



## YHTEISÖLLINEN OPPIMINEN MATEMATIIKASSA TEHTÄVÄTYYPIT

Teksti: Dimitri Tuomela, Oulun yliopisto

Tehtävätyypit perustuvat englantilaisen matematiikan didaktiikan professorin Malcolm Swanin ja hänen Shell Centre -keskuksen kollegoidensa työhön. Hän on tutkinut ja kouluttanut matematiikan yhteisöllistä ja tutkivaa oppimista vuodesta 1979. Tehtävätyyppien tavoitteena on saada oppilaat osallistumaan aktiivisesti, innostumaan matemaattisesta tutkimisesta ja tarttumaan haastavaan ajateltavaan. Aiheesta kannattaa lukea lisää Swanin kirjasta *Improving learning in mathematics: challenges and strategies* tai artikkelista *Collaborative learning in mathematics*

Teksti sisältää esimerkkejä seuraavista tehtävätyypeistä:

1. Luokittelu
2. Väitteet
3. Erilaiset esitysmuodot
4. Luominen ja vartiointi
5. Ratkaisun / päättelyn analysoiminen

Tämä materiaali on tuotettu osana LUMATIKKA-täydennyskoulutusohjelmaa.  
Ohjelman toteutuksesta vastaa LUMA-keskus Suomi -verkosto  
yhteistyökumppaneineen. Ohjelman rahoittaa Opetushallitus.



# LUOKITTELU

## LUOKITTELUN HYÖDYT

Luokittelun avulla voi monella tapaa rikastaa matematiikan oppimista. Luokiteltavat objektit voi olla valmiiksi annettuja, tai ne voidaan keksiä itse. Niitä voi olla vähän tai paljon. Luokittelu opettaa hahmottamaan eroavaisuuksia ja samankaltaisuuksia sekä perustelevaan. Samalla kehitetään syvempää ymmärrystä luokiteltavista objekteista. Oppilaille kannattaa muistuttaa, että luovuus palkitaan: keksitkö jonkin uuden objektin, joka sopii löydettyihin luokituksiin tai ei mihinkään niistä? Keksitkö uuden luokan? Ovatko jotkin luokat toistensa alaluokka?

## LUOKITTELU IMPROVISOIDEN

Pyydä oppilaita kirjoittamaan vihkoihinsa yksi tämänhetkiseen aiheeseen liittyvä objekti (luku, lauseke, funktio, yhtälö, kolmio, muoto, lukujono, kuvaaja, vektori, laskutoimitus...). Tämän jälkeen kaikki käyvät yhtäkaa kirjoittamassa omansa taululle, jonka jälkeen luokitellaan. Taululle voi ilmestyä myös kiinnostavia väärinkäsityksiä, joista kaikki voivat oppia. Voidaan myös kehottaa keksimään tahallaan virheellisiä objekteja ja katsoa huomaako kukaan virhettä (esim. yhtälön sijaan joku käykin kirjoittamassa lausekkeen).

Voidaan ottaa myös toinen kierros, jossa tavoitteena on keksiä jotain erilaista taululla oleviin verrattuna. Esimerkiksi, jos oppilaita pyydetään kirjoittamaan taululle jokin luku, niin yleensä kaikki kirjoittavat ensimmäisellä kierroksella positiivisia kokonaislukuja. Toki ensimmäiselläkin kierroksella usein löytyy jo esimerkiksi parillisia, parittomia, muilla luvuilla jaollisia, kaksinumeroisia, alkulukuja. Tämä on hyvä luovuuden lämmittelyharjoitus ja aktivoiva taukojumppa (oppilaat voivat jäädä seisomaan luokan eteen keskustelemaan taululle ilmestyneistä luvuista). Ensimmäinen tai toinen kierros voi olla myös kotitehtävänä, jolloin on enemmän aikaa miettiä ja käyttää luovuutta.

**ESIMERKKI** Oppilaita on pyydetty tuomaan taululle yksi lauseke ja yksi yhtälö:

<https://bit.ly/30hSPah>

# VÄITTEET

*Ovatko väitteet tosia, epätosia vai tilanteesta riippuen tosia? Perustele näkökulmasi! Voit tutkia erikoistapauksia, jotka puolustavat eri näkökantoja tai pyrkiä yleistämään väitteeseen liittyvää matemaattista ilmiötä.*

## MENETELMÄN HYÖDYT

Väitteiden käsittely kehittää argumentointitaitoja. Lisäksi se opettaa keksimään esimerkkejä ja vastaesimerkkejä päättelyn tueksi. Usein mielipiteitä jakavan väitteen käsittely lähtee vauhdikkaasti liikkeelle, jolloin oppijat saadaan temmattua haastavankin ajateltavan pariin ilman, että he ehtivät lannistua tehtävän haasteellisuudesta.

## VÄITTEET IMPROVISOIDEN

Mitkä ovat yleisiä virhekäsityksiä aiheessa, jota seuraavaksi käsittelet? Rakenna väite, joka kohdistuu yleiseen virhekäsityksen. Väitteet ovat hyviä silloin, kun ne jakavat mielipiteitä. On hyvä, jos ensimmäisenä mieleen tulevat esimerkkitaupaukset eivät kerro koko totuutta väitteen paikkansapitävyydestä.

**ESIMERKKI** Timo sai 15 % palkankorotuksen ja Jaana 10 % palkankorotuksen. Tällöin Timon palkka nousi enemmän kuin Jaanan.

## ERILAISET ESITYSMUODOT

*Tutki saman matemaattisen otuksen erilaisia esitysmuotoja. Mitkä esitysmuodot soveltuvat mihinkin tarkoitukseen parhaiten?*

## MENETELMÄN HYÖDYT

Samana matemaattisen idean erilaisten esitysmuotojen tutkiminen rakentaa yhteyksiä eri käsitteiden ja merkintätapojen välille. Siten oppilaiden on helpompaa soveltaa ideoita jatkossa monipuolisemmin.

## ERILAISET ESITYSMUODOT IMPROVISOIDEN

Pyydä oppilaitasi keksimään yksi esimerkki jokaisesta esitysmuodosta, joita käsittelette. Kyseiset esitysmuodot voi jakaa muille joko taululla tai mini-valkotauluilla. Oppilaiden tuotoksia voi luokitella ominaisuuksien perusteella tai sitten oppilaat voivat keksiä vastinpareja kullekin esitysmuodolle (esim. kuvaaja-yhtälö).

Jos haluat demonstroida käsitettä, löydät helposti erinomaisia valmiita videoita tai geogebra-appletteja googlettamalla käsitteen nimen englanniksi ja perään sana "geogebra" tai "explained". Esimerkiksi "area of circle geogebra" tai "area of circle explained". Nykyajan nuorille englanti ei ole ongelma ja vaikka olisikin, niin usein visualisoinnin kannalta välttämätöntä ei ole osata kieltä.

## LUOMINEN JA VARIOINTI

*Kokeile tehtävän luomista toisten ratkaistavaksi ja/tai tehtävän varioimista. Miten ideaa voisi hyödyntää sisällössä, jota seuraavaksi opetat?*

### MENETELMÄN VAIHEET

- 1) Tehtävän luominen
- 2) Jakaminen (esim. taululla, ryhmän nimi näkyviin!)
- 3) Taululla olevien tehtävien vertailu ja analysointi
- 4) Toisten tehtävien ratkaiseminen ja omassa tehtävässä neuvominen

### MENETELMÄN HYÖDYT

Parhaimmillaan tehtävä auttaa oppilaita ymmärtämään matematiikassa yleistä ja tärkeää ideaa käänteisistä laskutoimituksista ja prosesseista (doing and undoing). Esimerkiksi kertominen ja jakaminen kumoavat toisensa eri tavalla kuin lisääminen ja vähentäminen. Lisäksi herkästi totutaan liikkumaan vain yhteen suuntaan: esimerkiksi binomin neliön kaavaa osataan käyttää aukaisemiseen, mutta ei välttämättä muisteta hyödyntää tilanteessa  $x^2 + 12x + 36$ . Lisäksi menetelmällä on seuraavia hyötyjä:

- Saa oppilaat arvioimaan mitä he jo osaavat.
- Auttaa hahmottamaan millaisia erilaisia tehtävätyyppejä on olemassa.
- Valaisee tehtävän haastellisuuden vaikuttavia tekijöitä (luvut, rakenne, konteksti).
- Antaa oppijoille omistamisen iloa luomastaan matematiikasta.
- Antaa oppijoille itsevarmuutta kuvailla ajatteluaan.

### LUOMINEN JA VARIOINTI IMPROVISOIDEN

Voit pyytää oppilaita keksimään toisilleen tehtäviä ratkaistaviksi. Ideana on se, että tehtävän luominen ja ratkaiseminen ovat matemaattisesti käänteisiä prosesseja (ks. esimerkit taulukossa). Voit myös pyytää oppilaita valitsemaan jonkin tehtävän kirjasta ja muuttamaan jotakin asiaa siinä niin, että tehtävästä tulee luonteeltaan erilainen. Tässäkin voi kehottaa käyttämään luovuutta niin, että tehtävästä voi tulla jopa omituinen. Voihan olla, että sitä ei voisi edes ratkaista enää, mutta silloin täytyy selvittää, miksi näin on. Oppilaiden on hyödyllistä oppia kysymään "Entä, jos..." vähän kaikenlaisissa tilanteissa. Miksei jopa siinä määrin, että oppilaasi alkavat kutsumaan sinua "Entä, jos..." -opeksi?

LUOJA (DOING)	RATKAISIJA (UNDOING)
Laskee jonkin suorakulmion pintaalan ja piirin	Etsii alaan ja sopivan suorakulmion piiriin
Kirjoittaa yhtälön muotoa $y = ax + b$ ja piirtää kuvaajan	Yrittää löytää kuvaajan sopivan yhtälön
Kirjoittaa auki lausekkeen $(x+3)(x-2)$	Saattaa tekijämuotoon lausekkeen $x^2 + x - 6$
Kirjoittaa polynomin ja derivoi sen: $x^5 + 3x^2 - 5x + 2$	Integroii vastaavan funktion $5x^4 + 6x - 5$
Kirjoittaa viisi lukua 2, 6, 7, 11, 14 ja laskee niiden keskiarvon, mediaanin ja vaihteluvälin	Koittaa löytää viisi lukua, joille pätee vastaavat keskiarvo = 8, mediaani = 7 ja vaihteluväli = 12

## RATKAISUN TAI PÄÄTTELYN ANALYSOIMINEN

*Vertaile erilaisia ratkaisuja samaan tehtävään, järjestä päättelyn vaiheet oikeaan järjestykseen tai tutki syitä erilaisten virheiden taustalla.*

### MENETELMÄN HYÖDYT

Erilaisten ratkaisutapojen vertaileminen auttaa ymmärtämään, että ei ole yhtä oikeaa tapaa ratkaista tehtävä. Samalla se kehittää joustavaa ajattelua, eli kykyä pohtia, mikä ratkaisutapa on kussakin tilanteessa näppärin. Analysointitehtävät viestivät virheiden olevan luonnollinen osa oppimista ja ettei tehtäviin ole yhtä tiettyä oikeaa tapaa toimia.

### RATKAISUN TAI PÄÄTTELYN ANALYSOIMINEN IMPROVISOIDEN

Törmäät jatkuvasti luokassa kierrellessäsi ja kokeita tarkastaessasi eri tavoilla mielenkiintoisiin ratkaisuihin ja päättelyketjuihin. Miksetpä ottaisi kuvaa jostakin ovelasta tai virheellisestä ratkaisusta ja antaisi sitä anonyyminä toisen luokan analysoitavaksi?

Kokeiden jälkeen analysoikaa ihmeessä huolella kaikenlaisia erilaisia lähestymistapoja (virheellisiäkin) koetehtäviin. Ne ovat tehtäviä, joihin oppilailla on vahva tunneside ja tavallista enemmän kiinnostusta tietää, mikä niissä toimii ja mikä ei ja miksi.

Pyydä oppilaitasi pisteyttämään tehtävien ratkaisuja. Tämä kiinnittää väistämättä huomion perusteluihin ja siihen, mikä missäkin aiheessa lopulta on tai ei ole olennaista.