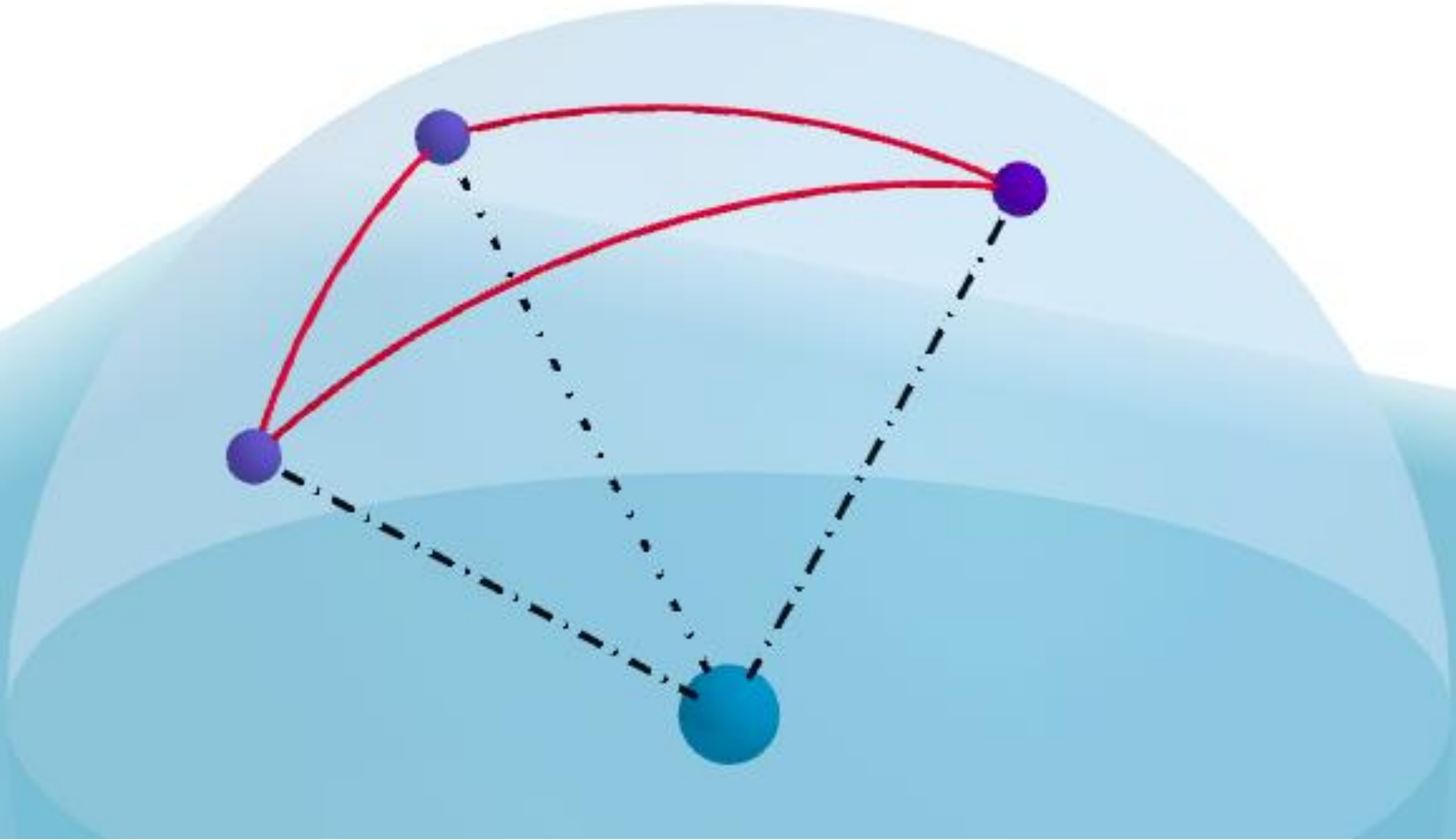
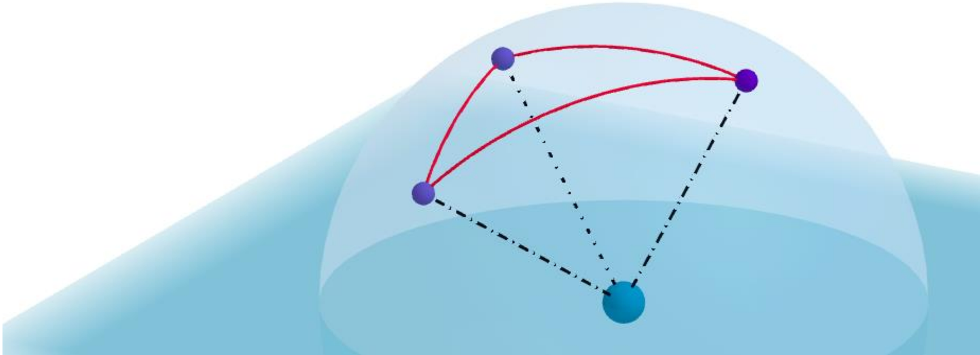
Skolmatematikens berättelse



FT Martina Aaltonen

Matematikens berättelse börjar från de naturliga talen

I första delen funderar vi på naturliga talens egenskaper



Naturliga talen (Babylonien 2000 f.K)

- Naturliga tal kan gruperas enligt dess egenskaper på olika sätt
- Vad är gemensamt för det följande naturliga talen:

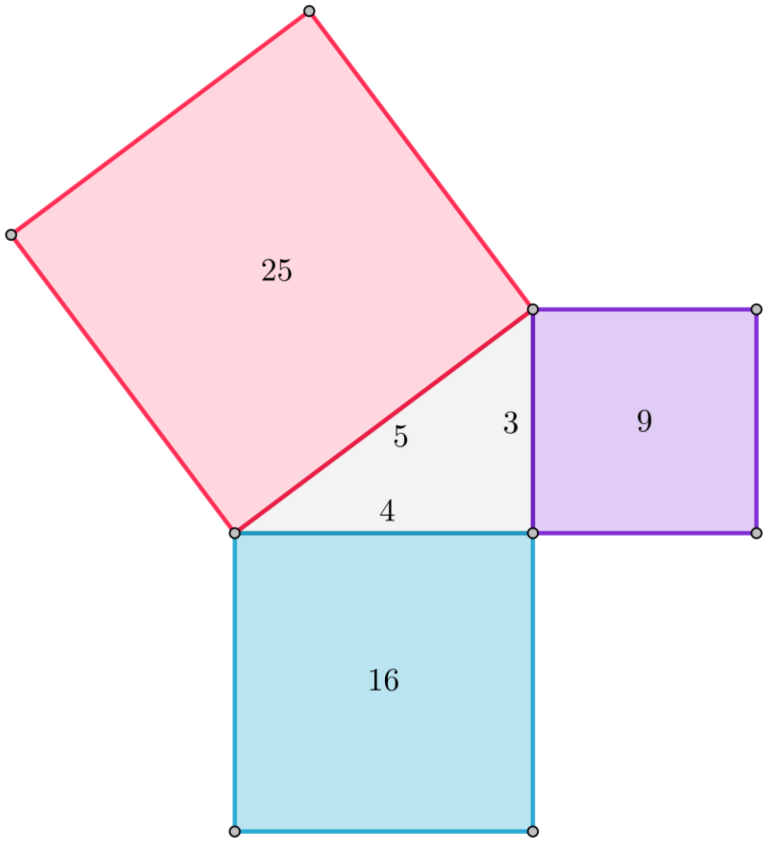
a) 2, 4, 9, 16, 25

b) 1, 3, 6, 10, 15

c) 1, 3, 5, 7, 11

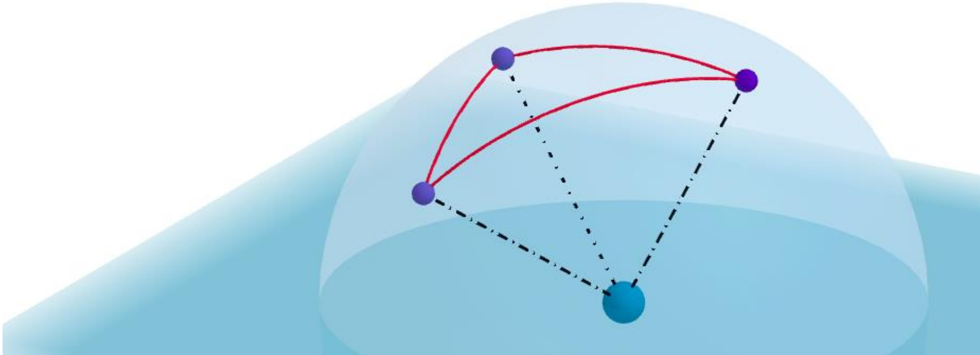
- Vad är gemensamt för det följande grupper med tre naturliga tal:

d) (3, 4, 5), (5, 12, 13) ja (8, 15, 17)



En komplicerad värld behöver komplicerade tal

I den andra delen tar vi en titt på talens ursprung



Talens historia

Under vilken tidsperiod uppfann man de följande talen:

a) naturliga tal	1, 2, 3,…
b) talet 0	0
c) bråktal	1/2, 2/3, …
d) negativa heltal	-1, -2, -3, …
e) irrationella tal	$\sqrt{2}, \pi, \ldots$

Talens historia

a) naturliga tal

babylonierna 2000 f.K

c) bråktal

babylonierna 2000 f.K

e) irrationella tal

Pythagoreerna 600 f.K

b) talet 0

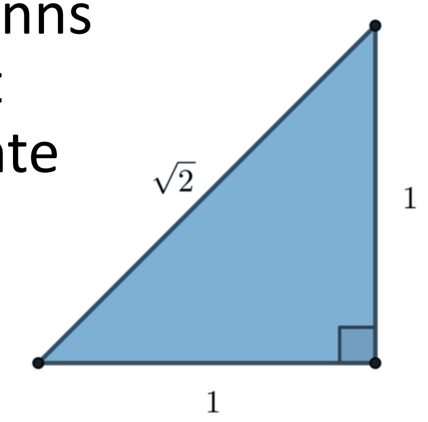
Ptolemaios 130-talet

d) negativa heltal

Kina 100 f.K, Indien 700-talet, Europa 1600-talet

Vem hittade på irrationella talen?

Pythagoreerna hade en teori om harmoni. Teorin innebar att allting i världen kunde förklaras med hjälp av naturliga tal och bråk. Harmoniska världsbilden bröts samman då de märkte att det finns en triangel, och även en mycket enkel sådan, vars hypotenusa inte kan uttryckas som ett bråktal



Tiosystemet

- Arabiska symbolerna 1,2,3,4,5,6,7,8,9, och de position baserade tiosystemet har sitt ursprung i 600-talets Indien
- De kom till Europa via arabisk-islamiska kulturen på 1200-talet - 1500-talet
- Symbolen 0 och decimaltalen togs med från den arabiska kulturen

0,01

0,1

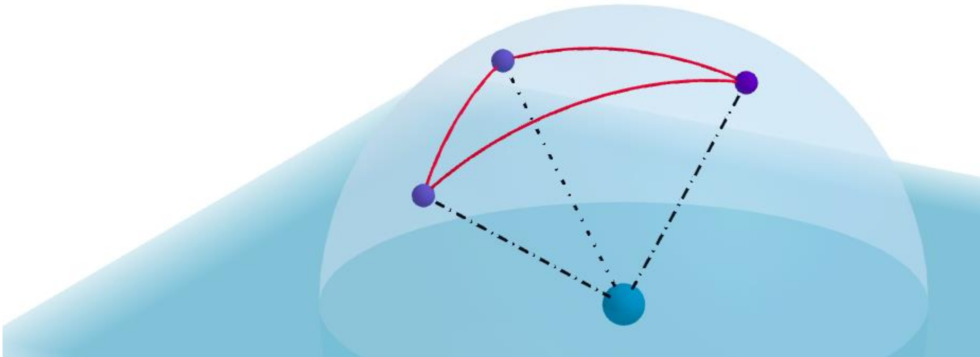
1

10

100

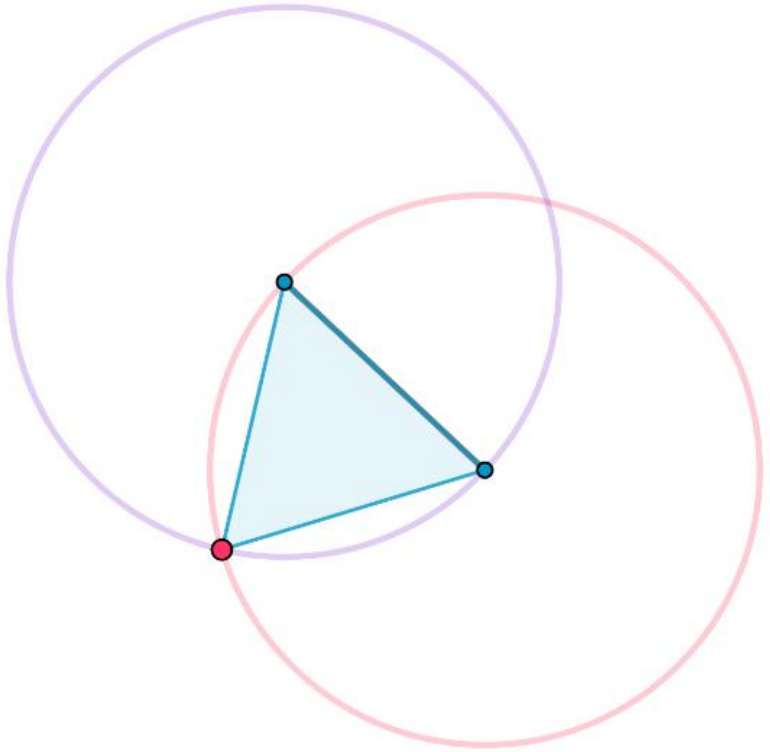
Figurer med passare och linjal

I tredje delen flyttar vi oss till antiken för att beräkna areor och rita regelbundna polygoner med passare och linjal



Geometriska konstruktioner

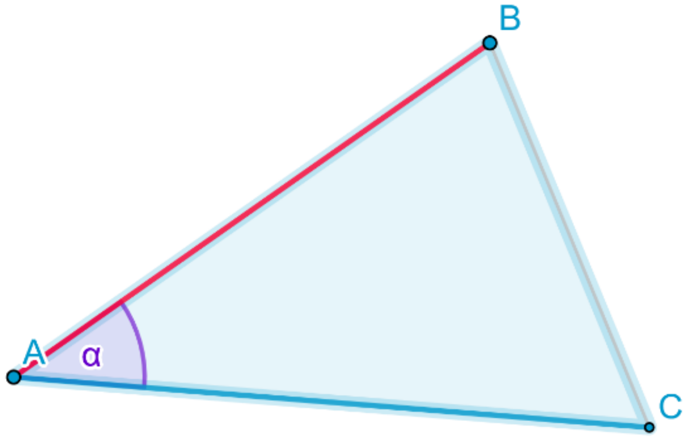
- Vad allt kan konstrueras med hjälp av endast en passare och linjal?
- Mittpunktsnormalen kan konstrueras för alla sträckor
- Alla sträckor och vinklar kan delas i två lika stora delar
- Alla vinklar kan inte delas i tre lika stora delar t.e.x. vinkeln på 60 grader
- Liksidig triangel, kvadrat och regelbunden pentagon kan konstrueras
- Alla regelbundna polygoner kan inte konstrueras som t.e.x. en regelbunden niohörning



300 f.K

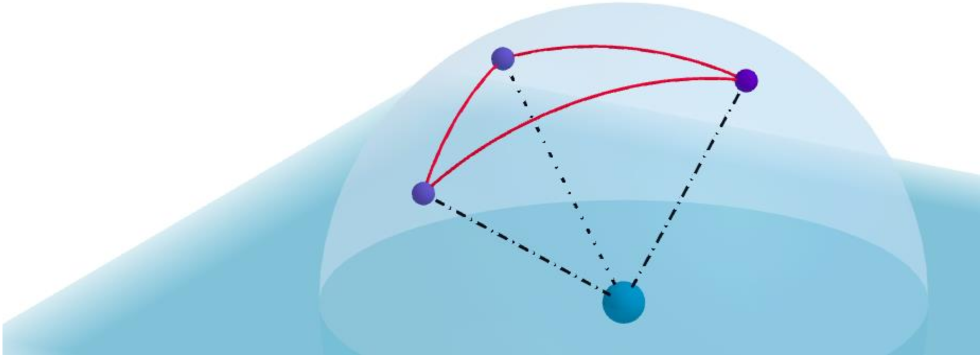
Likformiga trianglar (Euklides)

- Vad måste man veta om en triangel för att känna igen den?
- Till exempel längden på triangelns två sidor och vinkel emellan dem
- Likformiga trianglar förekommer redan i Euklides *Elementa*
- Det första exemplet på ett axiomatiskt system presenteras i Euklides *Elementa*



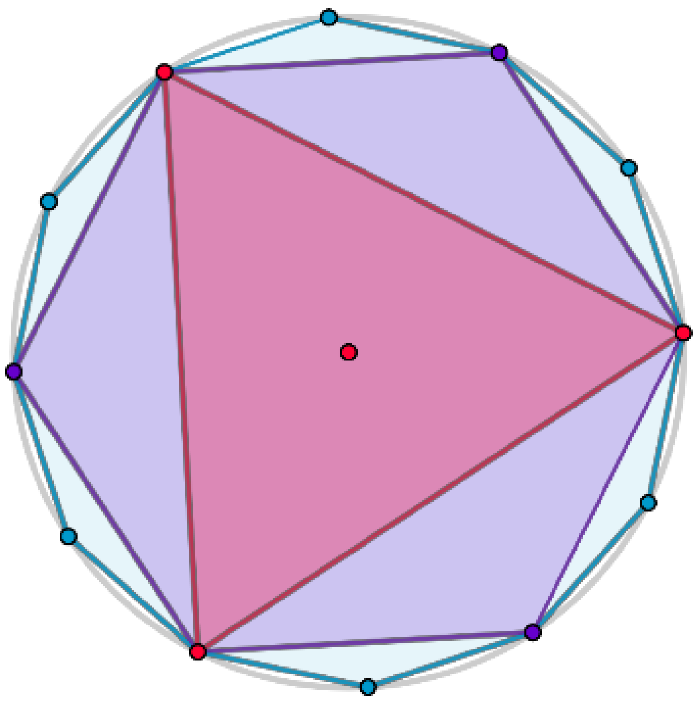
Komplicerade tal med passare och linjal

I fjärde delen konstruerar vi de irrationella talen $\sqrt{n}$ och π geometriskt



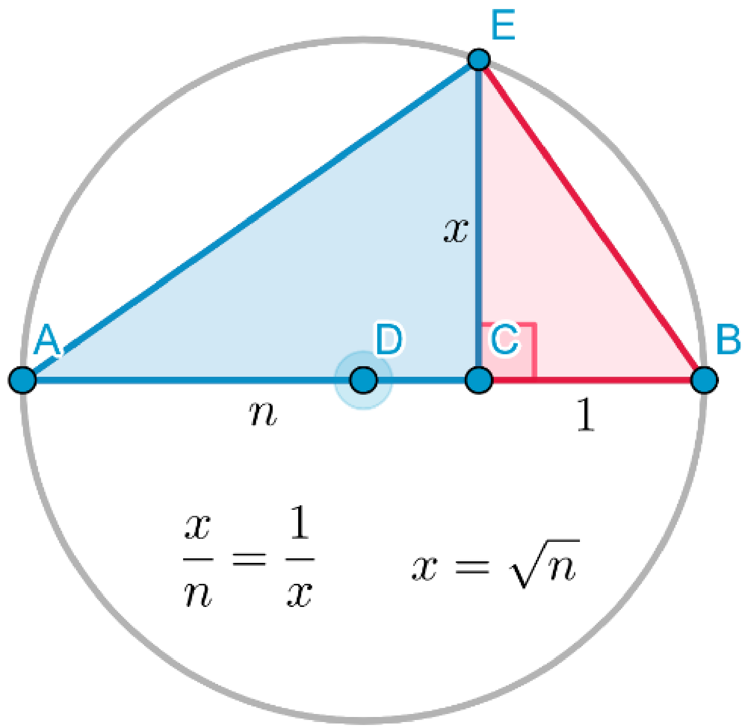
π som yta på en cirkel (Arkhimedes)

- Talet π kan uttryckas geometriskt som enhetscirkelns area $A = \pi 1^2 = \pi$
- Arean av en regelbunden polygon approximerar talet π (om polygonens hörn är på enhetscirkelns rand)
- Arean av en regelbunden 96-hörning ger
$$\pi \approx 3{,}14$$



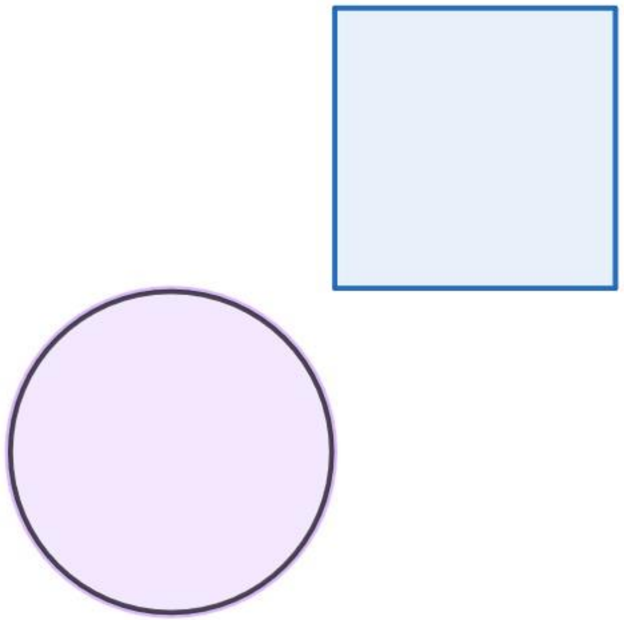
$\sqrt{n}$ med passare och gradskiva

- Kvadratroten av ett naturligt tal kan inte, även i dag, uttryckas numeriskt exakt förutom i speciella fall
- Men redan under antiken kunde man geometriskt konstruera alla naturliga tals kvadratrötter
- Hur många likformiga rätvinkliga trianglar ser du i bilden?



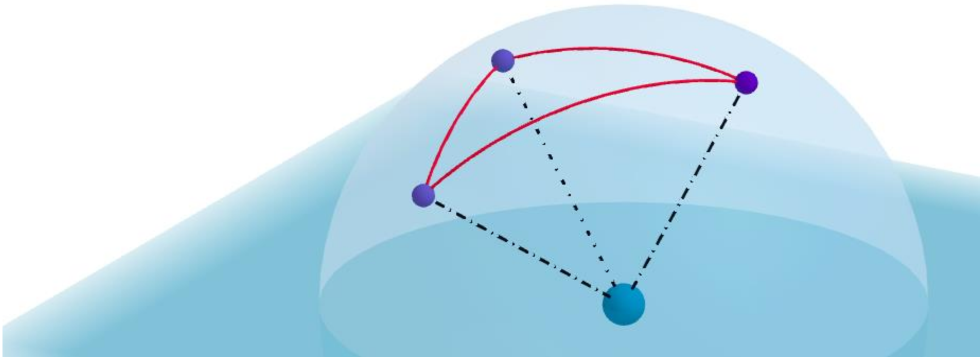
Ett klassiskt problem: Kan man konstruera kvadratroten av π geometriskt?

- Talet $\sqrt{\pi}$ lyckades man inte under antiken, och inte senare heller, konstruera geometriskt, fast man hur försökte
- Den klassiska uppgiften lyder som följande: *Kan du kvadrera cirkeln d.v.s. kan du med hjälp av passare och gradskiva konstruera en kvadrat med samma yta som en given cirkel?*
- År 1882 kunde man äntligen bevisa matematiskt att det faktiskt är omöjligt att kvadrera cirkeln geometriskt



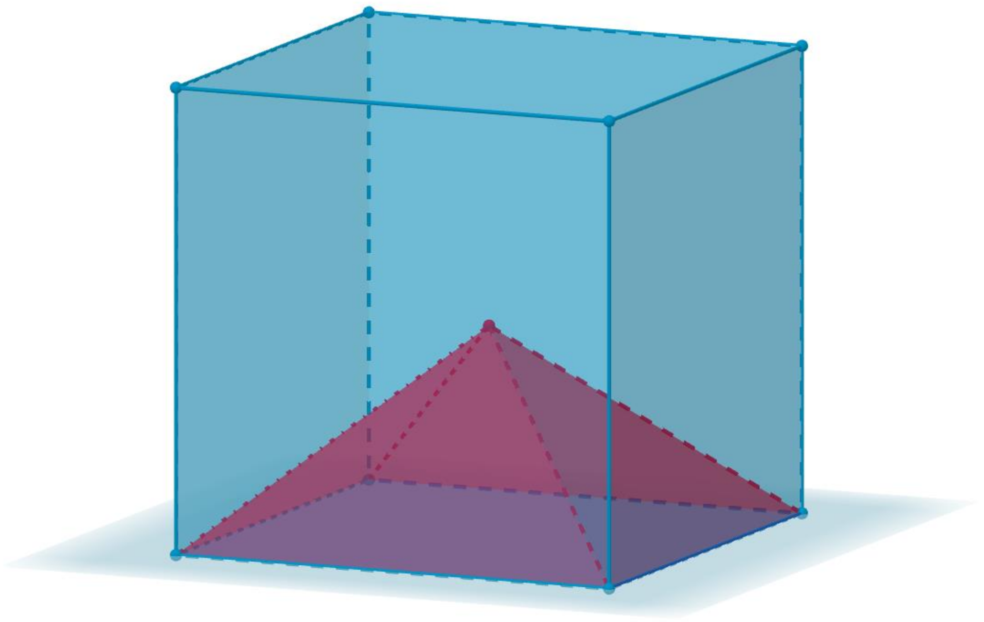
Volymen, arean och formen på rymdkroppar

Den femte delen introducerar klassiska samband mellan arean och volymen för olika rymdkroppar och tar en titt på de Platonska kropparna



Pyramid och kub (Eudoksos)

- Hur många likadana pyramider ryms det i kuben?

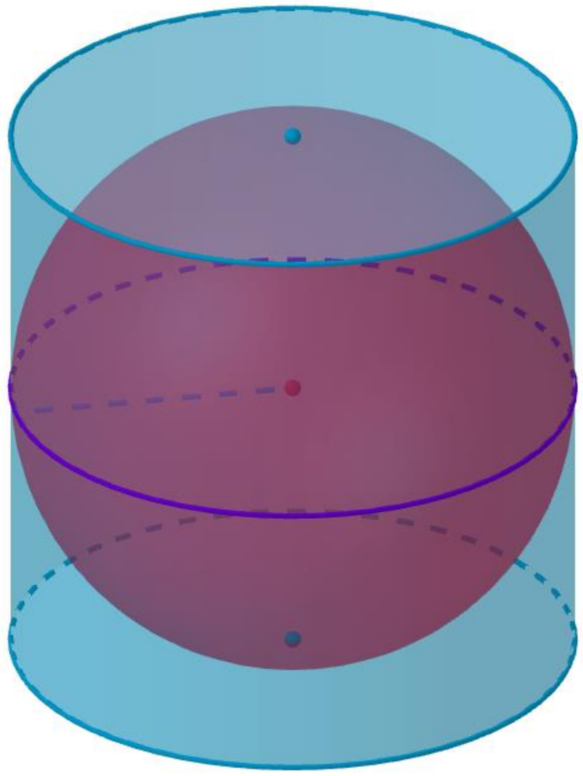


300 f.K

Samband mellan ett klot och en cylinder

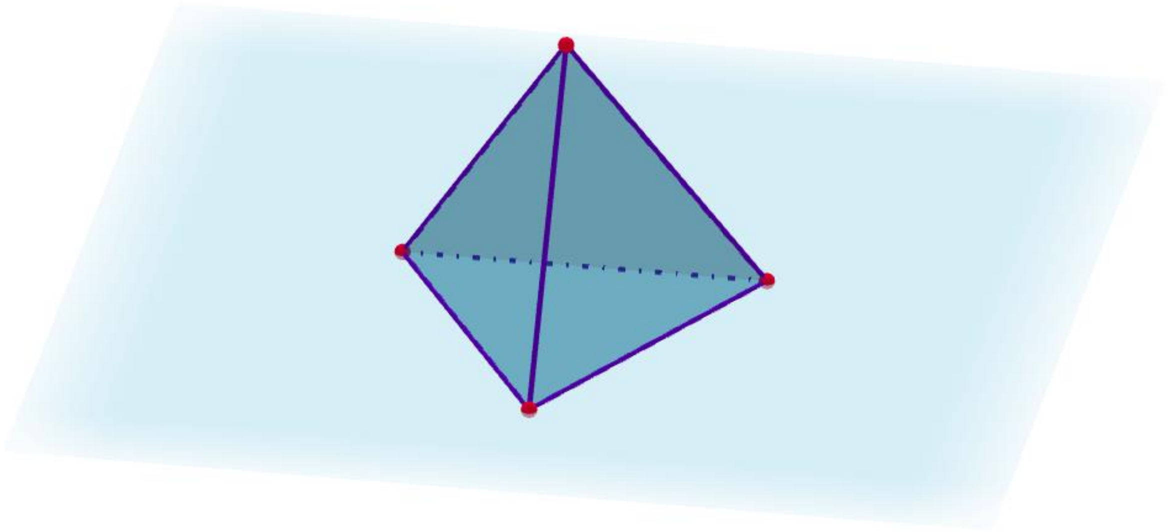
Arkhimedes resultat:

- Klotets area är fyra gånger arean av cirkeln
- Klotets area är två tredjedelar av cylinderns area
- Klotets volym är två tredjedelar av cylinderns volym



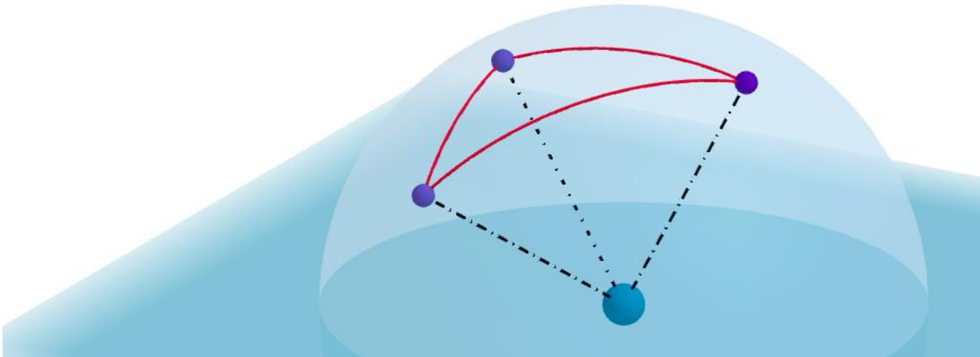
Platonska kropparna

- Platonska kropparnas sidor är likadana regelbundna polygoner
- I alla hörn på en Platonsk kropp möts lika många sidor
- Det finns exakt fem olika slags Platonska kroppar



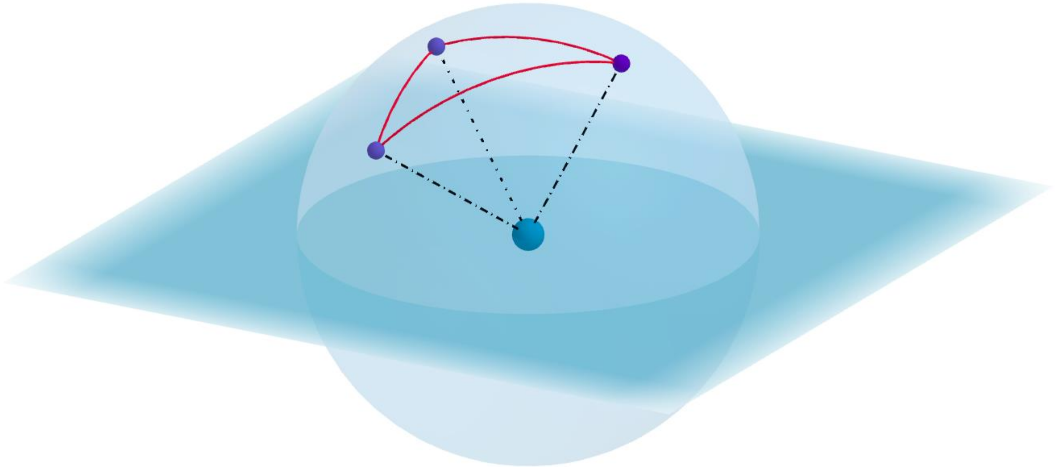
Trianglar i en cirkel

I den sjätte delen stannar vi vid de frågor och uppfinningar som ledde till uppkomsten av trigonometrin



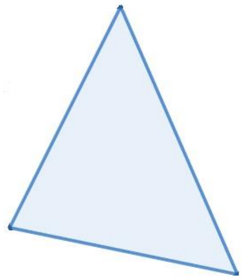
Stjärnhimmel och trigonometri

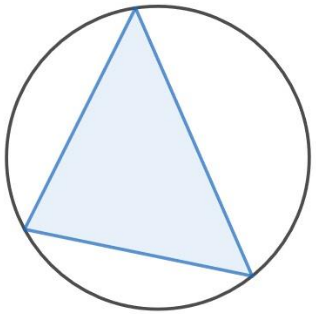
- Trigonometrin utvecklades långt tillsammans med astronomi i Ptolemaios arbete
- I Ptolemaios jordbaserade världsbild var himlen böjd över jorden

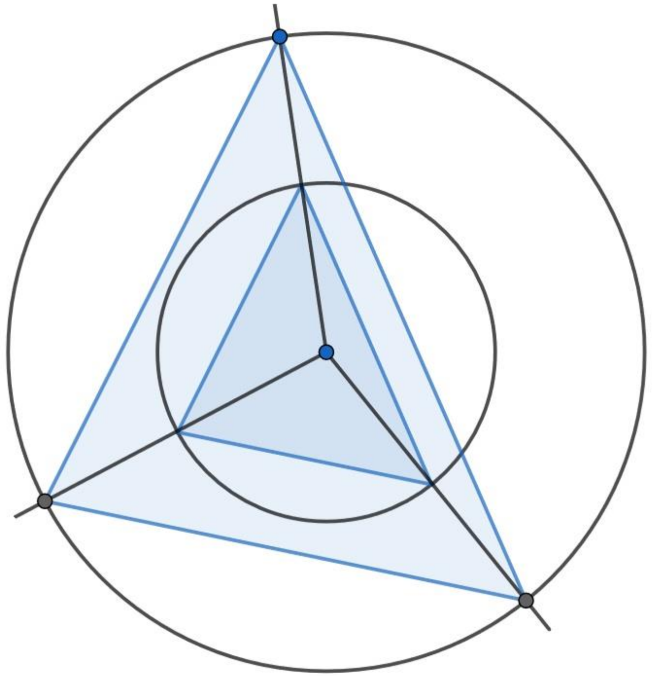


Trigonometri i planet – trianglar och cirkeln

- Två likformiga trianglar har samma trigonometriska egenskaper
- För varje triangel går det att konstruera en cirkel vars rand möter triangelns alla tre hörn
- Triangelns sidor förvandlas till cirkelns kordor
- För varje given triangel kan man konstruera en likformig triangel som har sina hörn på enhetscirkelns rand



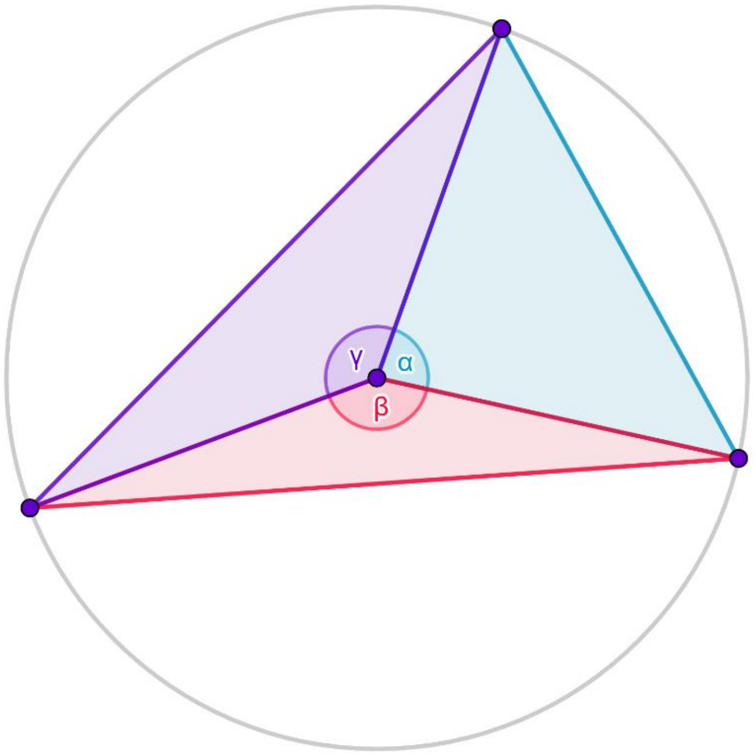




Den första trigonometriska tabellen (Hippharkos)

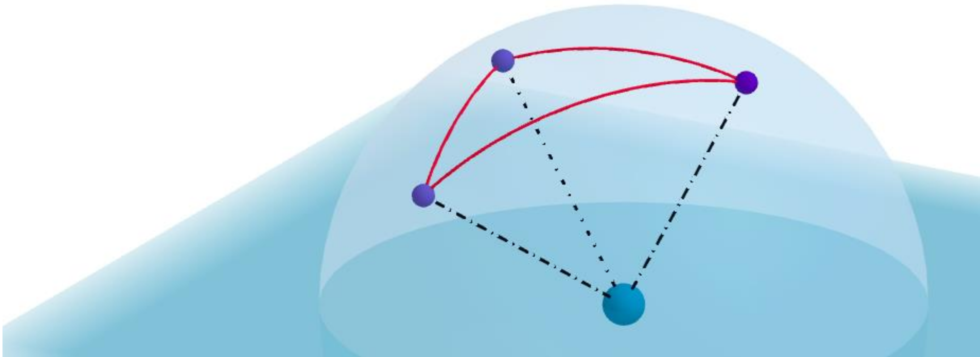
100-talet

- Hippharkos gjorde en tabell av tjugo medelpunktsvinklar och längden av den korda som motsvarar medelpunksvinkeln (i en enhetscirkel)
- Hippharkos tabell var den första trigonometriska tabellen



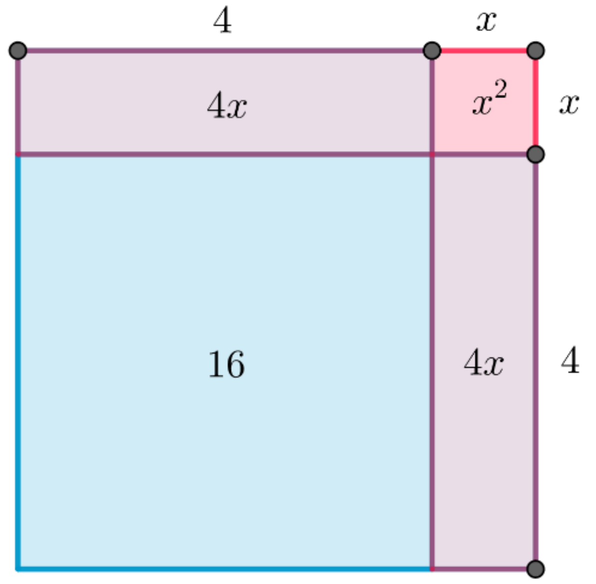
Ekvationer och algebra

I sjunde delen löser vi ekvationer med hjälp av algebra och kvadratkompletterar ett andragradspolynom



Kvadratkomlettering

- Ekvationer gällande kvadratens area var naturliga redan i det forna Babylonien
- Med hjälp av kvadratkomplettering kunde man uttrycka en andragradsekvation som en ekvation gällande kvadratens area
- Vilka lösningar hade ekvationen $(x+4)^2 = 25$ i babylonien?



$$x^2 + 8x = 9$$

$$\Rightarrow (x+4)^2 = 25$$

Diofantiska ekvationer

- I antiken efterfrågades endast heltalslösningar (och bråklösningar) för ekvationer. Varför?
- Nuförtiden kallas sådana ekvationer Diofantiska ekvationer
- Diofantos kallade i *Arithmetica* en av ekvationerna till höger för absurd. Vilken?

$$4x + 20 = 4$$

$$4x = 20$$

Diofantiska ekvationer?

- Med hjälp av polynomekvationens

$$x^2 = 1 + 2y^2$$

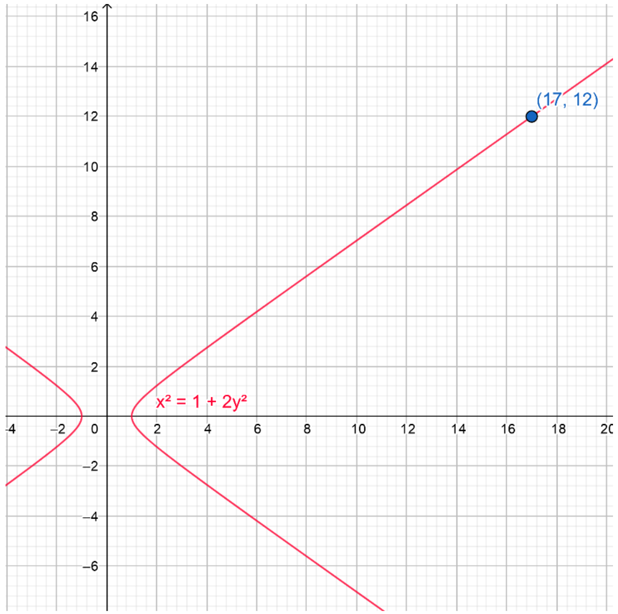
heltalslösningar hittar man bråktal som approximerar det irrationella talet $\sqrt{2}$

- Till exempel (17, 12) och (408, 577) är lösningar till ekvationen, och vi har

$17/12 \approx 1{,}416667$

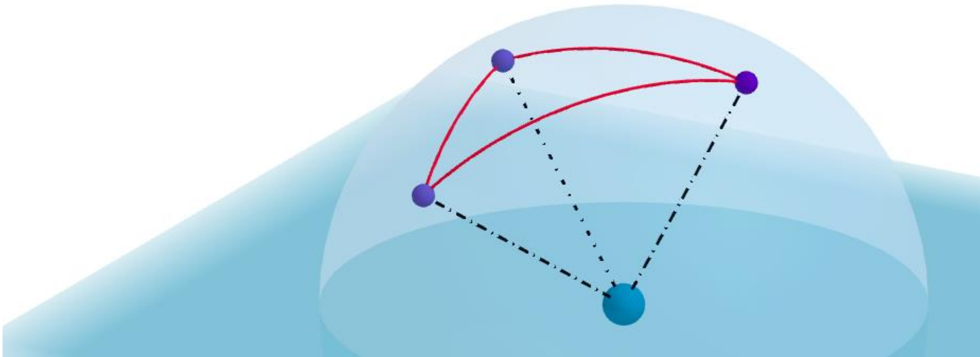
$408/577 \approx 1{,}414216$

$\sqrt{2} \approx 1{,}414214.$



Talen på tallinjen och geometriska figurer i koordinaatsystemet

I åttonde delen hittar talen sin plats på tallinjen och de klassiska geometriska objekten sin plats i det Kartesiska koordinatsystemet



Symboler och formler

- Matematik uttrycktes länge endast med hjälp av bilder och naturligt språk
- Symboler och formler blev vanligare inom matematiken först på 1500-talet

$+, -, \times$

$=, \leq, \geq$

x, y

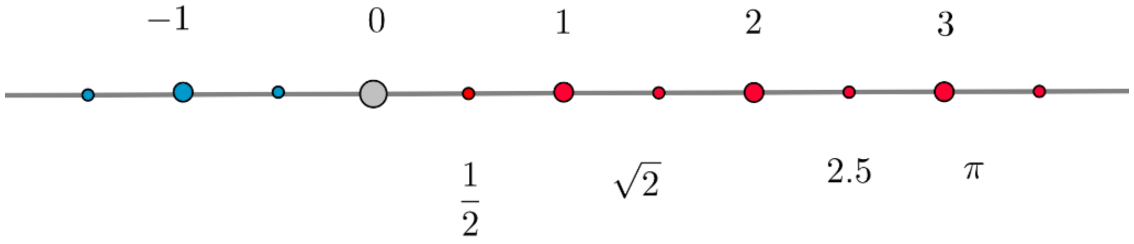
$f(x)$

x^2, x^3

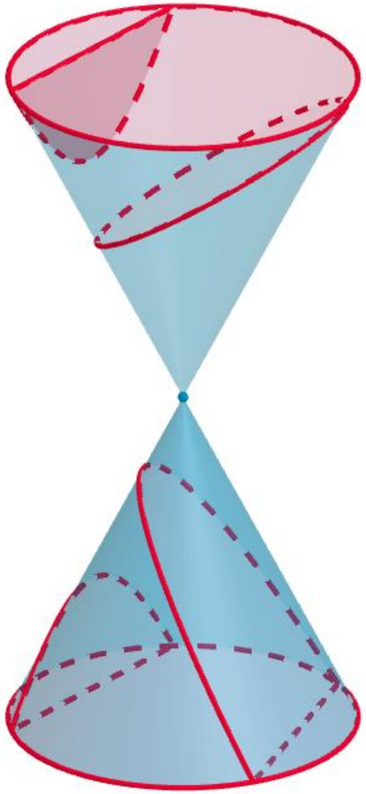
$\sqrt{x}$

Talen på tallinjen (Descartes)

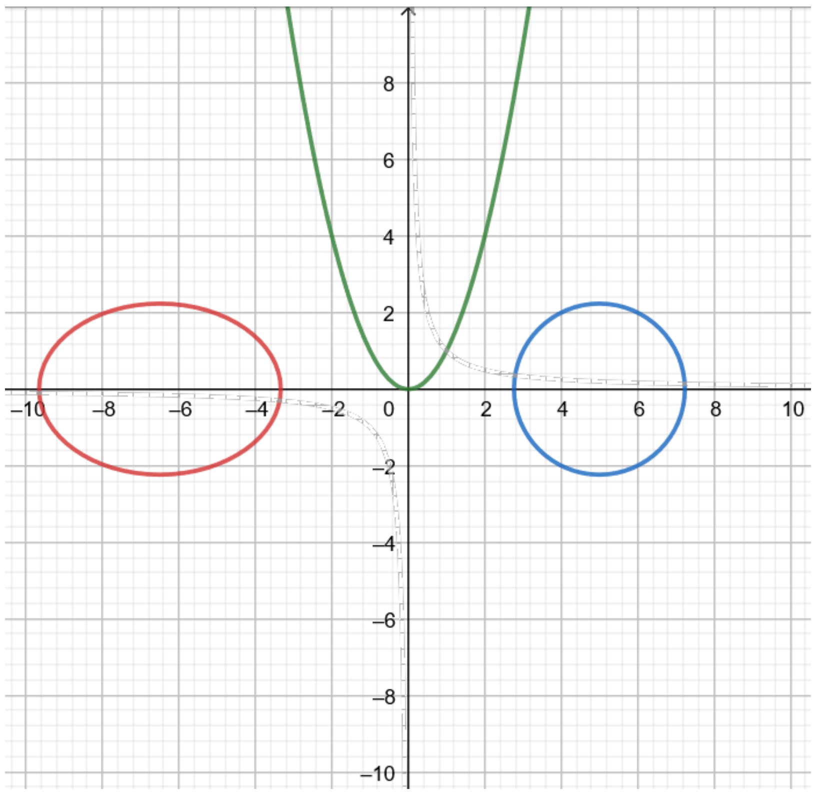
- Naturliga talen, bråktalen, irrationella talen, heltalen och decimaltalen fick på 1600-talet sin plats på tallinjen
- På tallinjen fick också 0 och de negativa talen sin moderna tolkning med hjälp av avståndsbegreppet



Kartesiska koordinaatsystemet

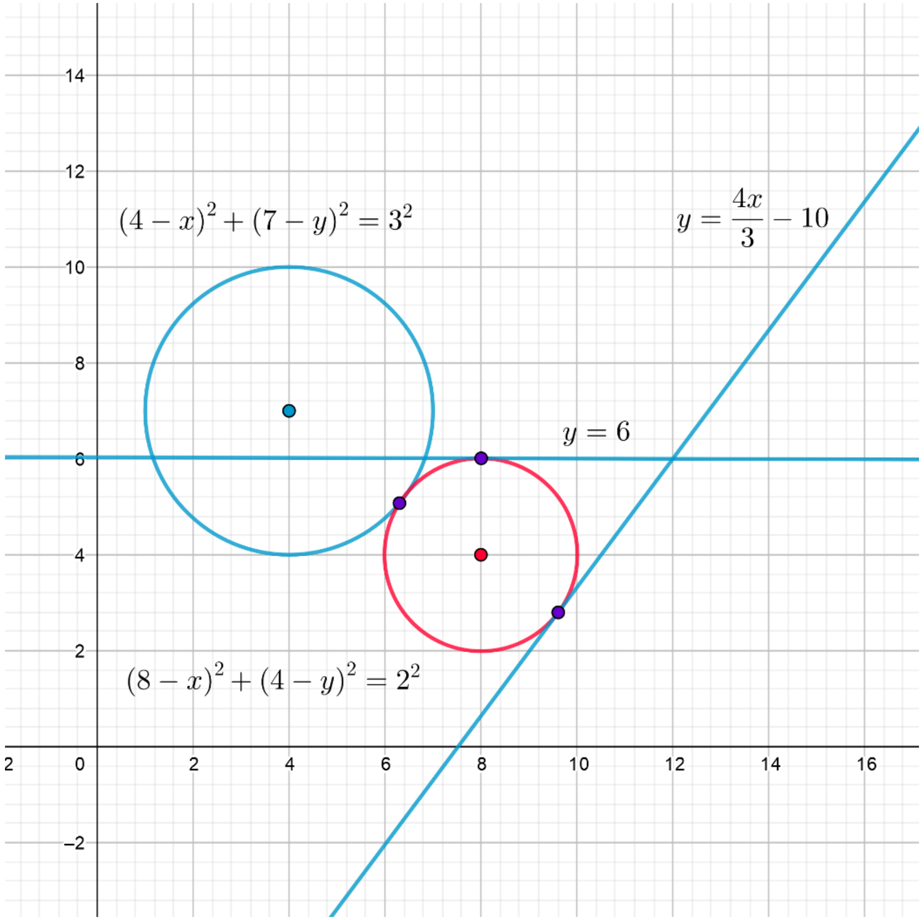


- Räta linjen och alla de klassiska koniska sektionerna hittade på 1600-talet sin plats i det tvådimensionella Kartesiska koordinaatsystemet
- De förvandlades till polynomfunktioners grafer 2000 år efter sin uppkomst!



Analytisk geometri (Descartes 1600-talet)

- Klassika geometriska problem fick nya analytiska bevis
- Descartes löste analytiskt t.e.x. Apollonius klassiska problem där uppgiften är att definiera alla cirklar som tangerar tre givna geometriska objekt



Tack!