Problemuppgifter

för flera olika utbildningsstadier

Uppgiftsserien har sammanställts inom ramen för Lumatikka-fortbildningsprogrammet som anordnats av LUMA-center Finland-nätverket med samarbetspartner. Programmet finansieras av Utbildningsstyrelsen.

Uppgifterna har i utgångspunkten ordnats enligt svårighetsgrad, så att de lättare uppgifterna finns i början och de mer utmanande mot slutet av materialet. Uppgifterna har inte kategoriserats enligt årskurs, och många av dem lämpar sig också för flera årskurser. Du får gärna omarbeta dem och testa dina egna idéer! Till de flesta uppgifter ges också ett lösningsförslag, som presenteras genast efter varje uppgift på en egen sida.

Mycket nöje med problemuppgifterna!

LUMATIKKA

LUMA-KESKUS SUOMI
LUMA-CENTER FINLAND
LUMA CENTRE FINLAND

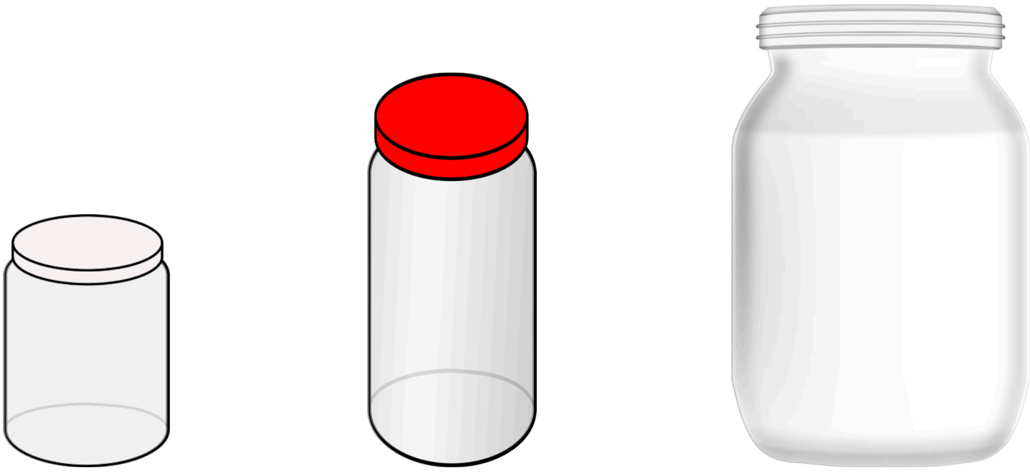
UTBILDNINGSSTYRELSEN FINANSIERAR PROJEKTET

1. För uppgiften behövs flera glasburkar i olika färger och former, till exempel krydd-, barnmats- och syltburkar.

   Fundera tillsammans med barnen över hurdana burkar ni har. Är de alla lika? Vilka skillnader ser ni?

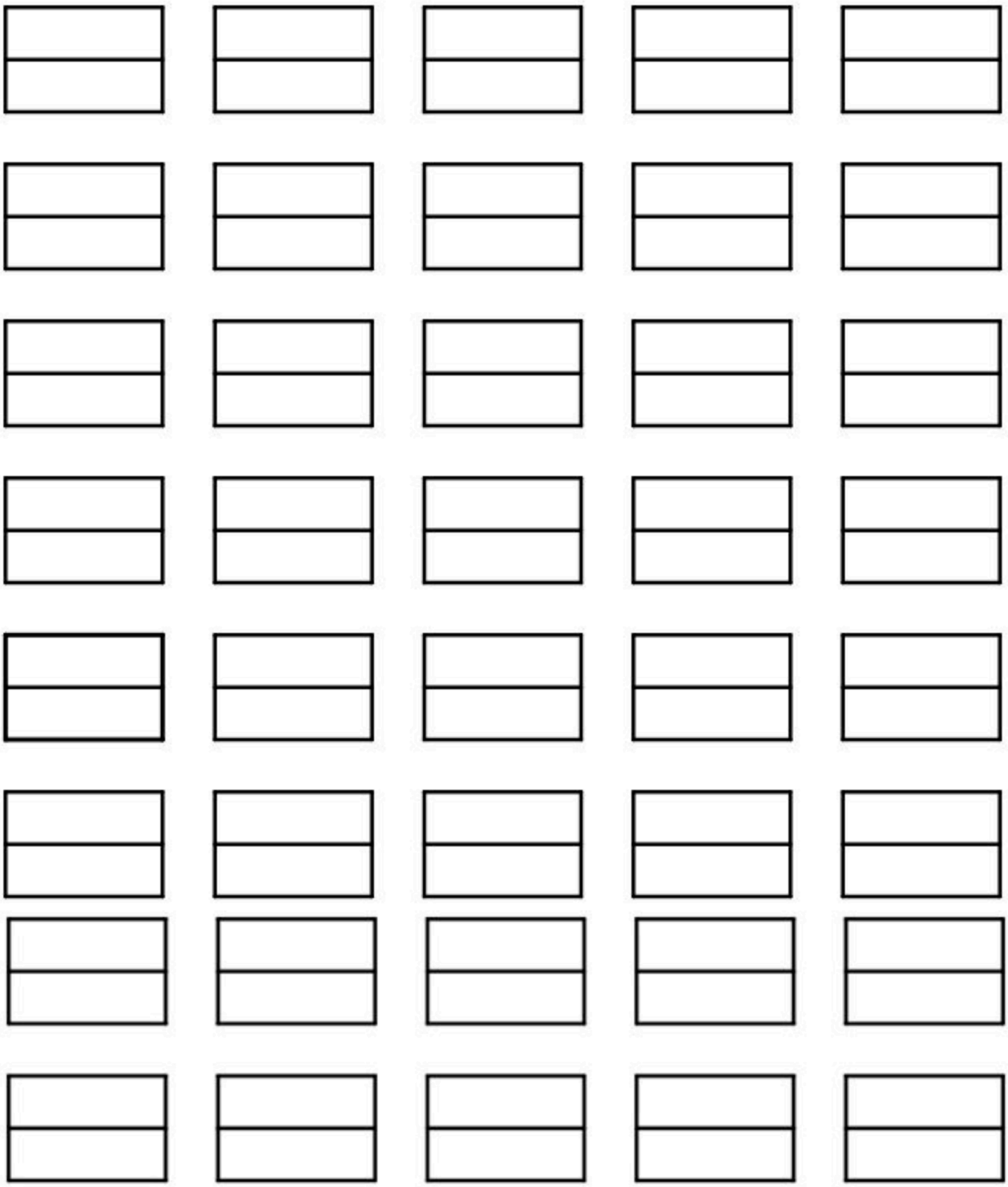
   Vad betyder det egentligen om något är litet, stort, smalt, brett, lågt eller högt? Eller runt, kantigt, hårt eller genomskinligt?

   Be barnen välja ut den burk som de tycker är störst. Hur kan man ta reda på om den verkligen är den allra största av burkarna?



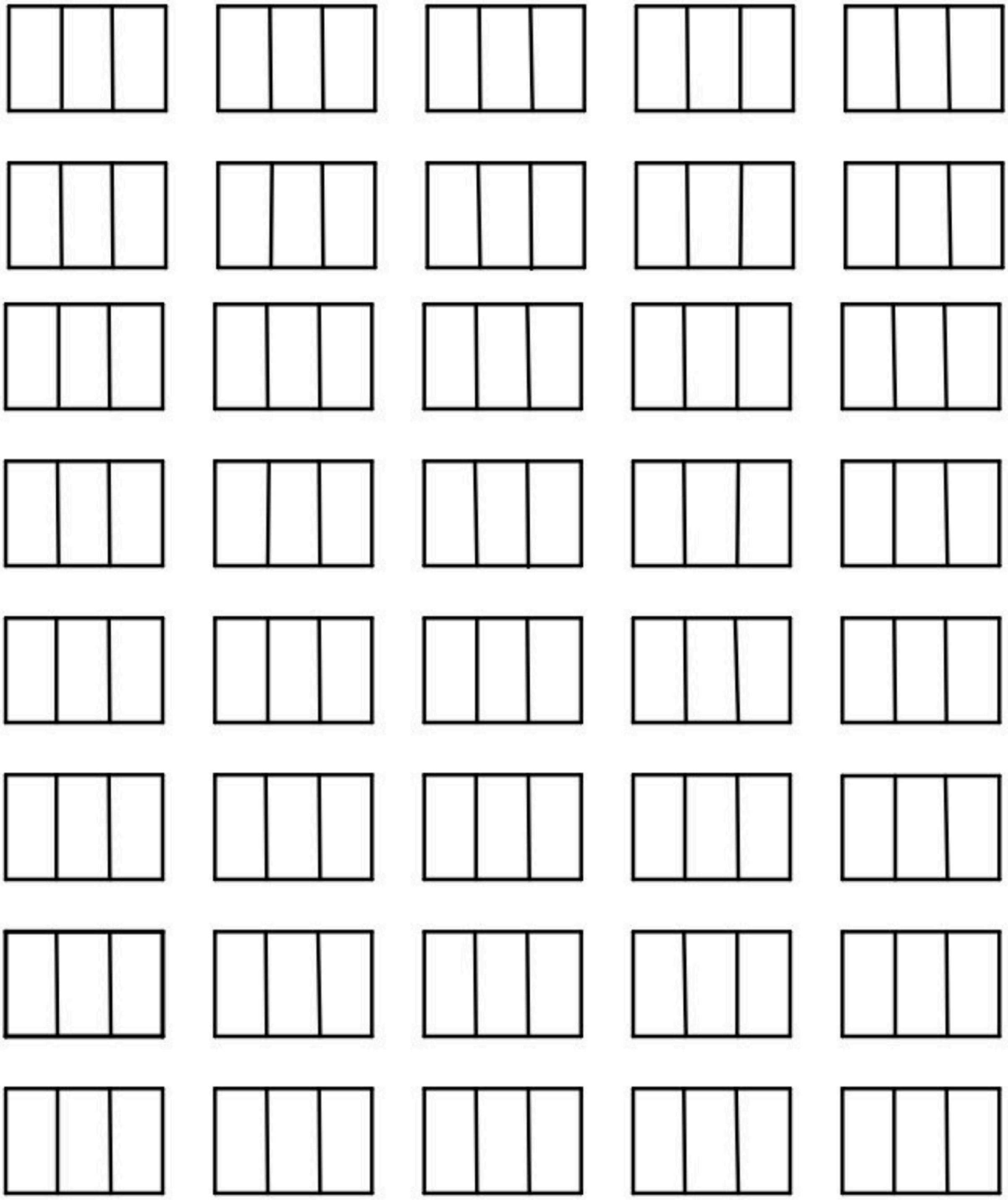
Uppgiften baserar sig på Skolverkets video "Glasburkar". Originalmaterialet är tillgängligt på kortadressen bit.ly/purkit.
Bilder: Pixabay

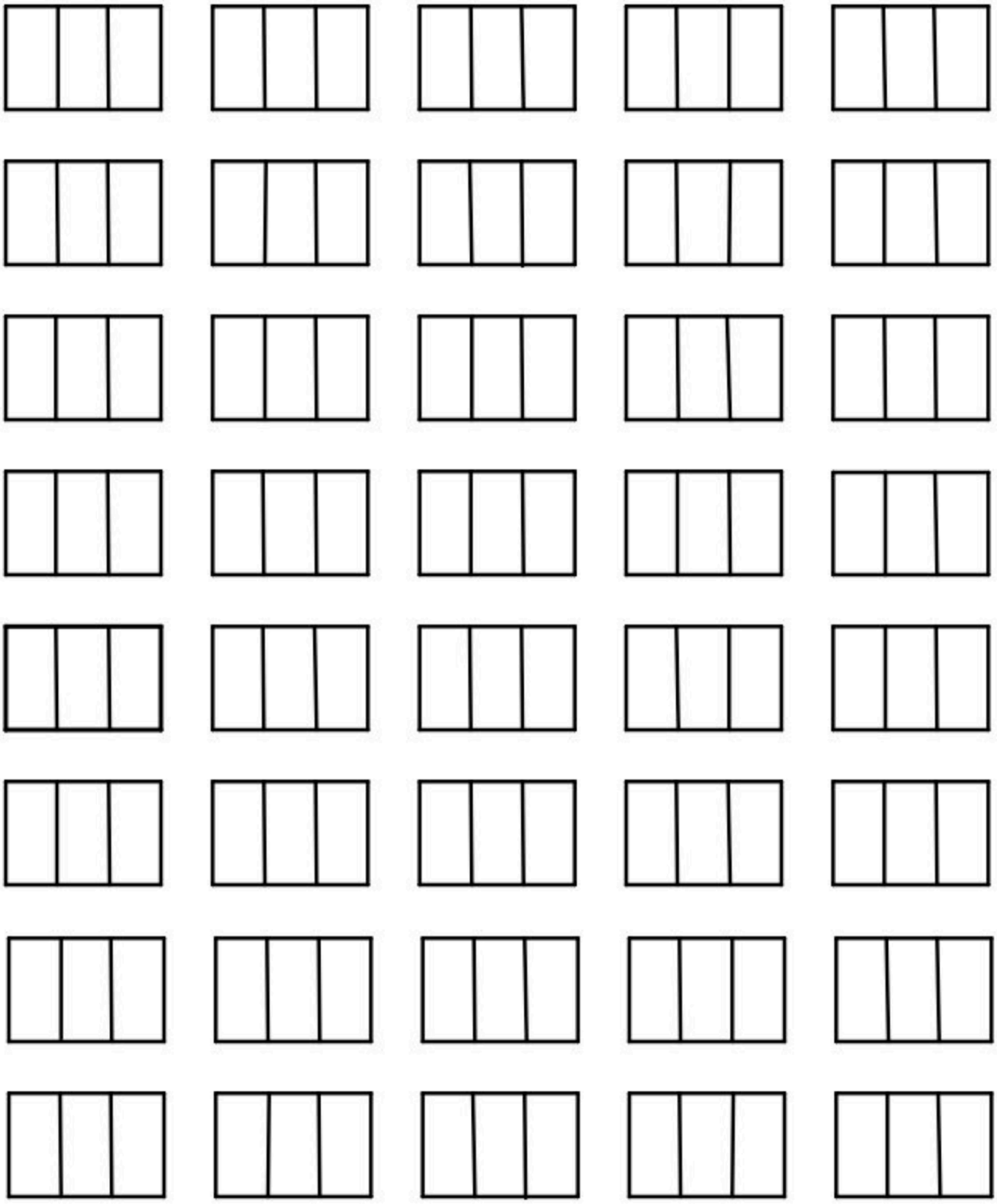
2. På hur många olika sätt kan du färglägga flaggorna om du har
   – en blå och en röd penna,
   – en blå, en röd och en gul penna?



Hur blir det om flaggorna har tre ränder istället för två? På hur många olika sätt kan du färglägga dem då, om du har

- en blå och en röd penna,
- en blå, en röd och en gul penna?

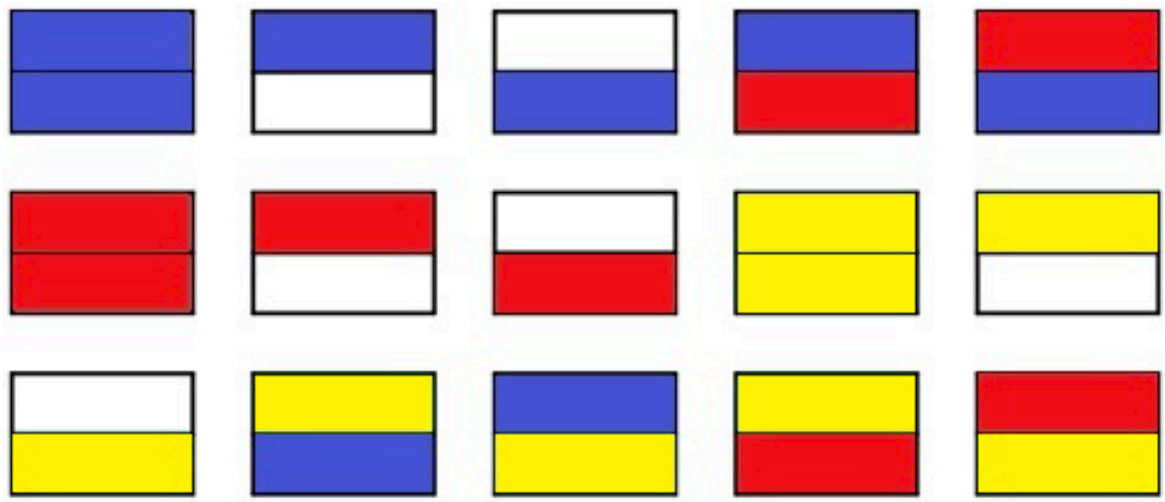




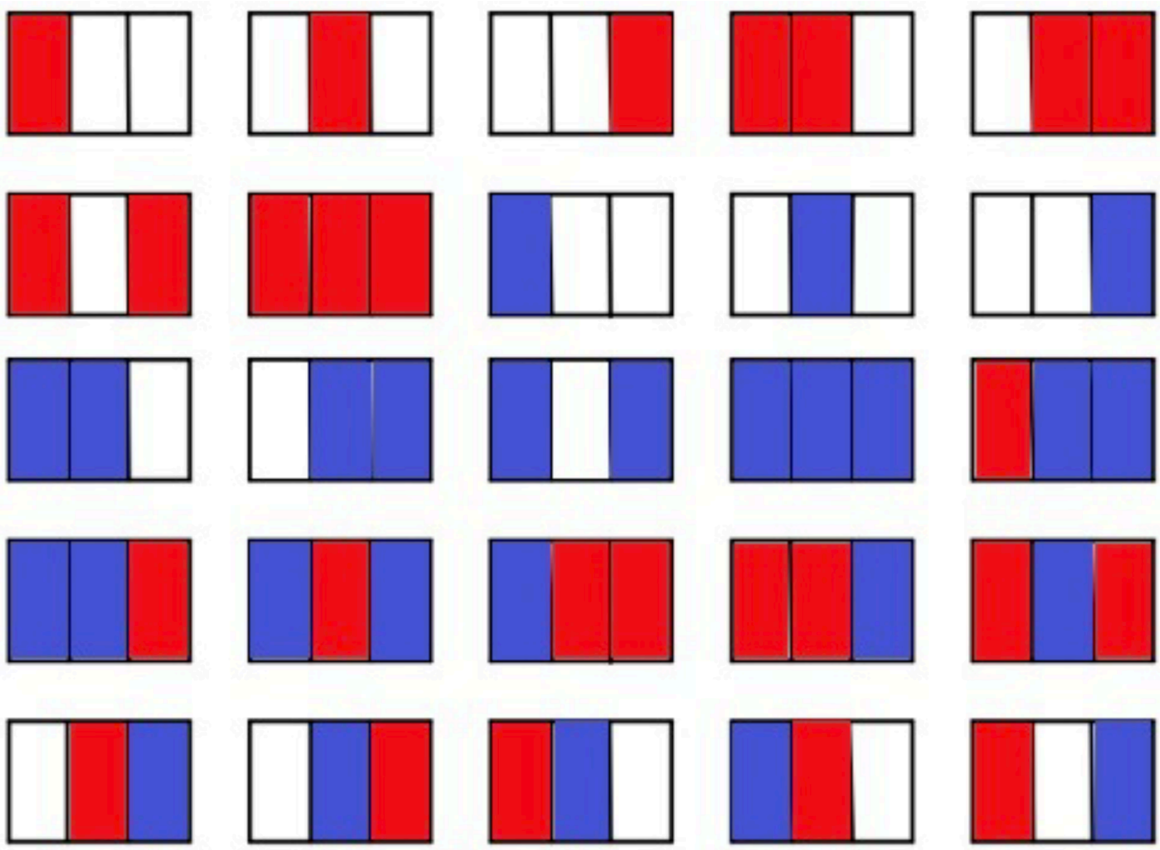
Lösning till uppgift 2

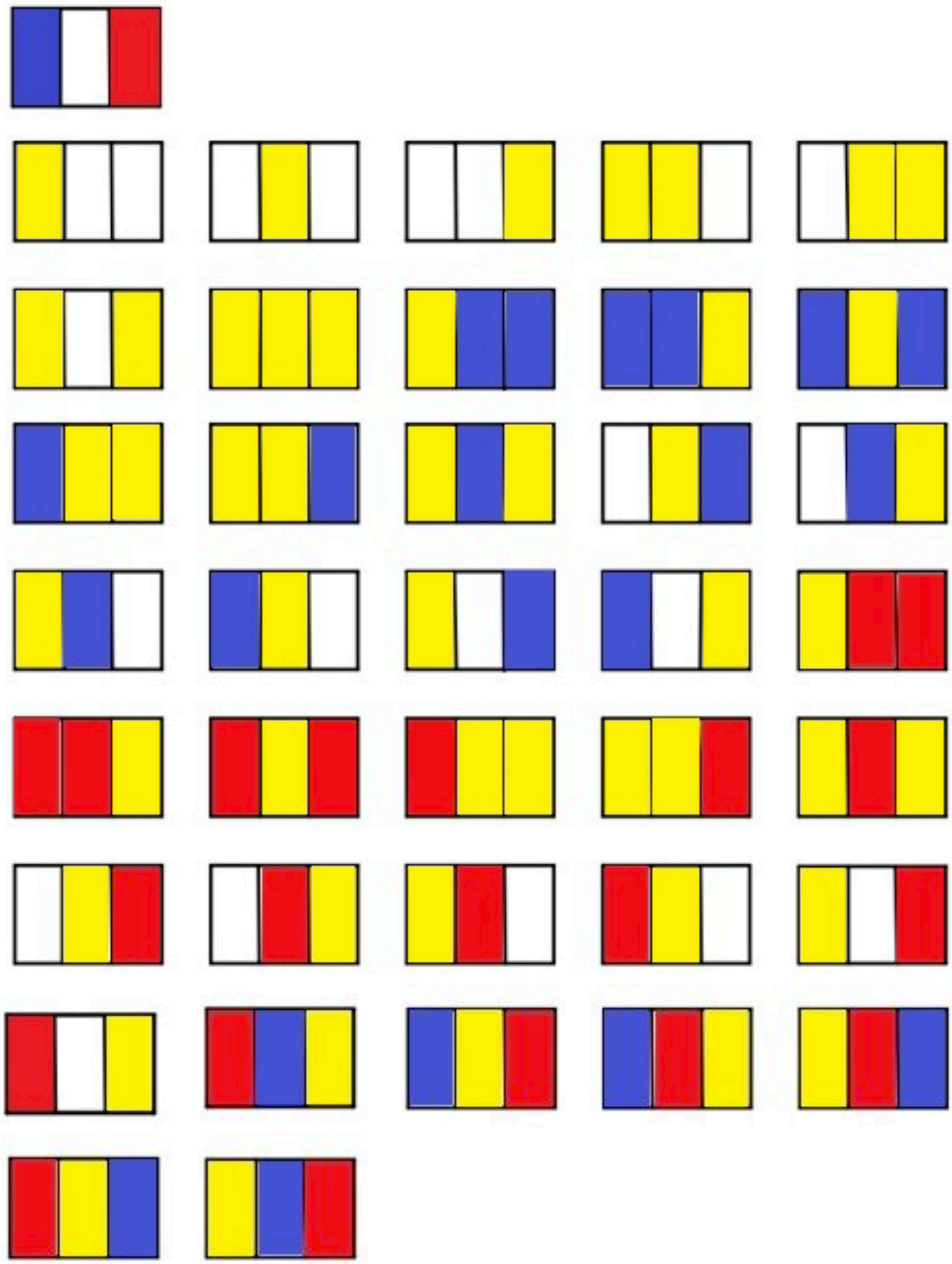
I det här lösningsförslaget har man utgått ifrån att man måste färglägga minst en rand och att andra randen kan lämnas vit. Huruvida vita ränder är tillåtna eller inte påverkar naturligtvis antalet möjliga lösningar.

- Om du har en röd och en blå penna kan flaggorna med två ränder färgläggas på åtta olika sätt.
- Om du dessutom har en gul penna finns det 15 olika alternativ.



- Om du har en röd och en blå penna kan flaggorna med tre ränder färgläggas på 26 olika sätt.
- Om du dessutom har en gul penna är antalet olika möjliga alternativ 63.





TIPS! Det går att ändra på uppgiftens svårighetsgrad med olika antal färger och ränder på flaggorna. Uppgiften är lättare om vita ränder inte är tillåtna. Det gör inget om man inte hittar alla tänkbara alternativ!

3. För följande uppgift är det bra att skriva ut bilderna intill och klippa ur dem.

   Theodor den Tankspridde bodde i ett stort hus, och tyvärr hade han som vana att glömma kvar sina saker lite här och var. En morgon gjorde han sig redo för att bege sig iväg, men när han höll på att klä på sig märkte han att det fanns bara en strumpa kvar i hans garderob. Efter att ha sökt igenom hela huset hade han hittat en strumpa bakom tv:n, två under trapporna, tre i badrummet och en i tvättmaskinen. Hur många par strumpor hade han sammanlagt?

Bilder: Pixabay

4. Ställ er upp på led enligt olika kriterier. Ni kan utgå från kriterier som till exempel längden, fotstorleken, längden på lillfingret, hårlängden eller åldern. Blir leden olika?

   Vilka kriterier kan ni uppskatta på ett ungefär och vilka förutsätter noggrannare mätningar? Finns det något som man inte behöver mäta alls?

   Är det möjligt att skapa led utifrån färgerna på era tröjor?

   Hittar ni på andra kriterier att utgå ifrån? Eller finns det egenskaper som inte fungerar som kriterier i en sådan här uppgift?

Bild: Pixabay

5. Välj ut en sträcka som ni vill mäta (exempelvis avståndet mellan en dörr och väggen mittemot).

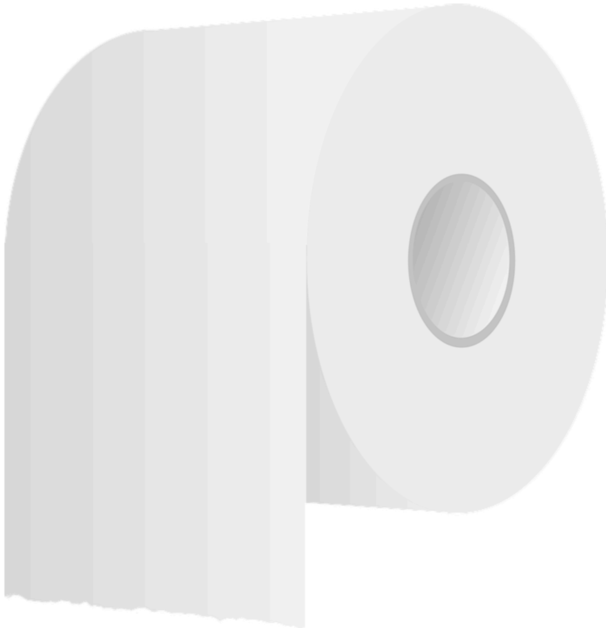
   Mät sträckan på olika sätt: ni kan ange avståndet åtminstone i antalet kliv, vanliga steg och fötter. Hittar ni på andra sätt att mäta avståndet på?

   Skriv ner alla mätresultat i tabellen nedan. Undersök resultaten. Hur långt är avståndet mätt exempelvis i kliv eller fötter? Har ni alla fått samma resultat? Vad kan skillnaderna bero på?

   Hur mäter man längd vanligtvis? Varför? Hur kan man få fram så exakta mätresultat som möjligt?

Enhet Namn	Kliv	Steg	Fötter		

6. Ta reda på hur mycket toalettpapper det finns i en rulle. Kom tillsammans överens om huruvida ni vill undersöka antalet ark eller längden på pappret (eller kanske båda).

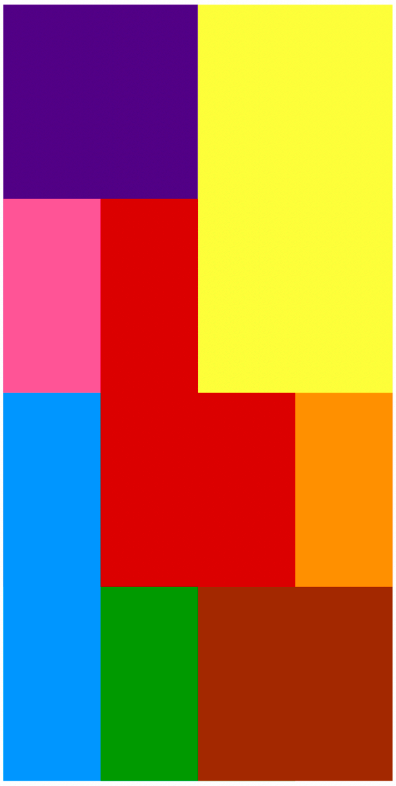
   Innan ni gör några noggrannare mätningar ska ni först uppskatta mängden papper på ett ungefär. Ni kan gissa antalet ark i rullen eller fundera exempelvis över hur lång remsa det blir av pappret om man rullar ut det. Testa hur nära sanningen era gissningar var!

   Det ser ut att finnas rätt mycket papper i en rulle, men finns det ett sätt att mäta mängden papper lite exaktare? Testa olika tillvägagångssätt – även kreativa sådana är tillåtna! Använd till exempel ett metermått eller era egna steg. Ni kan exempelvis utgå från er egen längd eller jämföra pappersremsan med andra, bekanta avstånd: Hur många gånger kan man få pappret att räcka från ena änden av rummet till den andra?

   Om ni räknar antalet ark får ni gärna också fundera över på vilka olika sätt ni gör det. Räknar ni alla tillsammans eller delar ni på ansvaret på något sätt (t.ex. var och en tar en bit av remsan)? Hur kan ni försäkra er om att ni inte räknar fel? Stämmer ert resultat överens med det som står på förpackningen?

Uppgiften har bearbetats utgående från övningen som lärare och småbarnspedagoger på tidigare Lumatikka-kurser har genomfört.
Bild: Pixabay

7. Åtta lika stora kort i olika färger har placerats ovanpå varandra på bordet enligt bilden. Kan du ta reda på i vilken ordning korten placerats på bordet?

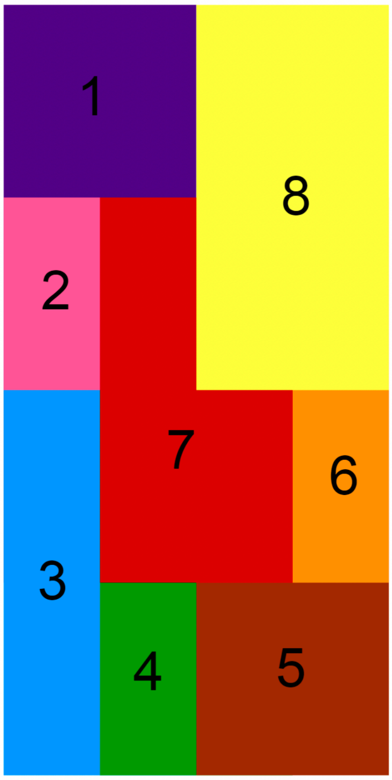


Källa: Moscovich, I. (2009): *Yli 500 ajatuspeliä – Ivan Moscovichin älytehtäviä tieteen, luonnon ja tekniikan aloilta*. Königswinter: Ullmann.

Lösning till uppgift 7

Korten har placerats på bordet i ordningen som visas på bilden, så att kortet med siffran 1 placerats först och kortet med siffran 8 sist.

TIPS! Man kan med fördel använda sig av papperslappar i olika färger för att lösa uppgiften, vilket gör att den lämpar sig för barn i olika åldrar. Uppgiften kan också göras lättare med hjälp av ett mindre antal kort.



8. Jenny vill köpa lösglass i kulor. Glasskiosken har fyra olika glassmaker: choklad, jordgubb, päron och vanilj. Jenny vill ha en strut med två kulor.

   Hur många olika alternativ finns det av den glasstrut Jenny önskar sig?

   Hitta på ett eget, liknande problem och låt din klasskamrat lösa det!

Källa: skolverket.se. Originaluppgiften hittar du på kortadressen bit.ly/problembanken.
Bild: Pixabay

Lösning till uppgift 8

Jenny kan välja två smaker på sex olika sätt ($4 \cdot 3 : 2 = 6$). Först har hon fyra smaker att välja mellan och tre när hon väljer den andra kulan. Produkten av talen behöver divideras med två, eftersom ordningen på kulorna inte har någon betydelse. (Annars skulle vi betrakta omvända varianter av t.ex. en strut med en kula chokladglass och en kula jordgubbsglass som två olika alternativ).

Dessutom kan Jenny välja att köpa två kulor av samma smak, vilket hon kan göra på fyra olika sätt. Således har Jenny 10 olika alternativ att välja mellan.

9. I varje låda finns det tre säckar, i varje säck fem påsar och i varje påse fyra karameller.

Hur många karameller finns det i fyra påsar?
Hur många påsar finns det i åtta säckar?
Hur många karameller finns det i tre lådor?
Hur många påsar finns det i fem lådor?
Hur många karameller finns det i åtta säckar?

Mamma vill förpacka 60 karameller. Hur många påsar, säckar och lådor behöver hon?

Ville har två lådor fler än Kalle. Hur många karameller fler har Ville?

Hitta på fler liknande uppgifter!

Bilder: Pixabay

Lösning till uppgift 9

I fyra påsar finns det 16 karameller (4 påsar · 4 karameller/påse).
I åtta säckar finns det 40 påsar (8 säckar · 5 påsar/säck).
I tre lådor finns det 180 karameller (3 lådor · 3 säckar/låda · 5 påsar/säck · 4 karameller/påse).
I fem lådor finns det 75 påsar (5 lådor · 3 säckar/låda · 5 påsar/säck).
I åtta säckar finns det 40 karameller (2 säckar · 5 påsar/säck · 4 karameller/påse).

För att förpacka 60 karameller behöver mamma 15 påsar (60 karameller : 4 karameller/påse). För 15 påsar behöver hon tre säckar (15 påsar : 5 påsar/säck). För tre säckar behöver hon en låda (3 säckar : 3 säckar/låda).

Sammanlagt behöver mamma alltså 15 påsar, 3 säckar och 1 låda.

Ville har 120 karameller fler än Kalle (2 lådor · 3 säckar/låda · 5 påsar/säck · 4 karameller/påse).

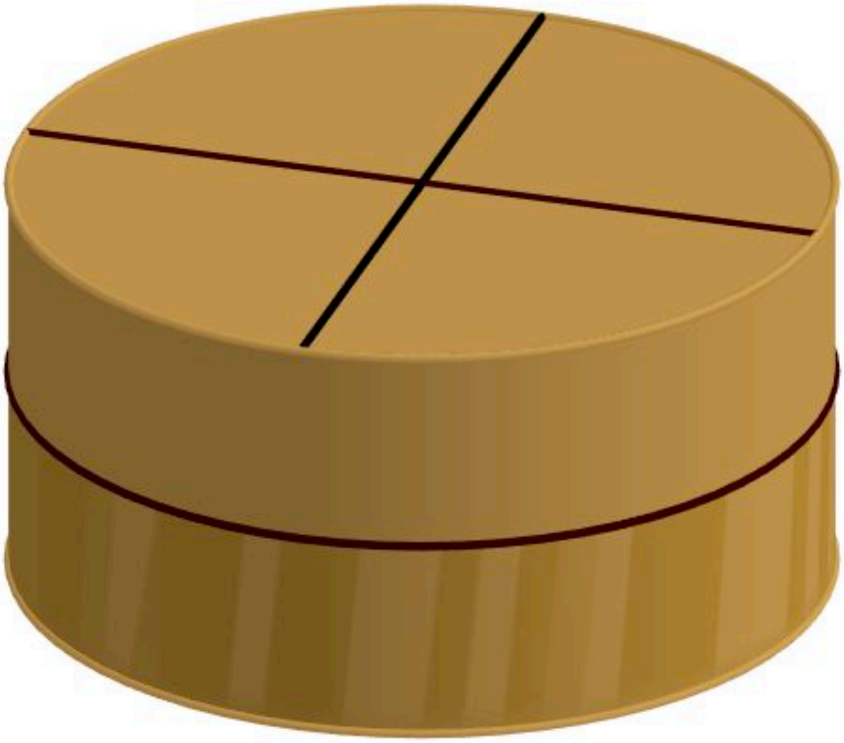
TIPS! Uppgiften kan göras lättare genom att utelämna en del av förpackningarna. Ha till exempel inte alls några säckar eller lådor med i uppgiften.

10.Hur kan man med tre raka snitt dela en vanlig gräddtårta i åtta lika stora delar?

Bild: Pixabay

Lösning till uppgift 10

Den runda tårtan delas först i fyra lika stora sektorer med två raka snitt på höjden och sedan med ett till rakt snitt genom mitten enligt bilden.

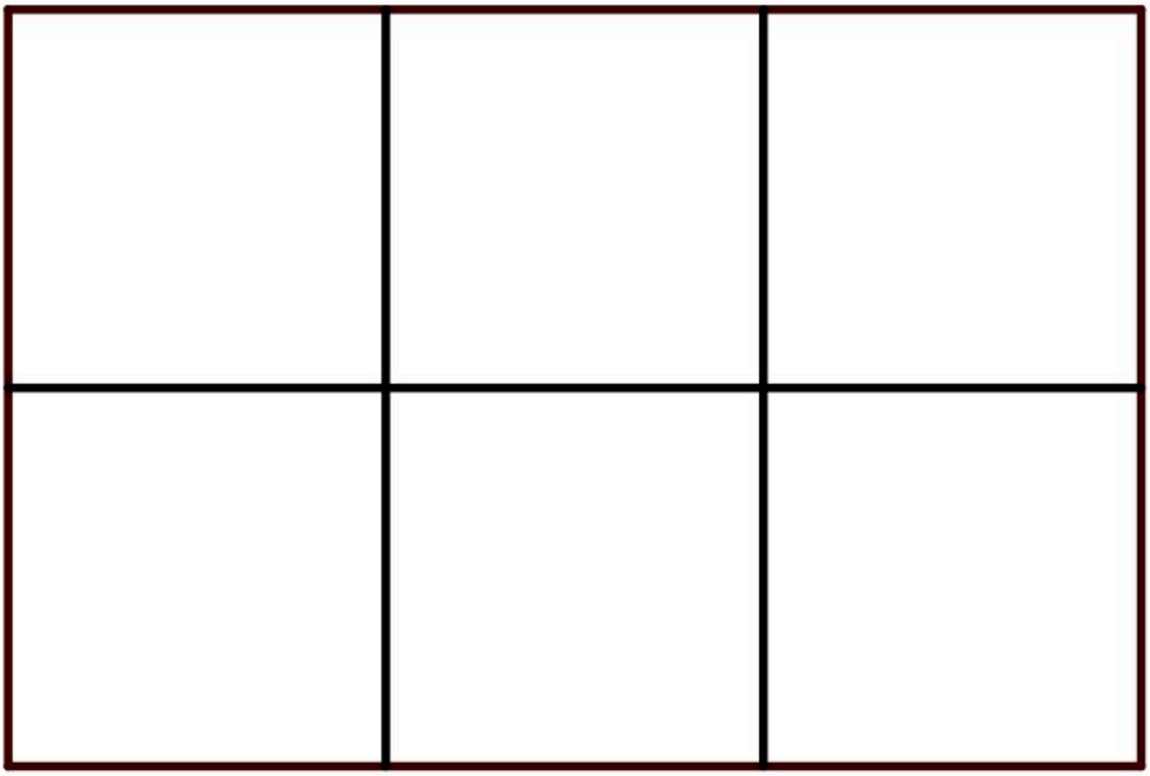


11. Hjälp! Någon har lämnat pysselgrejerna huller om buller!

Läraren hade följande tre tips att ge:

- Tejpen ska vara mellan pennorna och limstiften.
- Vattenfärgerna ska vara nedanför pennorna.
- Både vattenfärgerna och penslarna ska vara till vänster om saxen.

Kan du placera sakerna på rätt ställen?



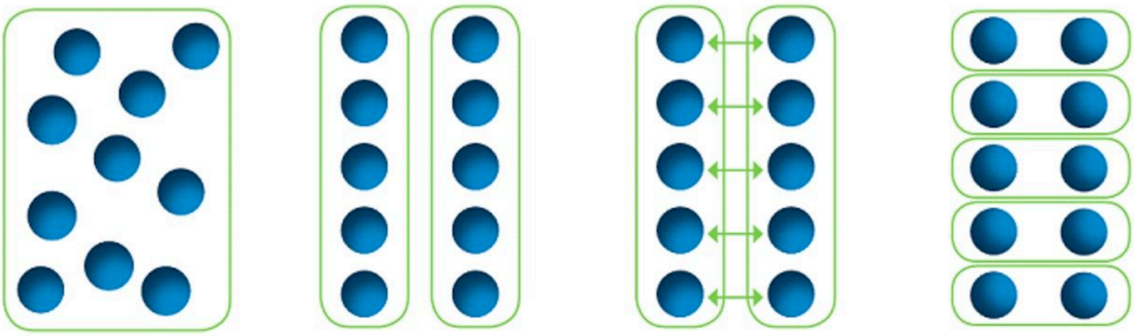
Lösning till uppgift 11

Bilder: Pixabay

12. Huruvida ett heltal är jämnt kan undersökas på två alternativa sätt.
Ett heltal är jämnt om

- det kan uttryckas som multipel av talet 2 (definition A)
- det kan uttryckas som summan av två lika stora heltal (definition B).

Undersök bilderna nedan.



Ett jämnt antal objekt | Två mängder, som båda består av samma antal objekt | Ett-till-ett | Objekt som grupperats i par

Vilka av bilderna passar in på definitionerna A och B?

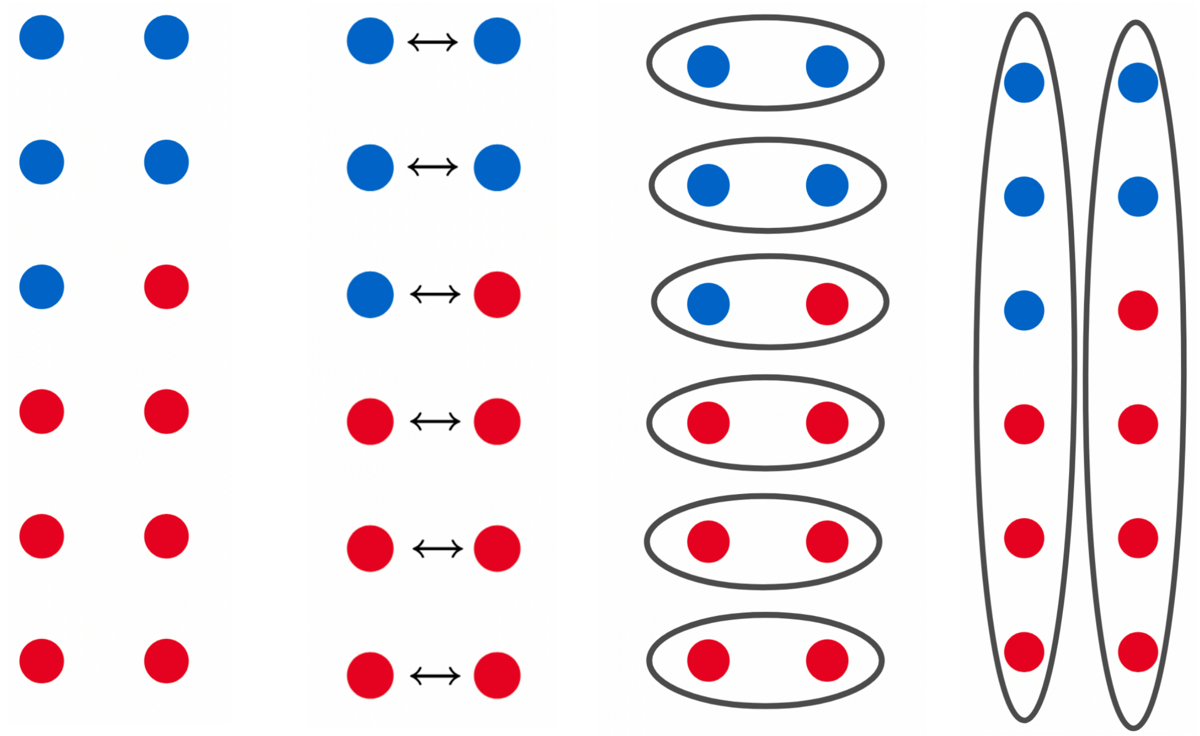
Fundera över olika sätt att illustrera ett jämnt eller ett udda heltal.

Bevisa att summan av två udda tal är ett jämnt tal.

Lösning till uppgift 12

Man kan exempelvis undersöka exempelfall och upptäcka regelbundenheter, rita bilder eller illustrera exemplen med konkreta föremål.

Nedan visas några exempelbilder, där det ena udda talet illustreras med blå prickar, det andra med röda.



Formell bevisföring:

Anta att n och m är naturliga tal. Då är talen $2n + 1$ och $2m + 1$ jämna, och således:

$(2n + 1) + (2m + 1) = 2n + 2m + 2 = 2(n + m + 1) = 2h,$

där $h = n + m + 1$ är ett heltal.

Summan är med andra ord en multipel av 2 (definition A), och därmed är det bevisat att summan av två godtyckliga udda tal är ett jämnt tal.

I själva verket kan uttrycket omformuleras vidare så att det motsvarar definition B: eftersom $2h = h + h$, kan två udda tal uttryckas som summan av två lika stora heltal.

13. På min födelsedag har jag varje år blåst ut lika många ljus som antalet år jag har fyllt. Sammanlagt har jag blåst ut 55 ljus. Hur gammal är jag?

Uppgiften är en omarbetad version av en uppgift i Moscovich, I. (2009): *Yli 500 ajatuspeliä – Ivan Moscovichin älytehtäviä tieteen, luonnon ja tekniikan aloilta*. Köngiswinter: Ullmann.
Bild: Pixabay

Lösning till uppgift 13

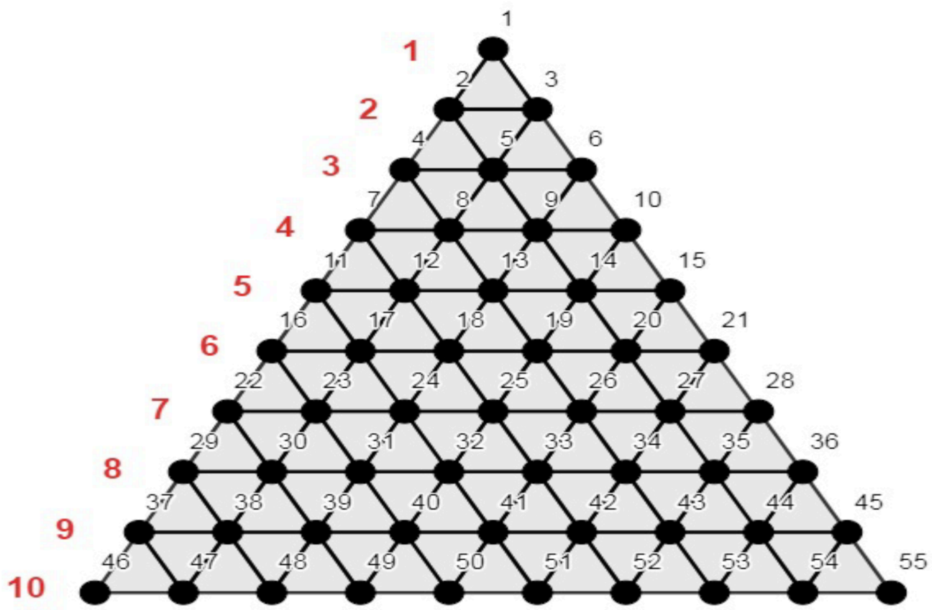
Personen är 10 år gammal.

Man kommer antagligen rätt snabbt fram till rätt svar genom att testa med olika tal.

Uppgiften kan emellertid också åskådliggöras med hjälp av triangeltal. För att hitta det *n*:te triangeltalet placeras ett antal prickar, som motsvarar talen *1, 2, ..., n*, ovanför varandra i form av en likbent triangel. Det *n*:te triangeltalet är det totala antalet prickar i triangeln.

Till exempel hittar man tredje triangeltalet genom att placera en prick på första raden, två på den andra och tre på den tredje raden. Då finns det sammanlagt sex prickar i triangeln. Tredje triangeltalet är alltså sex.

Det *n*:te triangeltalet är med andra ord summan av de *n* första heltalen. Den här informationen är till nytta i uppgiften. Genom att undersöka olika triangeltal upptäcker man att 55 är tionde triangeltalet, och således är personen alltså 10 år gammal.



Man kan läsa närmare om triangeltal på https://en.wikipedia.org/wiki/Triangular_-number (kortadress: bit.ly/kolmioluvut).

Det går också att använda sig av en välkänd formel för summan av de *n* första heltalen. Genom att lösa ekvationen $\frac{n(n+1)}{2} = 55$ får man svaret *n = 10.*

TIPS! Uppgiften kan göras lättare eller svårare genom att ändra på antalet ljus. Du kan ta hjälp av tabellen nedan:

Ljus	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136	153	171	190	210
Ålder	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

14. Sjörövaren Sören hade skrivit ett hemligt meddelande till Tjuven Tjellvar, som ska hjälpa Tjellvar att hitta vägen till skatten.

Enligt meddelandet ser vägen från flaggstången till skattgömman ut som följer:

5 meter mot norr
2 meter mot väst
3 meter mot norr
5 meter mot öst och
8 meter mot söder.

Vad är det minsta antalet steg Tjellvar måste ta för att komma fram till skatten, om han startar vid flaggstången och om längden på hans steg är 30 centimeter?

Bild: Pixabay

Lösning till uppgift 14

I nord-sydlig riktning behöver Tjuven Tjellvar gå:

8 meter mot norr (först 5 meter, senare 3 meter till)
8 meter mott söder.

Det innebär att han inte behöver röra sig alls i nord-sydlig riktning.

I väst-östlig riktning behöver Tjellvar gå:

2 meter mot väst
5 meter mot öst.

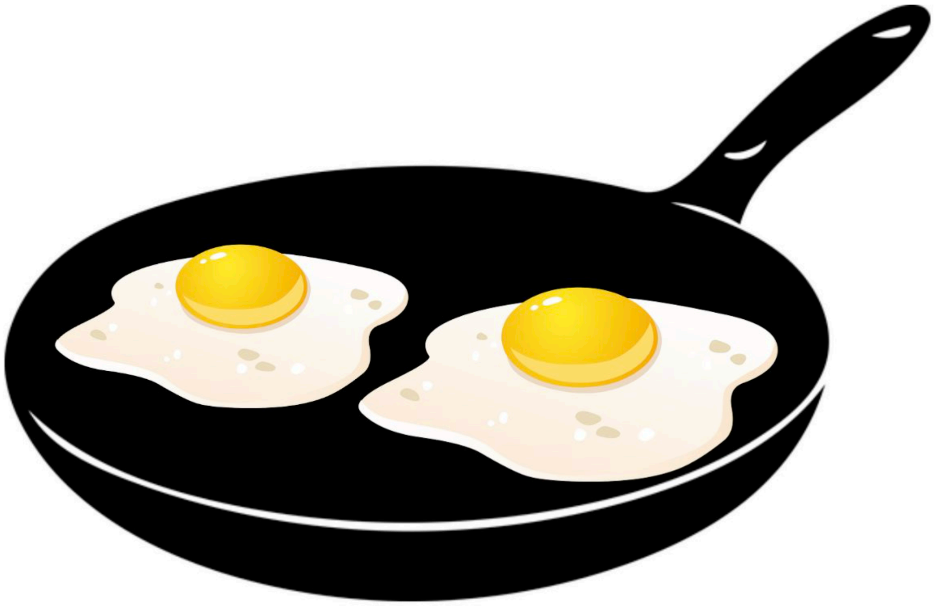
Eftersom öst och väst är motsatta väderstreck räcker det om Tjellvar går 3 meter mot öst. Eftersom längden på ett steg är 30 centimeter behöver han ta minst 10 steg.

TIPS!

Man kan låta bli att ange steglängden i uppgiftsbeskrivningen. Då behöver eleverna göra en uppskattning (till exempel genom att mäta sina egna steg) av hur lång Tjellvars steg kunde tänkas vara.

Man kan också ta reda på hur många steg Tjellvar sparar, om han inte i onödan följer rutten som Sjörövaren Sören angett i sitt meddelande utan går istället bara den kortaste möjliga sträckan.

15. Det tar 30 sekunder att steka ett ägg på vardera sidan, sammanlagt alltså en minut. Det går att steka två ägg åt gången i pannan. Hur snabbt kan man då steka tre ägg?



En bearbetad version av originaluppgiften i: Pietiläinen, Kimmo (1996): *Toiset 200 ongelmaa.* Helsingfors: Art House.
Bild: Pixabay

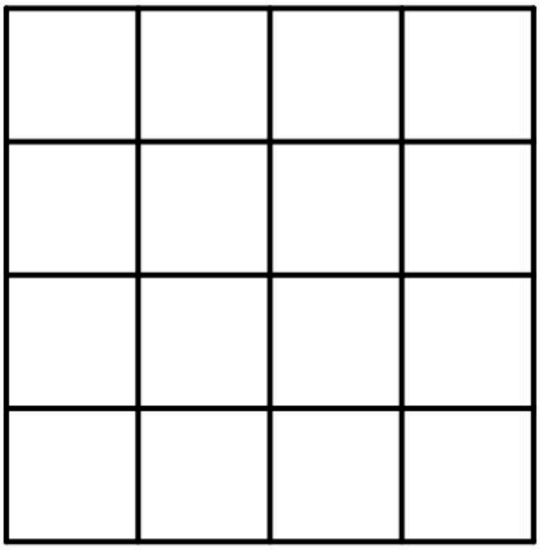
Lösning till uppgift 15

Äggen kan stekas på en och en halv minut på följande sätt:

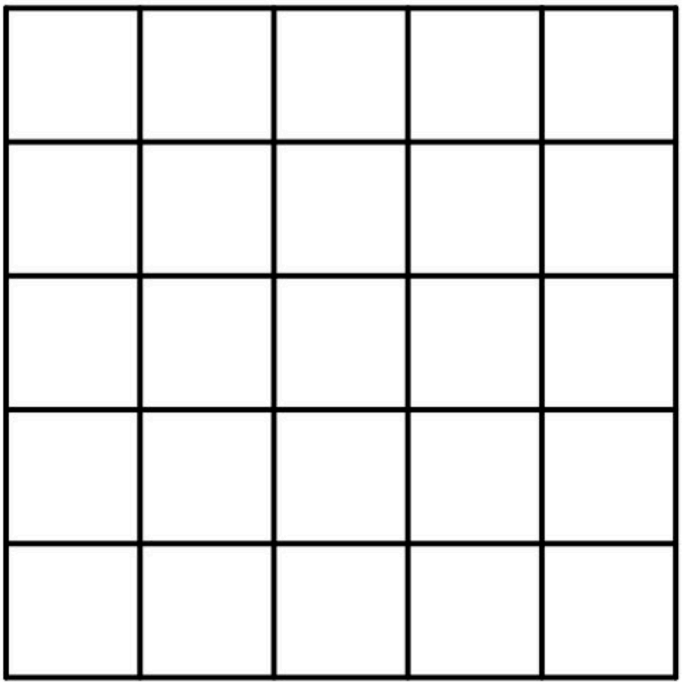
Först knäcker man två ägg i pannan och låter de stekas i 30 sekunder. Därefter vänder man på det ena ägget, medan man lyfter det andra ägget åt sidan och knäcker istället även det tredje ägget i pannan. Efter en halv minut är det ena ägget i pannan färdigstekt och kan lyftas åt sidan. Då vänder man på det andra ägget i pannan och lyfter det tidigare halvstekta ägget tillbaka i pannan och steker dem båda i en halv minut till. Då har det gått 1,5 minuter och alla äggen är stekta.

Snabbare än så går det inte att steka äggen, eftersom man hela tiden har två ägg i pannan och eftersom det inte går att ha fler än två ägg i pannan samtidigt.

16. Räkna antalet kvadrater i 4 · 4-rutnätet nedan:



Hur många kvadrater finns det då i ett 5 · 5-rutnät?

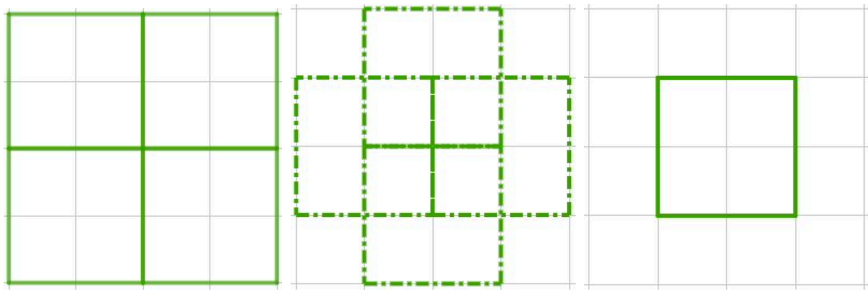


Kan du generalisera resultatet? Kommer du på med vilken räkneoperation du kan ta reda på hur många kvadrater det finns till exempel i ett 10 · 10-rutnät?

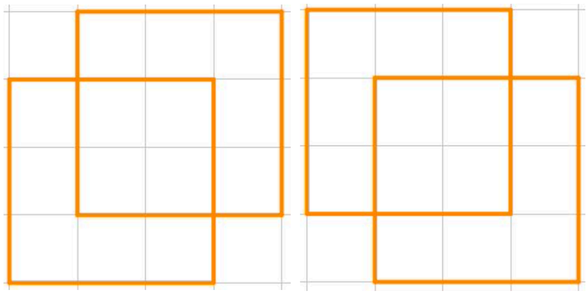
Uppgiften är en omarbetad version av originaluppgiften som ingår i materialet som producerats av LUMA-centret vid Uleåborgs universitet. Originaluppgiften kan hittas på adressen: https://ouluma.fi/2010/07/nelioita-etsimassa/ (kortadress: bit.ly/neliot).

Lösning till uppgift 16

Små kvadrater, som motsvarar rutorna i rutnätet, finns det 16 stycken av i rutnätet. $2 \cdot 2$ rutor stora kvadrater finns det sammanlagt nio stycken av, i enlighet med bilden nedan:



$3 \cdot 3$ rutor stora kvadrater finns det i sin tur fyra stycken:



Dessutom utgör rutnätet i sig en kvadrat på $4 \cdot 4$ rutor.

Således är det totala antalet kvadrater $16 + 9 + 4 + 1 = 30$.

På ett motsvarande sätt finns det i $5 \cdot 5$-rutnätet 25 stycken $1 \cdot 1$-kvadrater, 16 stycken $2 \cdot 2$-kvadrater, 9 stycken $3 \cdot 3$-kvadrater, 4 stycken $4 \cdot 4$-kvadrater och en $5 \cdot 5$-kvadrat. Det totala antalet kvadrater är alltså 55.

Det här kan man generalisera för ett $n \cdot n$-rutnät med följande uttryck:

$n^2 + (n - 1)^2 + \ldots + 2^2 + 1^2$.

Således är antalet kvadrater exempelvis i ett $10 \cdot 10$-rutnät:

$10^2 + 9^2 + 8^2 + 7^2 + 6^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 385$.

17. Om varje elev i klassen skakar hand med alla andra elever i klassen en gång, hur många handskakningar blir det sammanlagt?

Så här kommer du i gång:

Om tre elever skakar hand med varandra, så att var och en av dem skakar hand med alla andra en gång, hur många handskakningar blir det då sammanlagt?

Hur många blir det om eleverna är fem stycken?

När antalet elever ökar behövs det någon typ av systematiskt sätt för handskakningarna. Hur skulle man kunna göra? Tänk tillsammans med eleverna ut ett bra sätt att utföra handskakningarna och beräkna sedan hur många handskakningar som utförs allt som allt om alla elever i klassen skakar hand med varandra!

Hur många är handskakningarna om 100 eller *n* stycken personer skakar hand med varandra?

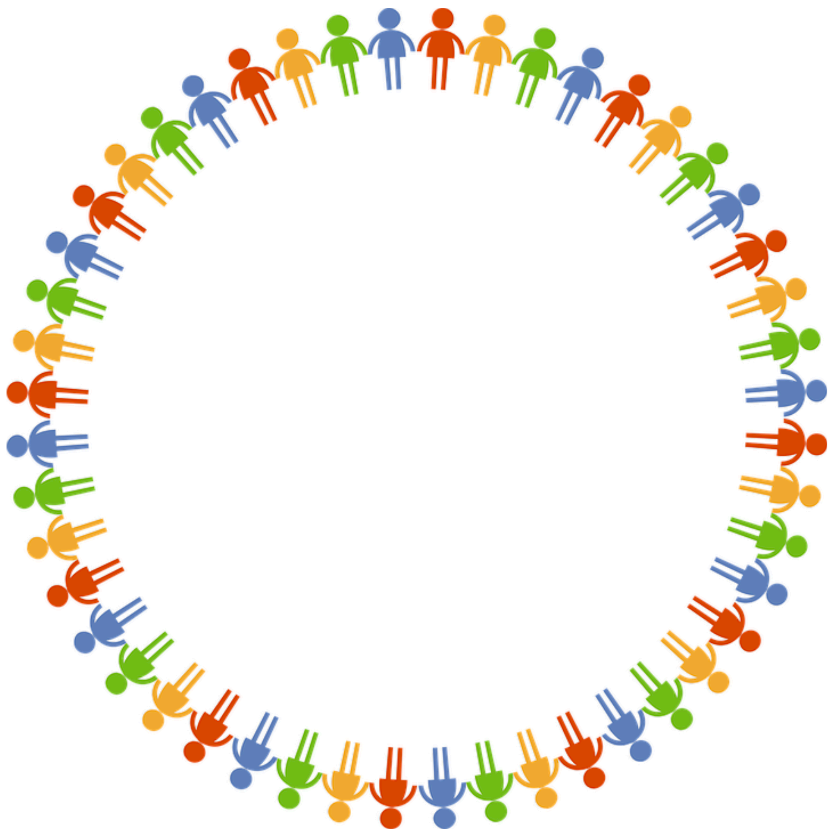


Bild: Pixabay

Lösning till uppgift 18

Varje person skakar hand med alla andra utom sig själv. Om antalet personer är *n* skakar de hand sammanlagt med $n(n-1)$ personer. Eftersom en handskakning alltid är ömsesidig (om Anna skakar hand med Emil, skakar Emil också hand med Anna, men ändå har det utförts bara en handskakning), behöver uttrycket divideras med två.

I ett generellt fall utförs det således $\frac{n(n-1)}{2}$ handskakningar.

Om personerna är fem stycken utförs det alltså 10 stycken handskakningar, eftersom $5 \cdot 4 : 2 = 10$.
Om personerna är hundra stycken, utförs det således 4950 handskakningar, eftersom $100 \cdot 99 : 2 = 4950$.

Uppgiften kan lösas också på ett flertal andra sätt. Matti Lehtinen presenterar hur han löst uppgiften i nummer 2/1998–1999 av tidskriften *Solmu*:
https://matematiikkalehtisolmu.fi/1998/3/lehtinen/ (kortadress: bit.ly/solmulehti).

Problemet kan undersökas också med hjälp av programmering: man matar in antalet personer i programmet, och programmet beräknar antalet handskakningar som utförs.

För till exempel Python ser koden ut så här:

```
n = 10
sammanlagt = 0
for a in range(1,n+1):
    for b in range(a+1,n+1):
    print(a,"och",b,"skakar hand med varandra")
    sammanlagt += 1
print("sammanlagt",sammanlagt,"handskakningar")
```

Algoritmen är dock långsam, eftersom *n* är så stort. Vad skulle kunna vara ett effektivare sätt att beräkna svaret?

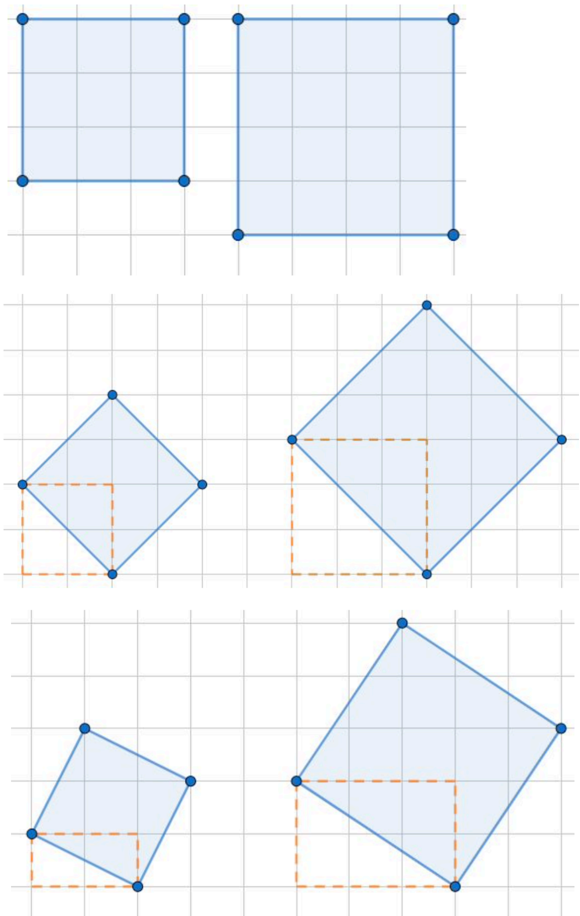
18. Skapa sådana kvadrater på ett geobräde, vars areor är heltal.

    Skapa två kvadrater vars areor är 9 respektive 16.
    Skapa två kvadrater vars areor är 8 respektive 18.
    Skapa två kvadrater vars areor är 5 respektive 13.

    Varför är det möjligt att skapa en kvadrat vars area är 10 men inte en kvadrat vars area är 11 eller 12?

    Virtuellt geobräde: https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/
    Kortadress: bit.ly/virtuaalilauta

Lösning till uppgift 18

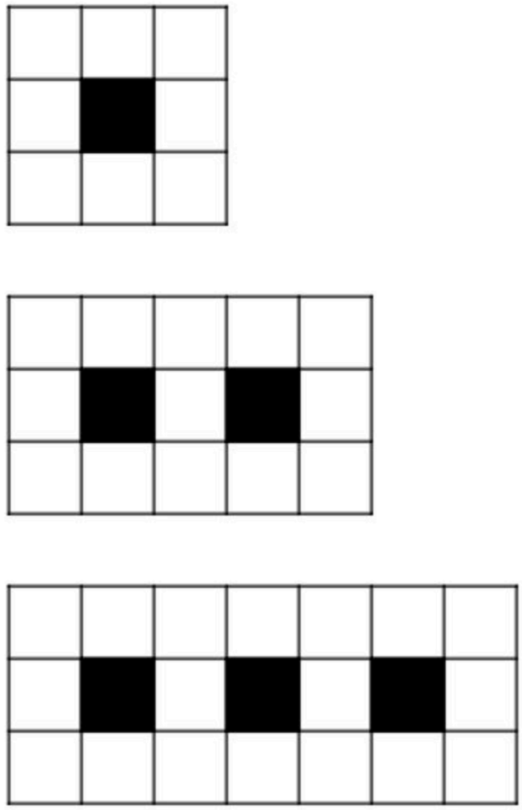


De orange streckade linjerna på bilden anger stödformerna som använts i skapandet av kvadraterna.

Kvadraten, vars area är 10, kan skapas genom att ta hjälp av en rektangel, vars sidor är 1 och 3 enheter långa. Diagonalen till den rektangeln utgör då kvadratens sida.

För att man ska kunna skapa en kvadrat på geobrädet måste dess area vara summan av två heltal i kvadrat. Så är inte fallet med talen 11 och 12.

19. Edvin planterar buskar vid en gågata. Området runt varje buske ska han dessutom belägga med plattor enligt bilden: de vita rutorna föreställer plattor, de svarta föreställer buskarna Edvin planterar.



Hur många plattor går det åt runt två buskar?
Eller runt fyra?
Eller runt fem?
Eller runt tio?
Eller runt hundra?
Eller runt *n* stycken?

Hur många buskar behöver Edvin plantera om han vill lägga 208 plattor?

Hitta på ett eget, liknande problem och låt din klasskamrat lösa det!

Källa: skolverket.se. Originaluppgiften hittas på kortadressen bit.ly/problembanken.

Lösning till problem 19

Om det finns *n* stycken plattor i beläggningen bildar plattorna och buskarna en rektangel vars bredd är $2n + 1$ plattor. Man kan föreställa sig situationen så att man börjar raden med en platta och planterar därefter en buske. Det här upprepas vid varje buske, och efter sista busken lägger man dessutom till en platta.

Höjden på rektangeln är tre plattor. Eftersom inga plattor ska läggas i rutor där buskarna ska stå ska man subtrahera antalet buskar från rektangelns area. Således är antalet plattor som går åt i beläggningen:

$3(2n + 1) - n = 6n + 3 - n = 5n + 3.$

Med hjälp av formeln kan man då beräkna att det runt två buskar går åt 13 plattor, runt fyra 23 plattor, runt fem 28 plattor, runt tio 53 plattor och runt hundra 503 plattor.

Det går åt 208 plattor om man planterar 41 buskar.

20. Tommy och Annika har bakat så många kakor att de fyller en hel stor burk.

Annika vill ta kakorna med till avslutningsfesten för sitt fotbollslag, medan Tommy i sin tur vill bjuda sitt ishockeylag på kakorna. Eftersom de kan inte komma överens, föreslår mamma att kakorna istället ska tas med till skolavslutningen för Tommy och Annikas klass.

Annikas fotbollslag består av 15 utespelare och 1 målvakt, medan det i Tommys ishockeylag ingår 12 spelare. I deras skolklass går det 24 elever.

Hur många kakor finns det om de kan delas jämnt oberoende av om det är fotbollsspelarna, ishockeyspelarna eller eleverna i Tommy och Annikas klass som får dela på dem?

Bild: Pixabay

Lösning till uppgift 20

Barnen har bakat 48, 96 eller 144 kakor – eller något annat antal som är en multipel av talet 48, om kakorna bara får plats i burken!

Kakornas antal måste nämligen vara delbart med både 16 och 24 (och förstås också med 12, men alla tal som är jämnt delbara med talet 24 är också jämnt delbara med talet 12).

Tal som är delbara med 16 är 16, 32 , 48, 64, 80, 96, 112, 128, 144, 160 osv.
Tal som är delbara med 24 är 24, 48, 72, 96, 120, 144, 168 osv.
När man jämför raderna ser man att talen 48, 96 och 144 är delbara med både 16 och 24.

21. Lägg till plus- och minustecken i talen nedan, så att resultatet är korrekt.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 10

1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 20

1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 30

1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 40

1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 50

1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 60

1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 70

1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 80

1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 90

1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 100

Inspiration till uppgiften har hämtats från materialet som producerats av Alexander Bogomolny. Original-uppgiften hittas på webbplatsen *Cut the knot*. Kortadress: bit.ly/laskutoimitukset.

Lösning till uppgift 22

Man kommer lösningen på spåren om man inser att det inte är nödvändigt att sätta ett plus- eller minustecken mellan alla siffror. Det kan alltså ingå även två- och tresiffriga tal i räkneoperationerna. Det kan man vid behov berätta för eleverna i uppgiftsbeskrivningen eller låta dem själva upptäcka det.

Nedan visas en tänkbar exempellösning för varje rad, men andra alternativ är också möjliga.

12 - 3 - 4 + 5 - 6 + 7 + 8 - 9 = 10

1 + 2 + 34 - 5 - 6 - 7 - 8 + 9 = 20

1 - 2 + 34 - 5 - 6 + 7 - 8 + 9 = 30

1 + 2 + 34 + 5 + 6 - 7 + 8 - 9 = 40

1 + 2 + 3 - 4 + 56 - 7 + 8 - 9 = 50

1 + 2 + 3 + 4 + 56 - 7 - 8 + 9 = 60

1 + 2 - 3 + 4 + 56 - 7 + 8 + 9 = 70

1 + 2 + 3 - 4 - 5 + 6 + 78 + 9 = 80

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 78 - 9 = 90

1 + 2 + 3 - 4 + 5 + 6 + 78 + 9 = 100

TIPS! Istället för att försöka hitta en lösning för varje rad i uppgiften kan man försöka hitta så många möjliga alternativa lösningar för en av raderna. Till exempel för uppgiften

1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 100

finns åtminstone 12 olika kända lösningsalternativ. Vad är det minsta antalet plus- eller minustecken som behövs för att få räkneoperationen att stämma?

22. *Lättare version:*

Välj vilket som helst heltal mellan 1 och 9. Multiplicera talet 37 först med talet du har valt och sedan med talet 3. Vad blir det för resultat?

Testa att göra detsamma med ett annat heltal mellan 1 och 9.
Jämför dina svar med en klasskamrats svar. Vad ser resultatet ut att bli? Hur fungerar tricket?

Lite mer utmanande version:
Välj vilket som helst heltal mellan 1 och 9. Multiplicera talet 37037 först med talet du har valt och sedan med talet 3. Vad blir det för resultat?

Testa att göra detsamma med ett annat heltal mellan 1 och 9.
Jämför dina svar med en klasskamrats svar. Vad ser resultatet ut att bli? Hur fungerar tricket?

Följande trick fungerar bara om du är minst 10 år gammal:

Multiplicera talet 3367 med din ålder och sedan med talet 3. Vad blir det för resultat? Testa att göra detsamma med dina syskons (om de är minst 10 år gamla) eller föräldrars ålder. Vad kan du upptäcka? Varför fungerar tricket?

Uppgiften är en omarbetad version av originaluppgiften i: Gardner, M. (1987): *Riddles of the sphinx: And other mathematical puzzle tales.* Washington D.C.: Mathematical Association of America.
Bild: Pixabay

Lösning till uppgift 22

Lättare version:

Resultatet är h · 111, där h är ett heltal mellan 1 och 9. Om eleven alltså har valt till exempel talet 5 är resultatet 555. Tricket fungerar, eftersom 37 · 3 = 111.

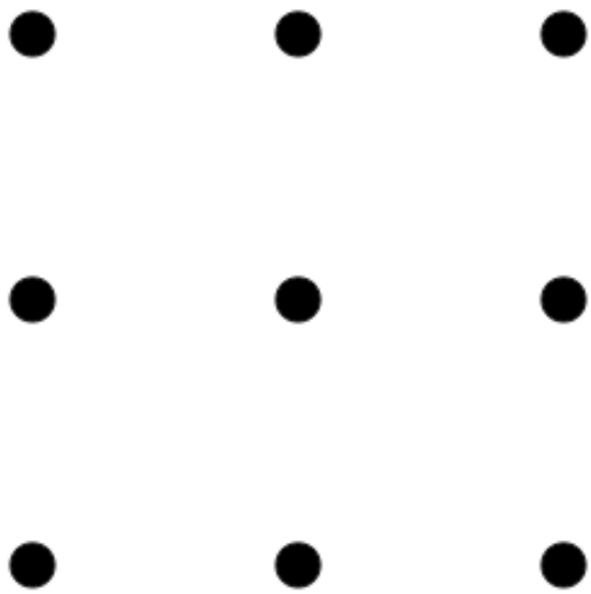
Lite mer utmanande version:

Resultatet är h · 111111, där h är ett heltal mellan 1 och 9. Om eleven alltså har valt till exempel talet 5 är resultatet 555555. Tricket fungerar, eftersom 37037 · 3 = 111111.

Uppgiften för dem som är minst 10 år gamla:

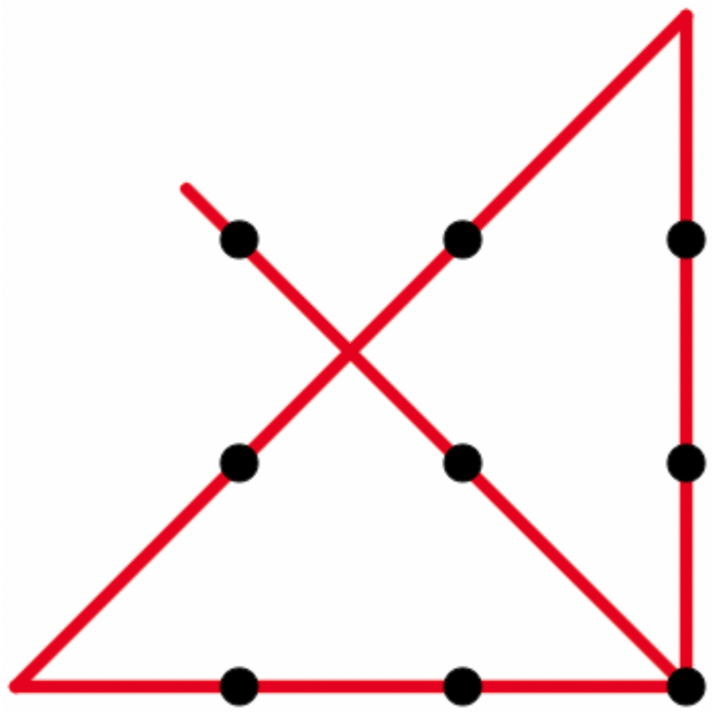
Resultatet är ett sexsiffrigt tal, där åldern upprepas tre gånger efter varandra. En 12-åring får alltså svaret 121212. Tricket fungerar, eftersom 3367 · 3 = 10101.

23. Dra högst fyra raka streck som går genom alla nio prickar utan att lyfta pennan från pappret.



Uppgiften är en klassiker som är känd under namnet *Nine dots puzzle*.
Uppgiftsbeskrivning på Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Thinking_outside_the_box#Nine_-dots_puzzle (kortadress: bit.ly/9pistetta.

Lösning till uppgift 23

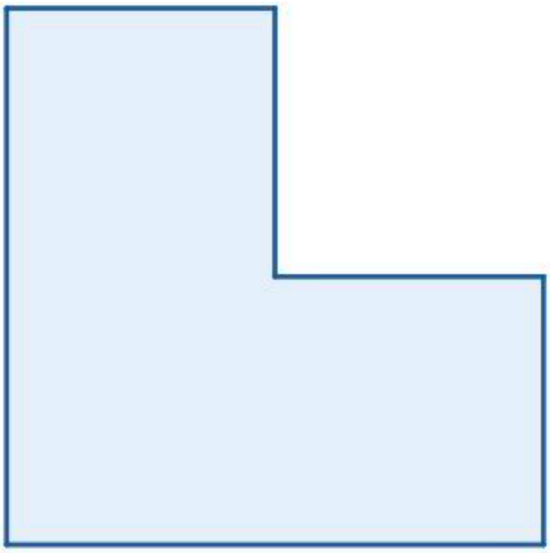


I tillägg till den här traditionella lösningen har det utvecklats en rad andra lösningsalternativ. Via länken intill hittar du några exempellösningar: https://www.mycoted.com/Nine_Dots (kortadress: bit.ly/eriratkaisuja).

24. Dela kvadraten nedan i fyra likadana delar på så många olika sätt som möjligt.

Hur många olika sätt kommer du på?

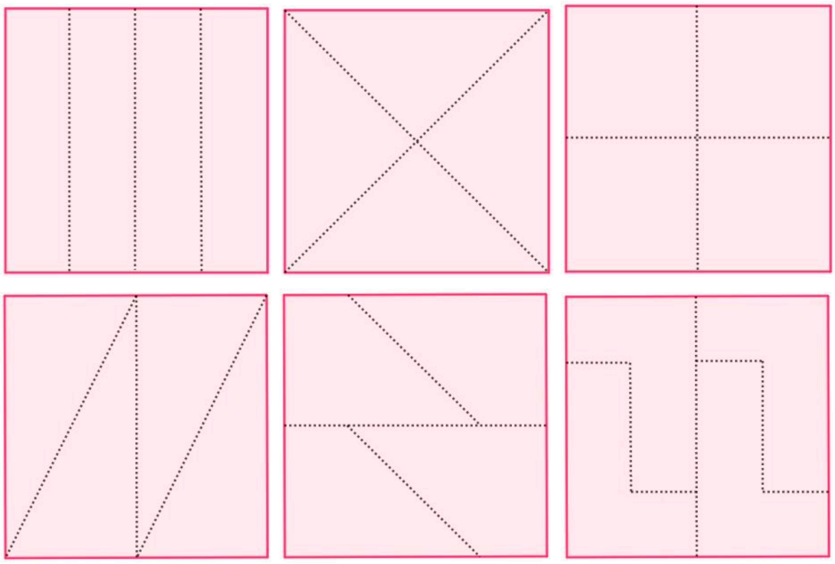
Är det möjligt att dela den blå figuren nedan i fyra likadana delar?



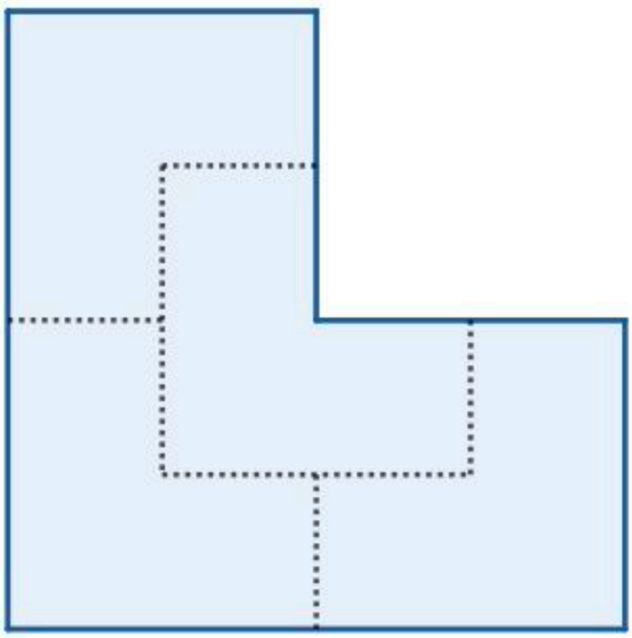
Källa för den senare uppgiften:
Pietiläinen, Kimmo (1996): *Toiset 200 ongelmaa.* Helsingfors: Art House.

Lösning till uppgift 24

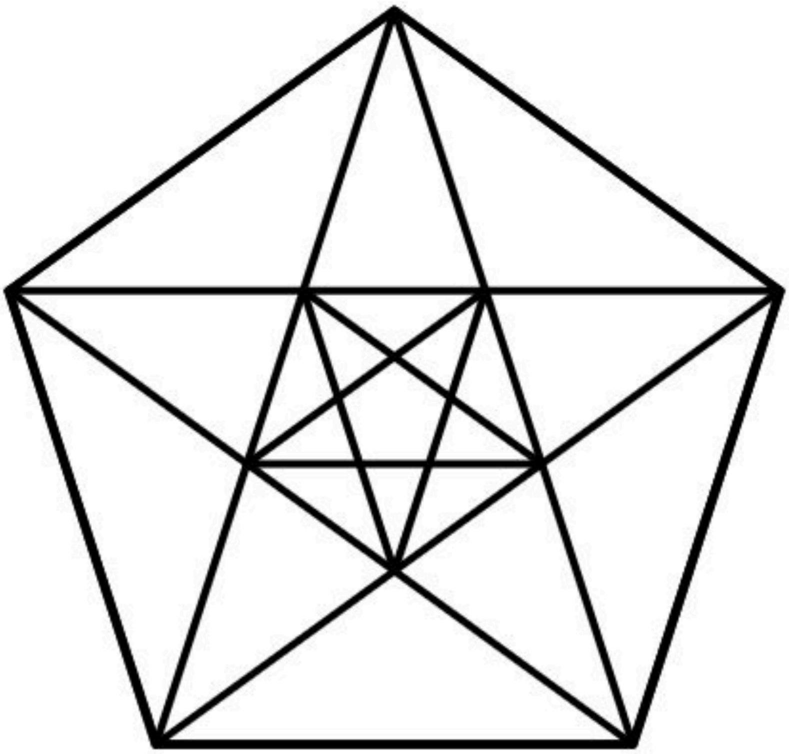
Olika sätt att dela kvadraten i fyra likadana delar (det finns dock ännu fler!):



Det är möjligt att dela den blå figuren i fyra likadana delar. Delarna är i själva verket också likformiga med den ursprungliga figuren.



25. Hur många gånger förekommer bokstaven A i figuren nedan?



Observera att bokstaven A definieras på följande sätt:

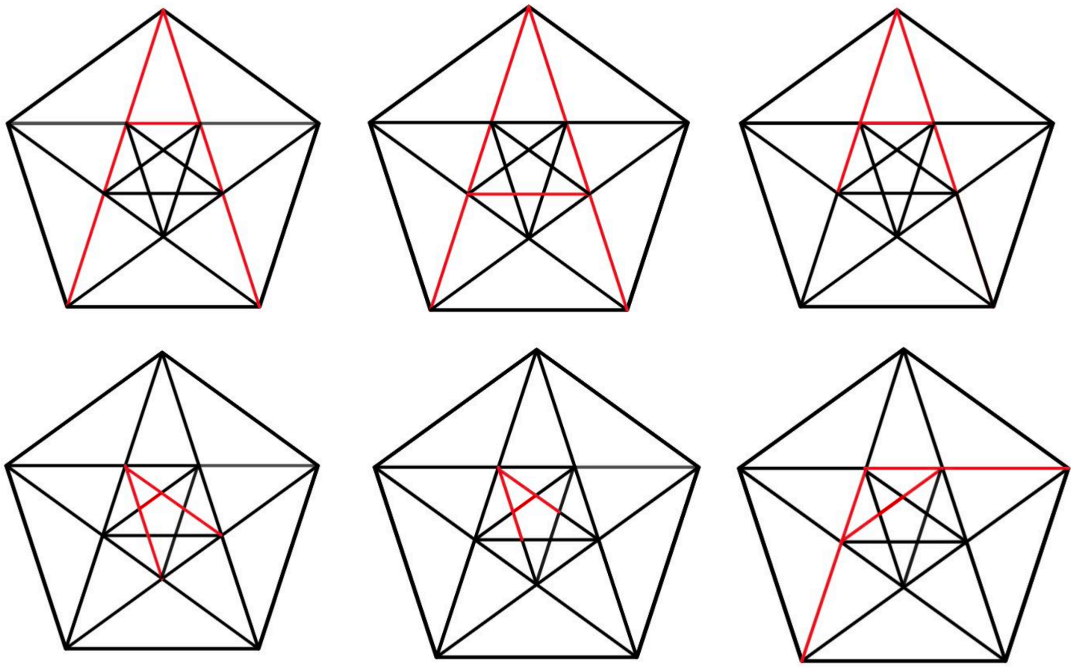
Båda benen i bokstaven A är lika långa, och tillsammans med benen bildar mittenstrecket en likbent triangel. Om man ritade en sträcka mellan benen som är parallell med mittenstrecket, skulle man få två likformiga trianglar. Hur bred bokstaven A är eller hur långt mittenstrecket är spelar ingen roll.

Av exempelbilderna nedan räknas den orange, den gröna och den blå figuren som varianter av bokstaven A, men inte den röda.

Källa: Gardner, M. (1987): *Riddles of the sphinx: And other mathematical puzzle tales*. Washington D.C.: Mathematical Association of America.

Lösning till uppgift 25

I figuren finns det sex olika varianter av bokstaven A och fem stycken av varje variant. Bokstaven A förekommer alltså sammanlagt 30 gånger i figuren.

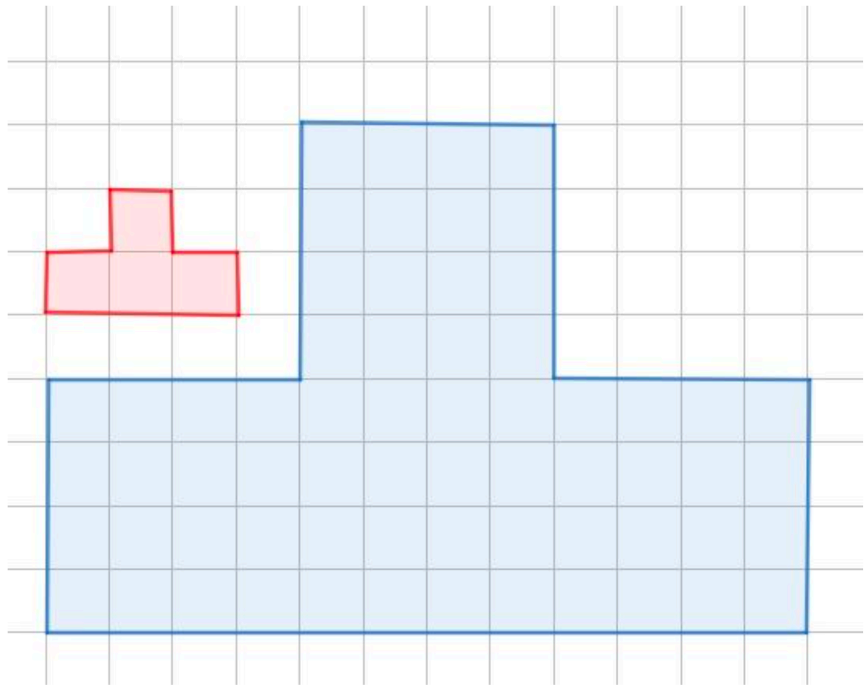


26. Bottnen av en simbassäng ska beläggas med röda plattor.

Vilka likheter och skillnader finns det mellan simbassängens botten och plattorna?

Hur många plattor behövs det för att belägga hela simbassängens botten?

Plattorna får inte klyvas, utan man ska använda sig av hela plattor. Hur ska plattorna placeras?

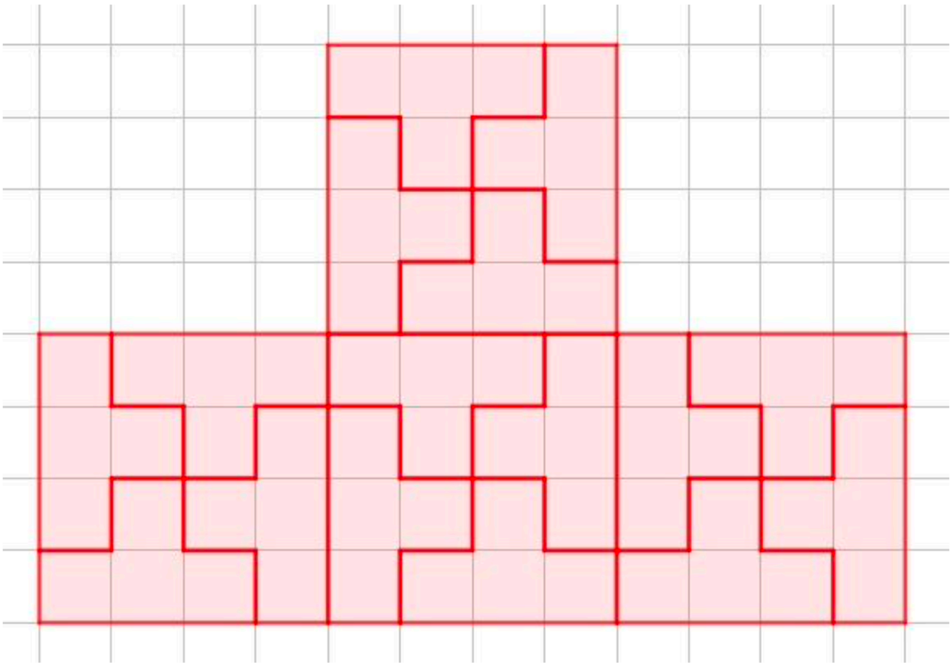


Uppgiften är en omarbetad version av originaluppgiften i: Moscovich, I. (2009): *Yli 500 ajatuspeliä – Ivan Moscovichin älytehtäviä tieteen, luonnon ja tekniikan aloilta*. Königswinter: Ullmann.

Lösning till uppgift 26

Bottnen av simbassängen och plattorna är likformiga med förhållandet 4 : 1.

Arean av en platta är 4 rutor och arean av bottnen av simbassängen är 64 rutor, och således behövs det 16 plattor till beläggningen av hela bottnen. Plattorna kan läggas till exempel på följande sätt:



27. Efter många år möts de matematikälskande vännerna Hypatia och Pythagoras igen. Här är deras diskussion:

Pythagoras: "Har du gift dig? Har du barn?
Om du har barn, hur många och hur gamla är de?"
Hypatia: "Ja, jag har gift mig och jag har tre barn.
Produkten av deras åldrar är 36."
Pythagoras: "Jag kan räkna ut hur gamla de är. Kan du ge en ledtråd till?
Hypatia: "Absolut! Jag kan säga att summan av deras åldrar är lika
med husnumret i din adress?"
Pythagoras: "Jag kan fortfarande inte räkna ut hur gamla de är.
Kan jag få en ledtråd till?"
Hypatia: "Okej, men det här är sista chansen! Den äldsta av dem har blont hår!"
Pythagoras: "Aha! Nu vet jag exakt hur gamla dina barn är!"

Hur gamla är barnen till Hypatia? Lös gåtan genom att motivera svaret matematiskt. Vilken typ av matematiska resonemang förutsätter olika typer av motiveringar?

Google har använt en variant av den här typen av uppgift som förutsätter slutledningsförmåga i sina anställningsintervjuer.
Bild: Pixabay

Lösning till uppgift 27

Man kan börja med att sammanställa en tabell över talgrupper med tre tal vars produkt är 36 och räkna summorna av dessa tal.

Åldern på yngsta barnet	Åldern på mellersta barnet	Åldern på äldsta barnet	Summan av åldrarna
1	1	36	38
1	2	18	21
1	3	12	16
1	4	9	14
1	6	6	13
2	2	9	13
2	3	6	11
3	3	4	10

Eftersom Pythagoras inte kunde räkna ut barnens åldrar utgående från deras summa, kan man komma till den slutsatsen att summan av barnens åldrar måste vara 13 (man kan se att alla andra summor i tabellen kan beräknas endast på ett sätt). Tilläggsuppgiften om att ett av barnen är äldre än de andra hjälpte Pythagoras räkna ut barnens åldrar. Hypatias barn är alltså 2, 2 och 9 år gamla.

28. Fyra kompisar vill gå över älven, men bron håller bara för två personer åt gången. De har med sig endast en lykta och vågar inte gå över bron utan den, eftersom mörkret redan har lagt sig. Aron kan gå över bron på 1 minut, Bea på 2 minuter, Christina på 5 minuter och Daniel på 8 minuter. Om två personer går över bron tillsammans, går båda lika snabbt som den långsammare av dem. Hur snabbt kan de komma till andra sidan av älven?

Uppgiften på Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Bridge_and_torch_problem
(kortadress: bit.ly/lyhtyongelma)
Bild: Pixabay

Lösning till uppgift 28

Eftersom kompisarna har bara en lykta, behöver de gå över i par, så att den ena i varje par kommer tillbaka och tar lyktan med sig till startpunkten.

Kompisarna kan gå över till andra sidan älven på följande sätt:

Aron och Bea går över bron (2 minuter).
Aron kommer tillbaka (1 minut).
Christina och Daniel går över bron (8 minuter).
Bea kommer tillbaka (2 minuter).
Aron och Bea går över bron (2 minuter).

På det här sättet tar det 15 minuter att få alla fyra till andra sidan.

Ett annat alternativ är att den som först kommer tillbaka med lyktan är Bea och att Aron kommer tillbaka med lyktan efter henne, men den totala tiden förblir densamma.

29. En hel klass med elever var på väg till en lägerskola, och halvvägs under den långa bussresan stannade gruppen vid en bensinmack för att ta sig en bensträckare. Ägaren till bensinmacken var inte särskilt bra på att räkna, så priserna på alla produkter angavs i jämna euro.

Det köptes var sin glass till alla i klassen för 54 euro. Därtill ville 15 elever dricka varm choklad (sammanlagt 30 euro) och 3 valde att dricka te (sammanlagt 3 euro). Dessutom valde 3 elever att dricka kaffe och 6 att dricka saft.

Slutsumman blev 103 euro. Läraren insåg genast att summan inte kunde vara korrekt. Hur kunde han veta det?

Uppgiften är omarbetad version av originaluppgiften i: Pietiläinen, Kimmo (1996): *Toiset 200 ongelmaa.* Helsingfors: Art House.
Bild: Pixabay

Lösning till uppgift 29

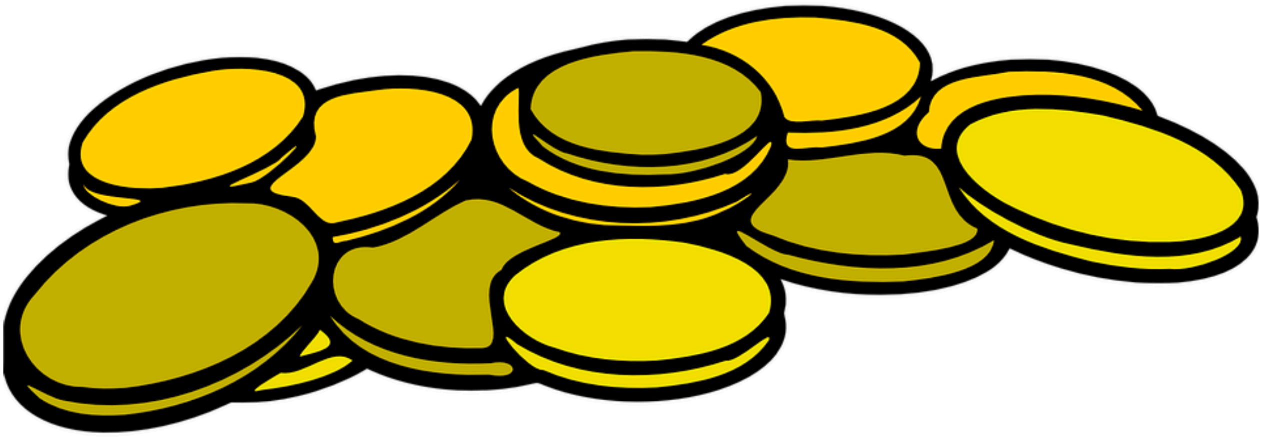
Slutsumman är inte delbar med 3. Om man betecknar priset på kaffet med k och priset på saften med s kan slutsumman uttryckas som

$$54 + 30 + 3 + 3k + 6s = 87 + 3k + 6m = 3(29 + k + 2m),$$

som mycket riktigt är delbart med 3.

30. Du har nio mynt och en våg. Ett av mynten är dock förfalskat och lättare än de andra. Vilket är det minsta antalet vägningar du behöver utföra för att ta reda på vilket mynt som är förfalskat?

    Vad är då det minsta antalet vägningar om du har 81 mynt varav ett är förfalskat?



Uppgiften på Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Balance_puzzle#Nine-coin_problem.
Kortadress: bit.ly/kolikot.
Bild: Pixabay

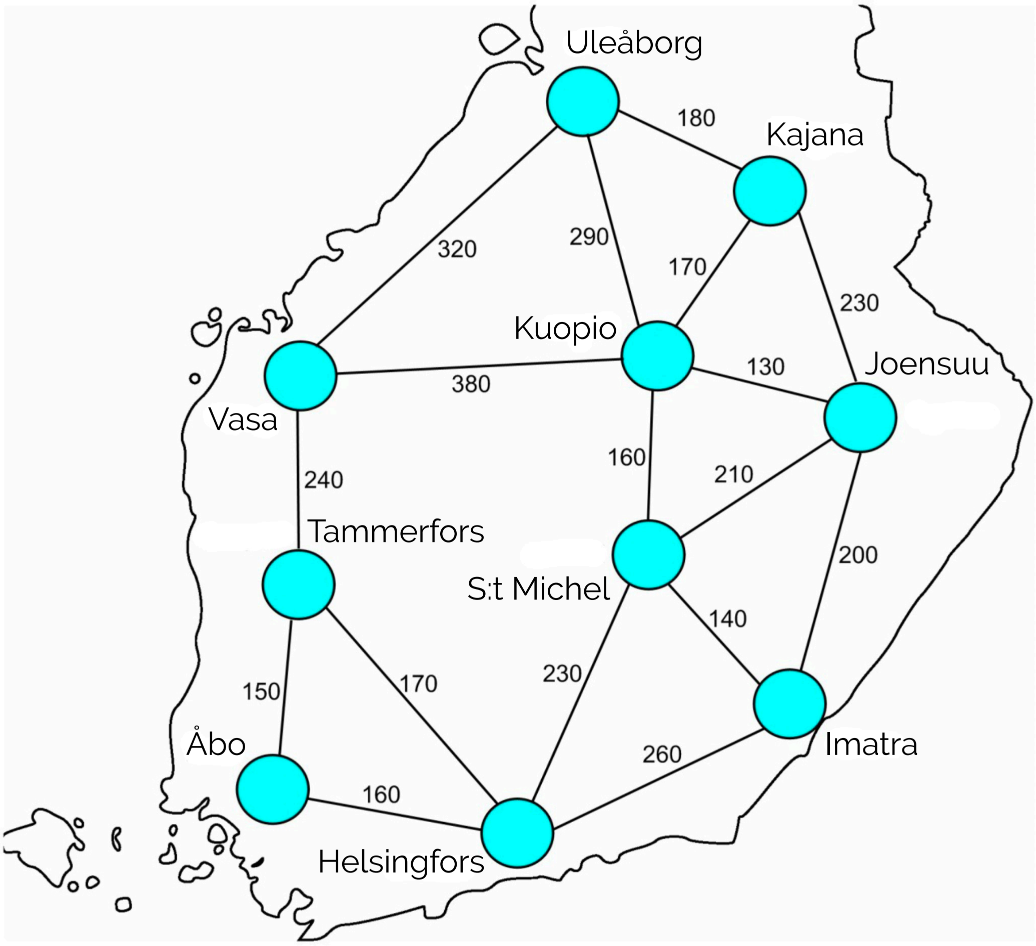
Lösning till uppgift 30

Det går att hitta det förfalskade myntet med två vägningar. Då sätter man tre mynt i båda vågskålarna, så att tre mynt alltså lämnas utanför. Det förfalskade myntet är i den vågskålen som väger mindre. Om vågen däremot är i balans är det förfalskade myntet något av de tre mynt som inte är i någondera vågskålen.

Sedan tillämpas samma princip på de tre mynt varav ett med säkerhet är förfalskat: Man sätter ett mynt i vardera vågskålen, och det tredje myntet lämnas utanför.

I fallet med 81 mynt behövs fyra stycken liknande vägningar. För den första vägningen delas mynten in i grupper med 27 mynt var. Annars gör man som ovan. När man har fått veta bland vilka 27 mynt det förfalskade myntet är, utförs följande vägning med grupper med nio mynt var. De två sista vägningarna görs med de 9 sista mynten som då återstår att vägas.

31. Informationsnätet i Finland ska ersättas med ett nytt som baserar sig på en ny optisk kabelteknik. Eftersom den nya tekniken är dyr vill man bygga upp ett så förmånligt nätverk som möjligt, som binder samman alla städerna i landet.



- Vad är den minsta mängden optisk kabel som det nya nätverket kan byggas upp med?
- Vilka åtgärder resulterar i den förmånligaste lösningen?
- Utarbeta instruktioner för hur problemet kan lösas.

Lösning till uppgift 31

Allmänna ledtrådar

- Nätverket behöver inte utgöra en sluten slinga.
- Nätverket får förgrena sig.
- Det behövs endast en förbindelse till varje stad.
- Testa att ta bort en förbindelse och att ersätta den med en annan!

Alternativ 1

1. Sortera förbindelserna mellan städerna från kortast till längst.
2. Utelämna förbindelserna mellan städerna som redan är sammankopplade via andra förbindelser i nätverket.
3. Upprepa detta tills du har gått igenom alla förbindelser.

Gör så här:

Avstånden mellan ständerna har sorterats från kortast till längst. Om det mellan två städer redan funnits en förbindelse har den andra förbindelsen strukits över.

> Kuopio–Joensuu (130), S:t Michel–Imatra (140), Åbo–Tammerfors (150), Åbo–Helsingfors (160), S:t Michel–Kuopio (160), Kuopio–Kajana (170), T~~ammerfors–Helsingfors (170)~~, Kajana–Uleåborg (180), ~~Joensuu–Imatra (200), Joensuu–S:t Michel (210)~~, S:t Michel–Helsingfors (230), ~~Joensuu–Kajana (230)~~, Tammerfors–Vasa (240), ~~Helsingfors–Imatra (260), Kuopio–Uleåborg (290), Uleåborg–Vasa (320), Vasa–Kuopio (380)~~

Nu kan man beräkna mängden optisk kabel som behövs för nätverket utifrån förbindelserna som blivit kvar:
130 + 140 + 150 + 160 + 160 + 170 + 180 + 230 + 240 = 1560.

Metoden kallas **Kruskals algoritm**.

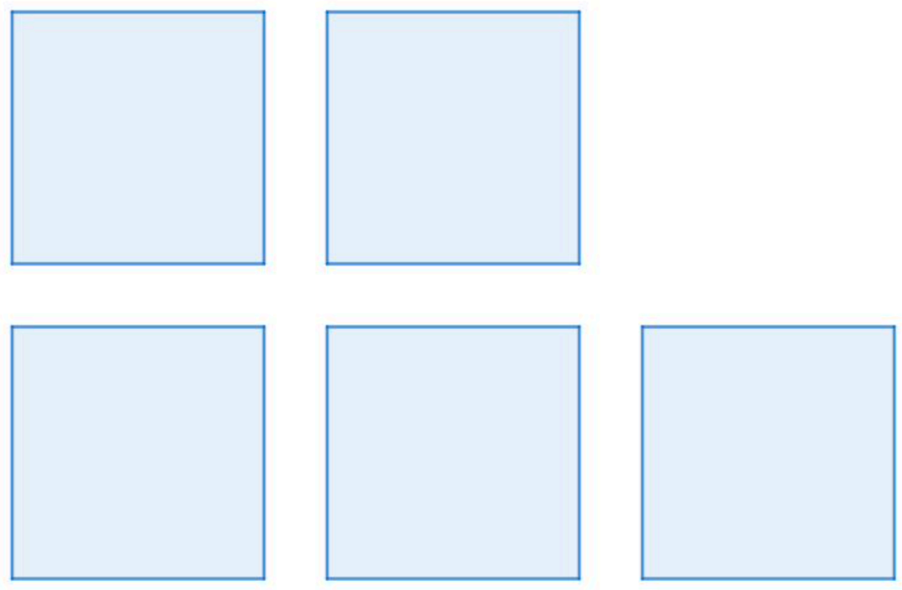
Alternativ 2

1. Utgå från en valfri stad. Välj den förbindelse mellan staden och en annan stad som är kortast.
2. Upprepa detta tills du har gått igenom alla städer.
3. Om alla städer inte kopplats samman på det här sättet, ska du undersöka närmare de mindre nätverk som du redan har skapat. Koppla samman dem med en så kort förbindelse som möjligt.
4. Upprepa detta tills alla städer ingår i nätverket.

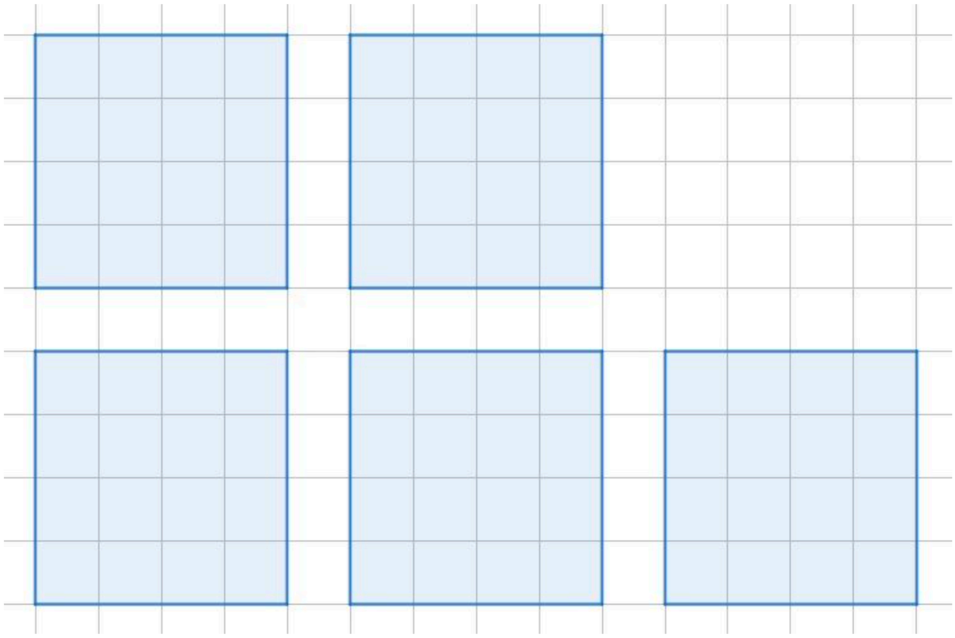
Titta på Mika Koponens exempelvideo om hur algoritmen kan tillämpas.
Kortadress: bit.ly/valokaapeli.

Metoden kallas **Borůvkas algoritm**.

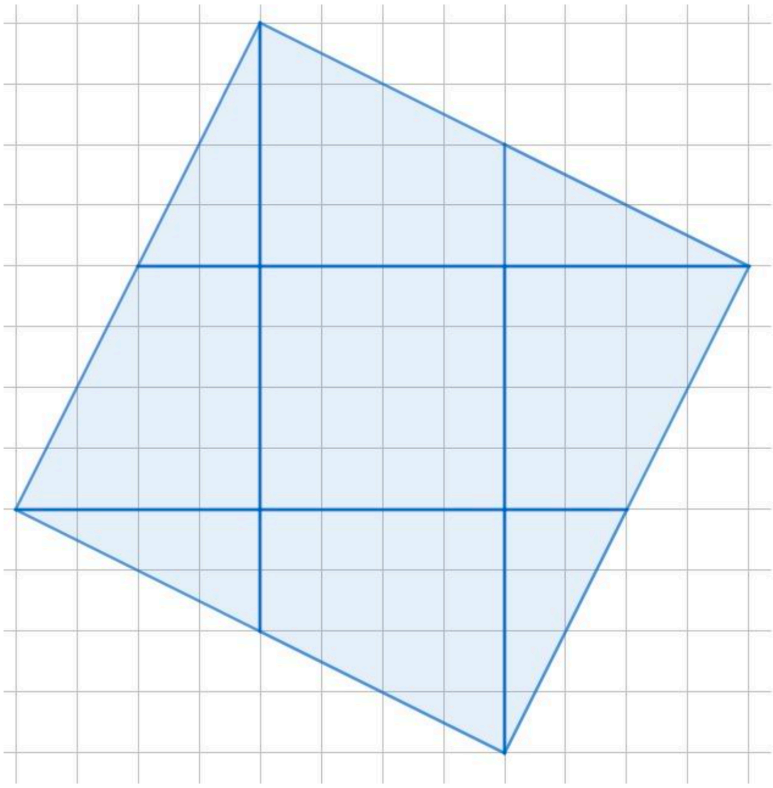
32. Är det möjligt att skapa en stor kvadrat av fem små kvadrater endast med hjälp av raka snitt?



TIPS! Ett rutnät kan vara till hjälp:



Lösning till uppgift 32

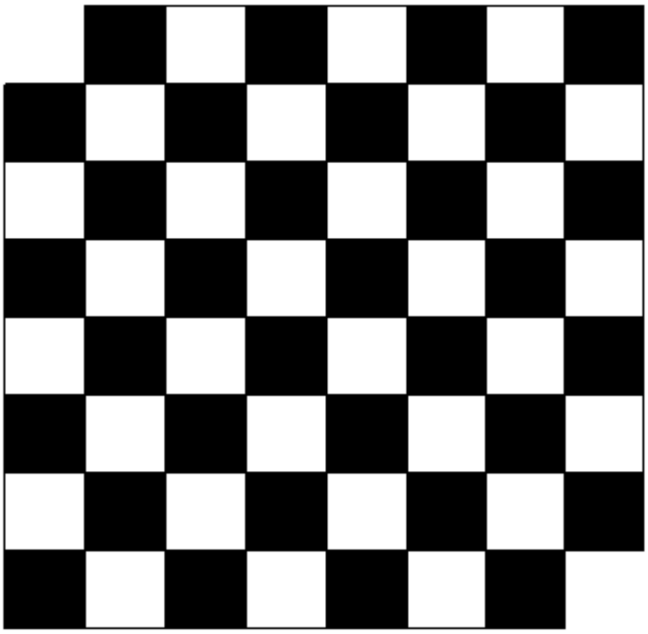


Förklaringen till tipset: Eftersom alla kvadrat sinsemellan är likformiga kan man, utan att ge avkall på generaliteten, utgå från att längden på sidan på en liten kvadrat är 4 enheter. Då är den stora kvadratens area 80 rutor och längden på dess sida $\sqrt{80}$, som kan förenklas till $2\sqrt{20}$.

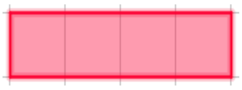
Utgående från Pythagoras sats vet vi att längden på hypotenusan i en rätvinklig triangel är $\sqrt{20}$ om längderna på kateterna i samma triangel är 2 och 4, eftersom $2^2 + 4^2 = 20$. Utgående från den här informationen har fyra av de ursprungliga kvadraterna delats i en rätvinklig triangel och ett parallelltrapets så att längden på hypotenusan i triangeln och på längsta sidan i parallelltrapetset är $\sqrt{20}$.

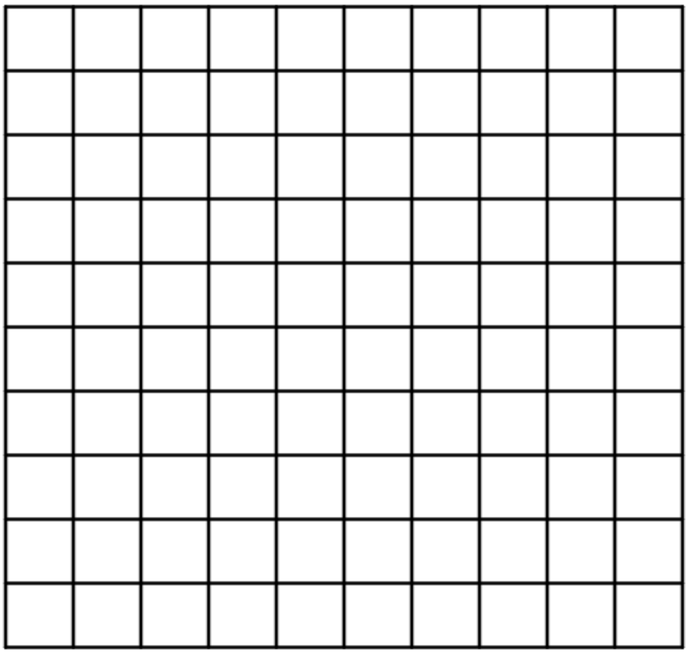
Den stora kvadraten har därefter konstruerats så att varje sida består av två element som båda är $\sqrt{20}$ enheter långa.

33. Från ett schackbräde tas bort två rutor i två motsatta hörn enligt bilden. Är det möjligt att täcka över schackbrädet med dominobrickor vars storlek är 2 · 1 rutor på schackbrädet?



Är det möjligt att täcka över ett 10 · 10-bräde med brickor vars storlek är 4 · 1 rutor?



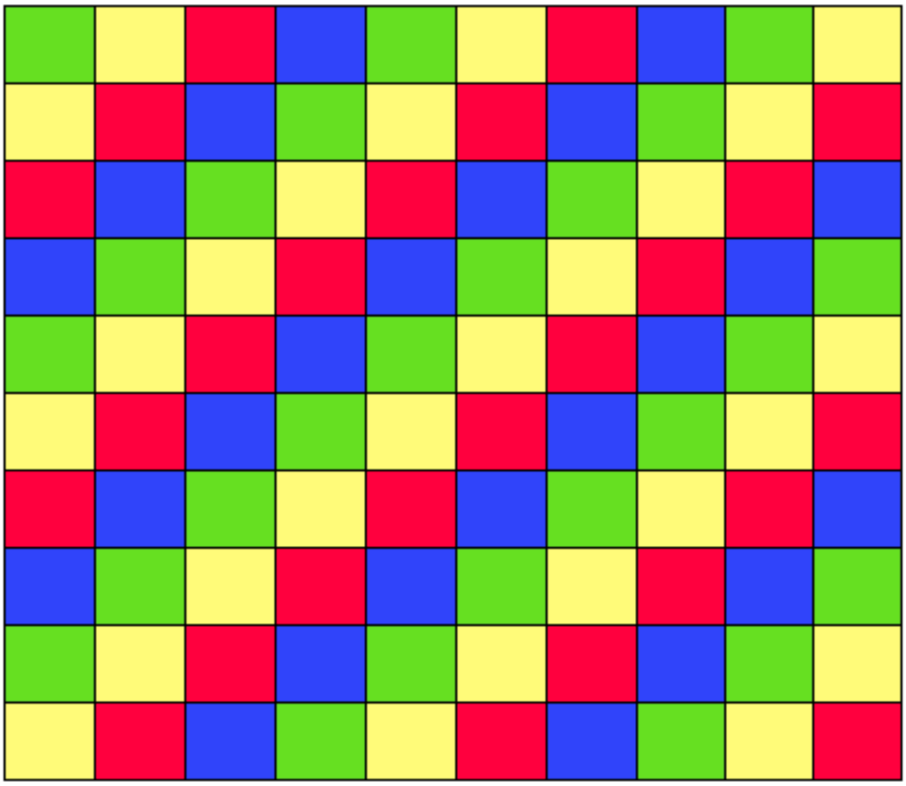


Källa: Colomb, S. W. (1996): Polyominoes: Puzzles, patterns, problems, and packings. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Lösning till uppgift 33

Det är inte möjligt att täcka över ett trasigt schackbräde med dominobrickor, eftersom rutorna som togs bort hade samma färg och eftersom en dominobricka alltid täcker exakt en vit och en svart ruta.

Även den senare uppgiften är omöjlig att lösa. Om rutorna på brädet färgläggs med fyra färger enligt bilden nedan, täcker en $4 \cdot 1$-bricka alltid en ruta av varje färg oberoende av var på brädet den placeras. Eftersom det finns 25 gröna, 26 gula, 25 röda och 24 blå rutor på brädet, är det inte möjligt att täcka över brädet med $4 \cdot 1$-brickor.



34. En gång blev en person så frustrerad över sin Rubiks kub att hen bestämde sig för att ta isär kuben till småkuber. Efteråt märkte hen att hen satt kvar med lika många helsvarta kuber som det fanns kuber där exakt en sida hade en annan färg än svart. Hur stor var den ursprungliga kuben?

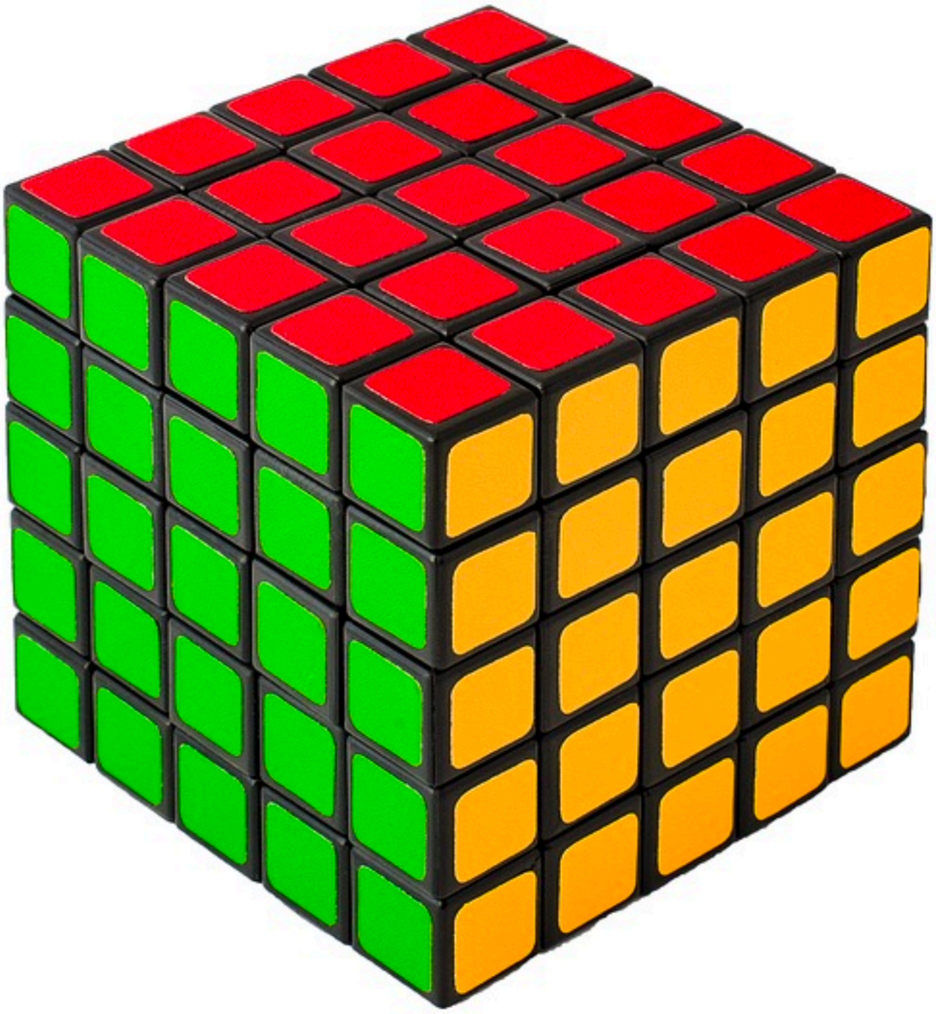
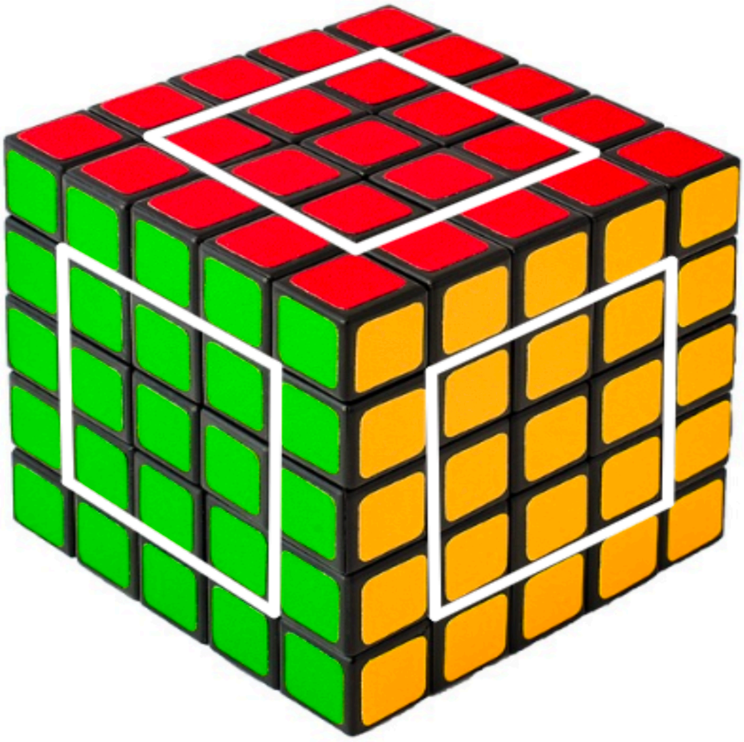


Bild: Pixabay

Lösning till uppgift 34

Vi betecknar antalet småkuber som ingår i en hel sida på Rubiks kub med bokstaven x.



Kuber som har exakt en sida som har en annan färg än svart finns det $6(x - 2)^2$ stycken av (se bild). Antalet helsvarta kuber är $(x - 2)^3$, eftersom det "yttersta lagret" har minst en sida som har en annan färg en svart. Därav får vi ekvationen

$$
\begin{aligned}
& (x-2)^3 = 6(x-2)^2 \\
\iff & (x-2)^3 - 6(x-2)^2 = 0 \\
\iff & (x-2)^2[(x-2)-6] = 0 \\
\iff & (x-2)^2(x-8) = 0,
\end{aligned}
$$

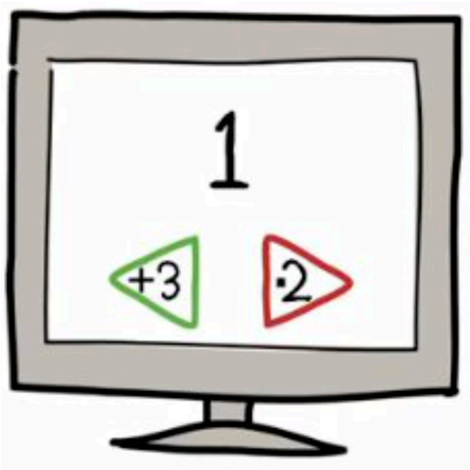
som kan lösas med hjälp av nollfaktorlagen:

$$
\begin{aligned}
& x - 2 = 0 \text{ eller } x - 8 = 0 \\
\iff & x = 2 \text{ eller } x = 8
\end{aligned}
$$

Således är storleken på den ursprungliga kuben $8 \cdot 8 \cdot 8$. I princip kunde den ursprungliga kuben också ha storleken $2 \cdot 2 \cdot 2$, men lösningen är inte särskilt intressant, eftersom det då inte skulle finnas några kuber alls som är helsvarta eller kuber med endast en sida som har en annan färg än svart.

35. Du har en maskin som består av en skärm och två knappar.

Först visas talet 1 på skärmen. När du trycker på knappen till vänster adderas talet 3 till talet på skärmen. När du trycker på knappen till höger multipliceras talet på skärmen med 2.



Tänk ut en serie knapptryckningar som ger talet 20.
Tänk ut en serie knapptryckningar som ger talet 121.
Tänk ut den kortaste möjliga serien knapptryckningar som ger talet 121.
Uppgiften finns i videoformat (på finska) här (kortadress: bit.ly/nappailysarja).

Uppgiften skapades ursprungligen av Antti Laaksonen för programmeringstävlingen Datatähti 2017. Den ursprungliga uppgiftsbeskrivningen hittar du här (kortadress: bit.ly/datatahti).

Lösning till uppgift 35

Nedan visas lösningen till de två första uppgifterna.
Additionen av talet 3 har markerats med en grön pil och multiplikationen med talet 2 med en röd pil.

Talet 20 fås exempelvis med följande knapptryckningar:
$1 \Rightarrow 4 \Rightarrow 7 \Rightarrow 10 \Rightarrow 20$.

Talet 121 fås exempelvis med följande knapptryckningar:
$1 \Rightarrow 4 \Rightarrow 7 \Rightarrow 14 \Rightarrow 28 \Rightarrow 56 \Rightarrow 59 \Rightarrow 118 \Rightarrow 121$.

36. Stina har lagt märke till att hennes klocka drar sig exakt 2 minuter varje timme. Stina ställer klockan till rätt tid igen. Hur mycket är klockan när den på nytt visar rätt tid?

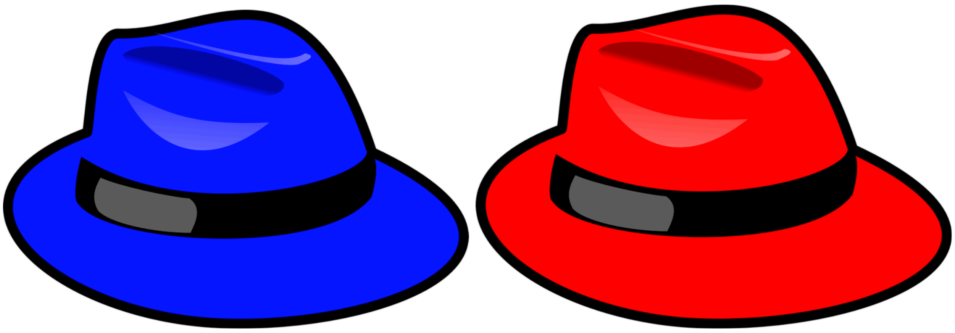
Lösning till uppgift 36

Man kan närma sig uppgiften med hjälp av två analoga klockor. Vi antar att den ena klockan drar sig, medan den andra visar rätt tid. Om klockan drar sig 2 minuter varje timme, kan man räkna ut att minutvisarna på båda klockorna är på samma ställe om 30 timmar. Om 30 timmar visar timvisaren på klockan som drar sig dock en timme för lite ($30 \cdot 2$ min. = 60 min.). För att även timvisarna på båda klockorna skulle visa samma tid behöver det gå 12 gånger så lång tid, dvs. $12 \cdot 30$ tim. = 360 tim. = 15 dagar (eftersom urtavlan på en analog klocka består av 12 timmar). Klockan visar med andra ord rätt tid med 15 dagars mellanrum. När klockan nästa gång visar rätt tid, visar den alltså samma tid som när den senast ställdes till rätt tid. Om en digital klocka drar sig lika mycket tar det dubbelt så länge innan den visar rätt tid igen.

37. Tre personer deltar i ett hattspel. När spelarna kommer in i spelrummet får de var sin hatt på huvudet, som är antingen röd eller blå. Det är spelledaren som bestämmer färgen på hattarna genom att kasta mynt.

Ingen av spelarna kan se sin egen hatt, men var och en av dem ser hattarna på sina två medspelare. Spelarna får i förväg komma överens om en spelstrategi, men de får absolut inte kommunicera med varandra efter att de har kommit in i rummet. Spelarna ska gissa färgen på sin egen hatt. Om minst en av spelarna gissar rätt och ingen av dem kommer med en felaktig gissning, får spelarna dela på ett pris på tre miljoner euro. Gissningarna ska göras samtidigt, men man får också låta bli att komma med en gissning.

Vilken strategi borde spelarna helst tillämpa och hur stor är sannolikheten för att de får priset då?



Källa: https://www.nytimes.com/2001/04/10/science/why-mathematicians-now-care-about-their-hat-color.html (kortadress: bit.ly/hatut)
Bilder: Pixbay

Lösning till uppgift 37

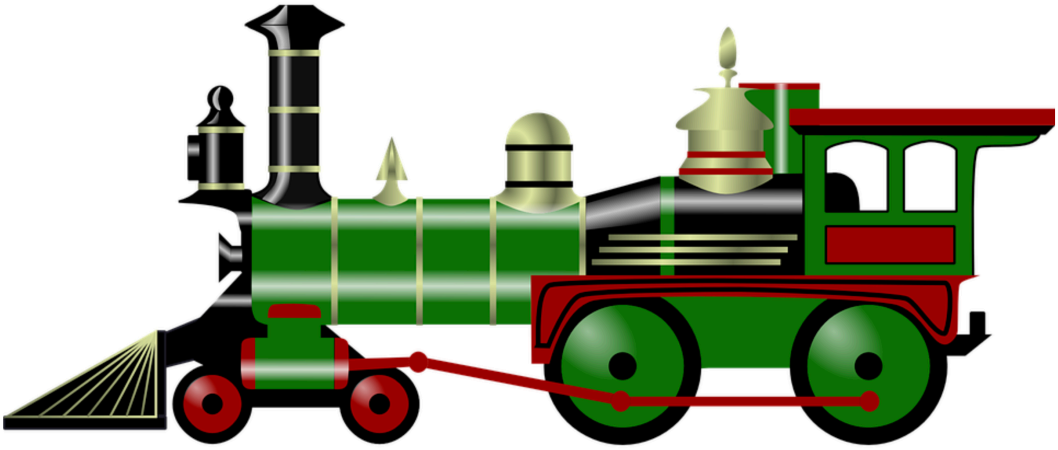
Hattarna kan bilda följande färgkombinationer:

BBB
BBR
BRB
RBB
RRB
RBR
BRR
RRR

Här ser vi att det finns åtta olika alternativ. I två fall av åtta har alla tre hattar samma färg, och i sex fall av åtta har en av tre hattar en annan färg än de två andra.

Därför kommer spelarna överens om att de ska gissa på blått om de ser att de två andra spelarnas hattar är röda. Om de däremot ser att de två andra spelarnas hattar är blå, ska de gissa att deras egen hatt är röd. Med den strategin vinner spelarna sex spel av åtta. (I själva verket är varannan gissning ändå felaktig, men de felaktiga gissningarna gäller endast sådana spelomgångar där alla tre hattar har samma färg. Då ser nämligen alla spelare två röda eller två blå hattar och gör en felaktig gissning om färgen på sin egen hatt.)

38. Anton, Bert och Carl åkte på ett tåg som drogs av ett ånglok. Fönstret i vagnen som männen satt i stod öppet, och när tåget åkte in i en tunnel blev alla tre män sotiga i ansiktet. När de såg varandras smutsiga ansikten skrattade dem åt varandra. Plötsligt slutade Bert skratta, för han hade insett att även hans eget ansikte hade blivit smutsigt. Hur kunde han veta det?



Källa: Moscovich, I. (2009): *Yli 500 ajatuspeliä – Ivan Moscovichin älytehtäviä tieteen, luonnon ja tekniikan aloilta*. Königswinter: Ullmann.
Bild: Pixabay

Lösning till uppgift 38

Vi kan föreställa oss att Bert har ett rent ansikte och betrakta situationen ur Antons synvinkel: Han ser Berts rena och Carls smutsiga ansikte. Sitt eget ansikte ser han förstås inte. Carl ser i sin tur Berts rena ansikte och Antons ansikte och vet inte att hans eget ansikte är smutsigt. Eftersom Carl skrattar och Bert har ett rent ansikte, måste Antons ansikte vara smutsigt. Situationen är symmetrisk när man betraktar den ur Carls synvinkel.

Om Bert alltså hade haft ett rent ansikte skulle Anton och Carl ha kunnat räkna ut att deras egna ansikten är smutsiga. Eftersom båda skrattar är det emellertid antagligen inte så. Därför kan Bert dra den slutsatsen att hans eget ansikte är smutsigt.