

K
U
R
S
S
I
M
O
N
I
S
T
E



LUMATIKKA2

VARHAISKASVATUS JA ESIOPETUS

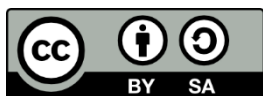
2019

ISBN XXXXXX

Toimitus: Martina Aaltonen

Kuvitus: Emilia Erfving

(c) Martina Aaltonen, Heidi Filppa, Ann-Catherine Henriksson, Salla Jansson, Anni Jyrinsalo, Jonna Kangas, Maria Larionova, Emilia Manninen, Eva Staffans



Tämä teos on lisensoitu Creative Commons Nimeä-JaaSamoin 4.0 Kansainvälinen -lisenssillä. Tarkastele lisenssiä osoitteessa <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>



LUMA-KESKUS SUOMI
LUMA-CENTER FINLAND
LUMA CENTRE FINLAND



Alkusanat

Tämän LUMATIikka-hankeen yhteydessä tuotetun kurssimonisteen tavoitteena on antaa työkaluja lapsilähtöiseen, ilmiöpohjaiseen ja havainnollistavaan matematiikan perustaitojen opetukseen päiväkodin arjessa. Kurssimonistetta on tarkoitus lukea yhdessä *Lelan matematiikkaseikkailu päiväkodissa*-kirjan kanssa.



Toivottavasti viihdyt seurassamme,

Martina Aaltonen, FT, Helsingin yliopisto (suunnittelutiimin vetäjä)
Heidi Filppa, FM, Oulun yliopisto
Ann-Catherine Henriksson, KT, Åbo Akademi
Salla Jansson, VEO, Helsingin yliopisto
Anni Jyrinsalo, KM, Helsingin yliopisto
Jonna Kangas, KT, Helsingin yliopisto
Maria Larionova, LuK, Helsingin yliopisto
Emilia Manninen, FM, LO, Oulun yliopisto
Eva Staffans, KT, Åbo Akademi
Inkeri Sundqvist, FM, HY+

Materiaalin on kuvittanut Emilia Erfving. Materiaalin syntyyn ovat myötävaikuttaneet myös Kirsi Tarkka Opetushallituksesta hänen antamansa haastattelun kautta sekä hankkeen koordinaattori Eveliina Hietakymi-Sandberg - kiitos!

Sisällysluettelo

Arjen matematiikka, s. 5
Aika, s. 9
Opetusta ohjaavat asiakirjat, s. 12
Mittaaminen, s. 15
Ajattelun kehittyminen, s. 20
Esimatemaattiset taidot, s. 24
Matemaattisen ajattelun kielentäminen, s. 29
Lukukäsite, s. 32
Alle 3-vuotiaiden matematiikka, s. 40
Matematiikkaa 3-5-vuotiaille, s. 45
Esikouluikäisten matematiikka, s. 51
Geometria, s. 56
Matemaattisten taitojen tukeminen, s. 60
Tilastot, s. 63
Ongelmanratkaisu, s. 67
Ohjelmointi ja algoritmit, s. 73
Matematiikka yhteiskunnassa, s. 77



Tutustu Lelaan ja Niksuun lukemalla *Lelan matematiikkaseikkailu päiväkodissa* kirjan ensimmäinen tarina *Kotkan lento - tarina siitä miten keinulauta saadaan keikkumaan*.

Arjen matematiikka

Jonna Kangas



Matematiikka käsitteenä herättää monelle meistä ajatuksen kouluvuosien pitkäpiimäisistä oppitunneista yksin kirjan ongelmanratkaisutehtävien edessä, tai toistamassa riviltä toiselle jatkuvia laskuja, joiden pedagoginen tarkoitus lie tukea oppilaan rutiinia laskutoimituksen suorittamisessa. Monilla opiskelijoistani muistot koulumatematiikasta ovat niitä vähemmän innostavia ja iloisia muistoja kouluoppimisesta. Pienten lasten matemaattis-looginen ajattelu limittyy kuitenkin koulukirjojen ja laskutehtävien sijaan heidän arkisiin havaintoihinsa, niihin liittyviin pohdintoihin ja lopulta tehtyihin ja todennettuihin johtopäätöksiin. Pienten lasten arjessa matematiikkaa koetaan, ei suoriteta, kaikilla aisteilla päivittäisten asioiden ja ilmiöiden kanssa toiminnassa.

Jokapäiväisiä tapahtumia tarkastelemme usein päiväjärjestyksen avulla. Aika on matemaattinen käsitys ja asioiden järjestykseen asettaminen auttaa pientäkin lasta paitsi hahmottamaan päivän kulkua varhaiskasvatuksessa, myös tukee ymmärrystä loogisesta järjestyksestä: aamupalan ja lounaan välissä tapahtuvia asioita lienevät usein leikit, ohjattu toiminta tai ulkoilu. Sen sijaan näitä toimintoja ei usein esiinny lounaan ja välipalan välissä. Sen sijaan esiopetuksessa päiväjärjestys voi olla monimuotoisempi, kun unen ja levon tarve ei ole enää se hallitseva tekijä lasten hyvinvoinnissa. Päivä vaiheiden järjestykseen asettamisen lisäksi järjestykseen voi asettaa myös vaattei-

ta, wc-rutiineja, leluja, taidetarvikkeita. Kun rutiini, tässä tapauksessa matemaattisesti ilmaisten järjestys, on tuttu, voidaan sen kanssa leikitellä ja hassutella. Jo kaksivuotiaasta alkaen lapset nauttivat ja auttavat empaattisesti, kun pehmokarhu pukeutuu hassussa järjestyksessä tai kun ruokailussa opettaja päättää aloittaa oman suun pesemisellä. Aika-käsitteen lisäksi arjen ilmiöihin liittyvät kaikki varhaiskasvatuksen matematiikkaan liittyvät sisäl-
töalueet, joita tällä kurssilla tarkastelemme.

Matematiikkaa on perinteisesti opetettu ensimmäisinä kouluvuosina, Suomessa myös esiopetuksessa, käsitteiden ja käsitteellistämisen kautta. Tämä perustunee Lisen Häggblomin malliin, jossa konkreettiset esineet, kokemusmaailma, puhuttu kieli sekä kuviosymboliikka ja kuvat muodostavat eräänlaisen ilmaisumatriisin tai kommunikaatioverkoston. Toisiaan tukien ja risti-riidattomasti ne mahdollistavat käsitteen tarkastelun ja sen avaamisen. Tässä mallissa lapsi on aktiivinen toimija, joka tulkitsee, tutkii ja luo käsitteen kansa toimiessaan. Esimerkkinä voidaan ajatella kolmioon tutustumisen kohdalla, että lapsilla olisi leikeissä konkreettisia kolmikulmaisia ja kolmion muotoisia esineitä, kolmioita etsittäisiin ympäristöstä ja kolmio -sanaa sekä symbolia käytettäisiin arjessa. Lapset saisivat vielä tehdä itse kolmioita muovailten, maalaten, kehollisesti liikkuen, yksin ja yhdessä.

Arjen matematiikka lähtee liikkeelle arjen havainnoista. Lapsilla on tallella taito pysähtyä ihmettelemään ja tutkimaan arkisia asioita. Muutokset ympäristössä ovat pienimille ainutkertaisia ja siksi ihmeellisiä. Harva kaksivuotias muistaa edellistalven ensilumen ja katukiveyksestä esille pistävä voikukka vasta ihmeellinen onkin. Havaintoja tehdään jatkuvasti, me aikuiset vain olemme havaintotulvasta selvitäksemme oppineet sivuuttamaan ympäristössämme tapahtuvat ja esiintyvät muutokset silloin, kun ne eivät ole meille relevantteja. Osallisuustutkimuksessa on viime vuosina painotettu paljon lapsen perspektiiviin asettumista ja ympäristön havainnointia lapsen silmin. Tämä tuottaa yhteisiä, jaettuja kokemuksia, joita voidaan lähteä pohtimaan ja joilla voidaan leikitellä. Kokemuksellisuus ja toiminnallisuus ovat tärkeitä linkittämään toisinaan abstraktejakin matemaattisia käsitteitä luontevaksi osaksi arkielämää.

Arjen ilmiöt voidaan varhaiskasvatuksessa ottaa tarkasteluun eheyttäen. Lumisateen ihmettely on samaan aikaan kielellistä (kuvailusanat), ympäristökasvatukseen ja liikuntaa liittyviä, mutta myös matemaattis-loogista ajattelua vaativia. Matemaattisen päättelyn herättäminen vaatii kuitenkin opettajilta myös pedagogista silmää ja matematiikan ilmiökentän mielessä pitämistä. Matemaattinen ihmettely sekä matemaattis-looginen ajattelu vaativat, että ilmiöitä pyritään nimeämään, vertailemaan ja niiden ominaisuuksia kuvaamaan eksakteilla ja tarkoilla ilmaisuilla. Vähän kuin lapselle, joka ei vielä puhu varhaiskasvatuksessaan käytettävää kieltä ikänsä vuoksi, toiste-

taan samoja sanoja ja käsitteitä uudestaan ja uudestaan, myös vanhemmille lapsille matemaattisen käsitteistön käyttöä pitää harjoitella.

Kesken liikuntatuokion, opettaja kerää muutamia palloja kasaan ja jonoon. Opettajan kysyessä mikä palloista on suurin, yksivuotias osoittaa palloa, kaksivuotias nimeää kaikki kuvassa näkyvät pallot ”tämä on iso, tämä on pieni, tämä on pieni ja tämä on pieni”. Komparatiivi ja superlatiivi ilmaantuvat Lummelahden mukaan puheeseen 3-4-vuotiaana. Kolmevuotias osaa jo havainnoida ja osoittaa sitä isoa palloa, kenties myös nimetä sen suurimmaksi. Neljä-viisivuotiaasta voi pyytää osoittamisen sijaan kuvailemaan ”isoin pallo on ensimmäinen jonossa tai isoin pallo on vasemmalla.” Kuusivuotiaalle tämä koko pallotehtävä rakennetaan eri tavalla. Pallot heitetään lattialla ja pyydetään muodostamaan jono, jossa pallot ovat suuruusjärjestyksessä.

Samankaltaisia harjoituksia, jossa matemaattista kieltä käytetään voi toteuttaa ulkona pihalla tai metsässä (koska viimeksi selvititte, mikä lätäkkö on syvin, pyörein, märin tai heijastavin) ja eteisessä odottelutilanteita voi hyödyntää pedagogisesti ohjaamalla lasten huomio arjen ilmiöihin. Pedagogisesti opettaja siis suuntaa lasten huomion ilmiöön tai asiaan. Luo tilanteen, jossa ilmiöstä keskustellaan ja pienimpien lasten kanssa siihen liittyviä osatekijöitä myös nimetään. Opettaja välttää selviä oikein-väärin kysymyksiä tai itsestään selvyyksiä, koska lasten osaamisen ja loogisen ajattelun taso voi vaihdella runsaasti ryhmän sisällä. Siksi kysymykseen mikä pallo on isoin ehdivät vastata vain nopeimmat ja kielellisesti taitavimmat lapset, tai jos vuoro annetaan jollekulle toiselle, osa lapsista turhautuu. Opettaja muistaa sanallistaa ja käsitteellistää havaittua ilmiötä, ja käyttää matemaattisesti tarkkaa kieltä.

Matematiikkaa on perinteisesti pidetty kielen ohella kognitiivisena ja älyllistä ajattelua vaativana tieteenalana tai kouluaiheena. Varhaiskasvatuksen matematiikassa on kuitenkin tärkeää muistaa moniaistisuus. Aistien käyttö on pienille lapsille luontaista ja he oppivat kaikilla aisteillaan, eli sensorisesti ja senso-motorisesti. Ihmisen aistielimet kehittyvät ennen kielellisen ymmärryksen kehittymistä jo ennen syntymää. Tuntoaisti ja siihen liittyvä taktuaalisuus on erityisesti alle 3-vuotiailla lapsilla tärkeä havaintojen ja kokemusten saamisen väline. Lapsi kokeilee muotoa, painoa, määrää, sileyttä tai karkeutta, ja tekee samalla geometriaan, mittaamiseen, lukumäärään ja suhdekäsitteisiin liittyviä havaintoja. Tuntoaistimuksen saamisessa lapsi on usein itse aktiivinen toimija: Hän koskee, tunnustelee ja kokeilee. Aikuinen voi tavoittaa lapsen maailman ja ohjata lapsen havaintoja, vaikka tuntoaistimuksen jakaminen voikin tuntua haastavammalta kuin kuulo- tai näköaistiin liittyvien havaintojen. Opettajan on myös tärkeää tuottaa lapsille tietoisia tuntoaistimuksia: Kokeillaan yhdessä, onko käpy raskas vai kevyt tai testataan, puristaako kumisaapas villasukka jalassa liiaksi.

Kuuloaistiin liitämme usein puhutun kielen ja sanalliset ohjeet sekä sanallistetut käsitteet. Aikuinen sanoittaa, nimeää ja tarjoaa käsitteitä lapsen käyttöön, antaa lapsen maistella ja kokeilla sanoja ja sitä, miltä ne ja niihin liittyvät havainnot kuulostavat. Pomppimisen ääni liitetään ilman matemaatiikkaakin palloon, mutta onko pomppiminen kaikkien pallojen ominaisuus tai kuulostaako pallon pomppiminen aina samalta. Aikuisten palloon liittyvät käsitteet ja niiden sanoittaminen auttaa lasta liittymään kulttuurisesti matemaattisloogisen päättelyn jatkumoon: Jos esine pomppii ja siinä ei ole kulmia, voimme (kenties) nimetä sen palloksi.

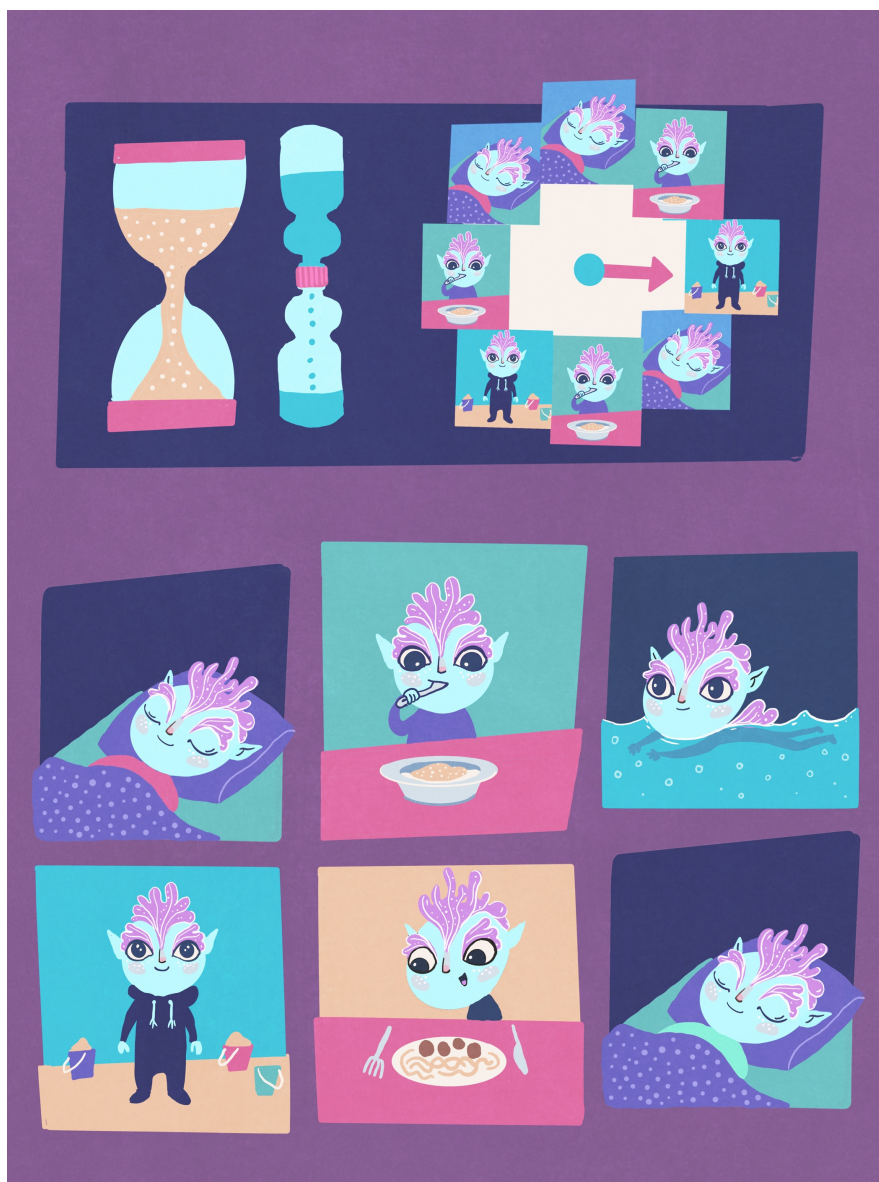
Näköaisti ja sen kautta muodostuva silmän ja käden koordinaatio tuottavat sekä paljon tietoa ympäristöstämme, että auttavat lasta siirtämään havaintojaan tuottamaansa ilmaisuun. Näköaistimuksia lapsi havaitsee jatkuvasti ympäriltään, taito suunnata havaintoja ja erottaa olennainen vaatii harjoittelua. Näköaisti on nopein aistimme ja aikuisina olemme oppineet luottamaan siihen yli muiden aistimusten. Esimerkkimme palloja voidaan havaita ympäristöstä, ja pienikin lapsi oppii varhain yhdistämään kuvakirjan pallosymbolin palloon (vaikka kuvakirjan pallosymboli ei pompi eikä edes ole joka suuntaan pyöreä). Kuvat ja niitä edustavat käsitteet eivät heti yhdisty pienen lapsen kokemusmaailmaan ja muihin aistikokemuksiin. Kuvallisen viestinnän hahmottaminen on kuitenkin toimintakulttuurissamme toimimiselle välttämätöntä: viestimme varhaiskasvatuksessa valtavan paljon kuvilla ja kuvasyμβoleilla, ja lapset sosiaalistuvat käyttämään niitä. Lasten tukeminen ja näköaistiin liittyvien havaintojen käsitteistäminen on tärkeää pedagogisesti. Myös maku ja hajuaistia voidaan matematiikassa leikkisästi hyödyntää

Näiden aistitoimintojen ja aistinvaraisten käsitteiden tarkastelu ja kokeminen luo edellytyksiä käsitteiden monipuoliselle hallitsemiselle ja edelleen myöhemmälle oppimiselle.

Linkki videoon: <https://youtu.be/QIRyEoclaXE>

Aika

Maria Larionova



Kaikki meistä tietävät, mitä aika on, mutta miten selittää lapselle, mitä aika on tai mitä tarkoittaa kohta? Ajan käsite on hyvin abstrakti käsite ja sen oppimisen helpottamiseksi se tulisi ankkuroida lapsen arkeen. Vasussa sano-taankin, että aikakäsitettä avataan esimerkiksi vuorokauden- ja vuodenaikoja havainnoimalla, eli tutkitaan ja havainnoidaan aikaa yhdessä lasten kanssa. Esiopsissa todetaan jo, että ajankäsitteitä, kuten joskus, eilen ja aamulla harjoitellaan opetuksessa. Tämän lisäksi pohditaan yhdessä aikajärjestystä esimerkiksi vuorokaudenaikoja havainnoimalla. Hyvin epämääräiset aikaan liittyvät käsitteet tulisi siis tuoda lähelle lapsen arkea ja käyttää niitä aktiivisesti erilaisissa tilanteissa. Esimerkiksi eri vuodenaikoihin voidaan liittää lapsille tuttuja tapahtumia kuten syntymäpäivä tai lumiukon teko.

Ajan luonne on jatkuva ja syklinen. Noin kolmevuotiaana lapsi alkaa jo hahmottamaan, että aika koostuu erilaisista tapahtumista yksi toisensa pe-rään. Tätä havainnollistetaan usein kuvakorteilla päiväkodin seinällä: yhden tapahtuman jälkeen tulee aina toinen tapahtuma ja siitä jatkumosta löyde-tään yksi kohta, jossa ollaan menossa juuri sillä hetkellä. Nähdään mitä on tulossa tulevaisuudessa ja mitä on jo mennyt. Ajan syklistyys tulee esille kello-naikojen, viikonpäivien ja kuukausien toistumisessa. Usein huomataan, että samat tapahtumat toistuvat päivästä toiseen samassa rytmissä. Esimerkiksi aamulla on aamupiiri, sitten käydään ulkona, syödään, nukutaan, leikitään, syödään, käydään ulkona ja iltapäivällä vanhemmat tulevat hakemaan ko-tiin. Tämä sama ohjelma toistuu mahdollisesti pienillä muutoksilla päivästä toiseen.



Ajan syklisen luonteen havainnoimiseksi voidaan lasten kanssa toteuttaa pieni projekti. Siihen tarvitaan pyöreä kello tai itse askarreltu kello esimerkik-si nauloista sekä narua. Havainnollistetaan yhtä tuntia pyöräyttämällä narua kerran kellon ympäri. Havainnollistetaan vastaavasti vuorokausi pyöräyttä-mällä narua kaksikymmentäneljä kertaa kellon ympäri, ja lopuksi solmitaan narun päät yhteen. Avataan iso naruympyrä. Se havainnollistaa sitä, että

vuorokaudessa on kaksikymmentäneljä tuntia ja sitä, mikä on vuorokauden suhde tuntiin. Laten kanssa voidaan pohtia kuinka paljon vuorokausiympyrä on isompi kuin tuntiympyrä. Jokaisen päivän aktiviteetin voi lisäksi koodata omalla värillään. Kun nukutaan, laitetaan kellon ympäri esimerkiksi sinistä lankaa, kun syödään punaista ja kun ulkoillaan keltaista, ja niin edelleen. Näin voidaan tutkia miten vuorokaudenaika jakautuu kaikkien näiden eri aktiviteettien kesken – kuinka paljon aikaa vuorokaudesta ihmiset nukkuvatkaan.

Havainnollistamaan aikaa voidaan toteuttaa lyhyen tai pitkän aikavälin projekteja. Voidaan tutkia muutosta, joka tapahtuu ajan myötä joko meissä ihmisissä tai esimerkiksi luonnossa. Voimme käydä esimerkiksi kuukauden ajan joka päivä samaan aikaan ottamassa samasta paikasta kuva ja havainnoida muutosta ympäristössä. Ottamalla koko vuoden ajan kerran viikossa kuva samasta paikasta ulkonavoidaan tutkia vuodenaikoja laajemmin laittamalla kuvat järjestykseen, ja havainnoimalla muutosta. Vuorokaudenaikoja voidaan puolestaan tutkia ottamassa useampia kuvia päivän aikana. Mitä enemmän ajan käsitteitä havainnollistetaan arjen keskellä, sitä helpompaa lapsien on oppia ja ymmärtää ne.

Ajankäytön hahmottamiseksi voidaan käyttää myös seuraavaa liikennevaloleikkiä. Leikin aluksi sovitaan kuinka paljon on leikkiaikaa, esimerkiksi viisi minuuttia. Kun vihreä valo palaa saa aloittaa aktiviteetin parissa. Kun valo muuttuu keltaiseksi, aika on loppumassa ja saa leikkiä vielä yhden minuutin. Kun valo on punainen, leikkiaika on loppu ja aletaan siivoamaan. Tämän jälkeen voidaan vaihtaa aktiviteettia ja tehdä sama uudestaan. Näin käsitteet kuten minuutti ja viisi minuuttia tulevat hyvin konkreettisiksi lapsille.

Linkki videoon: <https://youtu.be/q3lr2N3a1TM>

Tutustu aikaan liittyvään Lela-tarinaa: Auringolle kaulahuivi - tarina jossa aika kuluu hitaasti.



Opetusta ohjaavat asiakirjat

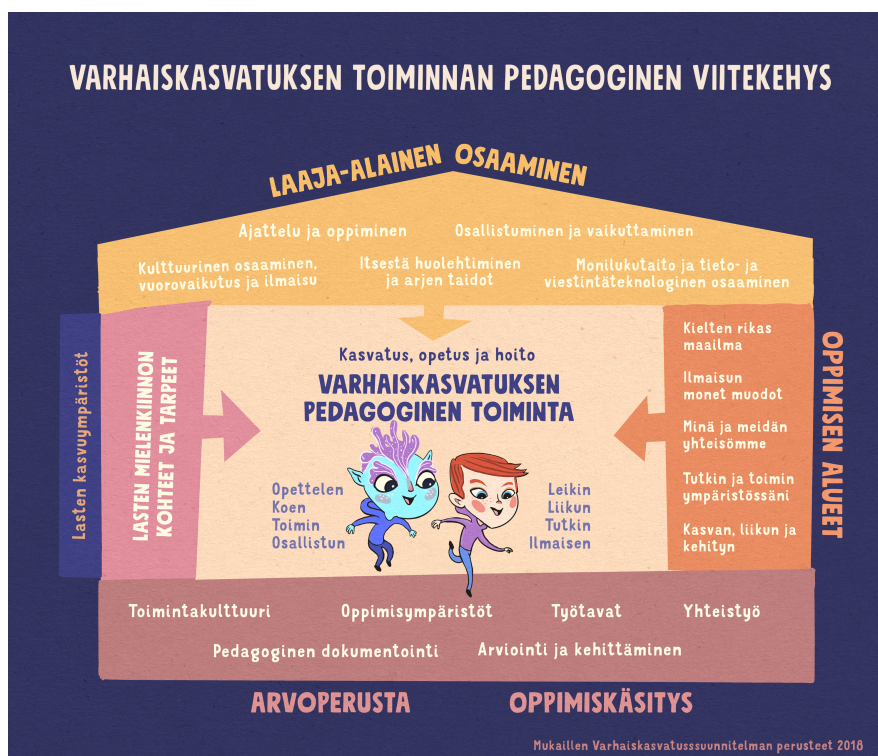
Tekstin on koonnut LUMATIikka-ohjelmaan kuvatun Kirsi Tarkan videohaastattelun pohjalta Anni Jyrinsalo



Opetushallituksen erityisasiantuntija Kirsi Tarkkaa haastateltiin varhaiskasvatussuunnitelman ja esiopetuksen opetussuunnitelman perusteisiin liittyvistä kysymyksistä, jotka kumpusivat LUMATIikka-ohjelman kevään 2019 VaKa-kurssilaisten pohdinnoista.

Kurssilaisia mietitytti VASU:n ja EOPS:n matematiikkaa käsittelevien osuuksien väljyys ja se, kuinka tämä väljyys jättää paljon liikkumavaraa paikalliselle suunnittelutyölle. Tähän Kirsi Tarkka kommentoi, että valtakunnallisten perusteiden on tarkoitus toimia viitekehyksenä, joka antaa suuntaviivat sisällön ja tavoitteiden osalta varhaiskasvatukseen ja esiopetukseen. Nämä valtakunnalliset perusteasiakirjat perustuvat lakiin ja ovat normittavia, eli ne velvoittavat varhaiskasvatuksen järjestäjiä toteuttamaan ne asiat, jotka näihin asiakirjoihin on kirjoitettu. Näin ollen mitä yksityiskohtaisempia ja absoluuttisempia listauksia valtakunnallisiin perusteisiin laaditaan, sitä enemmän velvoitetta tulee paikallisella tasolla varmistaa, että kaikki laaditut asiat toteutuvat.

Paikallisissa suunnitelmissa voidaan Tarkan mukaan pohtia tarkemmin valtakunnallisten perusteiden sisältöä ja täsmentää perusteissa linjattuja reunaehtoja. Perusteasiakirjoissa on jokaisen luvun päätteeksi koottu ne asiat, jotka päätetään tai kuvataan paikallisesti paikallisissa suunnitelmissa. Eli ne asiat, joihin paikallisella tasolla ainakin tulisi ottaa kantaa. Tämän paikallisen suunnitelman laatiminen on varhaiskasvatuksen ja esiopetuksen järjestäjien velvollisuus, mutta suunnitelmat voidaan laatia myös osallistavasti



esimerkiksi siten, että laadintavaiheessa henkilöstö ja eri toimijat yhdessä pohtivat mitä perusteissa laaditut asiat tarkoittavat käytännön työn näkökulmasta. Näin paikallisen suunnitelman kirjaukset saadaan mahdollisimman konkreettisiksi.

Paikallisen suunnittelutyön ja kehittämisen tueksi opetushallitus on tuottanut erilaisia tukimateriaaleja. Tukimateriaalien tarkoitus on avata perusteissa esiintyviä keskeisiä kysymyksiä, kuten osallisuus ja pedagoginen dokumentointi, käytännön esimerkkien ja toiminnan kautta. Tarkka lisää, että opetushallitus järjestää myös koulutuksia ympäri Suomea, ja että opetushallituksella on 170 varhaiskasvatuksen järjestäjän kattava varhaiskasvatuksen kehittämisverkosto. Tavoitteena on, että alueellisesti työestetään perusteissa olevia isoja kysymyksiä yhdessä ja luodaan sitä kautta yhteistä ymmärrystä ja yhdenvertaisuutta varhaiskasvatuksen laatuun.

Kysyttäessä lasta tukevasta arvioinnista VASU:n ja EOPS:n perusteiden näkökulmasta, Tarkka ottaa puheeksi Kansallisen koulutuksen kehittämiskeskukseen, Karvin, varhaiskasvatuksen laadun perusteet ja suositukset? asiakirjan, jossa on kuvattu arvioinnin perusteita ja lähtökohtia suomalaisen varhaiskasvatuksen eri tasoilla. Karvin suosituksissa on kuvattu varhaiskasvatussuunnitelman perusteista nousevia laadun indikaattoreita eli tavoite-tilan kuvauksia. Tarkan mukaan arviointi perustuu siihen, että asetetaan jo-

kin tavoite, joka puretaan kriteereiksi eli jollakin tavalla mitattavissa oleviksi asioiksi. Lopuksi yhdessä mietitään onko asetetut tavoitteet toteutuneet. Tässä kohtaa Tarkka ottaa puheeksi arvioinnin systemaattisuuden. Eli jatkuvasti havainnoidaan ja dokumentoidaan toimintaa yhdessä lasten ja huoltajien kanssa ja tarkastellaan toimintaa tavoitteiden valossa. Tarkka lisää, että arvioinnin ideana on nimenomaan kehittää toimintaa, eikä arvioida lapsia. Tavoitteita ei aseteta lapsille tai lasten oppimiselle, vaan niitä asetetaan ennen kaikkea henkilöstön omalle toiminnalle, pedagogiselle suunnittelulle ja esimerkiksi oppimisympäristön kehittämiseksi.

Lopuksi Tarkka vielä mainitsee, että perusteasiakirjat ovat aina yhteisen prosessin lopputulema ja niiden laatimisessa joudutaan aina tekemään myös paljon kompromisseja. Opetushallituksessa ajatellaan, että opetussuunnitelmien tulee elää ajassa ja myös kehittyä ajan mukana. Näin ollen paikalliselta tasolta saatu arviointitieto, niin risut kuin ruusutkin, ovat tärkeitä perusteasiakirjojen laatimisen prosesamisen ja kehittämistyön kannalta.

Mittaaminen

Heidi Filppa ja Emilia Manninen



Tässä tekstissä kerromme mittaamisen opettamisesta varhaiskasvatus- ja esiopetusikäisille lapsille. Esittelemme neljä eri vaihetta, jotka sisältyvät varhaiseen mittaamisen oppimiseen. Nämä vaiheet ovat mitattavan suureen tunnistaminen, suora vertailu, epäsuora vertailu ja mittaaminen.

Mittaaminen on yksi arjen matematiikan taidoista, jota voi hyvin harjoitella jo varhaiskasvatus- ja esiopetusikäisten lasten kanssa. Ennen varsinaiseen mittaamiseen tutustumista lapsi tarvitsee välittömiä kokemuksia mitattaviin suureisiin liittyen. Leikki on lapsille ominainen tapa tutustua ympäristöönsä ja yhdessä aikuisen tukemana harjoitellaan mitattaviin suureisiin liittyviä käsitteitä kuten pitkä keppi, lyhyt kynä, raskas kivi, kevyt helmi, suuri karhu, pieni karpänen, täysi kuppi, tyhjä ämpäri. On hyvä havainnoida, käyttääkö lapsi leikeissään käsitteitä oikein. Kielentämistä voidaan vielä tukea kysymällä: Sinulla on tyhjä ämpäri. Löytyykö hiekkalaatikosta toista tyhjää ämpäriä? tai Miksi se on lyhyt keppi? Löydätkö toisen lyhyen kepin?

Mitattavien suureiden tunnistaminen

Mitattavien suureiden tunnistamisen jälkeen havainnointi siirtyy luonnollisesti näiden suureiden vertailuun. Ensin on tärkeää, että vertailtavat objektit ovat konkreettisia, ne ovat kosketeltavissa, niitä voi liikuttaa ja tarvittaessa asettaa vierekkäin vertailtaviksi. Aluksi vertaillaan kahta objektia keskenään, sen jälkeen voidaan harjoitella useamman objektin suuruusjärjestykseen laittamista. Lapset voivat vertailla metsäretkellä kerätyistä kävyistä mikä on suurin ja mikä pienin. Alle kolmivuotiaille, senso-motorisessa vaiheessa oleville lapsille iso-pieni vertailu on riittävä. Onni on rakentanut legoilla Onnin ja iskän. Onni kuvailee rakennelmia niiden koon perusteella: pienempi on Onni ja isompi on iskä. Pieni lapsi vertailee aluksi esineitä tai asioita perustuen niiden visuaaliseen kokonaisuuteen eikä vielä tietyn mitattavan ominaisuuden eli suureen perusteella. Tyypillisiä ensimmäisiä vertailuun liittyviä sanoja ovat iso ja pieni.

Suora vertailu

Esioperationaalisessa vaiheessa, eli yleensä yli kolmivuotiaiden kanssa, aikuinen voi rikastuttaa vertailua kysymällä: Mikä kävyistä on pisin? Mikä lyhin? Entä mikä painavin tai kevyin? Miten sen voi selvittää? Kun pohjustetaan pituuden mittaamista, voidaan lähteä vertailemaan esimerkiksi: Kumpi junaradan palasista on pitempi? Kumpi paloista sopisi tyhjään kohtaan, jotta junaradasta tulisi valmis? Palojen pituusjärjestyksestä voidaan myös pohtia: Miten radan palat laitettaisiin pituusjärjestykseen? Yli 3-vuotiaalle lapselle voi antaa vaativamman, ongelmanratkaisutaitoja hyödyntävän tehtävän:

millaisia erilaisia vaihtoehtoja on tehdä junarata valmiiksi? Pihaleikeissä kei-
nulauta on oiva väline suurempien painojen vertailuun. Pienempien esineiden
painon vertailuun vaa'an voi rakentaa helposti henkarin ja pussien avulla.

Epäsuora vertailu

Kun mitattavia esineitä ei voida siirtää ja laittaa vierekkäin vertailtaviksi,
syntyy tarve mittaukselle. Aluksi harjoitellaan epäsuoraa vertailua hyödyn-
täen jotakin apuvälinettä. Jos halutaan selvittää kumpi kahdesta ikkunasta
on leveämpi, ei niitä voida siirtää vierekkäin vaan vertailu on tehtävä muulla
tavoin. Lapsilta voidaan kysyä olisiko heillä ideoita, miten saataisiin selvil-
le kumpi ikkunoista on leveämpi. Epäsuorassa vertailussa on hyvä käyttää
apuna riittävän suuria mittavälineitä suhteessa mitattaviin kohteisiin. Ikku-
noiden vertailussa voitaisiin käyttää pitkää langanpätkää, harjan vartta tai
vastaavaa. Lanka voidaan leikata yhden ikkunan levyiseksi ja verrata sitä
toisen ikkunan leveyteen, tai harjan varteen voidaan tehdä merkintöjä le-
veyksistä.

Epäsuorassa vertailussa voi välillä joutua käyttämään mielikuvia, sillä
kaikkia kiinnostavia kohteita ei voi nähdä ja koskea. Esioperationaalisessa
vaiheessa olevat lapset pystyvät jo jonkin verran hyödyntämään mielikuvia
ajattelun tukena. Esimerkiksi lapsia voi mietityttää kumpi on isompi: koira
vai käärme? Lapsi voi vastata tähän, omien mielikuviansa perusteella, et-
tä ”käärme on isompi, koska se on pelottava”. Kun lapselle näytetään kuvat
koirasta ja käärmeestä, lapsi voisi vastata, että ”koira on isompi, sillä se on
ylempänä ja käärme pötköttää maassa”, tai ”koira saattaa näyttää isommal-
le, kun käärme on niin matala. Käärme voi olla kuitenkin sykkyrällä. Sitten
kun se luikertelee, se onkin pitempi.” Usein pelkkä iso-pieni vertailu ei riitä
tai se on haastavaa määritellä, sillä ympäröivä maailmamme on kolmiulottei-
nen ja siksi on usein kuvailtava tarkemmin vertailtavia ominaisuuksia. Koira
on käärmettä korkeampi, mutta käärme on koira pidempi. Ei siis välttä-
mättä voida sanoa suoraan, että toinen olisi toista isompi. Joskus pituudesta
puhuttaessa voidaan tarkoittaa leveyttä tai korkeutta.

Mittaaminen epästandardeilla mittayksiköillä

Mittaamiseen liittyy kaksi asiaa, jotka on hyvä opettaa erikseen: mittaami-
sen periaate ja mittayksikkö. Varhaiskasvatuksessa ja vielä esiopetuksessa-
kin keskitytään harjoittelemaan mittaamisen periaatetta käyttämällä epä-
standardeja mittayksiköitä. Standardimittayksiköitä harjoitellaan kouluvuo-
sien aikana, joten niiden käyttöön ei ole kiirettä. Standardeilla mittayksiköil-
lä tarkoitetaan esimerkiksi metriä, kilogrammaa ja sekuntia. Epästandardi

mittayksikkö voi olla mikä tahansa väline, jota käytetään mittaamisessa ja usein sen valinta kannattaa antaa lapselle. Se voi olla vaikkapa langan pätkä, kynä, lapsen kämmen, kirja, omena, pikkuauto, laulu tai ämpäri.

Leipominen ja ruuanlaitto ovat tietysti yksiä hyvin arkisia, jokapäiväisiä toimintoja, joissa tarvitaan mittaamisen taitoja. Ohjeissa on usein standardimittayksiköin ilmoitettu tarvittavien ainesosien määrä, mutta aluksi voi puhua desilitran mitan sijaan pelkästä mitasta. Kun tarvitaan 3 desilitraa jauhoja, lapsi voi laittaa kulhoon kolme mitallista jauhoja. Samalla voi tulla harjoitelleeksi puolikkaan käsitettä, jos vaikkapa sokeria on ohjeessa puoli desilitraa, jolloin sitä mitataan puoli mitallista. Myös ohjeet, joissa käytetään mittavälineenä lasia tai kuppia, kuten perinteisessä sokerikakkupohjan ohjeessa, ovat hyviä mittaamisen harjoitteluun.

Mittaustulos

Mittaustulos kertoo, kuinka monta kertaa käytetty mittayksikkö sisältyy mitattavaan kohteeseen. Kun mitataan pituutta, mittaväline asetetaan alkamaan kappaleen tai esineen reunasta. Jos mittavälineitä on useita käytettävissä, seuraava väline laitetaan edellisen perään ilman, että ne menevät limittäin tai päällekkäin eikä niiden väliin saa myöskään jäädä tyhjää tilaa. Jos mittavälineitä on vain yksi käytössä, voidaan mitattavaan objektiin merkitä kohta, johon mittaväline päättyy ja josta se siirretään jatkumaan. Näin jatketaan, kunnes mitattavan kappaleen toinen pää tai reuna tulee vastaan. Mittaustulos esitetään perinteisesti symbolisena lukuna, mutta pienten lasten on paljon helpompi käsitellä visuaalista ja taktiilista esitystapaa. Esimerkiksi lapsen pikkusormi on yhtä pitkä kuin kolme peräkkäin asetettua xylitol-pastillia.

Ennen mittauksen suorittamista on hyvä pohtia yhdessä mittaustuloksen suuruusluokkaa. Riittääkö kaksi kämmentä peittämään kirjan kannen vai tarvitaanko kaverinkin kämmenet? Tilavuuteen tai vetoisuuteen liittyvä ongelma voisi olla seuraava: iso saavi täytetään vedellä tai hiekalla ja valittavana on joko suuri ämpäri tai pienempi hiekkaleluämpäri, jolla saavi tulisi täyttää. Kumpi ämpäri kannattaa valita? Kun lapset ovat pohtineet ongelmaa, kokeillaan saavin täyttämistä ulkona. Tarvittavien ämpäreiden määrää voidaan vertailla niin, että kaikki täyttämiseen tarvitut ämpärit jätetään saavin viereen. Tällöin ei välttämättä tarvitse laskea ämpäreiden lukumääriä vaan pelkkä vertailu enemmän-vähemmän riittää. Kun lapsi saa useita, monipuolisia kokemuksia mittaustuloksen arvioinnista ja mittaamisesta, arvioinneista tulee pikkuhiljaa tarkempia ja lapsi oppii hahmottamaan erilaisten suureiden suuruusluokkia. Arvioinnin taitoa tarvitaan lapsenkin arkielämässä hyvin usein: riittääkö yhdestä maitopurkista lasilliset kaikille kolmelle lapselle,

mahtuvatko kaikki rakennuspalikat kuorma-auton kyytiin tai jaksatko kantaa kaikki lelut yhdellä kertaa laatikkoon.

Sama kohde kannattaa mitata useammalla erikokoisella mittavälineellä, jotta lapsi saisi erilaisia kokemuksia mittayksiköistä ja niiden vaikutuksesta mittaustulokseen. Oman kehon osien mittaaminen on lapsista mielenkiintoista. Tässä kannattaa hyödyntää parityöskentelyä ja antaa lapsille vapaat kädet mittayksikön valintaan. Mittaustulokset voivat olla esimerkiksi seuraavanlaisia: käsivarsi on yhtä pitkä kuin kolme jalkaterää tai seitsemän pikkuautoa.

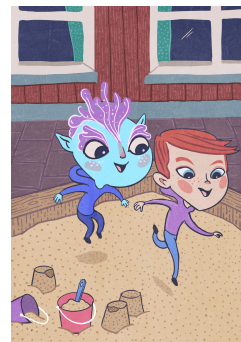
Mitattavia suureita

Alle kouluikäisille lapsille sopivia mitattavia suureita ovat pituus, paino ja vetoisuus. Ne ovat yksiulotteisia suureita, jolloin niiden arviointi, vertailu ja mittaaminen onnistuu lapsilta. Konkreettisen työskentelyn lisäksi yhtenä työtapana voi hyödyntää piirtämistä, siten, että pyytää lasta vaikkapa piirtämään esineen, johon mahtuu enemmän vettä kuin juomapulloosi tai lasiisi. Kuvia voidaan leikata myös mainoslehdistä.

Pinta-ala sen sijaan on kaksiulotteinen suure, ja sen vuoksi haastavampi harjoiteltavaksi. Siihen voi tutustua peittämällä erikokoisia alueita laatoittamisen periaatteella. Laattoina voidaan käyttää jalkapohjia, kämmeniä, paperilappuja tai geometrisia kuvioita. Aika on abstraktina käsitteenä haastava mittaamisen kohde, mutta siihen voi tutustua pohtimalla mitä tietystä ajassa ehtii tehdä tai kuinka monta kertaa ehtii toistaa oman nimensä pukiessa vaatteita. Lämpötila on myös yksi mitattava suure, mutta negatiiviset luvut tekevät siitä haasteellisen. Lämpötilan mittaamisen sijaan voi keskittyä lämpötilojen tulkitsemiseen ja havainnointiin.

Linkki videoon: <https://youtu.be/g4YFlj8V63s>

Tutustu mittaamiseen liittyvään Lela-tarinaan: Sadantuhannenmetrin loikka - tarina pituuden mittaamisesta.



Ajattelun kehittyminen

Jonna Kangas



Lasten tapaa ajatella sekä heidän ajattelunsa kehittymistä on pyritty pitkään määrittämään ja luokittelemaan aikuisten toimesta ja aikuisten logiikalla.

Senso-motorinen vaihe

Piaget'n mukaan lapsen ajattelun kehittyminen riippuu hänen ikävuosistaan. Esimerkiksi sensomotoriselle vaiheelle on tyypillistä, että lapsi toimii ennen kuin ajattelee, kokeilee kehollisten liikkeiden kautta ongelmanratkaisua ja uskoo havaintojensa olevan totta.

Sensomotorisella tasolla lapsi havainnoi ja tutkii ympäristöään ja luo aktiivisesti siinä toimien vähitellen käsityksen siitä, että esineet ja asiat (objektit) hänen ympärillään ovat hänestä irrallisia. Tutti esimerkiksi ei ole kiinteä osa yksivuotiaista, mutta joutuu helposti hukkaan, koska lapsi ei muista mihin sen jätti tai huomaa tutin putoamista. Sensomotoriselle tasolle on perinteisesti pidetty tyypillisenä sitä, että se mitä lapsi ei voi nähdä, kuulla ja koskettaa, ei ole olemassa hänelle. Vielä noin kymmenen vuotta sitten neuvola kehotti vanhempia laittamaan lapsen mielilelun piiloon taskuun ja katsomaan kellosta, kuinka pitkään noin 18 kuukauden ikäinen vielä muisti lelun olemassaolon. Tämä näkemys ei kuitenkaan todellisuudessa ota huomioon ajatteluun liittyvien lisätoimintojen, kuten muistin, motivaation ja lapsen suuntautumisen kehitystä. Lelun piilottelu sekuntikellon kanssa ei myöskään

mahdollista lapsen osallisuutta ja uteliaisuutta, vaan asettaa lapsen tutkimuskohteen (objektin) asemaan.

Sensomotorinen vaihe päättyy kielen, ajattelun kielen, mutta myös puheen kielen, kehittymiseen. Tämäkin määritelmä on ongelmallinen, koska moni alle yksivuotiasikin vaikuttaa ymmärtävän puhetta, seuraavan mielenkiinnolla loruja ja lauluja, ja jakavan niiden välittämiä merkityksiä, vaikkei vielä itse tuottaisi puheen määritelmiä ympäristöstään. Lapsi myös havainnoi tarkkaan ympäristöönsä ja pyrkii tuottamaan itselleen ja lähellä oleville ihmisille merkityksiä tekemistään havainnoista. Pienikin lapsi tarttuu, ojentaa hymyillen, leikkii piilotusleikkiä ja huomaa, kun ympäristössä tapahtuu muutoksia.

Jos Piaget sanoo, että kaksivuotiaan tyypillinen toiminta edustaa sensomotorista vaihetta, aikuinen näkee lapsen vain tämän rajoitusten kautta eikä huomaa, vaikka tämä kyseinen lapsi olisikin jo pystyvä yhdistelemään havaintojaan esioperationaalisella tasolla.

Esioperationaalinen vaihe

Esioperationaalinen vaihe liitetään perinteisesti leikki-ikäisten eli 3-5-vuotiaiden lasten ajattelun ja kognitioiden kehittymiseen. Vaiheeseen on ajateltu perinteisesti siirryttävän, kun lapsi alkaa hahmottaa symboleiden tarkoittavan jotain tiettyä merkitystä. Kuvien ja kuvasymboleiden käyttö on kuitenkin yleistä jo varsin pienten lasten päiväkotiryhmissä ja lapset tunnistavat heille merkitykselliset symbolit, kuvat ja niiden merkitykset aiemmin kuin osaavat niistä kertoa. Esioperationaalisessa vaiheessa lasten ajattelu vaikuttaa olevan sekä sidoksissa näköhavaintoon ja hyvin konkreettista eli esineet ja ilmiöt ovat pysyviä, ajattelu maagista ja egosentristä eli vain oma näkökulma osataan ottaa huomioon. Tämä liittyy sekä ymmärtämiseen, että toisen ihmisen mielen sisältöön ja havaintoon siitä, että toinen voi ajatella eri tavalla kuin itse.

Nykytiedon mukaan lapset ovat taitavampia kuin Piaget oletti ja erityisesti sosiaalisten taitojen ja empatian oppimisen osalta sekä havainnointitaitoiltaan osalta lapset ovat pystyvämpi monimutkaiseen ajatteluun ja päätelyyn, vaikkeivat vielä sanoittaisi ajatteluaan loogisesti.

Konkreettisten operaatioiden vaihe

Konkreettisten operaatioiden vaihe on perinteisesti liitetty kouluikänsä. Vanha nimitys varhaiskasvatusikäisistä leikki-ikäisinä kuvaa osuvasti tätä ajattelutapaa ja ryhmittelee lapset leikkiviin päiväkotilapsiin ja vakavasti otettaviin koululaisiin. Nykyisen ymmärryksen mukaan jaottelu ei kuitenkaan ole

myöskään tässä vaiheessa näin mustavalkoista.

Konkreettisia operaatioita ovat ajattelun muuttuminen aikaisempaa loogisemmaksi ja konkreettisemmaksi. Sadunomaisuus väistyy ja lapset alkavat vaatia ilmiöille todenmukaisia selityksiä. He ovat kiinnostuneita säännöistä, olivat ne sitten pelien ja leikkien sääntöjä, ryhmän kaverisääntöjä tai kirjoittamattomia toimintakulttuuriin liittyviä sääntöjä, ja oppivat ohjaamaan omaa toimintaansa ikään kuin säännöt olisivat konkreettisia rajoja heidän toiminnalleen. Lapset ymmärtävät syy-seuraussuhteita ja käsitteiden hierarkioita.

Siirtyminen tasolta toiselle tapahtuu Piaget'n mukaan kognitiivisten konfliktien kautta, jossa lapsi joutuu kognitiivisesti haastavaan tilanteeseen, jossa aiemmin totuttu malli ei enää päde.

Piaget'n kognitiivisen konfliktin käsitettä voidaan havainnollistaa niin sanotulla säilyvyyskokeella. Lapselle näytetään muovailuvahasta muotoiltua möykkyä. Kun siitä muotoillaan tanko, alle varhaiskasvatusikäinen sanoo vaistomaisesti siinä olevan vähemmän muovailuvahaa, kuin pallossa, koska se on ohuempi.

Muovailuvahan määrän pysyvyys säilyvyyskokeissa

Lapsi, jonka havainnointi edustaa sensomotorista vaihetta, ei luultavasti ole kiinnostunut määrästä vaan itse muovailuvahan kokeilemisestä ja koskettamisesta, eikä kysymys enemmän vai vähemmän, ole hänelle vielä mielekäs. Kun vahaa muotoillaan edelleen ja siitä tehdään yhä ohuempi ja pitempi tanko saattaa esioperationaalisessa vaiheessa oleva lapsi sanoa, että vahaa on taas enemmän, sillä tanko on pitkä. Konkreettisten operaatioiden vaiheessa lapsen ajattelussa on vakiintunut jo käsitys määrän, tässä tapauksessa muovailuvahan määrän, pysyvyydestä ja hän osaa määritellä, että vahaa on yhtä paljon, mutta se on muotoiltu ohuemmaksi.

Perinteisempi esimerkki tästä on tilanne, jossa lapsille näytetään lasi täynnä vettä ja vesi laitetaan sitten kapeampaan mutta korkeampaan lasiin. Koska pinta on korkeammalla, vettä näyttää olevan enemmän. Lapsi siis tekee päätelmiä esioperationaalisessa vaiheessa yhden ominaisuuden, pituus, paksuus tai korkeus, perusteella ja vertailee havaintojaan tämän avulla. Myös arkiset havainnot tukevat tällaista ajattelua. Ei ole mielekästä kiistellä siitä, kenen hanskat ovat ulkoilun jälkeen märemmät tai kenen viikonloppu on ollut kaikkein mukavin. Vertailusanoja käytetään siis arjessa myös ei-loogisesti. Lapsen käsitemaailmaa kuvaa vielä usko muutokseen, eikä lapsi hahmota, että jonkin muuttaminen ei tarkoita muutosta olemassa olevan aineen määrässä.

Vielä kriittisemmin herää kysymys siitä, säilyykö tapa havainnoida ja ko-

kea ympäristöä ja vuorovaikuttaa sen kanssa myös vanhempana, ja rajaa-ko tapamme kommunikoida yksinomaan puhutun kielen avulla liikaa lasten tapaa ilmaista luomiaan merkityksiä, havaintojaan ja loogisia päätelmiään. Vaikka taiteessa hyväksymme luovan ja monimuotoisen ilmaisemisen, matematiikasta ja loogisesta päättelystä vaadimme lapsia liian varhain kuvaamaan ja käsitteistämään ilmiöitä yksinomaan kielellisesti. Näyttämisen, kokeilemisen ja tekemisen tulisi olla halki koko varhaiskasvatuksen tapa ja mahdollisuus kommunikoida oivalluksia ja ajatuksia.

Linkki videoon: <https://youtu.be/FzUnLMyLFuw>

Esimatemaattiset taidot

Maria Larionova



Esimatemaattiset taidot voidaan jakaa kuuteen ryhmään, jotka ovat luokittelu, vertailu, jonot, muutoksen havaitseminen, käsitteet kuten enemmän, vähemmän ja yhtä monta sekä avaruudelliset suhdekäsitteet. Varhaiskasvatussuunnitelman sekä esiopetuksen opetussuunnitelman perusteiden mukaan näitä esimatemaattisia taitoja tulisi harjoitella muun muassa lapsen erilaisissa arjen tilanteissa sekä liikuntaleikkien avulla.

Luokittelu

Luokittelun avulla lapsi oppii kyvyn tarkkailla erilaisten asioiden ja esineiden ominaisuuksia. Lapsi huomaa esimerkiksi, että kumisaappaat ovat punaiset ja ne säilytetään valkoisella hyllyllä, kun taas tossut ovat mustat ja ne ovat omassa laatikossa. Lapset luokittelevat asiat ja esineet taitonsa ja kokemuksensa mukaan ja ne voidaan luokitella monella eri tavalla. Niin kauan kuin lapsi osaa perustella luokittelutavan, se on oikea, ja aikuisen tulisi kannustaa lasta etsimään monia muita luokittelumahdollisuuksia.

Esimerkiksi jos lelut on jaettu autoihin ja nukkeihin, niin voidaanko ne kenties jakaa vielä värin mukaan tai koon mukaan. Luokittelua voi harjoitella myös toiseen suuntaan: luokitteluominaisuus on jo päätetty ja lapsen tulisi päätellä, mikä ominaisuus on kyseessä. Tämä tulee esille esimerkiksi Hallitsija -päättää -leikissä. Siinä aikuinen päättää millä ominaisuudella lapset pääsevät kulkemaan portista, ja lopuksi lasten tulisi arvata, mikä ominaisuus oli kyseessä; miksi kaikki eivät päässeet portista läpi? Tätä leikkiä on helppo muokata haastavammaksi esimerkiksi, jos ryhmittelyn peruste on yksityiskohtaisempi.

Vertailu

Vertailun avulla asetetaan järjestykseen asioita ja esineitä jonkin tietyn ominaisuuden perusteella. Arjessa vertailemme asioita jatkuvasti ja käytämme siihen kaikkia aisteja. Vertailun perusteena voi olla mitattavien ja havaittavien ominaisuuksien lisäksi lapsen oma mielipide. Jotta lapsi oppisi hahmottamaan asioiden ja esineiden ominaisuuksia, aikuisten tulisi ohjata lapsia monipuoliseen asioiden vertailuun. Alle 3-vuotiaiden lasten kanssa keskitytäänkin nimenomaan ympäristön erilaisten ominaisuuksien hahmottamiseen. Retkellä metsään voidaan yhdessä etsiä esimerkiksi jotain pehmeää tai pitkää. Tällöin lapsi tulee vertailleeksi esineiden ominaisuuksia toisiinsa. Vähän vanhempien lasten kanssa esineitä vertaillaan toisiinsa ja nimetään ominaisuuksia ja esiopetuksessa esineet osataan laittaa jo järjestykseen. Järjestyksestä sitten tutkitaan molemmista suunnista käyttäen vertailun käsitteitä kuten pienin, suurin, pienempi ja suurempi. Vertailua voi harjoitella myös esimer-

kiksi äänien avulla. Tähän tarvitaan erilaisia lasi-, muovi ja metallipurkkeja ja pieniä esineitä. Tiputetaan esineitä purkkeihin tai muillekin pinnoilla ja vertaillaan syntyviä ääniä. Lopuksi lapset laittavat silmät kiinni ja yrittävät tunnistaa mikä tavara tiputettiin purkkiin. Entä mitä, jos ei kuulu mitään ääntä?

Jonot

Jonoihin liittyy säännönmukaisuuksien havaitsemista, sarjoittamista ja järjestämisen. Säännönmukaisuuksien etsimisessä ja hahmottamisessa tulisi hyödyntää arjen leikkutilanteita. Näin lapsi harjoittelee tunnistamaan sarjoja ympäristöstä. Leikin lomassa aikuinen voi rakentaa leluista helpon sarjan, jota lapsen kanssa tutkitaan, luetaan ääneen ja pohditaan, miten se tulisi jatkaa. Esiopetusiässä tavoite olisi, että lapsi pystyisi jo löytämään sarjan aloittavan mallin. Malli tarkoittaa sarjan ensimmäistä jaksoa, joka toistuu samanlaisena. Lisäksi lapsen tulisi itse osata luoda sarja. He voivat esimerkiksi luoda toisilleen sarjat ja yrittää tunnistaa toistensa sarjoista aloittavan mallin. Eriyttämiseksi valmista sarjaa voidaan vaikeuttaa lisäämällä siihen ominaisuuksia. Varhaiskasvatuksessa sarjoissa käytetään kaksi tai enintään kolme tekijää, esimerkiksi sininen-punainen-sininen-punainen. Esiopetuksessa sarjaan voidaan jo lisätä esimerkiksi eri kokoisia esineitä. Myös sarjan johonkin kohtaan voidaan tehdä virhe ja annetaan lapselle tehtäväksi virheen löytäminen ja korjaaminen.

Muutoksen havaitseminen

Joka hetki lapsi tekee havaintoja ympäristöstä, mutta havaintojen taso vaihtelee ja lasten tehdessä erilaisia havaintoja ympäristöstä lapset havainnoivat eri asioita. Aikuisten tulisi aktiivisesti ohjata lapsia havainnoimaan ympäristöstä löytyviä yksityiskohtia. Tämä edesauttaa kokonaisuuksien hahmottamista. Tätä voi harjoitella monilla leikeillä, joissa tapahtuu jokin muutos, joka tulisi löytää. Tässäkin voimme käyttää kaikkia eri aisteja. Esimerkiksi kun yksi lapsi menee muiden eteen, muut yrittävät muistaa jokaisen yksityiskohdan ja kun muut lapset eivät näe, edessä oleva lapsi muuttaa omassa asennossa tai vaatetuksessa jotain ja muut yrittävät arvata, mikä muutos on tapahtunut. Tai käyttäen tuntoaistia lasten tulisi tunnustelemalla arvata, mikä esine on poistunut pussista. Alun perin pussissa on jonkun verran erilaisia esineitä ja lapsi tunnustelee pussia, myöhemmin siitä otetaan yksi esine pois, nyt lapsen pitää muistaa mikä esine puuttuu.

Lukumäärien vertailu

Lukumäärän vertailussa käytetään käsitteitä kuten enemmän, vähemmän ja yhtä monta. Lukumäärän vertailu on konkreettista ja välineet helpottavat vertailua. Se ei ole sama asia kuin lukujen vertailu, sillä lukujen vertailu on abstraktista ja sitä opiskellaan vasta perusopetuksessa. Lukumäärän vertailussa käsitteitä tulisi käyttää samaan aikaan, sillä käsite *vähemmän* on yleensä haasteellisempi. Esimerkiksi, jos yhdelle pupulle ei riittänyt porkkanoita niin tällöin pupuja on enemmän kuin porkkanoita ja porkkanoita vähemmän kuin pupuja. Ennen esiopetusta ei tarvitse laskea tai selvittää kuinka paljon enemmän tai vähemmän jotain on, vaan vertailu on visuaalista vertailua. Esiopetuksessa lukumäärän vertailuun käytetään strategioita kuten pareiksi yhdistämistä ja pois ottamista. Esimerkiksi jokaiselle pupulle voidaan etsiä oma porkkana ja sitten selvittää, kuinka monta pupua jäi ilman porkkanaa tai kuinka monta porkkanaa jäi yli. Akvaariossa voi olla monta erilaista kalaa ja halutaan selvittää, mitä kalalajia on vähiten. Tätä varten otetaan akvaariosta jokaista kalalajia kerralla pois ja huomataan, mikä laji loppui ensimmäisenä.

Suhdekäsitteet

Suhdekäsitteitä ovat muun muassa vieressä, takana, edessä, välissä ja sisällä. On tärkeää, että aikuiset kielentävät suhdekäsitteitä arjessa monipuolisesti. Usein arjessa sanotaan ”Vie tuo tuonne ja laita se siihen,” kun sama asia tulisi ilmaista suhdekäsitteitä käyttäen ”Vie tuo keskimmäinen kirja ja laita se ylimmälle hyllylle.” Myös vastakohtia tulisi käyttää yhdessä. Jos esimerkiksi lapsi seisoo maton päällä tällöin, matto on lapsen alla, tai kirja on kova ja tyyny on pehmeä. Ennen esiopetuskäytäntöä lasten kanssa tutustutaan sijainti- ja suhdekäsitteisiin, nimetään niitä ja harjoitellaan käyttöä. Esiopetusikäisten lasten kanssa taas edellisten lisäksi sijainti- suhdekäsitteitä harjoitellaan kaksi- ja kolmiulotteisessa ympäristössä. Suhdekäsitteitä voidaan harjoitella myös liikkuen, esimerkiksi pyydetään lapsia menemään makuulle lattialle ja ohjeistetaan laittamaan vuorotellen käsiä ja jalkoja vaakasuoraan ja pystysuoraan asentoon. Nyt kun lapset nousevat seisomaan ja heitä ohjeistetaan samalla tavalla, mikä muuttui?

Linkki videoon: <https://youtu.be/ONy45xntmc8>

Tutustu esimatemaattisiin taitoihin liittyvään Lela-tarinaa: Meren siniset lelut - tarina lelujen järjestämisestä.



Matemaattisen ajattelun kielentäminen

Anni Jyrinsalo, Maria Larionova, Martina Aaltonen ja Salla Jansson



Mitä on matemaattisen ajattelun kielentäminen? Miten sitä voidaan hyödyntää? Nykysuomen sanakirjan mukaan kielentäminen tarkoittaa yleiskielessä ajatusten saattamista kielelliseen muotoon. Samaten matematiikassa kielentämisellä tarkoitetaan matemaattisen ajattelun ilmaisemista kielen avulla. Tässä prosessissa itse lapsi joutuu jäsentämään matemaattista ajatteluaan ja näin hän tuo samalla esille asiaan liittyvät omat uskomuksensa. Kun lapset oppivat kielentämään omaa matemaattista ajatteluaan, aikuiset voivat saada tietoa lasten matemaattisen ajattelun kehittymisestä. Tällöin esimerkiksi mahdolliset virhekäsitykset on helppo korjata. Millaista matemaattista ajattelua tulee kielentää pienten lasten kanssa ja mitä kielentäminen konkreettisesti tarkoittaa?

Kielentäminen opetussuunnitelmissa

Varhaiskasvatussuunnitelman perusteissa ja esiopetuksen opetussuunnitelmassa tuodaan esille kielellistäminen. Molempien opetusta ohjaavien asiakirjojen mukaan lapsia tulisi innostaa kuvailemaan matemaattisia havaintoja. Varhaiskasvatuskäisiä lapsia rohkaistaan kuvailemaan havaintojaan muun muassa kehollisesti sekä kuvien ja välineiden avulla. Esiopetusikäisiä lapsia puo-

lestaan rohkaistaan kuvailemaan havaintojaan opettajan mallintamisen ja kielellistämisen avulla. Kielellistäminen tulee esille myös muissakin kohdissa. Näitä taitoja tarvitaan myös tilanteissa, joissa lapset yhdessä pohdiskellen etsivät selityksiä tekemilleen havainnoille. Kehittyvä taito nimetä asioita sekä ymmärtää ja käyttää erilaisia käsitteitä, edistää lasten monilukutaitoa eli viestin tulkinnan ja tuottamisen taitoja.

Matemaattisen ajattelun ilmaisun neljä kieltä

Seuraavaksi esittellään matemaattisen ajattelun ilmaisun neljä kieltä. Nämä ovat luonnollinen kieli, kuviokieli, toiminnan kieli ja symbolinen kieli. Jorma Joutsenlahti on käsitellyt kielentämistä monipuolisesti kouluopetuksen näkökulmasta. Tässä esityksessä matemaattisen ajattelun neljälle kielelle annetaan tulkinta varhaiskasvatuksen näkökulmasta.



Luonnollinen kieli on lapsen äidinkieli, eli se kieli, millä lapsi selittää matematiikkaa. Se voi olla puhuttua tai kirjoitettua kieltä. Varhais- ja esiopetuksessa se on yleensä puhuttua kieltä. Puhumalla lapsi oppii matematiikkaa ja alkaa huomaamaan sitä ympäristössä, siksi onkin tärkeää, että aikuisetkin käyttävät oikeita termejä puhuessaan.

Kuviokielen kautta matemaattista ajattelua voidaan ilmaista kuvioiden ja piirustusten avulla. Ne usein havainnollistavat tehtävää. Kuviokielen avulla matemaattista ajattelua voidaan ilmaista, kun lasta pyydetään piirtämään esimerkiksi geometrisia kuvioita tai kolme lintua paperille.

Toiminnan kielessä matemaattista ajattelua ilmaistaan toiminnan avulla. Siinä hyödynnetään lapsen kehoa ja erilaisia välineitä. Esimerkiksi pienet lapset tyypillisesti näyttävät sormillaan heidän ikänsä. Isompien lasten kohdalla toiminnan kieltä voidaan käyttää esimerkiksi aritmetiikan perustaitoja harjoiteltaessa. Lapsille annetaan ämpäri, jossa on omenoita. Yhteenlaskun yhteydessä pyydetään laittamaan ämpäriin oikea määrä omenoita ja vähennyslaskun yhteydessä ottamaan niitä pois.

Symbolisella kielellä taas tarkoitetaan matematiikan ilmaisemista numerosymbolien ja matemaattisten symbolien avulla. Varhaiskasvatuksessa tutustutaan numerosymboleihin. Matemaattisia symboleita ei pääsääntöisesti käytetä varhaiskasvatuksessa matemaattisten suhteiden ilmaisemiseen, mutta esiopetusikäiset voivat olla kiinnostuneita esimerkiksi plus ja miinus merkien merkityksestä yhteen- ja vähennyslaskun yhteydessä. Myöskin käsitteille pienempi kuin ja suurempi kuin luodaan varhaiskasvatuksessa merkitystä niin luonnollisen kielen, kuviokielen kuin toiminnan kielen kautta, mutta linkittäminen symboleihin $<$ ja $>$ tapahtuu vasta koulussa.

Ilmaisun keinojen yhdistäminen

Matemaattisen ajattelun ilmaisun keinoja tulisi yhdistää, jolloin ne tukevat toisiaan. Esimerkiksi lapsen edessä on viisi paperilintua, kolme istuu aidalla ja kaksi lentää taivaalla. Aikuisen avustuksella lapsi kertoo, mitä kuvassa näkyy. Lintuja voidaan liikutella ja pohtia, mihin suuntaan linnut lentävät? Montako lintua kuvassa on? Entä, jos loputkin kolme lähtee lentoon? Näitä asioita voi pohtia yhdistämällä kuviokieltä ja toiminnan kieltä puhuttuun kieleen sekä symboliseen kieleen.

Varhaiskasvattajan tehtävänä on ohjata lasta ilmaisemaan matemaattista ajatteluaan monipuolisesti. Hänen tulisi itsekkin keskittyä ilmaisemaan matemaattista ajatteluaan tarkasti ja monipuolisesti arjen eri tilanteissa. Luonnollisen kielen lisäksi matemaattisen ajattelun ilmaisemiseen sopivat erilaiset eleet, liikkeet ja kuvat.

Linkki videoon: https://youtu.be/drvl0_yMWgI

Lukukäsité

Emilia Manninen ja Heidi Filppa



Lukukäsitteen kehittyminen alkaa jo varhaisesta lapsuudesta ja se jatkuu vielä alakoulun aikana. Lukukäsite on erittäin tärkeä matemaattisen ajattelun kehittymisen kannalta, ja sen pohjustaminen varhaiskasvatuksen aikana on merkityksellistä lapsen myöhempien matemaattisten taitojen osalta. Yksilölliset erot matemaattisten taitojen kehityksessä voivat olla hyvin isoja. Tavoitteellisella pedagogisella ohjauksella eroja voidaan tasata ennen koulun aloitusta.

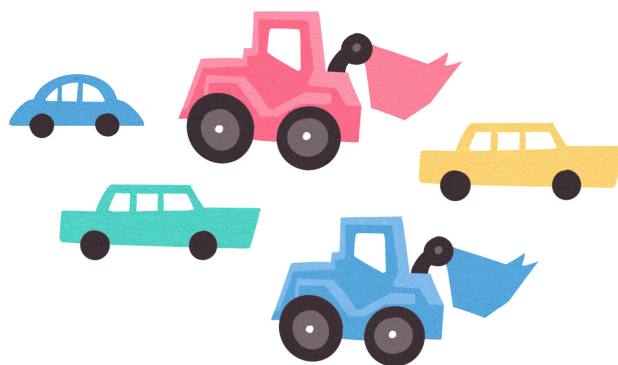
Lukukäsitteen kehittymistä tuetaan monipuolisesti vuorovaikutteisissa tilanteissa, esimerkiksi leikkiä ja lapsia houkuttelevia materiaaleja hyödyntäen.

VASU 2018

Lukukäsitteen kehittymistä tuetaan monipuolisesti leikkien ja työskennellen.

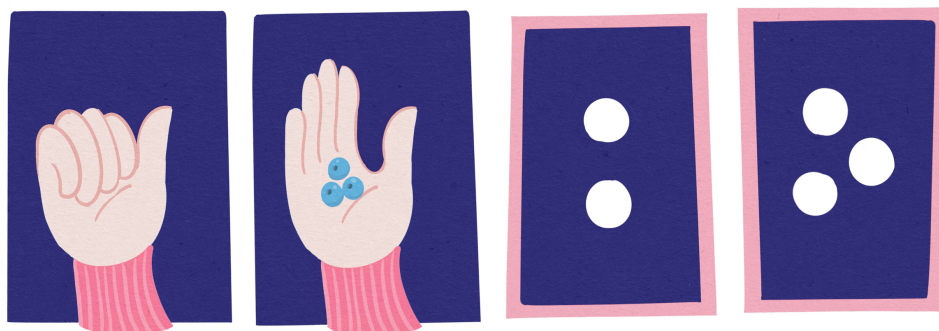
EsiOPS 2016

Ihmisillä on synnynnäinen kyky prosessoida lukumäärään liittyviä seikkoja jo ei-kielellisessä vaiheessa. Jo alle vuoden ikäinen vauva pystyy hahmottamaan, onko esineitä yksi vai monta. Kun lapsi oppii puhumaan, hän oppii sosiaalisen vuorovaikutuksen myötä pikkuhiljaa käyttämään lukusanoja yksi, kaksi ja kolme nähdessään vastaavia lukumääriä esineitä, kuten leluja. Aluksi hän voi ymmärtää mitä tarkoittaa yksi, mutta kaikki sitä suuremmat lukumäärät hän mieltää moneksi.



Viisi, neljä, kolme, NELJÄ! Harri, 2v ja 10kk

Noin kaksi-kolmivuotiaat lapset tunnistavat ja erottavat jo pieniä lukumääriä toisistaan, vaikka eivät täysin hallitsekaan lukusanoja ja niiden yhdistämistä lukumääriin. Puhutaan pienten lukumäärien tunnistamisesta laskematta eli subitisaatiosta, joka on tutkimusten mukaan synnynnäinen taito, jota voi kuitenkin harjoittelun avulla kehittää. Harjoittelussa voi käyttää subitisaatiokortteja tai vaikkapa pieniä helmiä tai herneitä. Pisteiden tai helmien ryhmittelyllä voidaan helpottaa tai vaikeuttaa lukumäärän hahmottamista. Harjoittelua tapahtuu myös pelien avulla nopan silmälukujen myötä.



Lukumäärien spontaani hahmottaminen, SFON

Lapsia innostetaan havainnoimaan lukumääriä ympäristöstä - -

VASU 2018, EsiOPS 2016

Spontaani huomion kiinnittäminen lukumääriin tarkoittaa tarkkaavaisuuden suuntaamista lukumäärään ja tunnistetun lukumäärän hyödyntämistä toiminnassa. Tällöin lukumäärän huomioiminen tapahtuu joko omaehtoisesti tai ärsykkeen avulla, mutta ei toisen henkilön ohjaamana. Tutkimusten perusteella spontaani huomion kiinnittäminen lukumääriin ja sen edesauttama omaehtoinen harjoittelu ovat olennainen osa lasten varhaista kielellisen laskemisjärjestelmän oppimista.

Osa lapsista kiinnittää spontaanisti huomiota lukumääriin ympäristössään. Toisilla huomio voi sen sijaan kiinnittyä muihin ominaisuuksiin, kuten väreihin, muotoihin tai kokoon. Heidän huomionsa ohjaaminen lukumääriin

on tällöin aikuisen tehtävä, ja sen on todettu olevan merkityksellistä lapsen matemaattisen ajattelun kehittymisessä.

Kun lapsi oppii hahmottamaan lukumääriä, hän oppii vertailemaan niitä esineiden avulla. Lapsen ei siis vielä tarvitse laskea esineitä eikä liittää vertailuun lukuja, kun voidaan jo harjoitella yksi yhteen-vastaavuutta esineiden avulla, ja vertailla määriä. Mitä on enemmän, vähemmän tai yhtä monta? Näitä vertailuja voi tehdä arjessa. Ruokailuhetken lähestyessä voi olla kaksi pinoa lautasia vierekkäin. Yhdessä pohditaan, kummassa pinossa on enemmän lautasia ja kummassa vähemmän. Lapsi voi auttaa pöydän kattamisessa toistaen aikuisen mallia laittamalla yhtä monta lusikkaa, lautasta ja lasia jokaisen lapsen kohdalle, yhden kutakin jokaiselle. Ulkona voidaan rakennella ohjatusti hiekkalaatikolla tai tarkastella lasten tekemiä hiekkakakkuja: mikä kakuista on korkein, mikä matalin.

Liikuntaleikeissä hyödynnetään paljon matematiikkaa monilla aisteilla: tee niin monta hyppyä kuin kuulet taputuksia, tuo yhtä monta palloa kuin on laatikoita.

Lukujonotaidot

Lukujonotaitoja ja nimeämistä voidaan kehittää esimerkiksi lorujen ja riimien avulla.

VASU 2018

Erityisesti opetuksessa kiinnitetään huomiota lasten lukujonotaitojen ja nimeämisen kehittämiseen.

EsiOPS 2016

Lasten lukujonotaitojen ja lukujonokäsitteen kehitysvaiheita voidaan kuvata viidellä eri tasolla. Tasojen välillä tapahtuu lukukäsitteen ymmärtämisen kannalta suuria muutoksia, jotka mahdollistavat myöhemmin vaativampien laskuoperaatioiden toteuttamisen. Lapsen on saatava riittävästi harjoitusta, ennen kuin tasoilla voidaan edetä. Nämä viisi tasoa ovat:

- 1) Lukujen luettelu ilman vastaavuutta.
- 2) Lukujonon käyttäminen määrän selvittämiseksi.
- 3) Lukujonon käyttäminen karttuvan määrän laskemiseksi.
- 4) Lukujono suuruusjärjestyksessä olevien lukujen jonona.
- 5) Lukujonon ymmärtäminen lukumäärien jonona.

Lukusanojen luettelu muodostuu sosiaalisessa vuorovaikutuksessa ja se on merkityksellistä myöhemmin lukumäärän oppimisen kannalta. Lukusanojen loruttelun eli luettelon ilman lukumäärän vastaavuutta lapsi aloittaa yleensä ennen kolmen vuoden ikää. Kun lapsi ilmoittaa osaavansa luetella ”vaikka sataan,” on tärkeää antaa hänen puhua ääneen lukujonoa.

Kaksivuotias voi osata lorua pitkästikin, mutta usein ennen kymmentä lukusanojen järjestys sekoittuu. Esimerkiksi ”yssi, kassi, kolme, neljä, viisi, kuusi, seitsemän, kassitoista, yheksäntoista, kassitoista ja kymmenentoista” on 2,5-vuotiaan Tiinan esimerkki. Lorun luettelu on leikki, jossa hän toistaa kuulemaansa oppimassaan sosiaalisessa kanssakäymisessä, esimerkiksi kun leikitään piilossa-leikkiä. Hän ei osaa vielä yhdistää lukusanoja lukumääriin eikä tunne lukusanojen suuruusjärjestystä. Yli 3-vuotias voi osata luetella lukusanoja oikeassa järjestyksessä jo paljon pidemmälle, mutta usein kymmenylityksissä tulee haasteita ja lapsi voi kysyä, mitä tulee yhdentoista jälkeen. Haastava kohta on myös yhdeksäntoista jälkeen ja lapsi voi jatkaa samaa nimeämisen logiikkaa: kymmenentoista.

Loruttelu-vaiheessa ei ole tärkeää kiinnittää huomiota käyttäkö lapsi lukusanoja oikeassa järjestyksessä. Aikuinen käyttää esimerkillään lukusanoja oikein puheessa, leikeissä tai vaikkapa siirtymätilanteissa. Useisiin lastenlauluihin sisältyy lukujonoja: elefantin marssilaulussa opetellaan lukujonoa eteenpäin kun taas ankkujen lähtiessä leikkimään tai varisten lentäessä pois aidalta luetellaan lukujonoa taaksepäin. Kun lapsi on oppinut luettelemaan lukuja yhdestä eteenpäin, voidaan esiopetuksessa vaikka lähtölaskennan omaisesti luetella lukuja ajan loppumisen merkiksi taaksepäin. Samoin lähtölaskennassa än-yy-tee-NYT sijaan voidaan käyttää yksi-kaksi-kolme-MENE.

Lapsia innostetaan – liittämään ne [lukumäärät] lukusanaan ja numeromerkkeihin taitojensa mukaan.

VASU 2018, EsiOPS 2016

Noin 3-4-vuoden iässä lapsi oppii yhdistämään hahmottamisen kokemuksen laskemiseen, hänen hallitsemansa lukualue kasvaa ja hän alkaa ymmärtää lukusanan ja lukumäärän välistä yhteyttä, määrällisyyden periaatetta. Aluksi hän oppii hallitsemaan lukumäärät yksi, kaksi ja kolme. Eriaikaisen laskemisen vaiheessa lapsi osaa lukusanat oikeassa järjestyksessä ja osoittaa laskettavia esineitä, mutta ei välttämättä samanaikaisesti. Lukumäärän ja lukusanan yhteyttä voidaan tukea esimerkiksi arjen tilanteissa: hae kaksi kenkää, laita yksi pipo päähän, maista kolme lusikallista puuroa, tai vaikkapa siirtymätilanteissa tehdään ryhmiä, joissa on kaksi lasta tai kolme päätä tai kolme peppua.

Lukukäsite

Kun lapsi oppii luettelemaan luvut oikeassa järjestyksessä ja hän ymmärtää, että yksi sanottu luku vastaa yhtä esinettä, hän osaa lukusanan ja lukumäärän yksi-yhteenvastaavuuden. On tutkittu, että noin 4,5-vuotias osaa järjestää laskettavat esineet laskeakseen ne ja noin viisivuotias lapsi tietää, että jokainen esine lasketaan vain yhden kerran ja viimeinen lukusana ilmaisee joukon lukumäärän. Tällöin lapsi myös tietää, että suurempi luku viittaa suurempaan lukumäärään.

Yksi-yhteen vastaavuuden keskeneräisyys saattaa näkyä esimerkiksi siten, että lapsi ajattelee, että pidemmässä jonossa on aina enemmän esineitä. Tätä tapahtuu, vaikka lapsi olisikin laskenut, että lyhyessä jonossa on enemmän esineitä. Yhteen- ja vähennyslaskut eivät vielä suju, koska luvut eivät ole vielä määrällisiä ja lukujono täytyy aloittaa aina alusta.

Jonkin verran on tutkittu, että matemaattisilla lautapeleillä tai työmuisia kehittämällä, kuten muistipelejä pelaamalla, voidaan parantaa matemaattisia taitoja. Monissa noppapeleissä, kuten Afrikan tähdessä tai Kimblessä, voidaan yksi-yhteen vastaavuutta harjoitella nopan silmäluvun ja pelilaudalla etenemisen avulla. Aluksi lapsi voi laskea silmäluvun pisteet yksi kerrallaan etenkin kolmea suuremmissa silmäluvuissa, mutta usein hyvin nopeasti taidot kehittyvät ja hän pystyy hahmottamaan silmäluvun laskematta ja kykenee siirtämään pelinappulaansa pelilaudalla silmäluvun osoittaman luvun verran.

Kun lapsi käyttää lukujonoa määrän selvittämiseksi, peliäkin pelatessaan lapsi ajattelee, että hänen viimeiseksi luettelemansa lukusana vastaa kysymykseen ”Kuinka monta?” Tässä vaiheessa lapsi itse asiassa ajattelee lukua kuitenkin järjestyslukuna ja kysymystä ”Kuinka monentena?” Puhutaan *kardinaaliluvuista*, kun ilmaistaan lukumäärää ja kun taas ilmaistaan järjestystä, puhutaan *ordinaaliluvuista*. Tämä lukumäärän käsittämisen keskeneräisyys saattaa näkyä esimerkiksi siten, että kun esineiden paikkoja vaihdetaan, lapsi laskee esineet uudelleen. Opetuksessa kannattaa siis käyttää esimerkkejä, joissa on niin järjestyslukuihin kuin lukumäärään liittyviä tehtäviä. Eli esimerkiksi kuinka monta palikkaa on pinossa ja kuinka monentena punainen palikka on.

Kun lapsi hallitsee lukumäärän, yksi-yhteen vastaavuuden ja lukusanat, voidaan tutustua numeromerkkeihin. Niiden opettelu aloitetaan tunnistamalla eri merkit ja tekemällä merkkejä esimerkiksi muovailuvahasta, taikataikinaasta tai omaa kehoa käyttäen. Numeromerkkien harjoittelu kirjoittamalla on esiopetuksen sisältöjä, mutta kirjoitetun numeromerkkin ja lukukäsitteen yhteyttä voidaan harjoitella jo viskari-ikäisten lasten kanssa lapsille tutuista numeroista, jotka liittyvät esimerkiksi lasten ikään tai vaikkapa tuttujen

esineiden lukumäärää kuvataan myös numeromerkeillä.

Kun lapsi hallitsee lukujonon käyttämisen karttuvan määrän laskemiseksi, hän osaa jatkaa lukujen luettelemista mistä tahansa lukujonon luvusta, esimerkiksi luvusta 3. Lapsi pystyy käyttämään tätä taitoa, kun esineitä lisätään, eikä hän tällöin aloita lukujonoa alusta. Taidon oppimista voidaan tukea esimerkiksi piilosilla leikissä, lukujono voidaan aloittaa vaikkapa luvusta 10. Hyvä paikka harjoittelulle on myös aamulla lasten saapuessa päiväkotiin yksi kerrallaan, jolloin lukumäärä kasvaa: *”Meitä oli vasta täällä neljä, mutta kuinka monta meitä on nyt kun Oskari saapui?”*

Lukumäärän säilymisen oppiminen tarkoittaa sitä, että lapsi ymmärtää, että lukumäärä ei muutu vaikka laskettavat esineet laitettaisiin uuteen järjestykseen, ryhmitellään eri tavalla tai järjestys sekoitetaan. Yksiyhteenvastaavuuden ohella lukumäärän säilyminen on olennainen asia lukukäsitteen kehittymisessä. Vasta näiden ymmärtämisen jälkeen lapsi kykenee ymmärtämään lukusuoran tai suorittamaan peruslaskutoimituksia laajemmilla lukualueilla.

Kun lapsi on oppinut lukujen suuruusjärjestyksen, hän oppii, mitä tarkoittaa edeltävä luku eli yksi vähemmän ja seuraava luku eli yksi enemmän. Lapsi oppii luettelemaan myös lukujonoa taaksepäin. Lapsi oppii myös yhdistämään puhutun luvun ja numeromerkin. Useimmiten koulun aloittavat lapset ovat päässeet tälle tasolle. Taidon osaamista voidaan selvittää pyytämällä lasta tai lapsiryhmää luettelemaan lukuja lukualueella 0-20 tai toisin päin, ja tunnistamaan kirjoitettu numeromerkki puhuttuna.

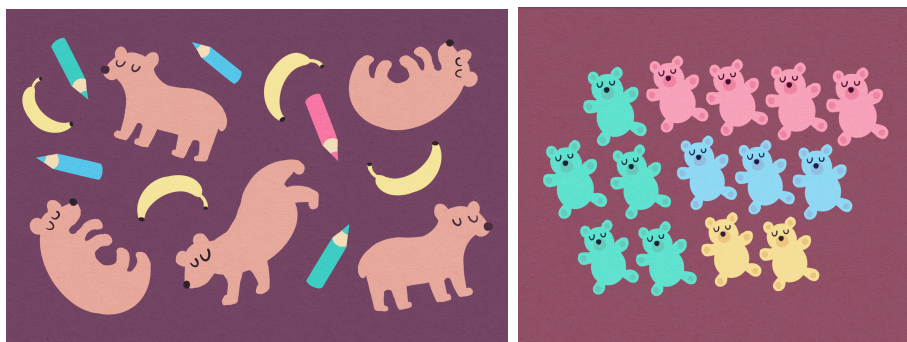
Lukujonon ymmärtäminen lukumäärien jonona on tärkeä vaihe laskemisen taitojen kannalta. Lukujonoa voidaan käsitellä lukumäärien jonona, jolloin luku ilmaisee paikan suuruusjärjestyksessä ja kuinka monta lukua on laskettu, mutta se ilmaisee myös joukon lukumäärän. Lapsi oppii myös hajottamaan ja kokoamaan lukuja, mikä itseasiassa liittyy laskutaitoihin.

Lukumäärien vertailu

Käsitteet enemmän ja vähemmän ovat osa lukukäsitteen perustaa. Lukumäärien vertailussa tärkeää on dialoginen keskustelu lapsen kanssa.

Verrataan esimerkiksi nalleja (5 kpl), banaaneja (4 kpl) ja kyniä (5 kpl). Kysytään lapselta ”Mitä esineitä on vähiten?” Jos lapsi vastaa ”Banaaneja on vähiten” laskematta esineitä, kysytään ”Mistä tiedät, että banaaneja on vähiten?” ja ”Kuinka monta banaaneja on vähemmän kuin nalleja?” Verrataan sitten lukumääriä. ”Nalleja on enemmän kuin banaaneja. Banaaneja on vähemmän kuin kyniä. Nalleja ja kyniä on yhtä monta.”

Otetaan toista tehtävää varten pöydälle eri värisiä nalleja eri määrät. Esimerkiksi kaksi keltaista, kolme sinistä, neljä punaista ja viisi vihreää nallea.



Pyydetään lasta rakentamaan saman värisillä multilink-kuutioilla, rakennuspalikoilla tai helmillä yhtä korkeat tornit kuin nalleja on.

Pyydetään lasta yhdistämään oikea numerosymboli lukukorteilla oikeaan lukumäärään. Kysytään lapselta lukumäärien vertailuun liittyviä kysymyksiä kuten ”Kumpia on enemmän, keltaisia vai punaisia nalleja? Kumpi on suurempi, kaksi vai neljä? Kumpia on vähemmän, sinisiä vai vihreitä? Kumpi on pienempi, kolme vai viisi?”

Linkki videoon: https://youtu.be/kZ3oOS_e_nY

Tutustu lukukäsitteeseen liittyvään Lela-tarinaan: Peilin Lela - tarina jossa yksi muuttuu kahdeksi.



Alle 3-vuotiaiden matematiikka

Jonna Kangas



Suomessa alle kolmevuotiaiden matemaattista ajattelua tai matematiikan pedagogiikkaa ei ole juurikaan tutkittu. Tässä tekstissä tarkastelemme siis taaperoikäisten ajattelua sekä sitä, millaisia mahdollisuuksia heidän kanssaan on lähteä ihmettelemään matematiikkaa ja tukemaan orastavaa matemaattista ajattelua.

Matematiikkaa puolitoistavuotiaan Saran elämästä

Ruotsissa Franzen (Franzen 2015) on tutkinut väitöskirjassaan sitä, miten lapsien varhaisia matemaattisia taitoja tuetaan. Hän esittelee tutkimuksensa Saran.

Eteisessä Sara (1v 5kk) oivaltaa, että yksinäinen punainen saapas pitää viedä kenkähyllyyn toisen saappaan viereen. *Saappaat esiintyvät pareittain, punaisen saappaan pari on punainen! Saralla on siis jonkinlainen käsitys lukumäärästä, parista, samanlaisuudesta, erilaisuudesta ja järjestyksestä.*

Sara hakeutuu lelujen luo kävellen, mutta innostuessaan konttaa. *Sara on oivaltanut, että kontaten tuntuu pääsevän nopeammin, kun huomio ei mene vielä epävarman kävelyn ohjaamiseen! Saralla on siis jonkinlainen käsitys ajasta, nopeudesta ja ehtimisestä.*

Seuraavaksi Sara koittaa kiivetä isoon leikkiautoon ja joutuu ratkaisemaan, miten jalan saa kyllin korkealle, jotta autoon pääsee sisälle. *Yrityksen*

ja erehdyksen kautta Sara onnistuu! Hänellä siis on käsitys suunnasta, korkeudesta ja jalan nostamiseen tarvittavasta voimasta, sekä näiden kolmen kohtalaisen abstraktin ilmiön toiminnasta suhteessa toisiinsa. Kun Sara ajaa autoa, hänen koko kehonsa reagoi ”mutkiin”, ”jarrutuksiin” ja ”kiihdytyksiin.” Sara taivuttaa vasemmalle, oikealle, eteen ja taakse. Saralla on sekä käsitys, että epäilemättä kokemuksia nopeudesta ja liikkeestä.

Sara pysähtyy katselemaan autoa takanaan, edessään ja sivuillaan ja nousee lopulta ylös kiertämään autoa ja kokeilemaan sen osia. Hän kyykistyy tutkimaan renkaita ja puskureita ja nousee varpailleen tarkastelemaan konepeltiä. *Tällaisessa pienokaisille tyypillisessä toiminnassa ilmenevät arjen havainnot ja päättely! Sara siis tarkastelee auton kokoa ja muotoa ja rakentaa itselleen samalla käsitys koosta, muodosta ja ulottuvuudesta.*

Seuraavaksi lähdemme tarkastelemaan niitä käsitteitä ja matemaattisia ilmiöitä, joiden mielekäs tarkastelu on mahdollista alle kolmevuotiaiden ryhmissä.

Muodot ja kappaleet

Taloa kuvaamme usein kuutiona tai kirjaan piirrettynä nelikulmiona, jonka katoksi asetetaan pyramidi tai vastaavasti kaksiulotteisena kolmio. Pyramidina voi toimia hyvin nokkamuki tai kenkä. Leikeissä erilaiset muodot esiintyvät usein todellisia esineitä ja asioita korvaavina esineinä, joissa muoto ja esineen malli on tärkeämpi kuin todellinen koko tai materiaali.

Pedagogisesti muotojen oppimista kannattaa tukea esimerkiksi havainnoimalla muotoja ja kappaleita lähiympäristöstä sekä nimeämällä, luokittelemalla ja lajittelemalla niitä leikin kautta. Palikat ja muotopalat sopivat mukaan monenlaiseen leikkiin ja niiden kautta lasten on mahdollista aktiivisesti kokeilla ja toimia erilaisten muotojen kanssa, niihin liittyviä sääntöjä oppien.

Koko ja tilavuus

Koon ja esineiden tilavuuksien hahmottaminen lähtee liikkeelle vertailusta ja kielentämisestä. Iso ja pieni ovat avainkäsitteitä, samoin mahtumisen käsite. Kokoja ja tilavuutta voidaan tarkastella kotileikissä, autoleikissä, hiekkalaa- tikolla, vesileikissä, ruokapöydässä sekä metsässä. Usein toimintaan kokojen ja tilavuuden kanssa liittyy täyttämistä, sisäkkäin asettelua, tai vaikka sukan pukemista.

Pedagogisesti kokojen ja tilavuuksien hahmottamista kannattaa tukea esimerkiksi nimeämällä kokoja, yhdessä ihmettelemällä ja matematiikan mahdollisuuksia huomaamalla. Opettaja voi esimerkiksi sanallistaa hiekkalaatik-

koleikkiä kysymällä ”*Mahtuukohan* vielä yksi lapiollinen?”, tai näyttämällä, että lunta mahtuu vielä lapioon.

Lajittelu ja luokittelu

Lajitteluun ja luokitteluun liittyy pienimpienkin ryhmissä lelujen lajittelu, sekä tähän liittyvien sääntöjen harjoittelu ja muuttaminen. Sen sijaan, että lelut aina siivotaan autolaatikkoon ja palikkalaatikkoon, voidaan sääntöä muuttaa, ja lajitella lelut vaihteeksi sinisiin ja punaisiin leluihin.

Pedagogisesti lajittelua ja luokittelua kannattaa tukea esimerkiksi yhteisen tutkimisen kautta, ei virheisiin tarttuen, vaan oivallukset huomioiden, uusia sääntöjä kokeillen, lasten ratkaisuja nimeten sekä ongelmanratkaisutehtäviä tarjoten.

Suunnat

Suunnat lienevät yksi eniten kielellistä hahmottamista mahdollistavista matemaattisista käsitteistä. Pienten lasten kohdalla on kuitenkin hyvä muistaa, etteivät käsitteet ylös, alas, taakse, eteen, sivulle tai tulee, menee, tänne, sinne ole lapsille vielä käsitteinä tuttuja. Näitä käsitteitä vilisee kuvakirjoissa, lauluissa ja loruissa, ja usein suunnan näyttäminen vähintäänkin kädellä auttaa lasta hahmottamaan. Muuten suunnan käsitteet jäävät helposti näkymättömiin.

Pedagogisesti suuntien hahmottamista kannattaa tukea esimerkiksi ohjaamalla lapsia keholliseen liikkeeseen ja pyrkimällä konkreettiseen ja tarkkaan ilmaisuun. Kun lapsen omaa toimintaa tuetaan ja sanallistetaan, sekä tehdään yhdessä lapsen kanssa, myös suuntien käsitteet ja niiden hahmottaminen toiminnassa tulevat pienillekin mahdolliseksi.

Määrät ja lukumäärät

Määrät ja lukumäärät ovat muutakin kuin vain lukusanojen luettelemista tai laskemista. Aluksi lapset hahmottavat käsitteiden paljon tai monta sekä vähän tai yksi käsitteellisen eron. Usein konkreettisesti esineiden ja asioiden kanssa toimiessaan.

Lapset alkavat olla noin kaksivuotiaina myös kiinnostuneita lukumääristä, ensin maksimissaan kolmeen laskemisesta ja tätä kautta kiinnostus lukumääriin ja lukujonoihin herää. Erityisesti parin käsite ja parettain esiintyvät asiat, kengät, sukat, ja hanskat ovat lapsille tuttuja.

Pedagogisesti lukumääriä kannattaa tarjota arjessa esimerkiksi huomiomallalla määriä leikeissä – ensin paljon tai vähän käsitteillä, ja myöhemmin

myös tarkoilla lukumäärillä. Kannattaa myös muistaa myös auttaa lasta laskemisessa. Huomion ohjaaminen lukumäärään, lukusanaan ja lopulta lukukäsitteeseen arjen tilanteissa, sekä niiden konkretisointi auttaa lapsia hahmottamaan, mihin aikuiset käyttävät lukusanoja ja niiden takana olevia käsitteitä. Esimerkiksi lorupussin kanssa toimiessa voidaan välillä pysähtyä laskemaan, kuinka monta laulua on jo laulettu, tai kuinka monta lorua vielä otetaan, että kaikki ovat saaneet nostaa yhden kortin pussista.

Matemaattis-loogisen ajattelun kehittyminen alle 3-vuotialla

Seuraavaksi tarkastelemme taaperoiden kehitysvaiheita ja oppimista, joita havainnoimalla opettaja voi tukea leikkiä ja mahdollistaa matemaattis-loogista ajattelua.

Lukumäärät ja numerot ovat olleet tutkimuksessa keskiössä, mutta erityisesti alle kolmevuotiaita tarkastellessa, pedagoginen tuki on tärkeää keskittää matemaattis-loogisen ajattelun perusteisiin, eli arjen havaintojen, vertailun, järjestykseen asettamisen ja luokittelun mahdollistamiseen. Niin sanottu *yksi-yhteen vastaavuus* on arjen tilanteissa jatkuvasti läsnä ja vaikkei lapsi vielä osaisi kielellistää ajatteluaan, hän hahmottaa tämän loogisen säännön. Matemaattista ajattelua ja merkityksenantoa seurannut Reis havaitsi, että jo yksi vuotiaat yhdessä hieman vanhempien lasten kanssa kehittävät ja tutkivat matemaattisia käsitteitä, kuten yksi-yhteen vastaavuutta, lukumäärien käsitteellistämistä, sekä vertailun ja arvioinnin prosesseja (Reis 2011).

Pienten matematiikassa keskeistä on, että oppiminen on toiminnallista ja kokemuksiin perustuvaa. Keho toimii kokemisen, oppimisen ja toiminnan välineenä ja lapset saavat mahdollisuuden todentaa ajatteluaan näyttämällä sanallistamisen sijaan. Matematiikassa tulevat todeksi oivallukset, hämmästyminen, innostus ja ihastus. Kun lapsi saa mahdollisuuden reagoida kokonaisvaltaisesti, hän kokee matematiikkaa kaikilla aisteillaan ja tunteillaan. Kypsyminen ja kasvaminen mahdollistavat jo itsessään tarkempien havaintojen tekemisen, sekä päättelyn ja lopulta myös sanallistamisen.

Haasteet

Lopuksi tarkastelemme matematiikan haasteita taaperoiden varhaiskasvatuksessa. Matematiikan opetuksemme, kenties peruja kouluopetuksesta, perustuu edelleen kognitiivisten taitojen eriyttämiseen muusta kehityksestä. Oppimistutkimuksen painopiste on perinteisesti ollut kognitiivisessa eli puhtaaseen ajatteluun perustuvassa oppimisessa, eikä tunteille, vuorovaikutukselle ja itseilmaisulle ole jäänyt tilaa. Lisäksi matematiikan ajatellaan olevan ongelmanratkaisuun keskittyvään: Usein lapsille annetaan ratkaistavaksi aikuis-

sen asettama ongelma, jolle on olemassa vain *yksi oikea ratkaisu*.

Havaittuja ongelmakohtia matematiikan opetuksessa varhaiskasvatuksessa voidaan tunnistaa kaikkiaan viisi. Ne kannattaa ottaa haasteina keskusteltavaksi tiimeissä ja työyhteisöissä.

Toimintakulttuurissa korostuvat ensinnäkin aikuisten rutiinit ja säännöt, jolloin lapsen ongelmanratkaisutaidot ja looginen päättely jäävät helposti huomaamatta. Lisäksi varhaiskasvatus-suunnitelmanperusteiden mukaan lapset nähdään homogeenisena asiakaskuntana, eikä asiakirjassa määritellä tavoitteita erikseen eri-ikäisille. Näin toiminnan eriyttäminen ja ikäkausipedagogisten oppimismahdollisuuksien määrittely jää yksin varhaiskasvatuksen opettajien harteille. Myös kielen kehityksen ja roolin ylikorostamista esiintyy taaperoiden ryhmissä sekä tutkimuksessa, että käytännössä, ja matematiikka jää helposti toisen suuren kognitiivisen taidon jalkoihin.

Mielenkiintoinen näkökulma liittyy myös viime vuosina korostuneeseen osallisuuspuheeseen, joka on usein tulkittu lasten kiinnostuksen kohteisiin vastaamiseksi. Matematiikkaan liittyviä kiinnostuksen kohteita on vaikea tukea, koska ei tarkasti tiedetä miten matemaattis-looginen ajattelu näkyy taaperoiden elämässä, jolloin kiinnostuksen kohteita ei välttämättä pystytä tunnistamaan.

Viimeiseksi mainittakoon ikäkausipedagogisen opetusmateriaalin puute ja fokus. Suurin osa opetusmateriaalista matematiikkaan liittyen on suunnattu yli viisivuotiaille. Esimerkiksi eräs pupu ja palikat -peli on ohjeiden mukaan suunnattu ”kaikille lapsille”, mutta testikäytössä leikkiläisen oppimisen keskuksessa Helsingin yliopistolla kaksi- ja kolmevuotiaat pääasiassa turhautuivat sen mukana tulleisiin tehtäviin ja halusivat viedä pupun leikkeihinsä, ja tutkia sen avulla ympäristöä sekä rakennella palikoilla muuten kuin mallin mukaan.

Kootusti voidaan siis sanoa, että "varhaiskasvatuksen alkuvuosina matematiikan oppimista rakennetaan kuin taloa tai linnaa. Opetuksen ja oppimisen tavoitteena on vankan perustan luominen, jonka päälle myöhemmin on rakennettavissa abstraktia matemaattista ajattelua" (Tikkanen & Lampinen 2005, 74).

Linkki videoon:

<https://youtu.be/qti-xthQYpg>

Matematiikkaa 3-5-vuotiaille

Jonna Kangas



Lapsia kolmen ja viiden ikävuoden välillä on perinteisissä kasvatopsykologisissa malleissa luonnehdittu leikki-ikäisiksi. Vaikka olemme jo aiemmassa osassa todenneet, ettei kehitysteorioita tule käyttää yksipuolisesti pedagogiikan perustana, on leikkiin keskittyvä ikä monella tavalla osuva määritelmä. Leikin tulisi olla päivittäistä ja lasten arkeen sekä oppimiseen linkittyvää toimintaa, jopa toimintaa ohjaava pedagoginen johtoajatus.

Sosiaaliset kontaktit ja roolileikit

Suomessa päiväkotiryhmät on perinteisesti muodostettu sekaryhminä, joissa lapset ovat alle kolmevuotiaita tai kolmen ja viiden ikävuoden välillä. Myös uusin varhaiskasvatuslaki ohjaa tämänkaltaiseen ryhmänmuodostukseen. Lapsia kolmen ja viiden ikävuoden välillä yhdistää *kiinnostus sosiaalisiin kontakteihin*. Sosiaalisten taitojen ja kulttuurin omaksuminen on nopeaa, ja yhteinen leikki määritelläänkin lasten toimesta usein parhaimmaksi osaksi varhaiskasvatusarkea.

Lapset kolmen ja viiden ikävuoden välillä ovat ajattelussaan pääosin esioperationaalisessa vaiheessa, jolloin ajattelu on hyvin konkreettista ja maagista. Lapset ovat kiinnostuneita ympäristönsä sosiaalisista säännöistä ja aikuisten toimista. He osaavat myös jo kiinnittyä empatian kautta monenlaisiin rooleihin, mikä mahdollistaa roolileikkitalaitojen harjoittelun. Lapsilla on vii-

meaikaisen tutkimuksen valossa ymmärrys päiväkotiryhmän toimintatavoista, ja he kokevat itsensä aktiivisina toimijoina ja tekijöinä.

Konkreettisesta mielikuviin

Mielikuviutus on kolmen ja viiden ikävuoden välillä oleville lapsille keskeistä ja kuvittelun kautta myös ajattelun ja havainnoinnin taidot karttuvat. Sachet kuvaa, miten dekontektualisaatioksi kutsutun prosessin kautta lapset pystyvät ikävuosien kaksi ja seitsemän välillä siirtämään ajattelunsa konkreettisesta, käsin kosketeltavasta esinestä vähitellen mielikuvien hahmotettuun sisältöön. Matematiikan oppimiselle tämä prosessi on tärkeä, sillä matematiikassa monet tarkastellut asiat ovat abstrakteja.

Varhaiskasvatuksen matematiikassa on tärkeää seurata lapsen kykyä kuvitella aiheena olevia käsitteitä ja edelleen tuottaa niistä omia representatioita. Esimerkiksi talon, tai kodin, käsite on lähes varmasti tuttu jokaiselle lapselle, mutta pyydettyä lasta kertomaan tai näyttämään millainen koti hänellä on, erottuvat lasten erilaiset kyvyt pilkkoa käsite osiin, kuvailla niitä sekä tuottaa omasta kodistaan jokin tuotos kuten piirustus tai legorakennelma. Jos lapsen on esimerkiksi vaikea hahmottaa, että kaupunkileikissä kodit voidaan rakentaa legoista, kerrostalo monesta palikasta päällekkäin ja rivitalo rinnakkain, saattaa hänen olla vaikea hahmottaa ryhmässä yhdessä tarkasteltavia käsitteitä.

Mielikuvilla tukea ongelmanratkaisutaitoihin

Mielikuvilla ja kuvittelulla tuetaan myös lapsen ongelmanratkaisukykyä. Ryhmässä voidaan luoda ratkaisuja tarinoihin ja satuihin yhdessä tai pienryhmissä kertoen ja näyttäen. Sadut ja tarinat ovat hyviä välineitä myös *aika-tila polkujen* hahmottamiseen sekä *syy-seuraus*-suhteiden hahmottamiseen. Esimerkiksi kolmen karhun on tarpeen lähteä kävelyille, ennen kuin Kultakutri ilmestyy maistamaan heidän puuroaan. Tarinoiden kanssa hassuttelu tai päiväjärjestyksellä leikittely tarjoavat lapsille mielikuvien keinoin kuvitella hauskoja tilanteita, joita epälooginen ajankuluminen voisi aiheuttaa. Ryhmässä voidaan myös kerätään erilaisia ratkaisuja ja kokeilla niiden toteuttamista käytännössä.

Järjestämisen taidot

Leikki ja matematiikka ovat monien varhaiskasvatuksen opettajaopiskelijoiden kokemusmaailmassa kovin kaukana toisistaan. Kannattaa kuitenkin käyttää hetki käsitteiden *matematiikka* ja *leikki* reflekttiviseen pohdintaan, jos

oma kokemus on, ettei leikillä ole tilaa vakavassa ja järjestelmällisessä matematiikassa. Lähes kaikissa jo kolmevuotiaidenkin leikeissä vaadittu kyky havaita esineiden ja asioiden ominaisuuksia, sekä taito järjestää niitä ominaisuuksien mukaiseen järjestykseen, ennakoi nimittäin myöhempää matematiikan oppimista. Näiden taitojen kehittyminen on tärkeää muutenkin, sillä niiden heikko kehittyminen aiheuttaa ristiriitoja leikeissä ja päiväkotiarjen tilanteita, joissa tarvitaan aikuisen tukea siihen, että jokainen ryhmän lapsi saa mahdollisuuden osallistua yhteiseen leikkiin.

Järjestämiseen liittyviä taitoja ovat esimerkiksi taito kuvailla, ratkaista, jatkaa ja siirtää järjestystä muihin konteksteihin. Järjestykseen asettaminen ja ominaisuuksien vertailu ovat taitoja, joita lapset käyttävät arjessa leikkiä aloittaessaan ja leikin sisäisissä ongelmanratkaisutilanteissa, sekä pitkäkestoisessa leikissä myös uusia avauksia ideoidessaan ja leikin kokonaisuutta hallitessaan.

Ajattelun taitojen siirtäminen leikin ulkopuolelle

Opettaja tukee lapsia siirtämään ajattelun taitojaan myös leikin ulkopuolelle, ja siltaa niitä kognitiiviseen oppimiseen ja siinä käytettyyn eksaktiin kieleen. Se onnituu vain, jos opettaja on kiinnostunut lasten leikistä ja niistä ajattelun prosesseista, joita leikin aikana tapahtuu. Tutkimuksessamme kävi ilmi, ettei lapsilta oikeastaan koskaan kysytty leikin jälkeen, esimerkiksi pukeutumistilanteessa tai ruokaa odottaessa, mitä leikeissä oli tapahtunut, miksi ja millaisia käsitteitä leikeissä esiintyi.

Leikki ja oppiminen

Pound kuvaa, miten matematiikkaa ja leikkimistä voidaan yhdistää (Pound 2004). Leikkiin liittyy vaihtoehtoja sekä toiminnalle että toiminnassa. Kun tilanteissa tulee esille monenlaisia ratkaisumalleja, ja aikuinen tarjoaa kyllä-ei kysymyksen sijaan avoimia kysymyksiä, lapset kokevat, että heidän kykyihinsä luoda merkityksiä luotetaan.

Poundin mukaan tulisi erityisesti kolme ja neljävuotiaiden lasten kohdalla pelkän sanallisen kuvailun sijasta mahdollistaa näyttäminen tai esittäminen. Myös omissa tutkimuksissamme olemme huomanneet, että vielä viisivuotiaatkin lapset saattavat innostuessaan jättää kuvailusanat sikseen, tarttua saatavilla olevaan välineeseen ja näyttää, miten leikissä lentokone lensi tai miten suuria dinosaurukset olivatkaan. Näyttäminen ja esittäminen ovat keinoja kertoa ajattelustaan ja rajata käsitteen määrittelyä myös silloin, kun ryhmässä on läsnä monia eri kieliä.

On tärkeää muistaa mahdollistaa lapsille myös oppimisen yhdistäminen

ja siltaaminen. Kun lapset saavat kertoa ajatuksistaan ja tuottaa lisämerkityksiä toisten kuvailemille tilanteille ollaan leikillisen oppimisen ytimessä. Vaikkei *kolmio* sanana muistuisikaan innostuessa mieleen, on tärkeintä, että kaikki leikkiin osallistuneet ja myöhemmin leikistä kertoneet jakavat saman kokemuksen, jolle aikuinen voi auttaa antamaan nimen.

Oppimisympäristö - tila ja taso

Seuraavaksi tarkastelen hieman oppimisympäristön merkitystä leikillisessä oppimisessa matematiikan näkökulmasta. Matemaattiset käsitteet tila ja taso ovat läsnä leikissä päivittäin. *Tila* on oppimisen paikka ja sijainti. Se on aina kolmiulotteinen ja aistein käsitettävissä. *Taso* on puolestaan aina kaksiulotteinen. Tasoon liittyvät usein pöydän ääressä tapahtuvat paperi-kynä tehtävät, mutta myös satukirjojen symbolit ja kuvat.

Leikkiä käsittelevässä tutkimuksessamme näimme, miten vähän lapsia kannustetaan tutkimaan tilan mahdollisuuksia ympärillään. Tutkimuksen kohteina olleissa yli kolmevuotiaiden ryhmissä leikit toteutuivat usein vain yhdessä tasossa, usein pöydän ääressä. Ne leikit, jotka hyödynsivät tilaa, lopetettiin aikuisten toimesta usein äänekkäinä ja riehakkaina. On hyvä pitää mielessä, että tilan tutkiminen rakentaen, kiiveten ja erityisesti leluja kuljettaen on tapa kehittää matemaattista ajattelua.

Oppimisympäristö matemaattisen ajattelun työkaluksi

Myös tason ääressä tapahtuvaa oppimista, kuten satukirjaa on hyvä välillä tarkastella myös matemaattisesta näkökulmasta. Me aikuiset esimerkiksi hahmotamme perspektiivin itsestään piirroskuvasta, mutta ryhmän kolmevuotiaalle satukirjan kuvan käsittäminen ei välttämättä ole yhtä helppoa. Yksinkertaisimmallaan lasten matemaattisesta ajattelusta saa kiinni pysähtymällä kysymään suuntaa, tilaa tai sijaintia tarkastelevia kysymyksiä kirjoista tai leluista, joilla leikkiä toteutetaan. Näissä vuorovaikutteisissa tilanteissa myös aikuisen on helppo tarjota lapsille uusia käsitteitä maisteltaviksi ja kokeiltaviksi. Vuorio kehoittaankin toisinaan kutsumaan lapset mukaan luomaan järjestystä oppimisympäristöön, sanoittamaan ja määrittämään sääntöjä, joilla ympäristö rakentuu ja todentuu.

Oppiminen ja sosiaalinen merkityksenanto

Varhaiskasvatussuunnitelman perusteiden mukaan suomalainen varhaiskasvatus edustaa sosiokulttuurista oppimiskäsitystä, jossa oppiminen nivoutuu arjen toimiin ja vuorovaikutukseen, ja jossa luovat ja jakavat merkityksiä

siinä missä aikuisetkin. Lapset kokeilevat ja testaavat siis myös (esi)matemaattisia sääntöjä ja järjestystä leikeissään

Oppimista ei tapahdu vain oppitunneilla, vaan lapset vievät uudet käsitteet mukanaan muuhun varhaiskasvatuksen toimintaan ja tuottavat tulkiten, mutta myös uusintaen niistä itselleen ja vertaisryhmälleen merkityksiä ja kokemuksia. Osallisuuden kokemus oppimisessa on merkityksellistä, omat aloitteet ja kiinnostuksen kohteet vaikuttavat toimintaan.

Tämä toteutuu vain, kun lapsi tulee kuulluksi, ja hänen tavastaan ajatella ja ymmärtää ympäristöään ollaan kiinnostuneita. Meiltä opettajilta se vaatii halua ja osaamista asettua lapsen perspektiiviin ja pyrkiä ymmärtämään lapsen tapaa ajatella ja toimia.

Lasten osallisuutta voidaan tukea esimerkiksi olemalla kiinnostuneita lasten toiveista ja ideoista ja tuomalla ne näkyvälle paikalle ryhmän toimintaa. Monissa päiväkodeissa onkin jo toteutettu toiveiden puu (tai ilmapallo), johon ideat ja ajatukset konkreettisesti kerätään ja jossa niiden toteuttamista voidaan seurata. Tämä toiveiden puu voi toimia myös matemaattisen ajattelun herättelijänä, sekä ikkunana aikuisille lasten näkökulmaan ja käsityksiin. Pitkäkestoisena projektina se tarjoaa myös mahdollisuuden yhdessä lasten kanssa tarkastella oppimista ja muuttuvia ajatuksia sitä mukaa, kun lapset itse huomaavat mahdollisia epäloogisuuksiaan tai muuttavat ideoitaan uuden ja opitun avulla.

Leikki ja matematiikan oppiminen

Leikillisuus matematiikassa muodostaa erilaisten ratkaisujen kuvittelun ja luomisen. Sen yhteydessä osallinen oppiminen mahdollistuu, kun lapset saavat toimia ja tuottaa yhdessä merkityksiä oppimalleen leikin keinoin. Matematiikka on siis yksi monista kielistä, joilla maailma leikissä muotoutuu ja saa merkityksiä.

Vapaa leikkiminen tai opettajajohtoisen matematiikan harjoitukset eivät yksinään tue kokonaisvaltaista oppimista ja ymmärtämistä. Leikillisuus ja toiminallisuus ovat matematiikan opetuksessa tapa tukea käsitteellisen oppimisen siltaamista lapsen kokemusmaailmaan. Yli kolmevuotiaidenkin lasten kanssa toimiessa ja heidän oppimistaan tukiessa on tuettava matemaattisten käsitteiden konkreettista ja toiminnallista tarkastelua, jotta lapset saavat kokea matematiikkaa kehollisesti, ajatuksissa, iholla ja aisteilla. Tavoitteena on, että yksittäisten käsitteiden ulkoamuistamisen sijaan matematiikka tuottaa lapsille resursseja ja taitoja oppimiseen. Leikissä matematiikkaa on esimerkiksi autojen järjestäminen parkkitaloon, syntymäpäivän odottaminen ja kasvamisen käsitteen tarkastelu, pihan yli lentävän lentokoneen lentokorkeuden arvaaminen, oman rapukävelyvauhdin arvioiminen, seinän rakentaminen

palikoista sitä pohtien, voiko susi puhaltaa sen kumoon; majan rakentaminen niin, että sisään mahtutaan kavereiden kanssa, tai pöydän kattaminen kotileikissä ja astioiden asettaminen järjestykseen.

Väitin tämän tekstin alussa, että matematiikkaa ja leikkiä on totuttu pitämään toisistaan kovin kaukaisina ja aivan erilaisella logiikalla toimivina. Matematiikka on matemaattis-logista ajattelua eli havaitsemista, vertailua, luokittelua ja sarjoittamista, välineiden käsittelyä, ongelmanratkaisutaitoja, tulkittamista ja loogista päättelykykyä sekä kognitiivisia taitoja.

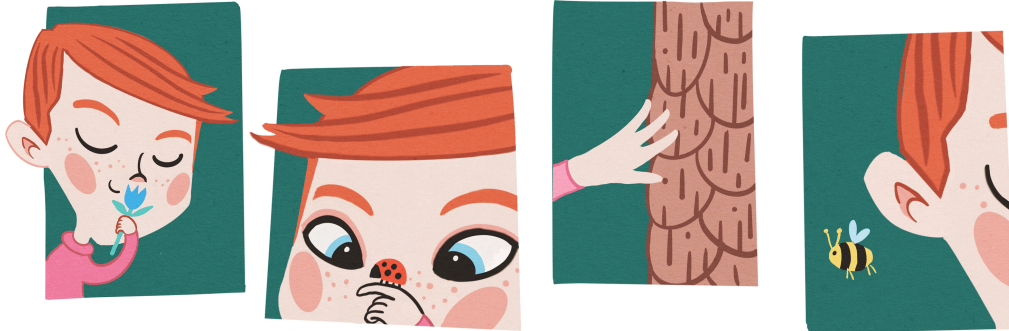
Leikki sen sijaan voidaan määritellä toiminnaksi, joka sisältää maagista ajattelua ja mielikuvitusta, kuten kykyjä havaita, yhdistää ajattelua ja toimintaa sekä taitoa ajatella symbolisesti, välineiden käsittelyä ja soveltamista, luovia ongelmanratkaisukykyjä, sekä taitoja tulkita, uusintaa ja hyödyntää empatiataittoa. Ehkä leikki ja matematiikka eivät olekaan niin kaukana toisistaan.

Linkki videoon:

<https://youtu.be/DD5Cw3YaQKw>

Esikouluikäisten matematiikka

Salla Jansson



Matematiikan tulisi olla jatkuvasti läsnä eri arjen tilanteissa, eikä ainoastaan perustua irrallisiin tuokioihin. Opettajan nostaessa matematiikan arkipäivän tilanteisiin lapset huomaavat pikkuhiljaa, että matematiikkaa esiintyy kaikkialla. Esiopetusta ohjaavat tarkat aikataulut ja tilojen käyttö, joita usein noudatetaan rutiininomaisesti ja kyseenalaistamatta. Tästä herääkin kysymys, muistammeko pysähtyä lasten kanssa ihmettelemään erilaisia matemaattisia ilmiöitä ja tartummeko arjen tarjoamiin mahdollisuuksiin?

Matematiikan oppiminen

Esiopetuksen opetussuunnitelman mukaan lapsi oppii toimimalla vuorovaikutuksessa toisten ihmisten ja ympäristön kanssa. Oppimisen lähtökohtana tulisi olla lapsen aiemmat kokemukset ja osaaminen. Esimerkiksi annattaessa lapselle tehtäväksi tutkia erilaisia geometrisia muotoja tulisi niitä tarkastella lasten toiminnasta ja ympäristöstä käsin. Askartelu, rakenteluleikit, metsä, lasten kodit ja muut lapselle merkitykselliset asiat tuovat mahdollisuuden havaita geometriaa. Aikuisen tehtävänä on liittää matematiikan käsitteet tarkasteltaviin asioihin. Pian lapset alkavat itse tekemään havaintoja ympärillä esiintyvistä geometrisista muodoista.

Esiopetusikäisten oppimisessa on huomioitava kokonaisvaltaisuus. Oppimisessa tulisi ottaa huomioon aistien, ajattelun ja toiminnan yhdistyminen. Eri aistit toimivat oppimisen pohjana. Opettajan tehtävänä on havainnoida, miten oman ryhmän lapset oppivat ja huomioida havainnot opetusmenetel-

missä. Näkö-, kuulo-, ja tuntoaisti ja joskus jopa haju- ja makuaistin monipuolinen hyödyntäminen opetuksessa lisäävät kokonaisvaltaisuutta. Samaa asiaa voidaan harjoitella eri aistien avulla. Välineiden avulla on mahdollisuus huomata haluttu muutos, vertailu tai järjestykseen asettaminen. Lapsella on mahdollisuus tuntea, kuulla, nähdä ja joskus jopa maistaa sekä haistaa välineistöä. Geometrisia muotoja opeteltaessa moniaistisuus tulisi esille opettajan laittaessa pieneen pussiin erilaisia esineitä, joiden pinnat, paino, haju ja muoto eroavat toisistaan. Lasten tulisi ilman näköaistia, jolla yleensä asioita havainnoimme, päätellä millaiset muodot pussissa on.

Matemaattinen ajattelu

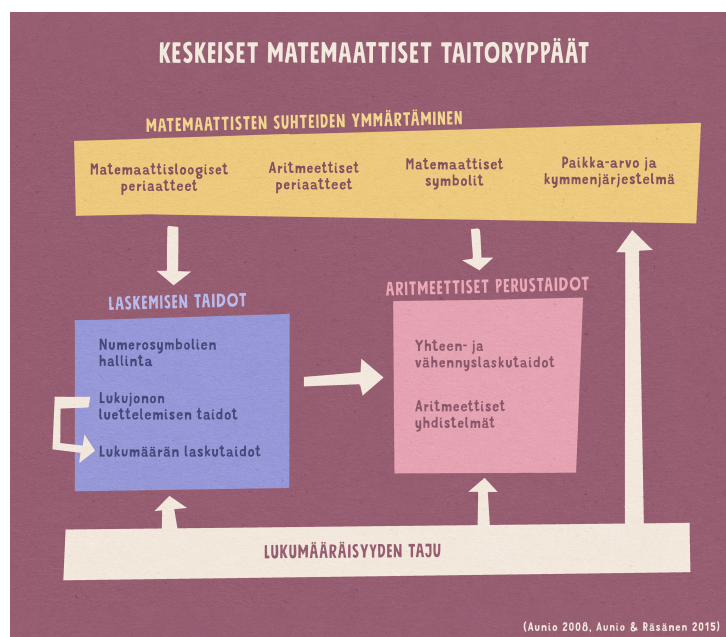
Matemaattisella ajattelulla tarkoitetaan matematiikan avulla ajattelemista (Burton, 1984). Esiopetuksen opetussuunnitelman mukaan esiopetuksessa luodaan matemaattisen ajattelun pohjaa. Opettajalle matemaattisen ajattelun kehittyminen tuo haasteen, koska sen etenemistä ei voi konkreettisesti seurata, mutta keskusteluiden kautta on mahdollista saada käsitys lasten ajattelusta. Matemaattista ajattelua voidaan kehittää esimerkiksi kielen-tämisen tai ongelmaratkaisutehtävien avulla. Matematiikan kielentämisellä tarkoitetaan matemaattisen ajattelun ilmaisemista kielen avulla. Ongelmaratkaisutehtävissä jo aiemmin osattua taitoa käytetään uudessa tilanteessa. Tehtävissä lapsia tulee haastaa pohtimaan ympärillä olevia matemaattisia ilmiöitä. Väärien vastauksien sijaan tulee keskittyä ajatusprosessiin. Otetaan esimerkiksi tehtävä, jossa lapsen tulee etsiä metsästä keppi. Kepin pituudelle annetaan mitat: yhden kerran oma käsi ja jalka. Oikeankokoisen kepin löytämisen lisäksi tulisi lasten kanssa keskustella; Onko kaikilla samankokoiset kepit? Jos ei niin miksi? Mitkä asiat tähän vaikuttivat? Ja niin edelleen.

Lapsen aktiivinen rooli esiopetuksessa

Esiopetuksen opetussuunnitelma tukee lapsen aktiivista roolia toiminnan suunnittelussa ja oppimisympäristön luomisessa. Lasten osallisuus tarjoaa mahdollisuuden liittää opittavat asiat lasten mielenkiinnon kohteisiin, niin etteivät opeteltavat asiat jäisi irrallisiksi. Leinosen, Brotheruksen ja Veninisen (2014) tutkimuksen mukaan opettajat kuitenkin ymmärtävät lapsen osallisuuden kapeasti, eivätkä pidä sitä keskeisenä esiopetuksen päämääränä. Lasten osallisuuden tukeminen luo kuitenkin mahdollisuuden oppimiseen. Esiopetusikäisten lapset ovat usein tarkkoja erilaisista säännöistä ja huomaavat pian, jos jotakin sääntöä ei ole noudatettu. Lasten mukaan ottaminen sääntöjen laatimiseen luo mahdollisuuden oppia esimerkiksi loogista ajattelua. Mitä vaikutuksia eri säännöillä on heihin itseensä ja kavereihin?

Myös opetusmateriaalia valittaessa on kiinnitettävä huomiota lasten aktiivisuuden tukemiseen. Osassa esiopetusryhmiä on luovuttu tehtäväkirjoista, mikä luo mahdollisuuden laatia tehtäviä yhdessä lasten kanssa, juuri omalle ryhmälle sopiviksi. Lapsi voi esimerkiksi toimia opettajana ja keksiä matematiikan tehtäviä toisille lapsille. Tehtävän keksiminen, kaverin auttaminen ja tarkastaminen haastaa lapsen opittua tietoa uudella tavalla, jolloin lapsi joutuu jäsentämään vanhaa tietoa ja kehittämään ajatteluaan.

Keskeiset matemaattiset taidot



Aunio ja Räsänen (2015) ovat luoneet taitorypösmallin kuvaamaan keskeisiä matemaattisia taitoja. Esiopetusikäisen kannalta keskeisimpiä taitoja ovat lukumääräisyyden taju, laskemisen taidot, matemaattisten suhteiden ymmärtämisestä matemaattis-loogiset periaatteet ja aritmeettisten perustaitojen harjoittelun aloittaminen. Käyn seuraavaksi läpi esiopetusikäiselle lapselle keskeisimmät matemaattiset taidot.

Lukumääräisyyden taju

Lukumääräisyyden tajulla tarkoitetaan epätarkkaa kykyä hahmottaa lukumääriä, missä ei käytetä kielellistä laskemista ja se toimii matemaattisten taitojen pohjana. Taidon perusteet hallitaan syntymästä saakka ja jo vauvat voivat erottaa lukuja toisistaan, jos erot lukujen välillä ovat riittävän suuret.

Esimerkiksi kassajonoa valittaessa voi silmämääräisesti havainnoida, missä jonossa on vähiten ihmisiä.

Laskemisen taidot

Laskemisen taitoihin kuuluu numerosymbolien hallinta, lukujonon luettelemisen taidot ja lukumäärän määrittäminen laskemalla. Lukujonon luettelemisen taitoihin kuuluu lukujonon luetteleminen eteen- ja taaksepäin, hypäyksittäin ja tietystä luvusta alkaen. Lukumäärän määrittämiseen laskemalla tarvitaan monia taitoja: lukujonon muodostaminen oikeassa järjestyksessä sekä yhteys lukusanan ja laskettavan esineen välille. Lisäksi, lapsen tulee tietää, että jokainen esine lasketaan vain kerran, eikä laskettavien esineiden järjestyksellä ole merkitystä. Lopuksi, on tiedettävä, että viimeinen lukusana ilmaisee esineiden määrään. Lapsen kehitys etenee lukujonon luettelemisesta, lukumäärän laskemiseen ja edelleen yhteen- ja vähennyslaskutaitoihin. Lukujonotaitojen kehittyessä taitoja hyödynnetään laskemisessa. Esiopetusikäinen lapsi on tyypillisesti lyhentyneen laskemisen vaiheessa, jolloin lapsi esimerkiksi tunnistaa nopan silmäluvun viisi ilman laskemista ja pystyy jatkamaan laskemista eteenpäin.

Aritmeettiset perustaidot

Esiopetusikäinen lapsi alkaa harjoittelemaan aritmeettisiä perustaitoja. Yhteen- ja vähennyslaskuja ratkaistaan aluksi pienillä luvuilla. Lapsilla on tätä varten hyvä olla konkreettista välineistöä tukena. Myöhemmin lapsen ei tarvitse laskea tuttuja yhdistelmiä, vaan lapsi alkaa muistamaan laskujen ratkaisut eli aritmeettisten yhdistelmien muistaminen tulee mahdolliseksi.

Matemaattisten suhteiden ymmärtäminen

Matemaattisten suhteiden ymmärtämisestä esiopetusikäiselle keskeisiä taitoja ovat: matemaattis-loogiset periaatteet. Näihin kuuluvat luokittelu, sarjoittaminen, vertailu ja yksi yhteen -suhde. Kyseisiä taitoja voidaan harjoitella esimerkiksi lasten odottaessa kuraeteisessä. Välineinä voisivat toimia lasten kengät. Kenkiä voidaan vertailla keskenään: Missä kengässä on pisin varsi? Mikä kenkä on kevyin? Kengät voidaan myös luokitella esimerkiksi värien tai kengän koon mukaan. Sarjoissa voisivat toimia kumisaappaat ja lenkkarit tai siniset ja punaiset kengät. Lopuksi voidaan pohtia yksi yhteen- suhdetta. Onko kaikille kengille olemassa omistajat? Koko ajan on tärkeää, että lapset pääsevät myös itse luomaan omia perusteluita vertailuille, luokitteluille ja sarjoille. Opettajan tehtävänä on haastaa lasten ajattelua kysymyksin ja kommentein.

Eheyttävä opetus

Esiopetuksen opetussuunnitelmasta puuttuu perinteinen oppiainejako. Esiopetuksen tulisikin olla luonteeltaan eheyttävää. Opetettava sisältö voidaan toteuttaa aihekokonaisuudet ylittävästi ja toimia aidoissa oppimisympäristöissä. Matematiikkaa voidaan eheyttää kaikkiin esiopetuksen opetussuunnitelmassa esille tuleviin aiheisiin. Laululeikissä kehonrytmeistä voidaan kuvien avulla tehdä sarjoja, jotka toistuvat laulun aikana. Polttopalloa pelatessa voimme laskea montako lasta on heittämässä palloa ja montako lasta pelissä on mukana. Lopuksi, voimme vertailla tuloksia keskenään. Eheyttävän opetuksen tarkoituksena on, että lapsi oppisi vertailemaan asioiden välisiä suhteita ja liittämään ne omaan elämään.

Opettajan ammattitaidon näkökulma

Opettajan ammattitaidolla on katsottu olevan merkitystä lapsen matemaattisten taitojen kehityksessä. Lasten taitojen kehittyessä enemmän opettajan laadukkaan ohjauksen ryhmissä (Pakarinen, ym., 2011).

Matematiikan oppimisessa opettaja on keskeinen toimija kolmella eri tasolla, opetussuunnitelman, opettajan oman osaamisen ja oppilaiden tukemisen tasoilla. Opetussuunnitelma antaa raamit sekä opetustavalle että opetuksen sisällölle. Opettajan päätettäväksi kuitenkin jää käytännön toteutus. Opettajan oma matemaattinen ja pedagoginen ammattitaito vaikuttaa opetukseen ja sitä kautta lasten oppimiseen. Lisäksi, opettajan erilaiset asenteet ja uskomukset välittyvät lapsille. Oppilaiden tukemisessa opettajan tulee osata valita lapselle oikeanlaiset tukitoimet ja toteutus, jotka vastaavat tuen tarvetta.

Kaikki esiopetuksen toimintaympäristöt tulisi nähdä oppimisympäristöinä ja juuri sen oppimisympäristön koko potentiaali tulisi ottaa käyttöön. Matematiikan kannalta suotuisa oppimisympäristö syntyy, kun ympärillä olevat matemaattiset ilmiöt otetaan tarkastelun kohteeksi. Oppimisympäristön tulisi muuttua lasten tarpeiden mukana, jolloin oppimateriaaleja lisätään edessä matematiikan sisällöissä. Ympäristössä tulisi myös näkyä juuri sen lapsiryhmän lapset ja heidän mielenkiinnonkohteet ja tavoitteet.

Linkki videoon: <https://youtu.be/OVMEzQHKymk>

Geometria

Ann-Catherine Henriksson
Käännös: Niklas Ollila



Tutustumme tässä tekstissä muotojen maailmaan ja keskitymme varsinkin geometrisiin muotoihin ja kappaleisiin. Vaikka sanaa geometria ei tulekaan käytettyä kovin usein lasten kanssa toimiessa, on tässä kuitenkin kyse muodoista, joita lapset kohtaavat päivittäin. Tässä matematiikan ja kielen oppiminen voivat kulkea käsi kädessä. Lähdän liikkeelle siitä, miten lasten geometrian ymmärtämistä kuvataan ohjausasiakirjoissa ja alan tutkimuksissa. Tämän jälkeen puhun muotojen ja kappaleiden nimityksistä. Lopuksi esittelen joitakin esimerkkejä toimintamuodoista, joilla voidaan tukea lasten geometristen kuvioiden ja yhteyksien ymmärryksen kehittymistä.

Ohjausasiakirjat

Varhaiskasvatussuunnitelman perusteissa todetaan, että: ”Lapsia innostetaan pohtimaan ja kuvailemaan matemaattisia havaintojaan ilmaisemalla ja tarkastelemalla niitä esimerkiksi kehollisesti tai eri välineiden ja kuvien avulla. [...] Lapsia kannustetaan tutkimaan kappaleita ja muotoja sekä leikkimään niillä. Lasten geometrisen ajattelun vahvistamiseksi heille järjestetään mahdollisuuksia rakenteluun, askarteluun ja muovailuun.” (OPH, 2018, s. 46) Esiopetuksen opetussuunnitelman perusteista löytyy vastaavanlainen kuvaus. Esiopetuksessa lapset myös opetussuunnitelman mukaan ”... harjoittelevat nimeämään niitä.” (OPH, 2016, s. 36)

Lapsen opinpolku

Lapsen geometrian ymmärtäminen kehittyy vaiheittain. Ensimmäisellä tasolla lapsi tunnistaa aiemmin näkemiään muotoja. Pöydät ovat usein samanmuotoisia, kuten talotkin, mutta lapsi ei tässä vaiheessa vielä näe, että talo muodostuu neliöstä ja suorakulmiosta. Vähitellen lapsi alkaa analysoida muotoja tarkemmin, ja kuvioita ja muotoja aletaan tunnistaa niiden ominaisuuksien, kuten kulmien ja sivujen lukumäärän, perusteella. Lapsi saavuttaa seuraavan tason opittuaan analysoimaan muotoja niitä toisiinsa verraten. Neliöt ovat suorakulmioita, mutta kaikki suorakulmiot eivät ole neliöitä.

Lasten on usein helpompaa havaita samankaltaisuuksia kuin eroja. Jotta lapsi voisi tunnistaa ja muodostaa käsityksen jostakin muodosta, pitää sitä myös verrata toisiin muotoihin, niin että muodon erityispiirteet tulevat esille. Lapsia on myös hyvä haastaa. Esimerkiksi kolmioita tutkittaessa voi mukaan ottaa esineitä, jotka eivät ole kolmioita. Lapsia voi sitten pyytää selittämään, minkä vuoksi esineitä ei voi pitää kolmioina.

Eri muotojen suhteet toisiinsa ovat tärkeitä oivalluksia, aivan kuten käsitys siitä, miten muotoja voidaan jakaa ja yhdistää. Tämä on myös perusajatus Fröbelin materiaalissa. Tutkimuksissa on voitu osoittaa, että lapset op-

pivat geometrisista muodoista helpoiten ympyrän, kun taas kolmio on usein vaikeampi käsittää. Nykyisin tiedetään myös, että lasten on helpompi ymmärtää eri muotojen erityispiirteitä, jos heille tarjotaan mahdollisuus itse luoda muotoja eri materiaalien avulla.

Oikeat nimitykset

Eri muotojen erottamisen ja luokittelun taito kehittyy lapsilla kauan ennen, kuin he osaavat nimetä muotoja. Opettajan tulee johdonmukaisesti pyrkiä käyttämään oikeita nimityksiä eri geometrisista muodoista ja kappaleista ja välttää sekoittamasta arkisia ja matemaattisia nimityksiä keskenään. Tämä tarjoaa myös oivallisen tilaisuuden tukea lapsen kielenoppimista. On tärkeää oppia oikeat käsitteet alusta alkaen. Tällöin lapsen ei myöhemmin tarvitse vaihtaa käsitettä ja korvata sitä toisella. Pienet lapset sekoittavat usein esineen nimen - kuten pyörä, kuula, ruutu tai taulu - geometrisen muodon nimeen. Samoin lapsen voi olla vaikea erottaa kaksiulotteisten muotojen ja kolmiulotteisten kappaleiden nimitykset toisistaan. Neliö voi siis lapselle merkitä sekä kaksiulotteista muotoa että kuutiota, tai päinvastoin.

Puhuessamme kaksiulotteisista muodoista käytämme siis käsitteitä ympyrä, neliö, suorakulmio ja kolmio. Ja puhuessamme kolmiulotteisista kappaleista käytämme käsitteitä pallo ja kuutio. On siis tärkeää, että lapsi tietää ja käyttää oikeita käsitteitä, mutta sitäkin tärkeämpää on, että lapsella on mahdollisuus tutkia eri muotoja ja kappaleita, verrata ja analysoida niitä ja vähitellen muodostaa käsitys niiden eroista ja yhteyksistä toisiinsa.

Tutkimista ja oppimista...

- **Rakentamalla** (palikoilla, legoilla, piirustuksilla)
- **Muotoilemalla** (savesta, lumesta, hiekasta, tikuilla, omalla keholla tai yhdessä toisten lasten kanssa, eripituisilla köysillä jne.)
- **Havainnoimalla** (kokoa, muotoa, väriä, kaksi- ja kolmiulotteisia kuvioita). Erityisesti kolmiulotteisten kappaleiden kohdalla on lasten hyvä havainnoida itse, miltä ne näyttävät eri suunnista.
- **Lajittelemalla** (muodon, kulmien lukumäärän mukaan jne.)
- **Tunnustelemalla** - muotoja tulee havainnoida eri aistien avulla. (Yksi mahdollisuus on käyttää nk. salaista pussia, jossa olevia kolmiulotteisia muotoja lapset saavat tunnustella.)

- **Itse luomalla** - lapset voivat esimerkiksi ämpäriin kerätyistä erilaisista geometrisista muodoista itse luoda uusia muotoja. Lapset voivat myös luoda mielikuvitushahmojaan tai satuja muotojen avulla.
- **Piirtäen tai kameralla dokumentoiden.** Lapset voivat lähteä metsästämään eri muotoja tabletin avulla. Tällä tavalla voivat myös ne lapset, joilla vielä on vaikeuksia ilmaista itseään suullisesti, tuoda mukaan omia muotolöytöjään.

Lopuksi

Lapsen oppimista on siis tarkoitus tukea haasteilla, jotka vastaavat lapsen omaa tasoa. Kaikkein pienimmille voi klassinen muotolaatikko olla haastava harjoitus. Vähän vanhemmille voi tarjota erilaisia palapelejä tai ongelmanratkaisutehtäviä. Avoimet kysymyksenasettelut innostavat lapsia tutkimaan ja kuvailemaan omaa ajatteluaan.

Linkki videoon: <https://youtu.be/FSMprHY0aMU>

Tutustu geometriaan liittyvään Lela-tarinaa: Tunteelliset ympyrät - tarina jossa kolmio muuttuu palloksi.



Matemaattisten taitojen tukeminen

Salla Jansson



Varhaiskasvatuslaissa määritellään varhaiskasvatuksen tavoitteet. Osana näitä tavoitteita on tunnistaa lapsen tuen tarve ja toteuttaa tarkoituksenmukaista tukea. Lisäksi, varhaiskasvatussuunnitelmassa ja esiopetuksen opetussuunnitelmassa on linjattu laadukkaana varhaiskasvatuksen käytäntöjä, joihin sisältyy lapsen matemaattisten taitojen tukeminen.

Tutkimuksissa on pystytty osoittamaan, että jo varhaiskasvatusikäisen lapsen matemaattiset taidot ennustavat myöhempiä matemaattista osaamista (Aunio & Niemivirta, 2010). Varhaisten matemaattisten taitojen tukemista voidaan pitää merkityksellisenä lapsen myöhemmän elämän kannalta. Koulun mentäessä erot hyvien ja heikkojen lasten matemaattisissa taidoissa on todettu kasvavan (Aunola, Leskinen, Lerkkanen, & Nurmi, 2004). Matemaattiset vaikeudet ovat melko pysyviä ja ne ulottavat vaikutuksensa lapsen koulupolun alusta aina aikuisiälle saakka. Tämän vuoksi haasteisiin tulee tarttua varhain, jolloin ongelmien kasaantumista voidaan vielä ennaltaehkäistä.

Työmuistin ja kielellisten taitojen merkitys

Lapsen vaikeutta oppia matematiikkaa voidaan kuvata eri termein. Termillä matemaattiset oppimisvaikeudet ei viitata pelkästään matematiikan oppiai-

neeseen, vaan laajempiin vaikeuksiin matematiikkaa vaativilla elämän osa-alueilla. Matemaattisia oppimisvaikeuksia esiintyy 15-20% lapsista ja nuorisista.

Varhaisten matemaattisten taitojen lisäksi työmuistin ja kielellisten taitojen on todettu ennustavan myöhempää matemaattista osaamista. Kielellisistä taidoista erityisesti varhaiskasvatuskäisen lapsen sanavarasto näyttäisi olevan yhteydessä numeroiden nimeämiseen ja tunnistamiseen sekä ennakoivan yleistä matemaattista osaamista ainakin lyhyellä aikavälillä. Varhaiskasvatuskäisen lapsen hyvät työmuisti taidot vaikuttavat sekä oppimistilanteeseen mm. kykyä luetella pidempiä lukusarjoja ja hyvien laskustrategioiden kautta että kykyyn siirtää asioita pysyvään muistiin.

Edellä mainittuja tekijöitä voi tulla esille esimerkiksi lapsen laskiessa, montako kiveä hän on kerännyt taskuunsa? Laskutehtävän ratkaiseminen vaatii lapselta useita taitoja, joita ilman tehtävän ratkaiseminen ei onnistu. Lapsen on ensinnäkin osattava muodostaa lukujono oikeassa järjestyksessä ja tunnistettava yhteys lukusanan ja laskettavan kiven välille. Lisäksi, lapsen tulee tietää, että jokainen kivi lasketaan vain kerran, eikä laskettavien kivien järjestyksellä ole merkitystä. Lopuksi, on tiedettävä, että viimeinen lukusana kertoo kivien määrään. Tehtävä haastaa lapsen työmuistia, sillä lapsen tulee pystyä muistamaan olennaiset asiat koko tehtävän teon ajan; annettu tehtävä, sen hetken kivien lukumäärä ja lopputulos.

Matematiikan tukemisen keinoja

Varhaiskasvatukseen osallistuminen on osa ennaltaehkäisevää tukea ja varhaisen tuen tarkoituksena on ennaltaehkäistä oppimisvaikeuksien syntymistä ja monimuotoistumista. Varhaiskasvatuskäiselle lapselle ei perinteisesti anneta diagnoosia matemaattisista oppimisvaikeuksista. Lapsi ei myöskään tarvitse diagnoosia pedagogisten tukitoimien saamiseksi, vaan opettaja voi aloittaa tukemisen välittömästi huomattuaan puutteita lapsen matemaattisissa taidoissa tai asenteissa. Tukitoimien tulee perustua havainnoituihin tarpeisiin, yhdessä suunniteltuihin ja toteutettuihin toimenpiteisiin sekä tuen kehittämisen pohjana toimivaan arviointityöhön. Tukitoimien järjestäminen tulisi lähteä lapsen vahvuuksista sekä oppimis- ja kehitystarpeista. Se voi olla monenlaista, lyhyttä tiettyä tilannetta varten tai laajempia ja jatkuvampia toimenpiteitä.

Matemaattisten taitojen tukemisessa tulisi rikkaan oppimisympäristön lisäksi käyttää tehokkaaksi todettuja harjoitusmenetelmiä, jolloin niiden tulokellisuudesta on luotettavaa tietoa. Näitä ovat esimerkiksi havainnollistava materiaali, pienryhmätyöskentely, kaverilta oppiminen ja tietokoneharjoittelu. Erityisesti kaikkien heikompien lasten kanssa oikeanlaisen tuen sisällöllä

on todettu olevan merkitystä.

Huomion kiinnittäminen lukumääriin

Minna Hannulan väitöstutkimuksessa löydettiin ensimmäisen kerran eroja, miten lapset kiinnittävät huomiota lukumääriin. Lisäksi, löydettiin yhteys lapsen spontaanissa taipumuksessa kiinnittää huomiota lukumääriin ja pienen lapsen matemaattisten taitojen kehityksen välillä. Lapset kiinnittävät eri tavoin huomiota matemaattisiin tehtäviin ja osa lapsista tarvitsee tukea kiinnittääkseen huomiota lukumääriin annetuissa tehtävissä. Lapsen ollessa kiinnostunut ympäröivistä matemaattisista ilmiöistä hän tulee automaattisesti saamaan huomattavan paljon harjoitusta, ja huomaamatta eniten harjoitusta tarvitseva lapsi voikin todellisuudessa saada harjoitusta kaikkein vähiten. Varhaiskasvatuksen henkilökunnan tuella on voitu parantaa varhaiskasvatuskäisten lasten spontaania taipumusta kiinnittää huomiota lukumääriin. Henkilökunnan tulisi ensin tunnistaa arjen hetket, jolloin lapsi osoittaa kiinnostusta spontaanin lukumäärään havaitsemisessa. Sen jälkeen henkilökunnan tulisi tukea lasta tilanteissa ja luoda näitä luonnollisia tilanteita lisää.

Lopuksi haluan ottaa esille näkökulman kasvatuksen ihmisihanteesta. Varhaiserityiskasvatuksen asiantuntijoiden Päivi Pihlajan ja Riitta Viitalan mukaan taitavasta ja osaavasta lapsesta ei saisi tulla varhaiskasvatuksen päämäärää. Pelkästään huippuosajan tavoittelu valitettavasti pienentää ihmisikäisyyttä. Erilaisuus tulisi nähdä luonnollisena osana varhaiskasvatusta. Olenaisista on löytää jokaisen lapsen vahvuudet ja keinot oppimiseen.

Linkki videoon: <https://youtu.be/WWejkaAXQcY>

Tilastot

Anni Jyrinsalo



Tilastointi ja sen harjoittelu varhaiskasvatuksessa ja esiopetuksessa voi tuntua kaukaiselta tai jopa haastavalta ajatukselta. Tilastoinnin alkeita tulee kuitenkin harjoiteltua lasten kanssa melkein huomaamatta päivittäin esimerkiksi paikallaolijoiden läpikäymisellä.

Tilastoinnin tarkoituksena on dokumentoida kerätty tieto. Kerätty tieto voidaan dokumentoida muun muassa tekstinä, numeroina, kuvina tai graafeina. Esimerkkejä tilastoinnista ovat esimerkiksi äänestystilanteet sekä pohdinnat, kuinka monta patjaa löydetään lepohuoneesta tai montako keltaista esinettä on leikkihuoneessa.

Baratta Lortonin malli



Yksi tilastoinnin opetusmalli on Baratta-Lortonin malli. Tässä mallissa lähdetään liikkeelle tutkittavien esineiden konkreettisesta keräämisestä ja tilastoisesta reaalidiagrammiksi. Konkreettiset esineet voidaan vaihtaa esimerkiksi PostIt -lapuiksi selkeämpää diagrammia varten. Lopuksi tutkituista esineistä muodostetaan konkreettinen ympyrädiagrammi.

Lähdetään tutkimaan esimerkiksi oppilaiden eriväristen hattujen tilastointia Baratta Lortonin mallin avulla. Aloitetaan hattujen tilastointi siitä, että kerätään lasten eriväriset hatut lattialle ja jaotellaan ne pylväiksi väreittäin. Näin syntyneestä *reaalidiagrammista* nähdään hattujen värijakauma, eli lukumäärien suhde toisiinsa.

Hatut voidaan myös korvata hattujen värejä vastaavilla PostIt -lapuilla. Tällöin lapsi saa omaa hatun väriä vastaavan PostIt -lapun, jonka hän vie taululle muodostaen *pylväsdigrammin*. Laput asetetaan vierekkäisiksi pylväiksi, joiden korkeutta vertaamalla saadaan selville värien lukumäärien suhteet toisiinsa. Muodostunutta tilastoa tarkastelemalla voidaan esimerkiksi pohtia: Minkä värisiä hattuja lapsilla on eniten?

Lopuksi tehdään hatuista *ympyrädiagrammi*. Ympyrädiagrammi muodostetaan asettamalla hatut väreittäin piiriin tasavälein. Kun piiri on muodos-

tettu, voidaan halutessa jakaa muodostunut ympyrä väreittäin sektoreihin, esimerkiksi lankakerien avulla. Muodostuneesta ympyrästä voidaan tarkastella muodostuneiden alueiden kokojen suhdetta toisiinsa.

Diagrammeja havainnoimalla voidaan oppilaiden kanssa pohtia, mitä kaikkea diagrammeista saadaan selville. Nähdäänkö esimerkiksi ympyrädiagrammista kuinka monta sinistä hattua oppilailla on? Entä saadaanko selville mikä väri on suosituin hattuväri? Kuinka monta vihreää hattua on enemmän kuin sinistä hattua? Paljonko hattuja on yhteensä? Saadaanko vielä jotakin muuta selville?

Äänestetään!

Toisena esimerkkinä varhaiskasvatuksessa tapahtuvasta tilastoinnin opetuksiosta toimii esimerkiksi äänestystilanteet. Otetaan esimerkiksi tilanne, jossa lasten tulee antaa palautetta päiväkodin keittiölle edellisen viikon lempiruuuistaan. Edellisen viikon ruokalajeista on leike- tai valokuvat, jotka on laitettu seinälle järjestykseen. Jokaisella ruokalajilla on oma värikoodinsa, joka näkyy esimerkiksi kuvan taustavärinä. Lapset saavat pohtia, mikä kyseisistä ruuista oli heille mieleisin. Kun lapsi on tehnyt valinnan, hän käy kastamassa kätensä kyseistä ruokalajia vastaavaan sormiväriin ja painaa kätensä kuvan ruokalajia kuvastavan lapun yläpuolelle. Seuraavat samalle ruokalajille annetut äänet muodostavat pylväsdiagrammin ruokakuvan yläpuolelle. Lopuksi voidaan tarkastella muodostunutta pylväsdiagrammia. Mikä ruokalaji oli suosituin? Mikä puolestaan vähiten suosittu? Pohdintojen jälkeen aikuinen koostaa tilastoista palautteen päiväkodin keittiön väelle.

Paikallaolijoiden tilastointia

Tilastointia voidaan harjoitella myös esimerkiksi aamupiirissä paikallaolijoiden tilastoinnilla. Jokaisella lapsella on oma nimi- tai kuvakortti. Käydään kortit läpi yksitellen ja pohditaan, onko kyseinen lapsi tänään päiväkodissa vai poissa, eli kotona. Tämän jälkeen kyseisen lapsen nimikortti sijoitetaan oikean pohjan päälle, eli joko päiväkotiin tai kotiin. Lopuksi voidaan pohtia, onko paikallaolijoita enemmän vai vähemmän kuin poissaolijoita.

Paikalla- ja poissaolijoita voidaan myös tutkia pidemmällä aikavälillä, esimerkiksi viikon aikana. Jokaisen aamupiirin ja paikallaolijoiden läpikäynnin jälkeen nimikortit viedään seinälle pylväsdiagrammiksi kyseisen viikonpäivän kohdalle. Paikalla- ja poissaolijoille voi muodostaa omat diagrammit, jolloin lopulliset tulokset on helpompi hahmottaa diagrammeista. Perjantaina voidaankin tarkastella, minä viikonpäivänä paikallaolijoita oli eniten? Entä vähiten? Päiväkodissa tilastointia siis harjoitellaan monien arkiaskareiden ohessa.

Keksitkö itse lisää askareita, joissa tilastointi näkyy tai tulee esille?

Tilastot ja todennäköisyydet

Tilastollisessa päättelyssä hyödynnetään todennäköisyyksiä. Todennäköisyys kertoo, kuinka todennäköisesti kuvattu asia tulee tapahtumaan. Tapahtuma on varma, mahdoton tai jotakin näiden väliltä. Otetaan esimerkki, jossa laatikossa on yhdeksän valkoista ja yksi punainen pallo. Laatikko peitetään kankaalla ja lasta pyydetään nostamaan laatikosta näkemättä yksi pallo. Ennen pallon nostamista lapsen tulee pohtia, kumpikohan väri laatikosta nousee. Lasta pyydetään perustelemaan oma valintansa ja lopuksi selvitetään, minkö arvaus oikein. Lapselta voidaan edelleen kysyä: Entä, jos laatikossa on viisi valkoista palloa ja viisi punaista palloa. Minkä värinen pallo laatikosta todennäköisimmin nousee? Tehtävää voidaan kokeilla eri pallojen määrien variaatioilla lasten osaamistason mukaan.

Linkki videoon: https://youtu.be/4FMNZG_ttoc

Tutustu tilastoihin liittyvään Lela-tarinaa: Kurahousupäivät - tarina tilastosta jossa sataa ja paistaa.



Ongelmanratkaisu



Johdatus ongelmanratkaisuun

Salla Jansson

Mitä tietoa ja taitoja lapset tulevat tarvitsemaan tulevaisuudessa? Se on kysymys, joka tulee ottaa huomioon jo varhaiskasvatuksessa, koska tällöin lähdetään luomaan näiden tietojen ja taitojen perustaa. Tulevaisuutta on vaikeaa ennustaa, mutta hyvin todennäköisesti myös silloin tullaan ratkaisemaan monimutkaisia ongelmia. Koulutuspolun yhtenä tärkeänä tehtävänä onkin kehittää lapsen ongelmanratkaisutaitoja. Ne toimivat myös yhtenä keskeisimpänä ajattelun taitojen kehittäjänä (Schoenfeld, 1985). Toimintaympäristöstä kumpuavat ongelmaratkaisutehtävät näkyvät myös varhaiskasvatus-ohjaavissa asiakirjoissa. Ongelmaratkaisutehtävät liitetään usein ajattelun kehittämiseen ja uuden oivaltamisen taitoihin.

Mikä on ongelma?

Ongelmaksi voidaan kutsua tilannetta, jossa ihminen haluaa saavuttaa jotakin, mutta ei tiedä kuinka hänen olisi mahdollista saavuttaa haluamansa (Newell & Simon, 1972). Kaikkea ei siis voida pitää ongelmana, vaan halutun tilan ja sen hetkisen tilanteen välissä on oltava aukko, johon ei löydy välittömästi ratkaisua. Ongelman käsite on siten luonteeltaan subjektiivinen, ja erilaiset tilanteet toimivat eri lapsille ongelmina. Toiselle lapselle tilanteen

ratkaisu voi tulla rutiininomaisesti, kun taas toinen voi etsiä siihen ratkaisua pitkäänkin.

Ongelmaratkaisutehtävät

Hyvässä ongelmanratkaisutehtävässä lapsi pääsee hyödyntämään entuudestaan tuttua tietoa uudessa kontekstissa ja haastamaan omaa ajatteluaan tehtävän parissa. Ongelmaratkaisuun tarvitaan erityisesti luovuutta ja sitkeyttä. Luovaa ajattelua tarvitaan erilaisten ratkaisuideoiden keksimiseen. Sitkeyttä tarvitaan tehtävän parissa ponnisteluun ja siihen, että lapsi tarvittaessa lähtee yrittämään uudestaan. Ongelmanratkaisutehtävien nostamat tunteet ovat merkityksellisiä tehtävien ratkaisemisen kannalta. Ongelmanratkaisun palkintona on onnistumisen ilo ja itseluottamuksen vahvistuminen, mutta ongelmanratkaisuun kuuluu luonnollisesti myös vaikeammin käsiteltäviä tunteita, kuten pettymystä ja turhautumista. Opettajan tehtävänä on tukea lasta erilaisten tunteiden noustessa pintaan, jotta ongelmassa voidaan edetä ja saada onnistumisen kokemuksia. Myös ratkaisuvaihtoehdot, jotka eivät ole suoraan johtaneet haluttuun lopputulokseen tulisi käydä lapsen kanssa läpi oppimisen näkökulmasta. Nämäkin ratkaisuyritykset voivat sisältää oivalluksia, jotka vievät kohti haluttua lopputulosta.

Ongelmaratkaisutehtävät voivat olla avoimia tai suljettuja. Avoimissa tehtävissä ongelmien alku- ja lopputilanne sekä niiden välinen ongelmanratkaisuprosessi voivat sisältää useita erilaisia vaihtoehtoja. Pienten lasten kanssa kohtaakin usein tilanteen, jossa heillä on ongelmasta hyvin erilainen näkemys kuin aikuinen on etukäteen kuvitellut. Erilaisten avoimien ongelmaratkaisutehtävien avulla lapset pääsevät haastamaan tietojaan ja taitojaan laajasti. Esimerkkinä avoimesta ongelmanratkaisusta voidaan pitää tilannetta, jossa lapset ovat kaivaneet suuren kuopan keskelle hiekkalaatikkoa ja täyttäneet sen vedellä. Lapset alkavat yhdessä pohtia, miten kaivurin olisi mahdollista päästä kuopan toiselle puolelle. Tässä ongelmassa ongelmanratkaisuprosessi on avoin, koska ratkaisuvaihtoehtoja on useita. Lapset voisivat ehdottaa, että rakennetaan silta, tyhjennetään vesi pois ja ajetaan läpi tai rakennetaan kaivurille siivet.

Ongelman ratkaisemisen vaiheet

Pólya (1945) jäseni ongelmanratkaisuprosessia neljän vaiheen kautta. Ensin ongelma pitää ymmärtää, sitten laaditaan ongelman ratkaisemista varten suunnitelma, seuraavaksi suunnitelma toteutetaan ja lopuksi, se vielä analysoidaan. Nämä neljä eri vaihetta voidaan usein tunnistaa ongelmanratkaisuprosessista, joskin todellisissa ongelmanratkaisutilanteissa eri vaiheet usein



toistuvat ja menevät osittain päällekkäin. Seuraavaksi tarkastelen ongelmanratkaisun vaiheita esimerkin avulla, jossa kaivurin tulisi päästä kuopan toiselle puolelle.

Ensin lasten tulee ymmärtää ongelma, eli kaivurin ei vielä ole mahdollista kulkea kuopan toiselle puolelle. Ongelman ymmärtäminen mahdollistaa ongelmasta kiinnostumisen ja herättää lapsissa aidon halun ratkaista sen. Opettajan tehtävänä on tukea lapsen ymmärrystä ja varmistua siitä. Ongelmaa voidaan avata sanoittamalla, mallintamalla, kuvilla tai helpottamalla sekä pilkkomalla ongelmaa osiin. Opettaja voi mallintaa lapsille, että tällä hetkellä kuormurilla ei pääse kuopan yli. Lisäksi, voidaan kokeilla, mitä kuormurille käy kuopassa, joka on täynnä vettä.

Ongelman ratkaisemisen suunnittelussa tulee huomioida, mitä ongelman selvittämiseen tarvitaan. Ratkaisu voi löytyä kokeilemisen ja erehtymisen kautta tai pidemmän pohdinnan tuloksena. Opettajan tehtävänä on tukea lasta löytämään ratkaisuja erilaisten kysymysten ja hienovaraisen ohjeistuksen avulla. Opettajan on kuitenkin tietoisesti vältettävä antamasta valmiita vastauksia, jotta lapsi pääsee itse kehittämään omia ratkaisuvaihtoehtoja. Lasten pohtiessa, miten kaivuri pääsee toiselle puolelle voi opettaja pohtia lasten kanssa, miten te olette itse kulkeneet veden yli? Voiko ratkaisu toimia kuormurille? Tämän jälkeen yksi lapsista voisikin ehdottaa, että kuopan yli rakennetaan silta. Pohdittavaksi jäisi, minkälainen silta ratkaisisi ongelman. Suunnitelmassa otettaisiin huomioon ainakin sillan materiaali, pituus ja leveys, jotta kuormuri pääsisi kuopan toiselle puolelle. Näitä pohdittaessa on hyvä käyttää apuna jo aiemmin ongelman ymmärtämisen havainnollistamiseen käytettyjä keinoja, jotka konkretisoivat suunnitelmaa.

Suunnitelman toteuttamisessa tulee lähteä liikkeelle ideasta, jossa lapset lähtevät rakentamaan siltaa yhdessä sovitun suunnitelman kautta. Opettajan tehtävänä on tukea suunnitelman toteutumista ennen kaikkea mahdollistajana, jotta esimerkiksi tarvittavat materiaalit löytyvät. Pienten lasten kanssa on myös tärkeää tarvittaessa tukea koko prosessin ajan toiminnanojauksen taitoja, jotta ongelman ratkaiseminen edistyy ja päästään testaamaan keksittyä ratkaisua. Tarvittaessa on myös katsottava taaksepäin ja kokeiltava jotakin uutta suunnitelmasta poikkeavaa.

Lopuksi, tulisi pohtia tehtävän ratkaisua. Ratkaistiinko haluttu ongelma? Miten siihen päästiin? Toimisiko keksitty ratkaisu jossakin muussa lapselle tutussa tilanteessa? Sillan rakentamisen jälkeen voitaisiin pohtia: Soveltuiko silta kuormurille? Kestikö se koko leikin ajan? Missä muualla on siltoja ja miksi niitä rakennetaan? Ratkaisujen pohtiminen lisää ongelmaratkaisutaitoja, jolloin erilaiset keinot ratkaista ongelmia lisääntyvät.

Linkki videoon: <https://youtu.be/wZ9zeEBI344>

Ongelmanratkaisun alkupolulla

Eva Staffans

Käännös: Inkeri Sundqvist

Lapset kohtaavat jatkuvasti tilanteita, jotka sisältävät pulmia, joiden ratkaisua he eivät heti tiedä. Näin lapset päätyvät pohtimaan ja kokeilemaan erilaisia ratkaisutapoja. Nämä ovat lapsille tärkeitä kokemuksia, koska ongelmanratkaisu kehittää heidän kriittistä ajatteluaan, joustavuuttaan ja yhteistyökykyään.

Matemaattisten ongelmien ratkaiseminen on matemaattisen tiedon perusta, mutta mikä on todella ongelma? Puhumme tässä yhteydessä ongelmasta, jos se voidaan ratkaista matemaattisen mallintamisen avulla tai jos kyseessä on tehtävä, jonka ratkaisutapa ei ole lapsille entuudestaan tuttu. Ongelmien ratkaisemiseksi vatii erilaisia ongelmaratkaisustrategioita. Strategiat kattavat ongelman muotoilun ja ratkaisemisen. Leikki vaatii usein ongelmanratkaisua, mikä osoittaa, että lapsille on kehittynyt kyky ratkaista (matemaattisia) ongelmia jo ennen kuin he saavat muodollista opetusta aiheesta. Lapset kehittävät ensin omat henkilökohtaiset strategiansa. Ne ovat toimivat sitten pohjana myöhemmille muodollisemmille strategioille.

Hyväksi ongelmanratkaisijaksi kehittyminen edellyttää monien ja monien erilaisten ongelmien ratkaisemista. Ongelmanratkaisukyky kehittyy verrattain hitaasti pitkän ajan kuluessa. Motivaatio ratkaista ongelmia on kehityksen kannalta erittäin tärkeässä asemassa.

Ongelmanratkaisua voidaan pitää matematiikan opetuksessa sekä keino-opettaa matematiikkaa, että itse päämääränä. Ongelmanratkaisusta tulee keino kehittää ymmärrystä erilaisesta matemaattisesta sisällöstä ja taidoista, kun käytetään matemaattisia käsitteitä, menetelmiä ja päättelyä lasten ratkaistessa ongelmia.

Ongelmien ratkaiseminen edellyttää päättelyä. Päättelyn ei tarvitse aina olla loogista, jotta se voidaan laskea päättelyksi. Vääräkin perustelu voi olla hyvä perustelu. Ongelmanratkaisutaitojen kehittymisen kannalta on kuitenkin

kin tärkeää, että päättelijällä on perusteluja, joihin hän pohjaa päättelynsä. Nuoremmat lapset esittävät usein mielikuvituksellisia, villedä ja luovia perusteluja, jotka ovat kuitenkin heidän oman kokemusmaailmansa näkökulmasta täysin loogisia.

Ongelmanratkaisua voidaan harjoitella eri matematiikan sisältöjen parissa. Toiminnan on tarjottava sopivasti haasteita lapsille. Useiden, monipuolisten ja ristiriitaistenkin kokemusten myötä lapsen päättely saattaa ajan saatossa muuttua. Päättelyn pysyvä piirre on kuitenkin se, että se lähtee liikkeelle perusteluista, jotka pohjaavat lapsen omiin kokemuksiinsa.

Lapsen päättely lähtee aina liikkeelle hänen omista kokemuksistaan, mikä on ratkaisevaa lopputuloksen kannalta. Lapsen voi joskus olla vaikeaa kuvitella, että on olemassa monia erilaisia ajattelutapoja, ja he ajattelevat mielellään, että on vain yksi tapa ratkaista tehtävä. Tämän mielikuvan laajentamiseksi lasten kannattaa antaa työskennellä erilaisten ongelmien parissa, myös sellaisten, joihin on useita vaihtoehtoisia ratkaisuja, ja joissa he saavat käyttää mielikuvitustaan.

Mikä ei kuulu joukkoon?



Kuusi, hirvi, possu ja hylje. Mikä niistä ei kuulu joukkoon? Aikuiset päättelivät usein, että kuusi ei kuulu joukkoon, koska se on kasvi ja muut ovat eläimiä. Toinen aika tavallinen valinta on hylje, koska se on ainoa, joka elää vedessä. Lapsilla on kuitenkin usein luovempia ratkaisuja, ja he saattavat

esimerkiksi päätellä, että possu on se, joka ei kuulu joukkoon. Tällöin on tärkeää kysyä: Miten ajattelit? ja miten päädyit lopputulokseen?

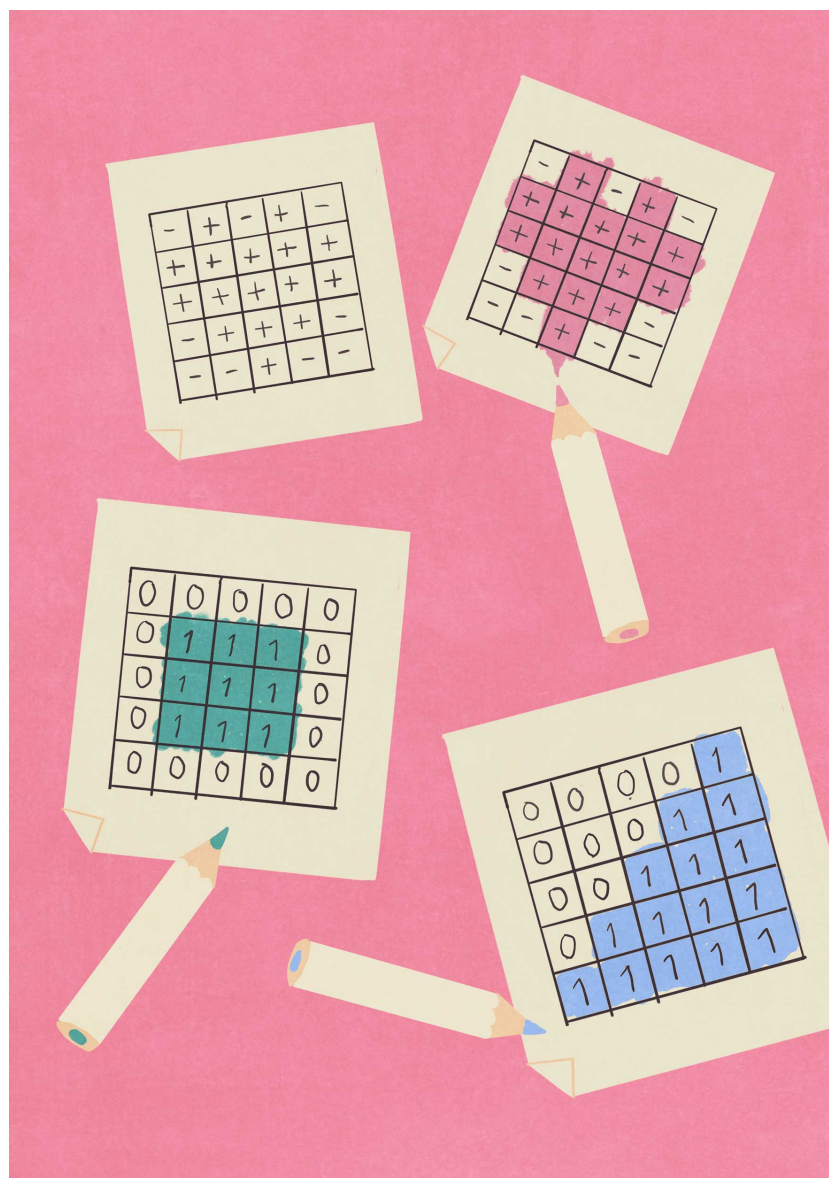
Silloin lapsi saattaa esimerkiksi selittää, että possu on ainoa, joka asuu sisällä.

Hirvi tulee valituksi pois aika harvoin, mutta tähänkin lapsilla saattaa olla hienoja perusteluja. He saattavat esimerkiksi päätellä, että hirvi on ainoa, joka saattaa juosta auton eteen ja johon saattaa törmätä.

Omasta päättelystä kertominen, ja selityksen seuraaminen, sisältää perustelua ja argumentointia sekä tietenkin ratkaisuja, arviointia ja johtopäätöksiä, samoin kuin omien ja toisten ratkaisujen ja perusteluiden tulkintaa, arviointia ja oivaltamista. Lasten esittämistä ratkaisuista voidaan keskustella, ja opettaja voi näyttää, että ratkaisuun voi päätyä monia erilaisia reittejä - välttämättä yhtä ainoaa oikeaa ratkaisua tai ratkaisutapaa ei ole.

Ohjelmointi ja algoritmit

Jonna Kangas



Ohjelmointi, puhekielellä koodaus, on nykyään kaikkien huulilla niin mediasa kuin koulutuksessa ja teknologistuva yhteiskuntamme tarvitsee tulevaisuudessa lisää aktiivisia kansalaisia, jotka osaavat paitsi käyttää ohjelmia ja laitteita, myös luoda uusia sekä kehittää olemassa olevia.

Jo pienten lasten elämässä digitaaliset sovellukset, eli ohjelmat, ovat arkipäivää, ja moni lapsi lukee kirjoja, pelaa sekä luonnollisesti vuorovaikuttaa vaikkapa isovanhempien kanssa laitteiden välityksellä.

Myös varhaiskasvatussuunnitelman perusteista ja esiopetussuunnitelmas- ta on löydettävissä taitoja ja sisältöjä, jotka liittyvät ohjelmointiin ja sen roolin ymmärtämiseen yhteiskunnassamme. Missään asiakirjassa ei kuiten- kaan vaadita suoranaisesti käyttämään tiettyä laitetta tai sovellusta. Var- haiskasvatuksessa onkin tärkeää mennä pedagogiikka edellä tarkastelemaan ohjelmoinnin roolia lasten elämässä.

Lyhyesti määriteltynä ohjelmointi on vuorovaikutusta koneiden ja laittei- den kanssa. Ohjelmoinnissa annetaan käsky, jonka avulla tietokone muodos- taa haluttua toimintaa. Ohjelmointi liittyy varhaiskasvatuksessa aina sekä Ajattelun ja oppimisen, että Monilukutaidon laaja-alaisiin osaamisen aluei- siin. Enenevässä määrin voidaan myös ajatella, että länsimaisessa kulttuuris- sa eläminen edellyttää myös ohjelmointiin liittyvää kulttuurista ymmärrystä, sekä luonnollisesti kieleen liittyvien viestien välittämistä sekä tulkintaa.

Varhaiskasvatuksessa ohjelmointi ei tapahdu useinkaan laitteilla, vaan monista leikeistä ja ryhmän yhteisistä harjoituksista voidaan tunnistaa oh- jelmointiajatteluun liittyviä piirteitä. Ohjelmointi on ajattelun taitojen har- joittelua, usein ongelmanratkaisutaitojen harjoittamista ja luovaa ajattelua uudenlaisen ratkaisun löytämiseksi, sekä kielellistä ilmaisua, joka ohjelmoin- nissa toteutuu yksiselitteisten ohjeiden eli käskyjen ilmaisun kautta.

Varhaiskasvatuksessa, sekä laajemminkin, monilukutaidolla tarkoitetaan kaikkia tapoja tulkita ja ymmärtää maailmaa ja ihmisiä. Siihen kuuluu myös digitaalinen lukutaito ja taito ymmärtää ympärillämme olevia laitteita ja koodeja, jotka niitä säätelevät

Monilukutaito on samanaikaisesti taitoa tulkita ja ymmärtää, mutta myös kommunikoida sekä vuorovaikuttaa. Myös luova ilmaisu ja uudenlaisten rat- kaisuiden keksiminen liittyvät vahvasti monilukutaitoon. Luovuutta edesaut- taa lasten luontainen rohkeus kysyä kysymyksiä kaikesta ympärillään olevas- ta, kunhan vain me aikuiset uskallamme luovasti hypätä mukaan niitä tutki- maan.

Ennen kaikkea monilukutaidolla voi leikkiä ja usein monilukutaito ilme- nee lapsissa nimenomaan leikissä. Leikin voi aloittaa, vaikkapa etsimällä koo- deja omasta päiväkotiryhmästä. Onko teillä automaattiset valot käytävällä tai automaattinen hana? Kuvittakaa tai rakentakaa nämä koodit palikoista tai piirtämällä. Mitä tapahtuu? Miten koneen kanssa itseasiassa vuorovaiku-

tetaan? Miksi näin tapahtuu? Ja kuka mahtaa olla keksinyt näin jännittävän tavan kertoa koneelle meidän ihmisten asioista?

Lopuksi ensiaskeleita ohjelmointiin kannattaa dokumentoida esimerkiksi sadutuksen keinoin. Kertokaa esimerkiksi tarina siitä, miten lapset auttavat konetta? Voitte myös kertoa tuttuihin tarinoihin hieman ohjelmointia auttamaan tarinan ratkaisussa? Mitä jos kolmella karhulla olisi ollut kännykkään kytketty murtohälytysjärjestelmä? Entäpä jos Tähtäpään hiuksia olisi voinut ohjata kaukosäätimellä?

Algoritmit ja algoritminen ajattelu varhaiskasvatuksessa

Algoritmit ja algoritminen ajattelu ovat ohjelmoinnin peruskäsitteitä, joita voidaan pedagogisesti harjoitella varhaiskasvatuksessa. Algoritmilla tarkoitetaan ohjetta sille miten tehtävä tai prosessi suoritetaan. Koska algoritmeja annetaan laitteille, on algoritmien oltava yksikäsitteisiä, selkeitä ja järjestelmällisesti annettuja.

Algoritminen ajattelu ja varhaiskasvatukseen liittyvä vuorovaikutteinen ja lasten osallisuutta tukeva pedagoginen ajattelu eroavatkin toisistaan merkittävästi. Laitteiden kanssa ei tarvitse neuvotella, kuunnella mileipiteitä tai kysyä annoksen kokoa. Varhaiskasvatuksessa on kuitenkin päivittäin myös arkeen ja perushoitoon liittyviä tilanteita, joissa lasten odotetaan käyttäytyvän kuin laitteet. Ruokailu ei esimerkiksi onnistu, jos ensin viedään lautaset pois, ja sitten vasta syödään.

Algoritminen ajattelu ja sen pedagoginen tukeminen lasten toiminnassa auttavat lapsia kehittämään itsehallintataitojaan ja omatoimisuuttaan päivittäisissä askareissa, kuten muussakin matematiikan pedagogisessa tukemisessa. Leikillisuus ja leikit tekevät oppimisesta usein lapsille mieluisampaa kuin rutiinien pakonomainen toistaminen. Algoritmeilla leikkiminen kannattaa aloittaa esimerkiksi koodaamalla lapset käsienspesua varten, vaikkapa kuvakortein. Samalla lapset saavat tukea matemaattis-loogisen ajattelun kehittymiseen. Lapset harjoittelevat tehtävän purkamista osiin sekä omien ja ryhmän yhteisten tosituvien toimintatapojen tunnistamista, ja oppivat itse sanallistamaan toimintaohjeita näihin tilanteisiin.

Opettajien on tärkeää tunnistaa algoritmiseen ajatteluun liittyviä osataitoja sekä pohtia missä järjestyksessä ja millaisilla leikeillä ja tehtävillä eri taitoja voidaan harjoitella eri-ikäisten lasten kanssa. Kun alle kolmevuotiaat pääsevät ihmettelemään ongelman pilkkomista osiin esimerkiksi lelujen siivouksen yhteydessä tai osallistuessaan laulamaan ja viittomaan "Metsämökin ikkunassa-laulua, tarvitsevat viisi ja kuusivuotiaat jo haastavampaa ajattelua. He ovat myös taitavampia tarkastelemaan ohjeen osia sekä muuttamaan niiden järjestystä omassa toiminnassaan.

Sitten vielä pähkinä purtavaksi. Ohjelmointi on määritelty sekä Suomessa että kansainvälisesti tulevaisuuden taidoksi. Tämä tarkoittaa, että yhteiskunnassamme oletetaan, että lapset tulevaisuudessa ovat koodaavia kansalaisia. Monet visiot ovat Suomessa poliitikkojen ja insinöörien laatimia. Sen vuoksi varhaiskasvatuksen opetushenkilöstöllä onkin suuri vastuu tarkastella niitä pedagogisin silmäläsein, lasten kehityksen, oppimisen ja osallisuuden näkökulmat mielessä. Varhaiskasvatuksen tavoitteena on tarjota lapsille eväät aktiiviseen ja vastuulliseen elämään, jossa lapset saavat olla toimijoita, tekijöitä ja luovia kokeilijoita. Millaisen yhteiskunnan toivomme heidän koodaavan meille tulevaisuudessa?

Entä tänä päivänä, millaiseen hyvinvointiin ja osallisuuteen ohjaamme lapsia tässä ja nyt? Vastaus ei enää tänä vuonna voi olla se, etteivät laitteet ja ohjelmat kuuluisi lasten elämään. Ne ovat arkipäivää kodeissa ja siksi niiden kanssa toimitaan ja niiden vaikuttamista tutkitaan ja harjoitellaan yhtälailla kuin kieltä ja arjen taitoja. Me voimme kuitenkin vaikuttaa siihen mitä lapset uusilla taidoillaan tekevät, ja ennenkaikkea siihen, miten he kokevat omat mahdollisuutensa tuottaa hyvinvointia ja iloa itselleen ja ympärillään oleville ihmisille.

Haluan toivottaa teille hyvää matkaa ohjelmoinnin parissa. Toivon, että tekemisen ja toiminnan lomassa jää aikaa miettiä lasten kanssa kysymystä siitä, miten ohjelmointi-ajattelun ja pelien maailmaan liitetään vastuullisuus, toisista ja itsestä huolehtiminen ja hyvinvointi. Haastan teitä myös pohtimaan oman ryhmänne polkua ohjelmointiin työyhteisössänne ja myöhemmin lasten kanssa toimiessanne.

Linkit videoihin:

<https://youtu.be/vx9lO92K9Kc>, <https://youtu.be/XAJhinHxAoI>

Tutustu ohjelmointiin liittyvään Lela-tarinaa: Aarrekartta - tarina koodista, joka näyttää tien.



Matematiikka yhteiskunnassa

Martina Aaltonen ja Salla Jansson



Matematiikka on yhteiskunnalle, mitä ilma on elämälle. Sitä on kaikkialla, mutta se ei ole silmin nähtävissä. Se on elintärkeää, mutta näkymättömänä ja aineettomana sen merkitys helposti unohtuu. Matematiikan yhteiskunnallista merkitystä voi kuitenkin yrittää avata kattavalla kokoelmalla esimerkkejä matematiikan sovelluksista. Millainen kokoelman tulisi olla? Yksikään kokoelma ei ole täydellinen, mutta pienelläkin kokoelmalla voi avata uusia ulottuvuuksia matematiikan merkityksestä yhteiskunnassa -niin aikuisille kuin lapsillekin. Tässä tekstissä avataan matematiikan yhteiskunnallista merkitystä kymmenen esimerkin kautta. Jokaisen sovelluksen esittely sisältää sekä teoriaosuuden että varhaiskasvatukseen sopivan tehtäväesimerkin. Tavoitteena on näin lisätä opettajan tietoa matematiikan merkityksestä yhteiskunnassa, jonka pohjalta aiheesta voi keskustella lasten kanssa, ja lisäksi tarjota konkreettisia ideoita opetustuokioihin.

Matematiikka on kieli, jolla kaikki luonnonlait on kirjoitettu

Matematiikka on kieli, jolla voidaan kuvata luonnon fysikaalisia, kemiallisia ja biologisia ilmiöitä, kuten painovoimaa, kemiallisia reaktioita ja perinnöllisyyttä. Luonnontieteissä matematiikkaa ja tilastotiedettä hyödynnetään monipuolisesti sekä empiirisessä että teoreettisessa tutkimuksessa. Empiirisessä tutkimuksessa matematiikkaa hyödynnetään aina koeasetelmien suunnittelusta tulosten analysointiin. Teoreettisen tutkimuksen saralla esimerkiksi

Einstein pystyi puolestaan laskemalla päättelemään valon taipuvan massan vaikutuksesta ennen kuin se osattiin kokeellisesti todistaa.

Lasten kanssa tähän sovellukseen voi tutustua esimerkiksi keinun tutkimisen kautta. Lapsi menee keinumaa. Opettaja antaa ohjeen: ”Jää keinuasi mahdollisimman ylös.” Opettaja antaa kaikille ryhmän lapsille mahdollisuuden kokeilla tehtävää vapaasti. Tämän jälkeen pohditaan, miksi kukaan ei onnistunut tehtävässä? Maan painovoima vetää kappaleita puoleensa ja tästä johtuen keinu palautuu aina lähtötilaan, joka on mahdollisimman lähellä maan pintaa. Lapsille voidaan kertoa, että matematiikalla voidaan puhua tällaisista ilmiöistä.

Matematiikka on kieli, jolla tietokoneet toimivat

Tietokonetta varten kaikki informaatio, kuten teksti, kuva ja ääni on muutettava digitaaliseen muotoon eli ilmaistava binäärilukuina ”ykkösistä ja nolista koostuvina jonoina.” Esimerkiksi käsin piirretty kuva voidaan skannata tietokoneelle. Mitä silloin itse asiassa tapahtuu? Skannauksen yhteydessä käsin piirretty kuva ilmaistaan pikseleinä. Tätä voidaan havainnollistaa seuraavasti. Ensinnäkin skannattavan kuvan päälle asetetaan niin tiheä ruudukko, että jokainen ruutu voidaan värittää yhdellä värillä, ilman että kuvan laatu kärsii kohtuuttomasti. Sitten jokaisen ruudun kohdalla ilmaistaan kolmen eri luvun avulla sinisen, punaisen ja keltaisen värin määrä ruudussa. Tällä tavalla käsin piirretty kuva saadaan ilmaistua lukujen avulla.

Tietokone on pohjimmiltaan vain tehokas laskukone. Kaikki käskyt palautuvat konekäskyihin, jotka muuttavat binäärilukuja toisiksi binääriluvuiksi yksinkertaisilla peruslaskutoimituksilla, kuten yhteenlaskun, vähennyslaskun, kertolaskun ja jakolaskun avulla. Tietokoneen teho perustuukin pohjimmiltaan sen nopeuteen. Se pystyy tekemään miljoonia laskutoimituksia sekunnissa.

Digitaalisiin kuviin voidaan tutustua lasten kanssa seuraavan tehtävän kautta. Tietokoneella kuvat koostuvat pienistä ruuduista, joiden väri ilmoitetaan lukuina. Lasten kanssa voidaan tuottaa kuvia tietokoneen ohjeita seuraamalla. Värittämällä 5 kertaa 5 ruudukko ohjeiden mukaan lapsille selviää, onko kuvassa sydän vai salmiakki.

Opettaja tuottaa paperille kaksi 5 kertaa 5 ruudukkoa ja valitsee ruudut, jotka muodostavat sydämen ja salmiakin. Valittuihin ruutuihin opettaja merkkää numeron yksi ja loppuihin ruutuihin nollan. Lapset värittävät ohjeen mukaan ruudut, joissa on yksi ja näin saavat sydän kuvion esille. Tehtävää voidaan monimutkaistaa suurentamalla ruudukkoa ja muuttamalla etsittäviä kuvioita. Lapsille voidaan kertoa, että tietokone ja tulostin puhuvat keskenään matematiikkaa.

Matematiikalla rakennetaan toimivia koneita ja kestäviä rakennuksia

Matematiikan kielellä ilmaistavia luonnon lakeja sovelletaan tekniikassa toimivien ja turvallisten koneiden, rakennusten ja sähkölaitteiden suunnitteluun. Tekniikan saavutuksia ovat esimerkiksi liikennevälineet, korkeat rakennukset, voimalaitteet sekä tietokoneet. Miltä näyttäisi yhteiskunta ympärillemme ilman niitä?

Kestäviin rakennuksiin voidaan lasten kanssa tutustua rakentamalla ryhmän kanssa palikoista mahdollisimman korkea linna. Samalla keskustellaan tekijöistä, jotka vaikuttavat linnan kestävyys: Miten palikoiden sijoittelu vaikuttaa palikkalinnan kestävyys? Millaiset rakenteet ovat kestäviä? Lapsille voidaan kertoa, että aikuiset pitävät matematiikalla huolta siitä, että oikeat talot eivät sorru kuten hiekkalinnat sateen tultua.

Matematiikalla havainnoista saadaan tietoa ja varmuutta

Tilastotieteessä kerätään havaintoaineistoja, kuvaillaan havaintoaineistoja tilastollisten tunnuslukujen avulla ja tehdään niiden perusteella päätelmiä, sekä selitetään ilmiötä. Tilastotiedettä sovelletaan lähes kaikilla tutkimusaloilla uuden tutkimustiedon tuottamiseen. Laajalti sovellettu tilastollinen hypoteesintestaus perustuu todennäköisyyslaskentaan.

Lapsi tulee päiväkotiin ja kertoo innoissaan aamulla tekemästään havainnosta: ”Minä olen ainoa ryhmän lapsi, jolla on sateenkaaren värinen polkupyörä!” Lapsen väitettä päätetään tutkia: Lasten polkupyörien värien mukaan muodostetaan pylväsdiagrammi käyttämällä tarralappuja. Lopuksi tarkastellaan diagrammia ja keskustellaan havaintojen perusteella saaduista tuloksista. Lapsille voidaan kertoa, että käyttämällä matematiikkaa asioita voidaan tutkia ja saada niistä varmaa tietoa.

Matematiikalla luodaan ennusteita tulevasta

Tulevaisuuden ennusteita varten pitää ennustettavasta ilmiöstä ensin rakentaa matemaattinen malli. Sitä varten pitää valita olennaiset muuttujat, selvittää muuttujien merkitys mallinnettavassa ilmiössä sekä niiden keskinäiset riippuvuudet ja lopuksi kuvata ilmiö mahdollisimman tarkasti matematiikan kielellä. Mallissa esiintyvien muuttujien arvojen ennustaminen niissä havaittavien trendien avulla tuottaa matemaattisen mallin avulla, tulevaisuuden ennusteita itse ilmiöstä. Esimerkiksi maapallon väestön määrän kannalta olennaisia muuttujia ovat naisten kokonaishedelmällisyysluku, synnyttäjien keski-ikä ja toteutunut elinaika. Niissä tapahtuvien trendien avulla YK on voinut antaa pitkän aikavälin väestöennusteen. Väestöennusteiden lisäksi

muita päätöksenteon kannalta tärkeitä ennusteita ovat esimerkiksi talousennusteet ja ilmastoennusteet.

Lasten kanssa voidaan tehdä tulevaisuuden ennusteita merkitsemällä valitun ajanjakson ajan aamupiirin aikana pylväsdiagrammiin tieto ulkona olevasta säätilasta. Ajanjakson päätyttyä voidaan pylväsdiagrammia hyödyntäen ennustaa, millainen sää on ensi vuonna samaan aikaan. Pohtikaa lasten kanssa: Onkohan pylväsdiagrammi ensi vuonna samanlainen vai ihan erilainen? Minkälainen sää on tyypillinen eri vuodenaikoina? Sää vaihtelee vuodenaikojen mukaan, mutta jokainen vuosi on erilainen! Lapsille voidaan kertoa, että myös aikuiset yrittävät saada tulevaisuudesta tietoa matematiikalla.

Matematiikalla tietoa pidetään salassa ja järjestyksessä

Verkkopankin käyttäminen turvallisesti ja luottamuksellisen tiedon lähettäminen sähköpostina edellyttävät luotettavien salausmenetelmien olemassaoloa. Salausmenetelmien tavoitteena on taata viestin välittyminen lähettäjältä vastaanottajalle, salattuna, muuttumattomana ja niin että sen alkuperä voidaan varmistaa. Salauksessa ja salauksen purkamisessa käytetään salaussavaimia, jotka perustuvat vaikeasti ratkaistaviin matemaattisiin ongelmiin. Matematiikkaa hyödynnetään syvällisesti myös hakukoneiden suunnittelussa, kun valtavasta tietomäärästä halutaan seuloa haun tekijää kiinnostavat tulokset.

Salaukseen voidaan tutustua päiväkodin pihalle ilmestyneen aarrearkun kanssa. Salasana on päiväkodin pihan leluista muodostuva jono. Ensin lapsille näytetään kuva oikeasta salasanasta, sitten lapset etsivät pihalta salasanaan tarvittavat välineet aarekartan avulla ja lopulta aarrearkku avautuu, kun lapset ovat asettaneet arkun eteen esineet oikeassa kuvan mukaisessa järjestyksessä. Lapsille voidaan kertoa, että salasanoihin tarvitaan matematiikkaa.

Matematiikalla rahalle annetaan arvo, joka riippuu ajasta

Rahan tehtävä on olla arvon mitta, arvon säilyttäjä ja vaihdannan väline. Alun perin rahan arvo oli sen arvo hyödykkeenä. Rahana ovat toimineet esimerkiksi oravannahat, hopeakolikot ja kulta. Seteleiden käyttöönoton myötä voitiin kullan vaihtamisen sijaan alkaa kaupanteonyhteydessä vaihtaa seteleitä. Rahan arvo oli kuitenkin sidottu kultakantaan vuoteen 1971 asti. Kultakannasta irrottamisen jälkeen rahan arvon määräytymisestä on tullut huomattavasti vaikeampi tehtävä. Rahan arvo on nykyään vain markkinoiden määräämä – eurolla on hinta dollareissa.

Kultakannasta irrottamisen jälkeen rahan arvon määräytymistä on vaikeampi hahmottaa, mutta ainakin yksi ei ole muuttunut. Uuden rahan hallit-

sematon päästäminen markkinoille aiheuttaisi nopeasti hyperinflaation. Sen vuoksi Euroopan keskuspankki kontrolloi uuden rahan määrää Euroopassa. Toimiva talous kuitenkin edellyttää pientä inflaatiota ja se muuttaa rahan arvoa ajassa. Sadan euron setelin arvo tänään ja vuoden päästä ei ole sama.

Rahan arvon määrittämiseen voidaan tutustua kauppaleikissä palikoiden avulla. Palikoille voidaan antaa arvo värin ja muodon mukaan. Kaupasta saa esimerkiksi: Punaisella pallolla yhden tuotteen ja keltaisella kuutiolla kaksi tuotetta. Lisäksi, jaetaan eri rooleja, jotta lapset voivat toimia kassalla, asiakkaana ja hyllyttäjänä. Lasten kanssa voidaan keskustella matematiikan hyödyntämisestä kaupassa, jotta seiltä voidaan ostaa asioita.

Matematiikkaa käytetään demokratian välineenä

Demokraattinen valtiojärjestys edellyttää matematiikkaa. Demokraattisessa kansanäänestyksessä edustajapaikat jaetaan annettujen äänien perusteella vaalittavan mukaan. Demokraattistenkin valtioiden välillä on suuria eroja vaalitavoissa. Suomen eduskuntavaaleissa käytetään esimerkiksi suhteellista vaalitapaa, kun taas Yhdysvaltojen kongressivaaleissa käytetään enemmistövaalitapaa. Lopulliseen äänestystulokseen vaikuttaa siis annettujen äänien lisäksi aina myös laskutapa, jota edustajien valintaan käytetään.

Äänestämistä käytetään melko paljon varhaiskasvatuksen arjessa, mutta tämän lisäksi olisi hyvä avata äänestämisen tarkoitusta tarkemmin, miten lopputulokseen päädyttiin, montako kertaa voidaan äänestää ja miksi ylipäätään äänestetään. Tämän kertaisessa äänestyksessä voitaisiin päättää tuleva retkikohde äänestämällä värihelmillä. Eniten ääniä saanut ehdotus valitaan retkikohteeksi. Esimerkiksi, jos haluat lähteä puistoon, laita lasipurkkiin vaaleanpunainen helmi. Lopuksi, keskustelkaa lasten kanssa, miten lasipurkissa olevien helmien perusteella voidaan saada selville voittanut retkikohde. Lapille voidaan kertoa, että matematiikkaa käytetään samalla tavalla silloin, kun Suomelle valitaan uusi presidentti.

Matematiikkaa käytetään yritysten ja yhteiskunnan pyörittämiseen

Yrityksen, ja myös koko yhteiskunnan, pyörittäminen edellyttää aina, että tuloista, menoista ja budjetista on pidetty tarkkaa kirjaa – numeroiden on täsmättävä. Palkat, sivukulut ja verot on osattava laskea oikein. Tilastotiedettä ja peliteoriaa hyödynnetään myös yrityksen strategiaa laadittaessa esimerkiksi arvioitaessa investointien tai yhteistyön kannattavuutta. Logistiikkaketjun suunnittelussa ja tuotteiden sekä palveluiden hinnan määrittämisessä hyödynnetään puolestaan matematiikkaan perustuvaa optimointia.

Lasten kanssa voidaan tehdä retki ruokakauppaan, jossa on mahdollisuus

tarkastella esimerkiksi leipähylyjä. Lasten kanssa voidaan keskustella, miten kauppias tietää kuinka paljon leipää hänen pitää tilata kauppaan? Miten hän mahtaa tehdä päätöksen? Miten käy, jos leipä kaupassa loppuu tai sitä on liian paljon? Lapsille voidaan kertoa, että matematiikka auttaa tekemään hyviä päätöksiä.

Matematiikalla diagnosoidaan sairauksia ja kehitetään niihin lääkkeitä

Suomalaiset elävät nykyään keskimäärin kaksinverroin pidempään kuin 1800-luvun lopussa. Tähän on vaikuttanut elinolojen paranemisen ohella suuresti myös lääketieteen kehitys ja sen kautta myös matematiikka. Lääketieteessä matematiikkaa hyödynnetään niin diagnostiikassa, tartuntatautien ehkäisyssä kuin lääkkeiden kehittämisessäkin. Laboratoriokokeiden tulosten analysoinnissa hyödynnetään tilastotiedettä ja monet lääketieteellisessä kuvantamisen menetelmät kuten tietokonetomografia, perustuvat matemaattiseen mallintamiseen. Matematiikkaa hyödynnetään myös rokoteohjelmien suunnittelussa ja erityisesti tilastollista testaamista lääkkeiden kehittämisessä.

Lääkkeiden määrittämiseen voidaan tutustua esittämällä nukketeatteri, jossa nallesairaalaan on yön aikana tullut pieni nalle ja iso nalle. Kumpaakin on yöllä harmittanut kovasti, koska korvaan on sattunut. Lääkäri toteaa, että nalleilla on korvatulehdus ja määrää heille lääkettä. Pohtikaa lasten kanssa esimerkiksi miten lääkäri tietää, mitä lääkettä pienelle ja suurelle nallelle pitää määrätä ja kuinka paljon? Saivatkohan nallet yhtä paljon lääkettä? Lapsille voidaan kertoa, että lääkärit tarvitsevat matematiikkaa, kun he antavat parantavaa lääkettä.

Linkki videoon: <https://youtu.be/WAMivbZqMWo>

Lähteet

Arjen matematiikka

Maalo, I. & Rytönen, M. (2018). Matemaattisten taitojen harjoittelu leikin keinoin Varga-Neményi -menetelmällä. Teoksessa: Kangas, J. & Fonsen, E. (toim.) (2018) Leikin ammattilaiset. Leikki ilmiönä ja varhaiskasvatuksen toimintamuotona. Opettajankoulutuslaitoksen muut julkaisut, Helsingin yliopisto, 54-66.

Tikkanen, P., & Lampinen, A. (2005). Unkarilainen Varga-Neményi matematiikan opetusmenetelmä Suomessa. Teoksessa: Korpinen E.(toim.) Tutkiva opettaja. Matematiikkaa unkarilaisittain Suomessa ja Unkarissa, 74-88.

Vuorio, J-M. (2010) Matematiikka varhaiskasvatuksessa. Teoksessa R. Korhonen, M.-L. Rönkkö, & J. Aerila, (toim.) Pienet oppimassa. Kasvatuksellisia näkökulmia varhaiskasvatukseen ja esiopetukseen. Turku: Turun yliopiston opettajankoulutuslaitos, Rauman yksikkö, 135-155.

Aika

Aerila, J., Korhonen, R. & Rönkkö, M. (2010). Pienet oppimassa: Kasvatuksellisia näkökulmia varhaiskasvatukseen ja esiopetukseen. Turku: Turun yliopiston opettajankoulutuslaitos, Rauman yksikkö.

OPH (2018). Varhaiskasvatussuunnitelman perusteet.

OPH (2016). Esiopetussuunnitelman perusteet.

Mittaaminen

Birch, S. & Bloom, P. (2003) Children Are Cursed: An Asymmetric Bias In Meltal-State Attribution. Psychological Science

OPH (2016). Esiopetussuunnitelman perusteet.

Hannula-Sormunen, M., Mattinen, A., Räsänen, P. & Ruusuvirta T. (2018). Varhaisten matemaattisten taitojen perusta: synnynnäiset valmiudet, tietoinen toiminta ja vuorovaikutus. Teoksessa Joutsenlahti J., Silfverberg H. & Räsänen P. (toim.) Matematiikan opetus ja oppiminen. Niilo Mäki Instituutti, Bookwell

Kamii, C. & Clark F. (1997). Measurement of Length: The Need for a Better Approach to Teaching. *School Science and Mathematics*.

OPH (2014). Varhaiskasvatussuunnitelman perusteet.

Vuorio, J. M. (2010). Matematiikka varhaiskasvatuksessa. Teoksessa Korhonen, R., Rönkkö, M.L. & Aerila, J.A.(toim.) *Pienet oppimassa: kasvatuksellisia näkökulmia varhaiskasvatukseen ja esiopetukseen*. Turku: Turun yliopisto, 135-153.

Zacharia, Z., Loizou, E. & Papaevripidou, M. (2012) Is Physically an important aspect learning through science experimentation among kindergarten students? *Early Childhood Research Quarterly*. Vol 27. NO 3. s. 447-457.

Zacharos, K., Antonopoulos K. & Ravanis, K. (2011) Activities in mathematics education and teaching interactions. The construction of the measurement of capacity in pre-schoolers. *European Early Childhood Education Research Journal*. Vol. 19 No. 4. s. 451-468.

Ajattelun kehittyminen

Gully, T. (2013). *The Critical Years: Early Years Development From Conception to 5*. St Albans: Critical Publishing.

Mukherji, P & Dryden, L. (toim.) (2014) *Foundations of Early Childhood*. London: SAGE

Nurmi, J. E., Ahonen, T., Lyytinen, H., Lyytinen, P., Pulkkinen, L., & Ruoppila, I. (2009). *Ihmisen psykologinen kehitys* (2. painos). Helsinki: WSOY

Piaget, J. (1937/1954). *La construction du réel chez l'enfant, The construction of reality in the child*. New York: Basic Books.

Esimatemaattiset taidot

Kajetski T., Salminen M, 2018, Uusi Matikasta moneksi, Lasten Keskus

Junttila, J. & Ristola, K. 2011. Näppituntuma,

(http://www.edu.fi/download/135858_nappituntuma.pdf)

Matemaattisen ajattelun kielentäminen

Joutsenlahti, J., & Rättyä, K. (2014). Kielentämisen käsite ainedidaktisissa tutkimuksissa. Teoksessa M. Kauppinen, M. Rautiainen & M. Tarnanen (toim.) *Rajaton tulevaisuus. Kohti kokonaisvaltaista oppimista*. Ainedidaktiikan symposium Jyväskylässä (Vol. 13, No. 14.2, p. 2014).

Joutsenlahti, J., & Kulju, P. (2015). Akateeminen lukutaito matematiikassa. *Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimusseuran tutkimuspäivät 2015*, 23.

Kajetski, T., & Salminen, M. (2018) *Uusi Matikasta moneksi*, Lasten Keskus

Lukukäsite

Esiopetuksen opetussuunnitelma 2014. Opetushallitus.

Franzén, K. (2015). Under threes' mathematical learning. *European Early Childhood Education Research Journal*, 23(1), 43-54.

Fuson, K. C. (1988). The Number-Word Sequence: An Overview of Its Acquisition and Elaboration. Teoksessa Fuson, K. C. (Toim.) *Children's Counting and Concepts of Number*. Springer-Verlag New York Inc.

Hannula-Sormunen, M., Mattinen, A. Räsänen, P. & Ruusuvirta T. (2018). Varhaisten matemaattisten taitojen perusta: synnynnäiset valmiudet, tietoinen toiminta ja vuorovaikutus. Teoksessa Joutsenlahti J., Silfverberg H. & Räsänen P. (toim.) *Matematiikan opetus ja oppiminen*. Niilo Mäki Instituutti, Bookwell.

Hannula-Sormunen, M., Lehtinen, E. & Räsänen, P., (2015). Preschool Children's Spontaneous focusing on Numerosity, Subitizing, and Counting Skills as Predictors of Their Mathematical Performance Seven Years Later at School. *Mathematical Thinking and Learning*, 17(2-3), 155-177.

Kinnunen, R. (2003). Miksi kertotauluun kompastuu? Lukujen hallinta oppimisen perustana. Oppimistutkimuksen keskus, Turun yliopisto.

Mattinen, A., Hannula, M. & Lehtinen, E., (2006) Katsotaanpas kuinka monta jalkaa tällä toukalla on! Lapsen ohjaaminen lukumäärien havaitsemiseen ja käsittelemiseen. Teoksessa Lepola, J. & Hannula M., (toim.) *Kohti Koulua*. Turku: Turun yliopisto. 155-187.

Van de Rijt, B., Godfrey, R. et. al. (2003) The Development of Early Numeracy in Europe. *Journal of early childhood research*. 1(2) 155-180.

Varhaiskasvatussuunnitelman perusteet 2018. Opetushallitus.

Vuorio, J. M. (2010). *Matematiikka varhaiskasvatuksessa*. Teoksessa Korhonen, R., Rönkkö, M.L. & Aerila, J.A.(toim.) *Pienet oppimassa: kasvatuksellisia näkökulmia varhaiskasvatukseen ja esiopetukseen*. Turku: Turun yliopisto, 135-153.

Alle 3-vuotiaiden matematiikka

Franzén, K. (2015) Under threes' mathematical learning, *European Early Childhood Education Research Journal*. 23(1), 43-54

Kangas, J., & Brotherus, A. (2017). Osallisuus ja leikki varhaiskasvatuksessa: ”Leikittäisiin ja kaikki olis onnellisia!”. teoksessa A. Toom, M. Rautiainen, & J. Tähtinen (Toim.), *Toiveet ja todellisuus: Kasvatus osallisuutta ja oppimista rakentamassa* (s. 197-223). (Kasvatusalan tutkimuksia; Nro 75). Turku: Suomen kasvatustieteellinen seura.

Packer, M. J., and J. Goicoechea. (2000). ”Sociocultural and Constructivist Theories of Learning: Ontology, not Just Epistemology.” *Educational Psychologist* 35(4), 227-241

Palmer, A. (2011). *Hur blir man matematisk? Att skapa nya relationer till matematik och genus i arbetet med yngre barn*. [How to become Mathematical? Creating New Relationships with Mathematics, and Gender in the Work with Young Children]. Stockholm: Liber.

Reis, M. (2011). *To order, from order to order: Toddlers' mathematizing*. Doctoral thesis. Göteborg: Göteborg's university. Sophian, C., & Adams, N. (2008; 1987). Infants' understanding of numerical transformations. *British Journal of Developmental Psychology*, 5(3), 257-264.

Matematiikkaa 3 - 5 vuotiaille

Bruce, T., Hakkarainen, P., & Bredikyte, M. (Eds.). (2017). *The Routledge International Handbook of Early Childhood Play*. Taylor & Francis.

Kangas, J., Harju-Luukkainen, H. K., Brotherus, A. M., Gearon, L., & Kuusisto, S. A. E. (julkaistaan 2019). *Playing to Learn in Finland: Early childhood Curricular and Operational Context*. Teoksessa S. Garvis,

& S. Phillipson (Toim.), *Politicification of Childhood: Early Childhood Education in the 21st Century* (Vuosikerta 3). Routledge.

Kangas, J., & Brotherus, A. (2017). Osallisuus ja leikki varhaiskasvatuksessa: ”Leikittäisiin ja kaikki olis onnellisia!”. teoksessa A. Toom, M. Rautiainen, & J. Tähtinen (toim.) *Toiveet ja todellisuus: Kasvatus osallisuutta ja oppimista rakentamassa*. Turku: Suomen kasvatustieteellinen seura. Sivut 197-223

Karpov, Y. V. (2005). *The Neo-Vygotskian approach to child development*. New York: Cambridge University Press.

Kajetski, T., & Salminen, M. (2009). *Matikasta moneksi. Toiminnallista matematiikkaa varhaiskasvatuksesta esiopetukseen*. Saarijärvi: Lasten Keskus Oy.

Lüken, M. M., & Kampmann, R. (2018). The influence of fostering children’s patterning abilities on their arithmetic skills in Grade 1. Teoksessa: Elia, I., Mulligan, J., Anderson, A., Baccaglioni-Frank, A., & Benz, C. (toim.). *Contemporary research and perspectives on early childhood mathematics education* (pp. 55-66). Springer, Cham.

Pound, L. (2004). *Supporting Children’s Learning in the Early Years*. Routledge.

Sachet, A. B. ja Mottweiler, C. M. (2013). *The Distinction Between Role-Play and Object Substitution in Pretend Play*. Teoksessa M. Taylor (toim.), *The Oxford Handbook of the Development of Imagination*. New York: Oxford University Press.

Sefton-Green, J., Kumpulainen, K., Lipponen, L., Sintonen, S., Rajala, A., & Hilppö, J. (2015). *Playing with learning. Manifesto of Playful Learning*. Opettajankoulutuksen muut julkaisut. Helsingin yliopisto.

Vuorio, J-M. (2010) *Matematiikka varhaiskasvatuksessa*. Teoksessa R. Korhonen, M.-L. Rönkkö, & J. Aerala, (toim.) *Pienet oppimassa. Kasvatuksellisia näkökulmia varhaiskasvatukseen ja esiopetukseen*. Turku: Turun yliopiston opettajankoulutuslaitos, Rauman yksikkö, 135-155.

Esikouluikäisten matematiikka

Aunio, P. & Räsänen, P. (2015). Core numerical skills for learning mathematics in children aged five to eight years- working model for educators. *European early childhood education research journal*.

Aunio, P. (2008). Matemaattiset taidot ennen koulun alkua. *NMI-Bulletin* 18 (4), 63-74.

Brotherus, A. 2004. Esiopetuksen toimintakulttuuri lapsen näkökulmasta. Yliopistopaino.

Burton., L. (1984). Mathematical thinking: the struggle for meaning. *Journal for research in mathematics education* 15 (1), 35-49

Cooke, A. & Bruns, J. (2018). Early childhood educators' issues and perspectives in mathematics education. Teoksessa I. Elia, J. Mulligan, A. Anderson, A. Baccaglioni-Frank & C. Benz. (toim.) *Contemporary Research and Perspectives on Early Childhood Mathematics Education*. Springer. New York. 267-289.

Esiopetuksen opetussuunnitelman perusteet. (2014). Helsinki: Opetushallitus

Kajetski, T & Salminen, M. (2018). Matikasta moneksi. Toiminnallista matematiikkaa varhaiskasvatuksesta esiopetukseen. Lasten keskus ja Kirjapaja Oy. Tallinna.

Leinonen, J., Brotherus, A. & Venninen, T. (2014). Children's participation in Finnish pre-school education - Identifying, describing and documenting children's participation. *Nordisk barnehageforskning* 7,(8), 1-16

Mattinen, A., Räsänen, P., Hannula, M. M. & Lehtinen, E. (2008). Varhaisten matemaattisten oppimisvalmiuksien kehittämisohjelma päiväkodeille. *NMI-Bulletin, oppimisvaikeuksien erityislehti* 4, 40-53.

Pakarinen, E., Kiuru, N., Lerkkanen, M-K, Poikkeus, A.-M., Ahonen, T. & Nurmi, J.-E. (2011). Instructional support predicts children's task avoidance in kindergarten. *Early Childhood Research Quarterly*, 26, 376-386

Geometria

Aslan, D. & Aktas Arnas, Y. (2007): Three-to six-year-old children's recognition of geometric shapes. *International Journal of Early Years Education*, 15(1), 83-104.

Björklund, C. & Palmér, H. (2018): *Matematikundervisning I förskolan. Att se världen i ljuset av matematik*. Stockholm: Natur och Kultur.

Gejard, G. (2018): *Matematiserande i förskolan. Geometri i multimodal interaktion*. Digital Comprehensive Summaries of Uppsala Dissertations from the Faculty of Educational Sciences 14. s. 91. Uppsala: Acta Universitatis Upsaliensis. ISBN 978-91-513-0409-0.

Maier, A.S. & Benz, C. (2014): Children's conceptual knowledge of triangles manifested in their drawings. Teoksessa: P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle & D. Allan (toim.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (vol. 1). Vancouver, Canada: PME.

OPH (2016). *Esiopetuksen opetussuunnitelman perusteet. Määräykset ja ohjeet 2016:1*. Opetushallituksen julkaisuja: Helsinki.

OPH (2018). *Varhaiskasvatussuunnitelman perusteet. Määräykset ja ohjeet 2018:3b*. Opetushallituksen julkaisuja: Helsinki.

van Hiele, P.M. (1986): *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Orlando, FL: Academic Press.

van Hiele, P.M. (1999): Developing geometric thinking through activities that begin with play. *European Early Childhood Education Research Journal*, 4(1), 71-87.

Matemaattisten taitojen tukeminen

Aunio, P. & Niemivirta, M. (2010). Predicting children's mathematical performance in grade one by early numeracy. *Learning and Individual Differences* 20, 427-435.

Aunola, K., Leskinen, E., Lerkkanen, M.-K. & Nurmi, J.-E. (2004). Developmental dynamics of math performance from preschool to grade 2. *Journal of Educational Psychology* 96, 699-713.

Hannula, M. M. (2005). Spontaneous focusing on numerosity in the development of early mathematical skills. *Annales Universitatis Turkuensis B*, 282. Turku: Painosalama.

Hannula-Sormunen, M. M. (2015). Spontaneous focusing on numerosity and its relation to counting and arithmetic. Teoksessa R. Cohen-Kadosh & A. Dowker (toim.) *The Oxford handbook of numerical cognition*. Oxford, UK: Oxford University Press, 275-290.

Kyttälä, M., (2018). Oppiminen ja tiedonkäsittely varhaislapsuudessa. Teoksessa P. Pihlaja & R. Viitala (toim.) Varhaiserityiskasvatus. PS-kustannus. Keuruu. 207-222.

Mononen, R., Aunio, P., Korhonen, J., Tapola, A., Väisänen, E. (2017). Matemaattiset oppimisvaikeudet. PS-Kustannus. Jyväskylä.

OPH (2016). Varhaiskasvatussuunnitelman perusteet. Helsinki: Opetushallitus.

OPH (2014). Esiopetuksen opetussuunnitelman perusteet. Helsinki: Opetushallitus.

Pihlaja, P. & Viitala, R. (2018). Varhaiserityiskasvatus suunnannäyttäjänä. Teoksessa P. Pihlaja & R. Viitala (toim.) Varhaiserityiskasvatus. PS-kustannus. Keuruu. 8-13.

Salminen, J. (2015). Response to computer-assisted intervention in children most at risk for mathematics difficulties. Jyväskylä, Finland: University of Jyväskylä. Jyväskylä studies in education, psychology and social research, 543.

Varhaiskasvatuslaki 540/2018.

Tilastot

Baratta-Lorton, M. (1976). Mathematics Their Way: An Activity-Centered Mathematics Program for Early Childhood Education.

Opetushallitus. (2018). Varhaiskasvatussuunnitelman perusteet.

Opetushallitus. (2014). Esiopetuksen opetussuunnitelman perusteet

Ongelmanratkaisutaidot

Hannula, M. S. (2015). Emotions in problem solving. Teoksessa S. J. Cho (toim.), Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education (s.269-288). Springer.

Leppäaho. H. (2018). Ongelmanratkaisunopettamisesta. Teoksessa. J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.), Matematiikan opetus ja opettaminen. (s.368-392) Bookwell Oy, Porvoo.

Newell, A., & Simon, H. A. (1972). Human problem solving. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Nohda, N. (2000). Teaching by open-approach method in Japanese Mathematics Class-room. Teoksessa: T. Nakahara & M. Koyama (toim.) Proceedings of the 24th conference of the international group for the psychology of mathematics education (PME), Hiro-shima, Vol. 1, (s. 39-53).

Pólya, G. (1945). How to solve it. A new aspect of mathematical method. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Schoenfeld. A. (1985). Mathematical problem solving. London: Academic Press.

Ohjelmointi ja algoritmit

Kangas, J. & Vartiainen, J. (toim.) (2019) Ohjelmoinnin ABC varhaiskasvatuksessa, Opettajankoulutuslaitoksen muut julkaisut, Helsingin yliopisto.

Matematiikka yhteiskunnassa

Siltanen, S. (2019). Astu matematiikan maailmaan, Otava.

Keronen, T. (2019-2020) Tietokoneen toiminnan perusteet (avoin verkkokurssi), Helsingin yliopisto.

Väestötieteen perusteet, Tilastokoulu (avoin verkkokurssi), Tilastokeskus.