohjalta kannattaa jättää oppijoiden tehtäväksi.

Antti Viholainen
Itä-Suomen yliopisto
LUMATIKKA-ohjelma

ESIMERKKI 2

Toisen asteen polynomiyhtälön ratkaisukaavan johtaminen.

Täydellisen toisen asteen polynomiyhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ ratkaisukaavan

$$x = -b \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

johtaminen on asia, joka todennäköisesti tuntuu hankalalta lukiolaisista. Ratkaisukaavan johto perustuu yleensä yhtälön vasemman puolen neliöksi täydentämiseen. Asiaa kannattaakin harjoitella ensin ratkaisemalla konkreettisia toisen asteen yhtälöitä neliöksi täydentämällä. Nämä laskut toimivat geneerisinä esimerkkeinä siirryttäessä tarkastelemaan yleistä tilannetta, jossa termien kertoimina ovatkin konkreettisten lukujen sijasta vakiot *a*, *b* ja *c*.

ESIMERKKI 3

Osoita, että luonnollinen luku on jaollinen yhdeksällä täsmälleen silloin kun sen numeroiden summa on jaollinen yhdeksällä.

Geneerinen esimerkki auttaa myös tämän jaollisuustodistuksen konstruoinnissa.

Aloitetaan tarkastelemalla luvun 2867 jaollisuutta yhdeksällä.

$$\begin{aligned} 2867 &= 2 \cdot 1000 + 8 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 7 = 2 \cdot (999 + 1) + 8 \cdot (99 + 1) + 6 \cdot (9 + 1) + 7 \\ &= 2 \cdot 999 + 8 \cdot 99 + 6 \cdot 9 + 2 + 8 + 6 + 7 \end{aligned}$$

Tästä summasta $2 \cdot 999 + 8 \cdot 99 + 6 \cdot 9$ on jaollinen yhdeksällä, joten luvun 2867 jaollisuus yhdeksällä riippuu vain numeroiden summan $2 + 8 + 6 + 7$ jaollisuudesta.

Vastaava päättely voidaan yleistää myös yleiseen tapaukseen. Yleisessä tapauksessa ensin tulee osoittaa, että $10^k - 1$ on jaollinen yhdeksällä kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

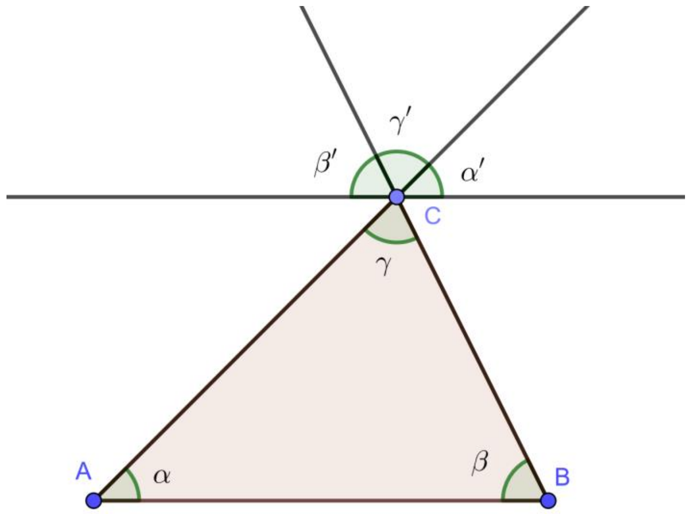
VISUALISOINTIIN PERUSTUVAT TODISTUKSET

Visualisointi on matemaattisessa päättelyssä paljon käytetty apukeino, joka usein konkretisoi ja auttaa hahmottamaan kokonaistilannetta. Visualisointien tulisi kuitenkin olla sellaisia, että niihin pohjautuvat päättelyt on mahdollista yleistää yleiseen tilanteeseen. Dynaamiset havainnollistukset, esimerkiksi GeoGebralla tehdyt appletit, mahdollistavat kuitenkin sen, että visualisointiin perustuvassa tarkastelussa ei tarvitse rajoittua yhteen erikoistapaukseen.

Seuraavissa kahdessa esimerkeissä visualisoinneilla on keskeinen ymmärtämistä tukeva merkitys. Visualisoinnit toimivat kuitenkin vain malleina yleisistä tilanteista.

ESIMERKKI 4

Osoita, että tasossa olevan kolmion kulmien summa on 180°.



Piirretään GeoGebralla kolmio ABC ja pisteen C kautta kulkeva suora, joka on yhdensuuntainen janan $\overline{AB}$ kanssa. Samankohtaisina kulmina kulmat **α** ja **α**’ ovat yhtä suuret, samoin myös kulmat **β** ja **β**’. Kulmat **γ** ja **γ**’ ovat ristikulmina yhtä suuret. Soveltamalla näitä yhtäsuuruuksia ja oikokulmalausetta nähdään, että

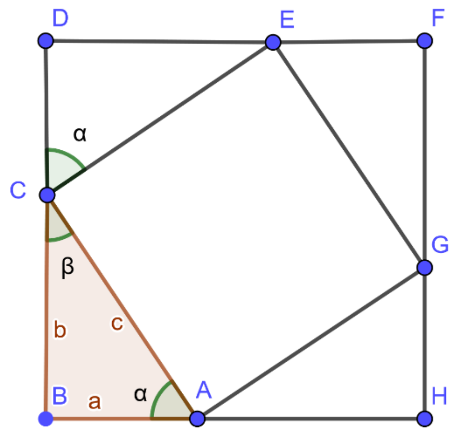
$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

Liikuttelemalla kärkipisteitä A, B ja C oppija voi vakuuttua, että päättely pätee kaikentyyppisille kolmioille. Oppijoille on myös syytä korostaa, että todistuksen argumentit eivät riipu piirretyn kolmion spesifeistä ominaisuuksista.

Antti Viholainen
Itä-Suomen yliopisto
LUMATIKKA-ohjelma

ESIMERKKI 5

Pythagoraan lauseen todistus



Piirretään GeoGebralla suorakulmainen kolmio ABC, jonka kateettien pituudet ovat a ja b ja hypotenuusan pituus c. Täydennetään kuviota piirtämällä neliö BDFH, jonka sivun pituus on a+b ja jonka kussakin kulmassa on kolmion ABC kanssa yhtenevä suorakulmainen kolmio. Tämän neliön sisälle syntyy neljäkäs ACEG, jonka sivun pituus on c. Koska suorakulmaisen kolmion terävien kulmien summa on 90° ($\alpha+\beta$ = 90), neljäkkään ACEG kulmat ovat suoria ja kyseinen neljäkäs on siten neliö. Nyt neliön BDFH pinta-ala voidaan laskea kahdella eri tavalla:

$$(a+b)^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Tämä on Pythagoraan lause.

GeoGebra-appletti kannattaa rakentaa siten, että pisteitä A ja C pystyy liikuttamaan janoilla $\overline{BH}$ ja $\overline{BD}$ ja että pisteiden E ja G sijainti riippuu pisteiden A ja C sijainnista. Tällöin suorakulmaisen kolmion ABC muotoa on mahdollista muuttaa, mikä tukee sen ymmärtämistä, että todistuksen argumentit eivät riipu siitä, millaista suorakulmaista kolmiota tarkastellaan.

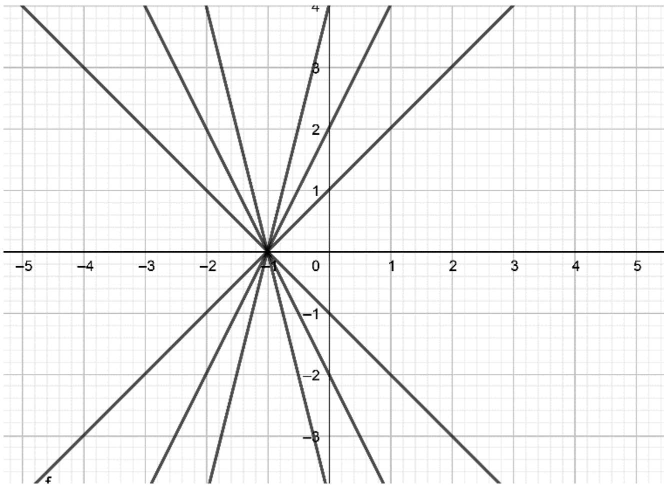
Perustelu ja todistaminen tutkimustehtävien osana

Tutkimustehtävät tarjoavat usein monipuolisia aktiviteetteja. Niissä ratkaisuja joutuu etsimään säännönmukaisuuksia, muodostamaan väitteitä, arvioimaan niiden paikkaansa pitävyyttä ja todistamaan niitä. Myös tällaisissa tehtävissä geneerisillä esimerkeillä ja visualisoinnilla voi olla merkittävä rooli. Seuraava esimerkki käsittelee tehtävää, jossa visualisoinnilla on merkittävä rooli säännönmukaisuuden havaitsemisessa.

Esimerkki 6

Mitä yhteistä on muotoa $\boldsymbol{y = kx + k}$, missä $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$, olevilla suorilla?

Tätä tehtävää kannattaa lähestyä piirtämällä suoria koordinaatistoon eri k:n arvoilla.



Kuvan perusteella havaitaan nopeasti, että kaikki tehtävässä mainittua muotoa olevat suorat kulkevat pisteen (-1,0) kautta. Tämä väite on helppo todistaa sijoittamalla arvot $\boldsymbol{x = -1}$ ja $\boldsymbol{y = 0}$ suoran yhtälöön.

Tutkimustehtävät ovat usein avoimia, eli niillä ei välttämättä ole yksikäsitteistä oikeaa vastausta, vaan tilanteesta on mahdollista tehdä useammanlaisia havaintoja. Joskus löydetyt säännönmukaisuudet saattavat olla vaikeita todistaa.

Antti Viholainen
Itä-Suomen yliopisto
LUMATIKKA-ohjelma

ESIMERKKI 7

Mitä säännönmukaisuutta voit havaita seuraavasta?

6=3+3

8=3+5

10=5+7=5+5

12=5+7

14=3+11=7+7

16=3+13=5+11

18=5+13=7+11

20=3+17=7+13

Näiden summahajotelmien pohjalta voidaan melko helposti havaita seuraava tulos:

Jokainen lukua 4 suurempi parillinen luku voidaan esittää kahden alkuluvun summana.

Tätä väitettä kutsustaan Goldbachin konjektuuriksi. Se on väite joka näyttäisi pitävän paikkaansa, mutta jolle ei vielä ole onnistuttu konstruoimaan todistusta.