

# Matematiikan monenlaiset maailmat

teksti: Saara Lehto

Kun lapsen tai nuoren tehtävänä on oppia uutta matematiikkaa, hän on samanlaisen tilanteen edessä kuin matematiikan tutkija: on otettava selvää jostain aivan uudesta. Miten uutta matematiikkaa sitten syntyy?

Ratkaistessaan ongelmia, keksiessään uusia teoreemoja ja todistaessaan väitteitä matemaatikot tekevät paljon yhteistyötä. Usein kun matemaatikot tapaavat keskustellakseen tekeillä olevasta tutkimuksesta, siirrytään pian seisoskelemaan liitutaulun äärelle. Taululle piirretään symboleja ja ajatuksia tapailevia kuvioita, ja kaikkien keskustelijoiden kädet viuhuvat vimmatusti. Puheessa vilisevät tutut matemaattiset termit, mutta myös uusien ideoiden lempinimet ja niiden luovat kuvailut: ollaan tutkimassa jotain uutta käsitettä tai ilmiötä, joka vielä hakee muotoaan tai jota matemaatikot eivät vielä ihan kunnolla ymmärrä.

Usein ajatellaan, että matematiikan kieli on abstraktia. Sitä se onkin, mutta pelkät abstraktit merkit paperilla eivät vielä ole matematiikkaa. Matematiikkaan tarvitaan myös ymmärrys siitä, mitä nuo abstraktit merkit tarkoittavat. Kun matemaatikot vasta tutkivat uutta ideaa, sille ei ole vielä kehittynyt formaaleja merkintätapoja eikä sille ole todistettu sääntöjä – on keskusteltava ideoiden, mielikuvien ja intuition maailmassa. Samalla lailla matematiikkaan kurkistaa myös jokainen matematiikan oppija.



Matemaattisen ajattelun professori David Tall jakaa matematiikan kolmeen maailmaan. [1,2] *Ilmenevä maailma* sisältää kaiken konkreettisen ja kehollisen, jota voimme kosketella siirtää ja havainnoida: voimme esimerkiksi tarkastella yhteenlaskua siirtelemällä käpyjä tai asettelemalla laskutikkuja peräkkäin. *Symbolisessa maailmassa* käsittelemme symboleja ja muokkaamme niitä annetuilla säännöillä: voimme opetella yhteenlaskuun liittyvät säännöt ja laskea suurillakin luvuilla näppärästi. *Formaali maailma* puolestaan koostuu abstrakteista matemaattisista teoreemoista: tässä



maailmassa voimme todeta, että yhteenlaskun tulos ei riipu laskujärjestyksestä tai vaikka määritellä mitä tarkoitamme yhteenlaskulla jossakin abstraktissa algebrassa.

David Tallin idea on se, että kaikki nämä kolme näennäisesti erillistä maailmaa ovat tärkeitä matematiikan oppimisessa ja ymmärtämisessä. Pelkästään yhteen maailmaan keskittymällä ei päästä perille. Sen sijaan, kun kaikki kolme maailmaa kohtaavat ja linkittyvät toisiinsa, syntyy syvällisempää ymmärtämistä.



Mitä tämä tarkoittaa käytännössä? Mietitään, mitä voimme oppia esimerkiksi kolmiosta Tallin kolmessa maailmassa:

1. *Ilmenevässä maailmassa* voimme piirtää erilaisia kolmioita ja mitata niiden kulmia, sivuja ja korkeuksia ja todeta käytännössä näiden välisiä yhtäläisyyksiä. Voimme tutustua terävä- ja tylppäkulmaisiin kolmioihin piirtämällä tai vertailemalla erilaisia kuvia tai vaikka muodostamalla kolmioita kehoillamme. Voimme piirtää kolmion sivuja vasten neliöitä hahmottaaksemme Pythagoraan lausetta.
2. *Symbolisessa maailmassa* voimme opetella laskemaan trigonometrisillä funktioilla sivujen pituuksia ja kulmien suuruuksia. Voimme oppia säännön kolmion kulmien summasta ja Pythagoraan lauseen sivujen pituuksista ja ratkaista näiden avulla ongelmia manipuloimalla lausekkeita ja yhtälöitä.
3. *Formaalissa maailmassa* ymmärrämme kolmion abstraktina käsitteenä, jolla ei tarvitse olla fyysistä ilmentymää. Voimme todistaa väitteitä trigonometrisille funktioille. Voimme määritellä kolmion tasogeometrian kappaleena, jonka virittävät kolme pistettä tai voimme vaikka tarkastella kolmiota monikulmiona, jolla on kolme kulmaa.



Se, millainen oppijan oppimistavoite kolmion ymmärtämisestä on, riippuu toki tasosta. Eri luokkasteilla opitaan ymmärtämään kolmioita pikkuhiljaa yhä paremmin. Kun pidämme kaikilla tasoilla mukana kaikki kolme Tallin maailman, syvenee kolmion käsitteen ymmärrys pikkuhiljaa.

Liikumme paljon ensimmäisessä, matematiikan ilmenevässä maailmassa. Se on kaikilla tasoilla tärkeä apu muun muassa uuden lähestymisessä ja ongelmanratkaisussa. Sen mukana pitäminen on tärkeää myös käsitteenmuodostuksessa, niin ammattimatemaatikolle kuin uutta matematiikkaa oppivallekin.

## Lähteet ja lisälukemisto:

[1] Tall, D. (2004). *Thinking through three worlds of mathematics*, Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen, Norway, 4, 281–288.

[2] Hannula, J. (2019). *Kehittämistutkimus: Matematiikan aineenopettajaopiskelijoiden matemaattisen ja pedagogisen sisältötiedon edistäminen ongelmalähtöisessä oppimisessä*, Helsinki: Helsingin yliopisto, Väitöskirja. (sivut 52-54)

