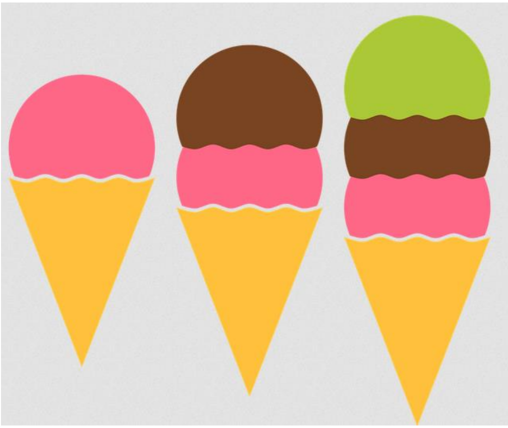
Problem 1 - Glassarna

Lisa ska köpa lösglass i kulor och kan välja på fyra olika smaker. Hon vill ha en glasstrut med två kulor.

a) På hur många olika sätt kan Lisa välja sin glass?
b) Hitta på ett eget liknande problem och lös det.

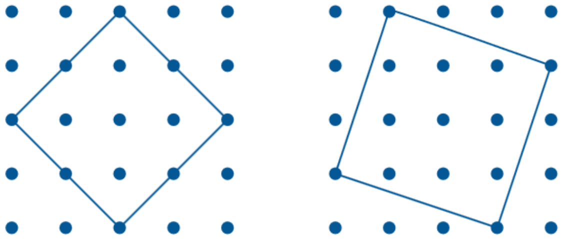


Problemet är taget ur Skolverkets problembank på http://matematiklyftet.skolverket.se

Problem 2 - Kvadrater på geobräde

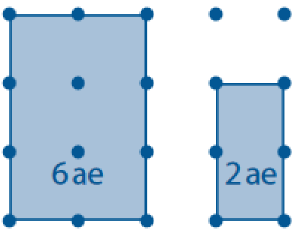
Bilda kvadrater på geobrädet så att kvadraternas areor är heltalsvärden.

a) Gör kvadrater med areorna 9 och 16.
b) Gör kvadrater med areorna 8 och 18.
c) Gör kvadrater med areorna 5 och 13.
d) Varför kan man få arean 10 men inte areorna 11 eller 12?



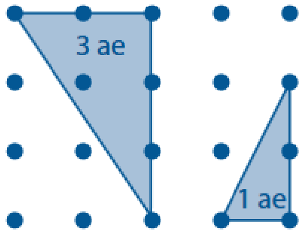
Något om att använda geobräde

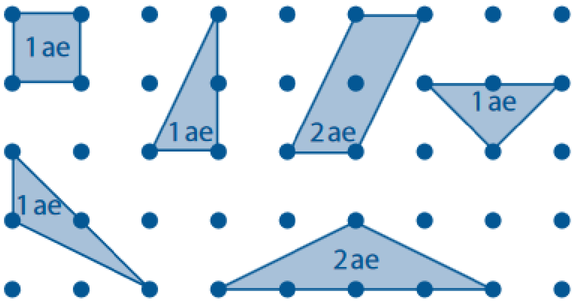
Det går snabbt att variera figurer på geobrädan och på så sätt undersöka många möjligheter. Under denna experimentfas är geobrädet överlägset såväl papper och penna som interaktiva varianter. Samtidigt är det viktigt att eleverna får som vana att dokumentera såväl figurerna som sina tankar och slutsatser på prickpapper.



Rektanglarna här till vänster har storleken 6 respektive 2 areaenheter (ae). Delar vi områdena längs en diagonal får vi triangelområdena till höger som har hälften så stor area, 3 ae och 1 ae.

Vi kan leta efter fler trianglar och fyrhörningar som har storleken 1 ae eller 2 ae, se exempel nedan.

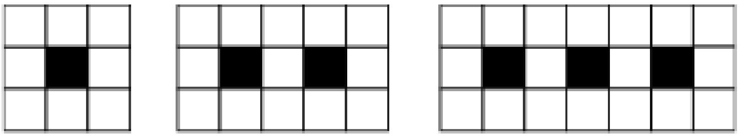




Digitalt geobräde: https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/

Problem 3 - Trädgårdsmästaren

Camilla ska plantera buskar vid en gågata i city. Runt varje buske lägger hon plattor som figuren visar. Varje vit ruta är en platta och varje svart ruta är en rabatt där en buske planteras.



1 buske 2 buskar 3 buskar

1. Hur många plattor går det runt
   a) 2 buskar?
   b) 4 buskar?
   c) 5 buskar?
   d) 10 buskar?
   e) 100 buskar?
   f) *n* buskar?

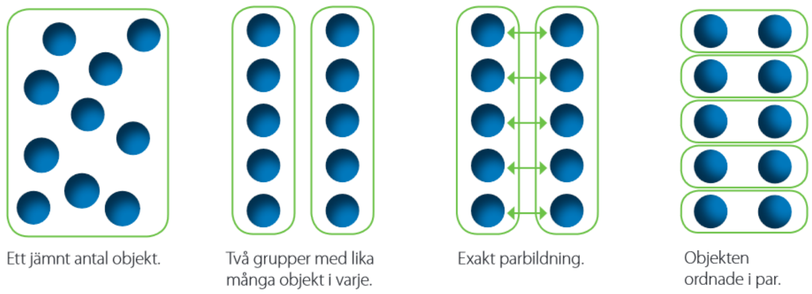
2. Hur många buskar måste Camilla plantera om hon lägger 208 plattor?

3. Hitta på ett liknande problem och lös det.

Problemet är taget ur Skolverkets problembank på http://matematiklyftet.skolverket.se

Problem 4 - Udda och jämna tal

Ett heltal kallas jämnt om det kan skrivas som en multipel av talet 2 (definition A) eller alternativt om talet är en summa av två lika stora heltal (definition B). Om detta inte går så är heltalet udda. Studera illustrationerna.



1. Vilka illustrationer hör ihop med definitionerna A och B?
2. Hur illustrerar man grafiskt ett udda tal?
3. Tänk på olika sätt att konkretisera jämna och udda heltal.
4. Resonera kring och ge exempel på hur man kan arbeta med följande argumentationsuppgift med barn i olika åldrar.

Visa att summan av två udda tal är jämn.

Problem 5 - Hur gamla är barnen?

Efter många år träffas två matematikälskande vänner Hypatia och Pythagoras på nytt. De har följande dialog:

(1) Pythagoras: Är du gift? Har du några barn? I så fall hur många och hur gamla är de?

(2) Hypatia: Jo, jag är gift och har tre barn och produkten av deras åldrar är 36.

(3) Pythagoras: (... *Pythagoras grubblar* ...) Jag kan inte klura ut deras åldrar. Kan jag få flera ledtrådar?

(4) Hypatia: Ok! Om jag berättar att summan av deras åldrar är identiskt med numret i din adress.

(5) Pythagoras: (... *Pythagoras tänker igen* ...) Jag kan fortfarande inte klura ut hur gamla dina barn är. Kan jag få ytterligare en ledtråd?

(6) Hypatia: Sista chansen! Den som är äldst har blont hår.

(7) Pythagoras: Ahaa! Nu vet jag exakt hur gamla dina barn är.

1. Hur gamla är Hypatias barn?
2. Lös denna gåta genom matematisk argumentation.
3. Vilken matematik synliggörs i de olika argumentationsstegen?

line

After having many years to see each other, two friends who really loved math, Hypatia and Pythagoras, meet again. They have the following conversation:

Pythagoras: Are you married? Do you have any children? How many? How old are they?
Hypatia: Yes, I am married! I have three children and the product of their ages is 36.
Pythagoras: (After doing some thinking.) I cannot figure out their ages. I don't have enough clues.
Hypatia: Right! What if I told you that the sum of their ages is the same as the number of your address?
Pythagoras: (After doing some thinking again.) I still can't figure out their ages. I need another hint.
Hypatia: Well done! I also tell you that the oldest has blond hair.
Pythagoras: Aha! Now I can, without any doubt, figure out the ages of your children.

What are the ages of Hypatia's children? (their ages can only be natural numbers)

En variant av denna uppgift har används i anställningsintervjuer för Google.

En inhemsk variant med lösning hittas på:
https://www.youtube.com/watch?time_continue=34&v=pwco8nEPanc

Problem 6 – Hela sällskapet över bron

Fyra vänner ska ta sig över en älv, men bron håller bara för max två personer åt gången. Med sig har de endast en lykta och ingen vågar gå ensam i mörkret över bron. Axel går över bron på 1 minut, Bella på 2 minuter, Christina på 5 minuter och Daniel på 8 minuter. Om två personer går tillsammans över bron rör de sig i den hastighet som den långsammare personen rör sig. Hur snabbt kan de alla ta sig över älven?

Bild: Pixabay

Lösningsförslag:

Eftersom det finns endast en lykta måste de gå parvis över bron så att en person lämnar på andra sidan älven och en går tillbaka med lyktan. Vännerna kan gå över bron på följande sätt:

Axel och Bella går över bron (2 minuter) och Axel går tillbaka (1 minut). Christina och Daniel går över bron (8 minuter) och Bella går tillbaka (2 minuter). Slutligen går Axel och Bella över en gång till (2 minuter). På det här sättet går det sammanlagt åt 15 minuter (2+1+8+2+2=15). Ett annat alternativ är att Bella går tillbaka första gången och Axel andra gången, men slutsumman blir den samma.

Problem 7 – Finn ett förfalskat mynt

Du har åtta mynt och en våg med två vågskålar. Ett av mynten är förfalskade och väger mindre än de andra. Vilket är det minsta antalet vägningar du kan göra för att ta reda på vilket mynt som inte är äkta?

Vilket är det minsta antalet vägningar som krävs om du har 81 mynt, varav ett är förfalskat?

Uppgift: https://en.wikipedia.org/wiki/Balance_puzzle#Nine-coin_problem
Bild: Pixabay

Problem 8 – Klocka som saktar sig

Tina har märkt att hennes klocka saktar sig 2 minuter för varje timme som går när hon har jämfört med andra klockor. Tina ställer in klockan så att den ska visa rätt tid. Vad är klockan när den visar rätt tid nästa gång? Och hur länge är det tills dess?

Problem 9 – Djur på gården

Nivå 1:

a) Hur många nosar har två hundar?
b) Hur många öron har två kaniner?
c) Hur många svansar har sex rävar?
d) Hur många hovar har två hästar?
e) Hur många tassar har tre katter?
f) Hur många svansar har en katt och tre hundar?
g) Hur många fötter har en fågel och en häst?

Nivå 2:

På en djurgård finns sammanlagt 50 ben. Fåglarna är tre gånger så många som hästarna. Hur många hästar och fåglar finns på gården?

Som stöd för att lösa uppgiften kan man ha exempelbilder på djuren eller leksaksdjur i plast. Kan du hitta på fler djurberäkningar?

Bilder: Pixabay

Problem 10 – Toapappersrullen

Ta reda på hur mycket papper som finns på en toalettrulle. Bestäm tillsammans om ni vill titta på antalet ark eller papperslängden (eller kanske båda). Innan ni gör noggrannare mätningar, uppskatta hur mycket papper ni har. Ni kan gissa antalet ark eller till exempel tänka på hur långt pappret skulle räcka om det rullades ut.

Prova hur nära sanningen ni gissade!

Det verkar finnas ganska mycket toapapper, men hur kan ni räkna ut mängden papper lite mer exakt? Prova olika sätt, även kreativa lösningar är tillåtna! Använd till exempel metermått eller antal steg. Dra till exempel nytta av din egen längd eller jämför den med bekanta avstånd: hur många gånger skulle pappret räcka från rum till rum?

Om du räknar ark, tänk på olika sätt du kan räkna. Räknar du ensam eller delar du ansvaret så att var och en får en bit? Kommer du att få samma resultat om du försöker på olika sätt? Hur kan du se till att det inte finns några beräkningsfel längs vägen? Och slutligen stämmer beloppet på paketet med det som lovades?

Problem 11 – Godislådor

I varje låda finns tre säckar, i varje säck finns fem påsar, i varje påse finns fyra karameller.

a) Hur många karameller finns i fyra påsar?
b) Hur många påsar finns i åtta säckar?
c) Hur många karameller finns i tre lådor?
d) Hur många påsar finns i fem lådor?
e) Hur många karameller finns i två säckar?
f) Mamma vill packa 60 karameller. Hur många påsar, säckar och lådor behöver hon?
g) Ville har två lådor fler än Kalle. Hur många karameller fler har Ville?

Hitta på egna liknande uppgifter och lös dem!

Bilder: Pixabay

Problem 12 – Hela havet stormar

Hjälp, någon har lämnat alla saker huller om buller!

Läraren kan endast ge följande tre ledtrådar:

- Tejpen finns mellan pennorna och limstiften.
- Vattenfärgerna finns under pennorna.
- Både vattenfärgerna och penslarna finns till vänster om saxarna.

Skulle du kunna placera sakerna i rätt ordning?

Bild: Pixabay

Problem 13 – Att bjuda på kakor

Tommy och Annika har bakat en stor burk med kakor. Annika vill ta med kakorna till fotbollslagets avslutning, medan Tommy vill bjuda på kakorna åt sitt ishockeylag. Syskonen kan inte komma överens, så deras mamma föreslår i stället att kakorna tas med till barnens skolavslutning och att de får bjuda kakorna åt sina klasskamrater. I Annikas fotbollslag finns 15 spelare plus en målvakt, medan det i Tommys ishockeylag bara är 12 medlemmar. I barnens klass går sammanlagt 24 elever.

Hur många kakor har Tommy och Annika bakat, när delningen går jämnt ut oavsett om de bjuder på kakorna i fotbollslaget, ishockeylaget eller skolklassen?

Bild: Pixabay

Problem 14 – Handskakningar

Om alla elever i klassen skakar hand med varandra en gång, hur många handskakningar blir det sammanlagt?

Fundera först om tre elever skakar hand med varandra en gång, hur många handskakningar blir det?

Och om det är fem elever som skakar hand, hur många blir det då?

När antalet handskakningar ökar, behövs ett system för hur handskakningarna görs. Hur kunde ett sådant system se ut? Fundera alla elever tillsammans hur man kunde genomföra handskakningarna och dessutom räkna hur många handskakningar det blir när alla klassens elever skakar hand.

Hur skulle det gå om det fanns 100 elever eller n elever i klassen som ska skaka hand?

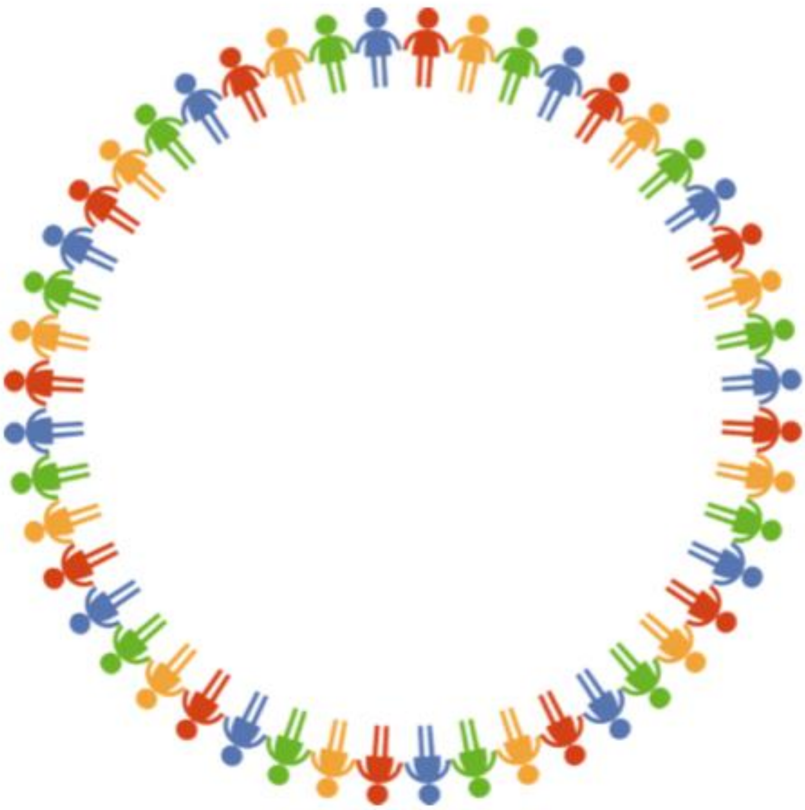


Bild: Pixabay

Problem 15 – Ljusen i födelsedagstårtan

Varje år på min födelsedag har jag blåst ut lika många ljus som jag har fyllt år.

Sammanlagt har jag nu blåst ut 55 ljus. Hur gammal är jag?

Uppgiften är modifierad och hämtad ur verket: Moscovich, I. (2009). Yli 500 ajatuspeliä: Ivan Moscovichin älytehtäviä tieteen, luonnon ja tekniikan aloilta. Königswinter: Ullmann.

Bild: Pixabay

Lösningsförslag till problem 1 - Glassarna

a) Uppgiften kan tolkas på flera sätt och därmed ge olika svar.

En systematisk genomgång av alla möjliga kombinationer kan göras genom att fylla i en tabell, göra ett schema eller rita bilder med smakerna utskrivna, endera i sin helhet eller med förkortningar.

Med yngre elever kan det vara bra att ha fyra konkreta smaker, t.ex. jordgubbe, vanilj, choklad och päron som i exempellösningarna. Äldre elever kan bättre hantera att smakerna numreras från ett till fyra eller bokstaveras från A till D, dvs. en mer abstrakt namngivning i form av symboler som står för de olika smakerna på glass.

Lösningen i korthet:

Lisa kan välja två smaker på sex olika sätt ($4 \times 3 \div 2 = 6$). Den första smaken kan väljas på fyra olika sätt och den andra kan väljas på tre olika sätt. Talens produkt måste divideras med två eftersom det inte spelar någon roll i vilken ordning smakerna kommer. Annars skulle vi göra skillnad på en choklad-vanilj och vanilj-chokladglass. Ytterligare kan Lisa välja två kulor av samma smak, vilken kan göras på fyra olika sätt och då skulle det sammanlagt finnas tio sätt att välja glass på.

Lösning 1.

	Jordgubbe	Vanilj	Choklad	Päron
Jordgubbe		x	x	x
Vanilj			x	x
Choklad				x
Päron				

Uppgiften tolkas så att Lisa ska köpa två kulor glass, där kulorna måste vara av olika smak och där ordningen inte spelar någon roll. Lisa kan välja glass på 6 olika sätt.

Lösning 2.

	Jordgubbe	Vanilj	Choklad	Päron
Jordgubbe	x	x	x	x
Vanilj		x	x	x
Choklad			x	x
Päron				x

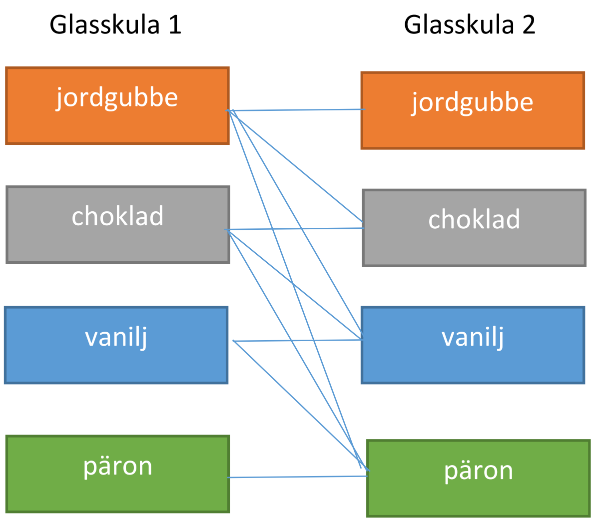
Uppgiften tolkas så att Lisa ska köpa två kulor glass och kulorna kan vara av samma eller olika smak, men kulornas ordning spelar ingen roll. Lisa kan välja glass på 10 olika sätt.

Lösning 3.

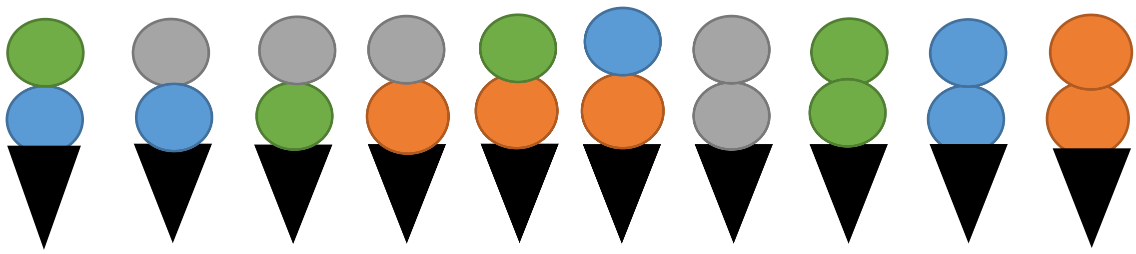
	Jordgubbe	Vanilj	Choklad	Päron
Jordgubbe	X	X	X	X
Vanilj	X	X	X	X
Choklad	X	X	X	X
Päron	X	X	X	X

Uppgiften tolkas så att Lisa ska köpa två kulor glass, där kulorna kan vara av samma eller olika smak. Dessutom är det avgörande i vilken ordning kulorna kommer, exempelvis är inte vanilj-choklad samma som choklad-vanilj. Lisa kan välja glass på 16 olika sätt.

En annan typ av översikt hur smakerna kan väljas där strecken mellan lådorna avser möjliga kombinationer. I exempelfallet kan smakerna väljas på tio sätt (räkna sträcken mellan lådorna).



Ritad bild över de möjliga smakkombinationerna:

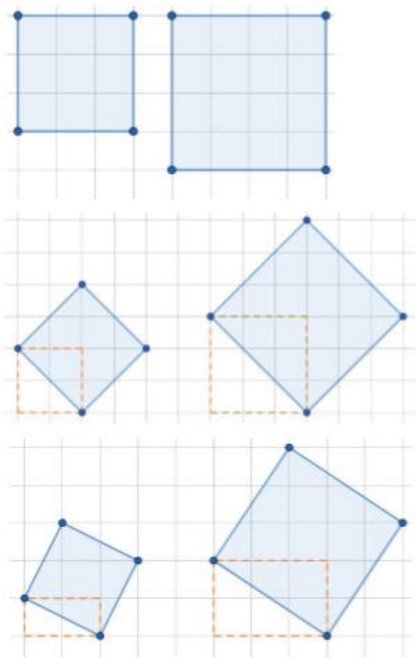


Uppgiften kan göras enklare genom att minska antalet smaker och svårare genom att öka antalet kulor hon vill ha eller antalet smaker man kan välja på. Med äldre elever kan man ta upp skillnaden mellan kombination och permutation.

b). Motsvarande problem kunde handla om att välja kläder eller att plocka strumpor ur en korg utan att se. T.ex. I Stinas klädkorg finns fyra par strumpor. På morgonen tar hon två strumpor utan att se sig för. På hur många olika sätt kan Stina råka få ett par strumpor?

Uppgiften kan lösas på samma sätt som glassproblemet, bara att man ritar strumpor i stället och namnger dem på ett annat sätt. Exempelvis A1 A2 B1 B2 C1 C2 D1 D2, där bokstaven anger vilket strumppar det är fråga om och siffran anger om det är den första eller andra strumpan i paret.

Lösningsförslag till problem 2 - Kvadrater på geobräde



I figuren till höger finns lösningarna markerade med blå färg. De orangea streckade linjerna som markerats är de hjälplinjer som använts för att konstruera kvadraterna.

En kvadrat vars area är 10 kan bildas genom att utnyttja en rektangel med sidorna 1 och 3. Diagonalen i rektangeln får fungera som kvadratens sida. Samtidigt är diagonalen hypotenusan i en rätvinklig triangel, varpå man kan utnyttja Pythagoras sats ($a^2 + b^2 = c^2$, där a och b står för kateterna och c för hypotenusan).

För att en kvadrat med en viss area ska gå att skapa på geobrädet, måste arean vara summan av ett heltal i kvadrat med ett annat heltal i kvadrat. Det finns inga heltal där summan av två tal i kvadrat skulle vara 11 eller 12. För att bevisa detta kan man göra en systematisk genomgång i en tabell. När man granskar kolumnen c^2 nedan, ser man att 10 finns med, men inte 11 eller 12.

a	b	a^2	b^2	c^2
1	1	1	1	2
1	2	1	4	5
1	3	1	9	10
1	4	1	16	17
2	2	4	4	8
2	3	4	9	13
2	4	4	16	20
3	3	9	9	18
3	4	9	16	25

För att kunna lösa denna uppgift behöver lösaren ha klart för sig definitionerna av begreppen *kvadrat* och *area*. Det är en fördel att veta hur man räknar areor av trianglar och kvadrater eller rektanglar, men inte ett måste så länge det finns en förståelse om hur man kan räkna rutor.

Med yngre elever kan man testa sig fram, genom att skapa olika kvadrater och beräkna arean eller hur många hela rutor som ryms in i respektive kvadrat. Den sista deluppgiften behöver inte tas upp med de yngsta eleverna, eftersom förklaringen är relativt avancerad.

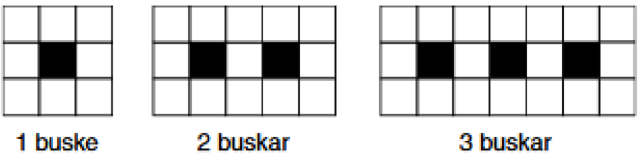
Pythagoras sats behöver inte heller tas upp förrän med äldre elever och därför lämpar sig den systematiska genomgången i tabellform bättre i högre årskurser.

Lösningsförslag till problem 3 - Trädgårdsmästaren

1.

Svar: a) 13 b) 23 c) 28 d) 53 e) 503 f) 5n+3

För att lösa uppgiften så effektivt som möjligt börjar man med att söka ett mönster och uttrycka det på ett matematiskt sätt, men först kan man räkna antalet plattor och buskar från bilden. För att göra ett system av beräkningarna kan man lista antalet buskar och plattor i en tabell.



Antal buskar	**Antal plattor**
1	8 = 5+3 = 5*1 +3
2	13 = 5+5+3 = 5*2 +3
3	18 = 5+5+5+3 = 5*3 +3
Söker efter mönster och beräknar	
4	5*4 +3 = 23
5	5*5 +3 = 28
10	5*10 +3 = 53
100	5*100 +3 = 503
n	5*n+3 = 5n+3

Det är också möjligt att genast utveckla ett uttryck för mönstret. När det finns *n* stycken buskar, är bredden från första till sista plattan 2n+1. Man kan föreställa sig att först kommer en platta och sedan en buske, men efter det kommer alltid en platta och därför adderas en platta till i slutet. Rektangelns höjd är dessutom alltid tre plattor. Men eftersom det inte behövs någon platta där buskarna planteras, måste man subtrahera antalet buskar från uttrycket. Det antal plattor som behövs kan skrivas som:

$3(2n + 1) - n = 6n + 3 - n = 5n + 3$

Följaktligen behövs 13 plattor runt två buskar, 23 runt fyra buskar, 28 runt fem buskar, 53 runt tio buskar och 503 runt 100 buskar.

2.

Svar: 208 plattor kommer att användas vid plantering av 41 buskar.

För att beräkna hur många buskar Camilla måste plantera om hon lägger 208 plattor kan man lösa ekvationen 5n+3 = 208.

5n+3 = 208
5n = 205
n = 41 → Camilla behöver plantera 41 buskar

Tips! Med yngre elever som inte ännu lärt sig abstrakt ekvationslösning kan man resonera sig fram. Stenläggningen innehåller tre vågräta rader var den översta och understa är lika lång och innehåller enbart plattor, medan den mittersta består av varannan platta och varannan buske. Den mittersta raden börjar och slutar dessutom med en platta.
Alternativt kan man se stenläggningen som en tre rutor bred kö, med enheter om 5 plattor och en buske plus avslutningsvis tre plattor. Genom att arbeta baklänges kan man lista ut hur många enheter eller buskar som finns bland de 208 plattorna. Först plockas de tre avslutande plattorna bort (208-3 = 205). Därefter vet man att varje enhet består av en buske och fem plattor och med elever som klarar division med stora tal kan man direkt räkna 205/5 = 41. Ifall den divisionen är för svår eller omöjlig att klura ut kan man dela upp beräkningen i bitar och subtrahera grupper om 5 tills inga plattor återstår eller eleverna har uppfattat något slags mönster som förenklar beräkningen. Slutligen borde man komma fram till 41 stycken enheter bestående av fem plattor och en buske, alltså räcker de 208 plattorna till 41 buskar.

3. Matematiska mönster går att finna i helt vardagliga saker. En uppgift som är något enklare än problemet med buskar och plattor följer här:

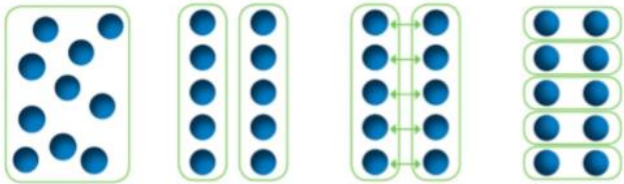
Johanna tycker om bröd och bakar gärna egna limpor och semlor. Hon äter en brödpåse på tre dagar. Hur många påsar bröd äter hon på

a) 6 dagar
b) 12 dagar
c) 30 dagar
d) 108 dagar
e) n dagar?
f) Hur många veckor räcker 21 påsar bröd?

Svar:

a) 6/3= 2 påsar
b) 12/3 = 4 påsar
c) 30/3= 10 påsar
d) 108/3 = 36 påsar
e) n/3
f) 21påsar*3 dagar/7 dagar per vecka = 9
→ 9 veckor

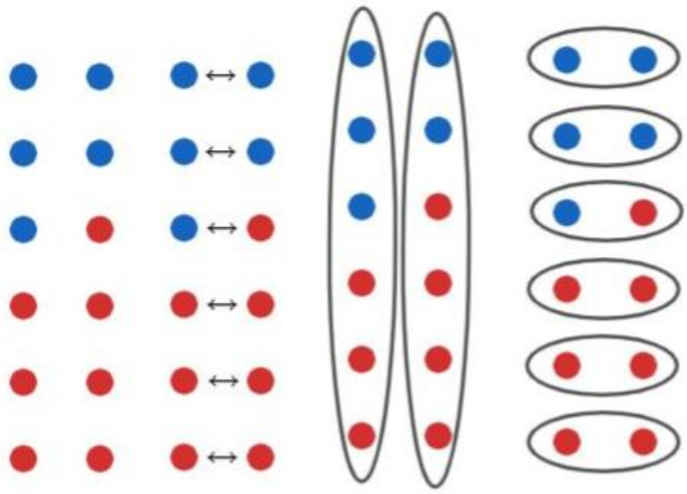
Lösningsförslag till problem 4 - Udda och jämna tal



1 2 3 4

1. Föremålen i illustration 1 är ett jämnt antal, eftersom de kan delas upp i två lika stora delar, och hör ihop med definition B. Illustration 2 visar en summa av två lika stora tal, dvs den hör ihop med definition B. Illustrationerna 3 och 4 föreställer båda parbildningar eller multipler av talet två, dvs. de hör ihop med definition A.

2. Se bilden nedan där två udda tal summeras till ett jämnt tal. Udda tal illustreras som par så långt det räcker och ett ental står ensamt. Man kan även skapa rektanglar med bredden två rutor och se hur alla udda tal får en ensam ruta som blir över utanför den jämna rektangeln.



3. Konkretisering av jämna och udda heltal riktar sig mer till nybörjarundervisningen och grundskolans lägre årskurser. Exempelvis kan man:
   - Ha ett antal föremål (kulor, klisterbilder, leksaker) som ska delas jämnt i två högar eller rättvist mellan två personer. Om det går jämnt ut är det fråga om ett jämnt antal, och om det blir ett föremål över är det fråga om ett udda antal.
   - Bilda en kö med par, där barnen går hand i hand. Om någon lämnar utan par är antalet barn udda.
   - Duka knivar och gafflar på matbordet. Om det finns lika många knivar som gafflar är de ett jämnt antal, men om det finns en för mycket av knivar eller gafflar är totala antalet bestick udda.

   Forts. uppg. 3

- Kombinera spade och hink för sandslottsbygge. Om det lämnar en hink över eller någon hink borde få två spadar är antalet udda, medan om hinkar och spadar går jämnt ut är det fråga om ett jämnt antal.
- Använda rutigt papper och skapa rektanglar. Om de är jämna och fina är antalet rutor jämnt (ifall rektanglarna har bredden två rutor), men ifall en ruta sticker ut någonstans är antalet rutor udda.
- Ha en genomgång av talraden från 1 till 9, rita antalet föremål och visa hur de går eller inte går att dela jämnt.
- Skapa en tabell och fyll i *antal föremål, antal par som går att bilda av föremålen,* vilken *summa av två lika heltal* som föremålen står för, samt om det är ett *jämnt eller udda antal*.

4. Man kan undersöka olika exempelsituationer och uppmärksamma regelbundenheter, rita bilder eller undersöka fenomenet med hjälp av konkreta föremål. I förskolan går barnen ofta två och två på led vid byte av utrymme eller utomhus i trafiken, vilket är ett utmärkt tillfälle att uppmärksamma barnen på jämna och udda tal. Knappast är alla barn på plats alla dagar, vilket gör att gruppen en dag kan bestå av ett jämnt antal, medan den en ny dag består av ett udda antal barn.
   I sammanhanget kan det också vara relevant att fokusera på begrepp som att *dela, lika många, båda sidor, hälften och dubbelt*.

   Med lite äldre elever kan man fokusera på större tal, både som sådana i positionssystemet och som sammansättningar av tal.

   T.ex. 243 är udda som sådant, även om 2 och 4 är jämna tal
   7581 är ett udda tal, och innehåller tre udda tal och ett jämnt
   622 är ett jämnt tal och består av tre jämna tal, men kan delas upp i två udda heltal.

   Man kan också använda olika räknesätt och se om svaret blir jämnt eller udda. Därefter kan man undersöka regelbundenheter och försöka bevisa om det alltid gäller.

Formellt bevis för att summan av två udda tal alltid är jämn:

Låt m och n vara naturliga tal. Då är 2m+1 och 2n+1 udda. Dessutom gäller

$(2m + 1) + (2n + 1) = 2m + 2n + 2 = 2(m+n+1) = 2k$

där $k = n + m + 1$ är ett heltal.

Summan är alltså en multipel av talet 2 (definition A), vilket i sin tur medför att summan av två slumpmässigt valda udda tal blir jämn.

I själva verket kan uttrycket modifieras ytterligare för att motsvara definition B: eftersom $2k = k + k$, kan två udda siffror uttryckas som summan av två lika heltal.

Lösningsförslag till problem 5 - Hur gamla är barnen?

1. Barnen är 2, 2 och 9 år gamla.

2. Gåtan löses enklast genom att fundera noggrant vad varje påstående innefattar. I replik 2 får man veta att produkten av barnens åldrar är 36, dvs. man kan skriva ett uttryck x * y *z= 36. Ett bra sätt att börja är att lista vilka tal 36 är delbara med eller vilka faktorer man kan finna i 36. Talet 36 är delbart med 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 och 36.

   Därefter kan det löna sig att göra en tabell över alla de faktorer som bildar produkten 36. Med yngre elever lönar det sig att ge barnen namn eller åtminstone kalla dem för yngsta, mellersta och äldsta barnet, medan man med äldre elever kan benämna barnen med faktorerna x, y och z.

   I replik 4 får man veta att summan av åldrarna är identisk med Pythagoras adress. Då lönar det sig att skapa ytterligare en kolumn i tabellen i vilken man fyller i summan av åldrarna. Eftersom alla tänkbara åldrar som uppfyller produktkravet finns listade, behöver man inte fundera på andra kombinationer av heltal. Det räcker med att räkna summan på de åldrar man redan listat. Vid en närmare analys av kolumnen över summor inser man att det finns två olika ålderskombinationer som ger summan 13. I och med att Pythagoras inte vet åldrarna ännu där, utan behöver en ledtråd till, kan man dra slutsatsen att det måste vara något av de två alternativ som gett samma summa.

   I replik 6 får man veta att ’den’ som är äldst har blont hår, vilket inte säger något om åldrar men pronomenet ’den’ avslöjar att det är singular och endast en person som har den högsta åldern. De två alternativ som uppfyller produkten 36 och har identisk summa är åldrarna 1, 6 och 6 respektive 2, 2 och 9. Eftersom det äldsta barnet inte har något syskon i samma ålder bör barnen vara 2, 2 och 9 år enligt uteslutningsmetoden. (Det man inte kan veta är om 6-åringarna är tvillingar eller om en är född i början av året och den andra i slutet av året, så att den ena verkligen är lite äldre. Men utgångsläget är att de antas vara lika gamla, och därför inte utgör problemets lösning.)

Yngsta barnet	**Mellersta barnet**	**Äldsta barnet**	**Summa av åldrarna**
1	1	36	38
1	2	18	21
1	3	12	16
1	4	9	14
1	6	6	*13*
2	2	9	*13*
2	3	6	11
3	3	4	10

3. Den matematik som synliggörs i de olika argumentationsstegen är räkning av addition, multiplikation och lite division. Eleverna behöver ha förståelse för produkter, faktorisering, primtalsfaktorer, delbarhet och summor, att kunna göra nödvändiga beräkningar och resonera logiskt.

En finsk variant med lösning hittas även på: https://www.youtube.com/watch?time_continue=34&v=pwco8nEPanc

Lösningsförslag till problem 6 – Hela sällskapet över bron

Eftersom det finns endast en lykta måste de gå parvis över bron så att en person lämnar på andra sidan älven och en går tillbaka med lyktan. Vännerna kan gå över bron på följande sätt:

Axel och Bella går över bron (2 minuter) och Axel går tillbaka (1 minut). Christina och Daniel går över bron (8 minuter) och Bella går tillbaka (2 minuter). Slutligen går Axel och Bella över en gång till (2 minuter). På det här sättet går det sammanlagt åt 15 minuter (2+1+8+2+2=15). Ett annat alternativ är att Bella går tillbaka första gången och Axel andra gången, men slutsumman blir den samma.

Bild: Pixabay

Lösningsförslag till problem 7 – Finn ett förfalskat mynt

Det förfalskade myntet kan hittas med två vägningar. Sätt först tre mynt i vardera vågskålen. Den skål som är lättare innehåller det förfalskade myntet och om vågen visar jämnt, finns det förfalskade myntet bland de två återstående mynten som inte är i någondera vågskålen. Därefter väger man enligt samma idé ett mynt i vardera vågskålen från den hög där myntet finns och lämnar ett bredvid. Ifall vågen visar jämnt är det fråga om myntet som ligger bredvid som är det förfalskade.

I fallet med 81 mynt behövs fyra vägningar. I första omgången delas mynten upp i grupper om 27 mynt och vägs enligt samma princip som i föregående fall. När man fått reda på i vilken grupp, med 27 mynt, det förfalskade myntet finns, görs en ny vägning där man delar upp mynten i grupper om 9 mynt. Ytterligare behövs två vägningar, en vägning med tre mynt i vardera vågskålen och en vägning med ett mynt i vardera vågskålen.

Uppgift: https://en.wikipedia.org/wiki/Balance_puzzle#Nine-coin_problem
Bild: Pixabay

Lösningsförslag till problem 8 – Klocka som saktar sig

Föreställ dig att lösa uppgiften med hjälp av två analoga klockor. Anta att den ena saktar sig och den andra visar rätt tid. Om klockan saktar sig med 2 minuter per timme , kan man dra slutsatsen att minutvisarna är på samma ställe efter 30 timmar. På 30 timmar har minutvisaren ändå bara saktat sig en timme (30 x 2min = 60 min). För att även timvisaren ska visa rätt tid måste tiden 12-faldigas, alltså 12 x 30h = 360h = 15 dygn (eftersom den analoga klockan har en urtavla med 12 timmar). Klockan visar alltså rätt tid med 15 dygns mellanrum. När klockan igen visar rätt tid, visar den samma tid som vid tillfället när den ställdes in. I ett fall med en digital klocka skulle tiden dubbleras ytterligare.

Uppgiften blir enklare om man endast kräver att minutvisarna ska vara på samma ställe, och inte att båda klockorna ska visa exakt samma tid. Med yngre elever är det värt att ha två konkreta klockor att vrida på, medan lite äldre elever borde klara av att föreställa sig hur visarna rör sig och kunna resonera logiskt utgående från att de ser en klocka.

Lösningsförslag till problem 9 – Djur på gården

Nivå 1:

Svar:

a) 2
b) 4
c) 6
d) 8
e) 12
f) 4
g) 6

Bild: Pixabay

Uppgiften kan anpassas till lite högre åldrar genom att ta in ett algebraiskt tänkande och skapa uttryck för hur man kan räkna antalet kroppsdelar hos olika djur beroende på hur många djuren är. T.ex. I g-uppgiften kunde man be eleverna skapa ett uttryck för att beräkna svaret om man ändrar antalet fåglar och hästar. I grunduppgiften är 2+4 enkel matematik, men om man först ändrar antalet djur stegvis till två fåglar och en häst, tre fåglar och två hästar osv. och sedan ber dem uttrycka det för n stycken djur. Då skulle beräkningen vara 2x2 + 1x4 =8 och 3x2 + 2x4=14, och uttrycket skulle vara 2f +4h (notera multiplikationen som finns mellan variablerna och siffran).

Nivå 2:

Uppgiften kan lösas genom att pröva sig fram, rita bilder eller genom att skapa ett ekvationssystem. Utmaningen när man skapar ekvationssystemet är att klargöra vad man benämner med vilken variabel.

T.ex. x=fågel, y = häst. Detta kräver att man tänker efter och inte sätter x + y = 50, utan multiplicerar variablerna med antalet ben som respektive djur har. Ekvationssystemet ser därför ut enligt följande:

$$\begin{cases} x = 3y \\ 2x + 4y = 50 \end{cases}$$

Vid insättning av x = 3y i den andra ekvationen får man att

2*3y +4y = 50 → 10y = 50 → y = 5.

Insättning av y = 5 i den första ekvationen ger att x = 3*5 = 15.

Svar: Det finns 15 fåglar och 5 hästar.

Lösningsförslag till problem 11 – Godislådor

a) En påse innehåller fyra karameller, alltså innehåller fyra påsar 16 karameller (4*4=16).
b) En säck innehåller fem påsar, alltså innehåller åtta säckar 40 påsar (8*5=40).
c) Börja med att räkna ut hur många karameller som finns i en låda: 4 karameller*5påsar*3säckar*1låda=60karameller. Tre lådor innehåller 3*60= 180 karameller.
d) Börja med att räkna hur många påsar som finns i en låda: 5påsar*3säckar*1låda =15 påsar. Fem lådor innehåller 5*15=75 påsar.
e) En säck innehåller 4karameller*5påsar= 20karameller. Två säckar innehåller 2*20=40 karameller.
f) Mamma behöver 15 påsar för 60 karameller (60 karameller och 4 karameller/påse → 60/4=15). För 15 påsar behöver hon tre säckar (15 påsar och 5 påsar/säck → 15/5=3). För tre säckar behöver hon en låda (3 säckar och 3 säckar /låda 3/3=1). →Mamma behöver en låda, tre säckar och fem påsar för att packa 60 karameller.
g) Mamma behövde en låda för 60 karameller, alltså har Ville 2*60=120 karameller fler än Ville. (2lådor*3säckar*5påsar*4karameller = 120 karameller).

Tips! Uppgiften blir enklare om man minskar antalet förpackningar inuti varandra. Lämna till exempel bort säckarna eller lådorna helt och hållet. Uppgiften blir däremot svårare om man lägger till ytterligare förpackningar.

Bilder: Pixabay

Lösningsförslag till problem 12 – Hela havet stormar

Bilder: Pixabay

Endera kan man klippa ut bilderna och placera in dem i rutorna, eller så resonerar man logiskt och använder sig av uteslutningsmetoden. Det går även att skapa svårare uppgifter av samma slag genom att tillägga fler saker och fler rutor.

Ett klassiskt problem i samma stil, men betydligt svårare, är Albert Einsteins gåta.

Lösningsförslag till problem 13 – Att bjuda på kakor

Det finns 48, 96 eller 144 kakor, eller något annat tal som är en multipel av 48 så länge kakorna ryms i burken.

Antalet kakor måste nämligen vara delbart med 16 och 24 och 12. Men om antalet är delbart med 24 är det automatiskt också delbart med 12, eftersom 12 är en faktor i 24.

De tal som är delbara med 16 är 16, 32, 48, 64, 80, 96, 112, 128, 144, 160, ...

De tal som är delbara med 24 är 24, 48, 72, 96, 120, 144, 168, ...

Från listan ser man att talen 48, 96 och 144 är delbara med både 16 och 24.

Alternativt om man delar upp 12, 16 och 24 i primtalsfaktorer...

12 = 3*4 = 3*2*2

16 = 4*4 = 2*2*2*2

24 = 6*4 =3*2*2*2

så ser man att det behövs minst en faktor 3 och minst fyra faktorer 2, för att talet ska gå att dela med både 12, 16 och 24.

3*2*2*2*2 = 48

Därefter kan man lägga till ytterligare faktorer, eller multiplicera 48 med något tal och få andra tal delbara med 12, 16 och 24.

Bild: Pixabay

Lösningsförslag till problem 14 – Handskakningar

Varje elev skakar hand med alla andra förutom sig själv. Om det är n personer som ska skaka hand, skakar de hand med sammanlagt n(n-1) människor. Eftersom handskakningen sker för två personer samtidigt (om Anna och Emil skakar hand, så skakar också Emil och Anna hand, men trots det sker bara en handskakning) måste antalet delas på två. I det allmänna fallet med n personer sker därmed $\frac{n\,(n-1)}{2}$ handskakningar.

Om tre elever skakar hand sker sammanlagt 3 handskakningar, dvs. 3·2 : 2 = 3

Om det är fem elever som skakar hand, sker sammanlagt 10 handskakningar, dvs. 5·4 : 2 = 10

Om det är 100 elever som skakar hand, sker sammanlagt 4950 handskakningar, dvs. 100·99 : 2 = 4950

Uppgiften kan även lösas på många andra sätt. En allmän lösning på finska av Matti Lehtinen finns i Solmu-tidningen nummer 2/1998-1999: https://matematiikkalehtisolmu.fi/1998/3/lehtinen/

Det är också möjligt att programmera en programkod i Python och ha ett program som räknar ut antalet handskakningar åt en med följande kod:

```
n = 10
sammanlagt = 0
for a in range(1,n+1):
        for b in range(a+1,n+1):
        print(a,"och",b,"skakar hand")
        sammanlagt += 1
print("sammanlagt",sammanlagt,"skakar hand")
```

Algoritmen är dock ganska långsam när n blir stort. Fundera hur man kunde effektivera sättet att få ut ett svar!

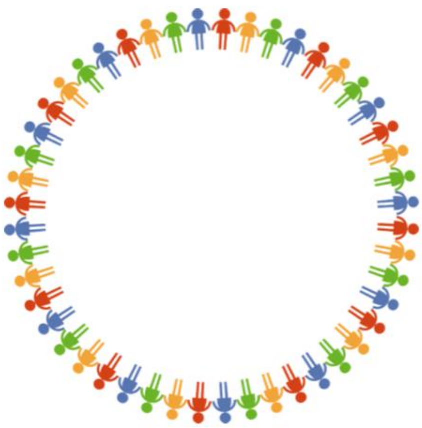


Bild: Pixabay

Lösningsförslag till problem 15 – Ljusen i födelsedagstårtan

Personen är 10 år gammal.

Du hittar förmodligen svaret på relativt kort tid genom att prova dig fram. Addera ihop de första talen i talraden tills du når summan 55, dvs. 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = 55.

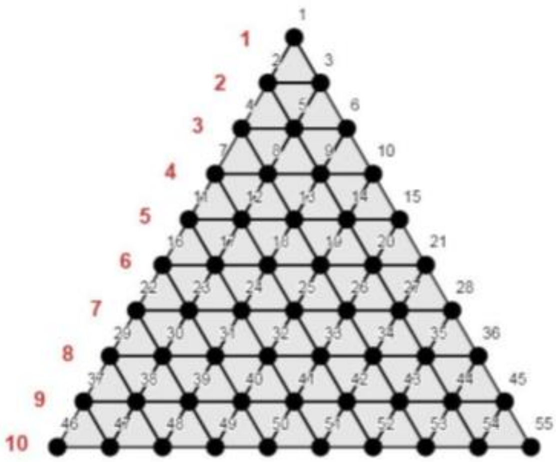
Nedanstående tabell kan vara till hjälp:

Ljus	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136	153	171	190	210
Ålder	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Trianglar och triangeltal kan emellertid också illustrera detta. Den n:te triangeln erhålls genom att placera antalet punkter motsvarande 1, 2, ..., n under varandra i form av en liksidig triangel. N:s triangeltal är summan av prickarna i triangeln.

Exempelvis det tredje triangeltalet fås om man sätter en punkt på första raden, två på andra raden och tre på tredje raden. Triangeln innehåller då sex punkter sammanlagt och det tredje triangeltalet är alltså sex.

N:te triangeltalet är egentligen summan av de n första talen. Denna information kan vara till nytta i lösningen av uppgiften. Om man undersöker triangeltalen, kan man se att 55 är det tionde triangeltalet och därmed är personen i fråga 10 år.



Mer om triangeltal finns på: https://en.wikipedia.org/wiki/Triangular_number

Naturligtvis kan man också använda en känd formel för att beräkna summan av de n första heltalen. Då får man för n = 10 ur formeln n (n + 1) / 2 = 55. Formeln är den samma som användes vid beräkningen av antalet handskakningar (se problem 14).

Tips! Uppgiften kan göras lättare eller svårare genom att ändra mängden ljus.