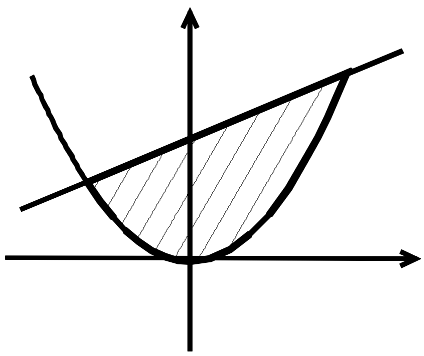
Antti Majaniemi

MATEMATIIKKA I

Differentiaali- ja integraalilaskentaa insinööriopiskelijoille



$$\boxed{A=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx}$$

2016

ISBN 978-952-93-8169-2

Antti Majaniemen perikunta on päättänyt antaa tämän teoksen käytettäväksi yllä olevalla lisenssillä. Painatus ei ollut enää kannattavaa alhaisen kysynnän vuoksi, mutta tällä tavalla oppimateriaali on edelleen opiskelijoiden ja oppilaitosten käytettävissä.

Tämä teos on ladattavissa osoitteessa http://anttimajaniemi.fi

Turussa 20.11.2016

Jari Majaniemi

jari @ anttimajaniemi.fi

SISÄLLYS

Tämä moniste on lähinnä differentiaali- ja integraalilaskentaa käsittävän monistesarjan ensimmäinen osa. Ensimmäinen versio tästä monisteesta ilmestyi helmikuussa -93 ja lähinnä painovirheiltään korjailtu saman vuoden joulukuussa. Kolmanteen versioon -95 tein pieniä muutoksia, korjailin havaittuja painovirheitä, kursivoin kaavoissa esiintyvät muuttujien nimet ja parantelin joidenkin kuvien ulkoasua. Käsillä olevassa versiossa -96 olen jatkanut monisteen muokkaamista.

Harjoitustehtävien vastauksissa on luultavasti edelleenkin virheitä. Virheet ovat kiusallisia, mutta toisaalta insinööritason opiskelijan tulee oppia keksimään keinoja, joilla tarkistaa saamansa vastauksen. Ei käytännön työssäkään laskutehtävän vastaus ole saatavilla. Nykyiset matematiikkaohjelmat ja graafiset laskimet sopivat myös vastausten tarkistamisiin.

Teorian osuutta olen pyrkinyt vähentämään ja keventämään koko monistesarjassa silläkin uhalla, että joku voi sanoa, että esitys ei ole "kunnossa" tai riittävän täsmällistä (jatkuvuus-, derivoituvuus- ja muut sentapaiset oletukset puuttuvat, integraalin olemassaolosta ei puhuta mitään, kaikki poikkeustapaukset on sivuutettu yleensä ilman mitään mainintaa jne).

Harjoitustehtävät on jaettu kolmeen tyyppiin, A: perustehtäviä, B: tyypillisiä tehtäviä tämäntasoisessa opiskelussa ja C: tehtäviä, jotka ovat luonteeltaan joko edellisiä vaikeampia, yleisluonteisempia tai tällä tasolla harvinaisempia. Soveltavia tehtäviä on aika vähän. Siksi olisi hyvä, jos opettajalla olisi lisätehtävien varasto, joka käsittäisi juuri sen opintosuunnan sovelluksia, jota hän opettaa.

Jos ja kun opetustunneista on pulaa, olen merkinnyt tähdellä (*) sellaiset kohdat, jotka mielestäni voidaan parhaiten sivuuttaa. Opettajan tulee kuitenkin harkita tilanne opintosuuntakohtaisesti.

Muiden oppiaineiden tarpeet määräävät aika pitkälti sen, missä järjestyksessä asioita käsitellään matematiikassa. Esimerkiksi derivaatan, kokonaisdifferentiaalin ja integraalin alkeet tarvitaan muissa oppiaineissa yleensä aika varhain. Siksi saattaisi olla paikallaan edetä tavallaan spiraalimaisesti, ts. jotenkin seuraavaan tapaan:

Esimerkiksi raja-arvon, derivaatan ja kokonaisdifferentiaalin harjoittelu voitaisiin suorittaa aluksi aika kevyesti lähinnä joidenkin A-tasoisten tehtävien ja muutaman B-tason tehtävän avulla, jotta päästäisiin pian integraalilaskennan alkeisiin. Sen jälkeen palattaisiin takaisin differentiaalilaskentaan ja mm. derivoinnin kertaus ja lisäharjoittelu suoritettaisiin B-tasoisten tehtävien avulla.

Ei ole tarkoitus, että joka kurssilla laskettaisiin esim. kaikki B-tason tehtävät, vaan että tehtävien joukossa olisi valinnanvaraa eri opintosuunnille, eritasoisille oppilasryhmille ja eri vuosille.

Viimeisissä luvuissa (funktion tutkiminen ja ääriarvotehtävät) voisi olla itseopiskeluaineistoakin varsinkin ylioppilasryhmille.

Tässä työssäni olen saanut työtovereiltani monenlaista tukea, mistä kaikesta heille parhaat kiitokset!

Kesällä –98 olen tehnyt muutaman painovirheen korjauksen ja parannellut kuvien ulkoasua lähinnä lisäämällä viivojen paksuutta.

Turussa 1.8. 1998

Antti Majaniemi

Olen tehnyt Antti Majaniemen alkuperäisen monisteen esimerkkeihin vähäisiä päivityksiä korjaten sitä tämän päivän tilanteeseen paremmin sopivaksi.

Turussa 24. 2. 2007 Jari Majaniemi

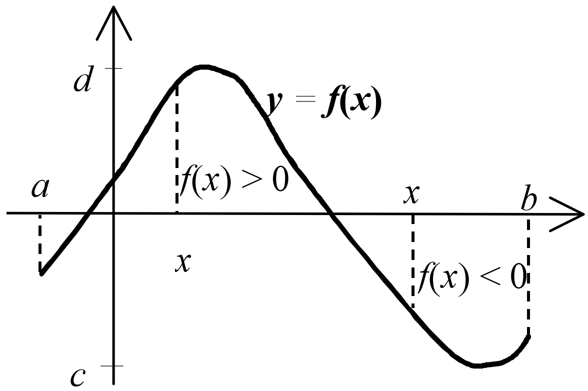
1 Funktion raja-arvo ja jatkuvuus

1.1 Funktio ja sen arvo

Jos muuttujan x kutakin arvoa vastaa täysin määrätty eli *yksikäsitteinen* toisen muuttujan y arvo, sanotaan, että y on x:n ***funktio*** ja merkitään esim.

$y = f(x)$ (lue: *"y on x:n funktio"* tai *"y on **f x**"*).

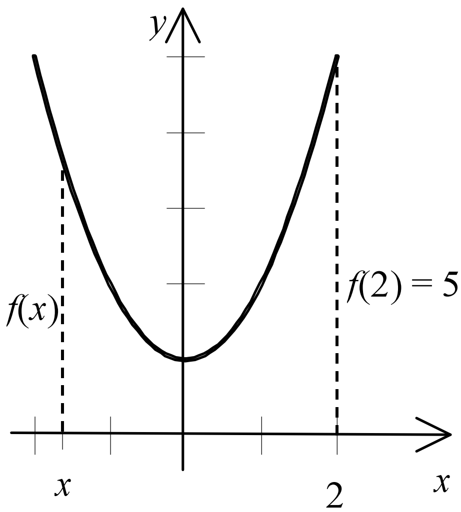
Jatkossa käsitellään vain ns. *reaalifunktioita*, ts. x:n ja y:n arvot ovat reaalilukuja (ellei erikseen toisin mainita). Tällaista funktiota voidaan havainnollistaa xy-tasossa, piirtämällä funktion ***kuvaaja***.



Muuttujan x arvot muodostavat funktion ***määrittelyjoukon*** *(Mj)*, ja vastaavat funktion arvot eli y:n arvot muodostavat funktion ***arvojoukon*** *(Aj)*. Viereisessä kuvassa funktion *Mj* on suljettu väli $[a,b]$ eli väli $a \le x \le b$ ja *Aj* on $[c,d]$.

Kun x:lle annetaan jokin yksittäinen arvo x, niin vastaava funktion arvo $f(x)$ (lue: ***"f arvolla x"***) voi olla positiivinen, negatiivinen tai 0.

Esim. 1 *Yhtälö* $y = x^2 + 1$ määrittelee erään funktion. Tässä x:lle voidaan antaa mitä reaalilukuarvoja tahansa, joten tämän funktion (laajin mahdollinen reaalinen) *Mj* on kaikkien reaalilukujen joukko ***R***. Funktion arvot y ovat aina $\ge$ 1, joten *Aj* muodostuu reaaliluvuista $y \ge 1$.



Funktion *kuvaaja* xy-tasossa on paraabeli. Tässä esimerkissä se x:n *analyyttinen lauseke*, joka määrittelee kyseisen funktion f, on

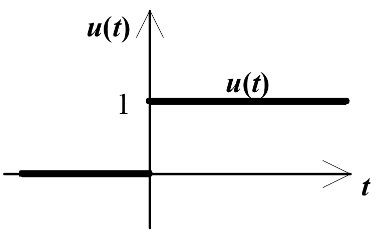
$f(x) = x^2 + 1$ (lue: *"**f x on** x toiseen plus 1"*).

Kun x:lle annetaan eri arvoja, lausekkeesta $f(x) = x^2 + 1$ voidaan laskea vastaavia funktion arvoja, esim.

$f(2) = 5$ (lue: ***"f arvolla 2 on 5"***),
$f(2 + h) = (2 + h)^2 + 1 = h^2 + 4h + 5$,
$f(x - 1) = (x - 1)^2 + 1 = x^2 - 2x$,
$f(x) = x^2 + 1$ (***"f arvolla x on*** $x^2 + 1$***"***),
$f(x) + f(2x) = x^2 + 1 + (2x)^2 + 1 = 5x^2 + 2$.

Tekniikassa on aika yleistä, että jostakin funktiosta ei tunneta sen analyyttistä lauseketta, vaan funktio on annettu piirturin piirtämänä käyränä tai mittaustulosten muodostamina arvopareina (x, y).

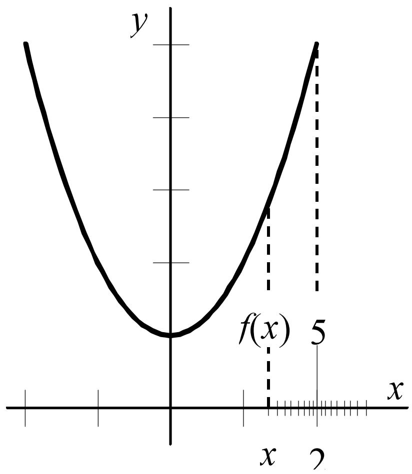
Matematiikassa käytetään myös merkintää $\boldsymbol{y = y(x)}$ merkinnän $y = f(x)$ sijasta ilmaisemaan sitä, että y on x:n funktio. Tämän tapainen merkintä on tekniikassa hyvin yleinen. Esim. matka s on ajan t funktio: $s = s(t)$, paine p on kahden muuttujan V ja T (tilavuus ja lämpötila) funktio: $p = p(V,T)$, pallon tilavuus V on säteen r funktio: $V = V(r)$ $(r > 0)$.



Joskus funktion analyyttinen lauseke on erilainen eri x:n arvoilla. Esim. säätötekniikassa käytetty yksikköaskel u määritellään seuraavasti:

$$u(t) = \begin{cases} 0, \; kun \; t < 0 \\ 1, \; kun \; t \geq 0 \end{cases} \quad \text{(vrt. kuva).}$$

1.2 Raja-arvo



Esim. 2 Olkoon $f(x) = x^2 + 1$. Annetaan x:lle yhä lähempänä ja lähempänä lukua 2 olevia arvoja (esim. arvoja 1,9, 1,99, 1,999,... tai 2,1, 2,01, 2,001...), ts. *annetaan x:n lähestyä arvoa 2* kummalta puolen tahansa (vrt. kuva).

Tässä esimerkissä on selvää, että kun x on lähellä lukua 2, niin $f(x)$:n arvo (eli y:n arvo) on lähellä lukua 5 tai myös, että funktion arvo $f(x) = x^2 + 1$ *lähenee arvoa 5, kun x lähenee arvoa 2*. Tämä merkitään seuraavasti:

$x^2 + 1 \to 5$, *kun* $x \to 2$ (nuoli luetaan: *"lähenee"*).

Myös sanotaan, että lausekkeen $x^2 + 1$ (tai vastaavan funktion *f)* ***raja-arvo*** on 5, kun $x \to 2$.

Raja-arvon merkkinä käytetään latinankielisen ***limes***-sanan lyhennettä *lim* seuraavasti:

$\lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 1) = 5$ (lue: *"**limes** $x^2 + 1$**, kun x lähenee 2:ta, on 5**"*)

Esim. 3 $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 2x + 1) = 1,\ \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{2x - 1} = \dfrac{1}{3}$.

Näissä esimerkeissä raja-arvo on sama kuin funktion arvo kohdassa $x = 2$. Tällaisessa tapauksessa raja arvo saatiin selville, kun sijoitettiin x:n arvo 2 kyseiseen lausekkeeseen x:n tilalle.

Varsinaisissa raja-arvotehtävissä (vrt. seuraava esimerkki) *ei yleensä voida sijoittaa x:n paikalle suoraan kyseistä arvoa, sillä se aiheuttaa esim. sen, että osoittaja ja nimittäjä saavat kumpikin arvon 0, ts. että lauseke muuttuu **"epämääräiseen muotoon 0/0"**.*

Tällaisissa tapauksissa lauseke muokataan tavallisesti sellaiseen muotoon, että se tekijä, joka vie osoittajan ja nimittäjän 0:ksi, voidaan supistaa pois.

Esim. 4 (*Eräs 0/0-muoto*)

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{3x - 6} = \lim_{x \to 2} \frac{(x + 2)(x - 2)}{3(x - 2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x + 2}{3} = \frac{4}{3}$$

Tässä esimerkissä osoittajan ja nimittäjän vei 0:ksi tekijä $x - 2$. Koska kysessä on raja-arvo, jossa x *lähenee* arvoa 2, mutta on erisuuri kuin 2, niin yhteinen tekijä $x - 2$ ei ole 0 ja siksi se voitiin supistaa pois. Tämä poisti "epämääräisyyden".

Esim. 5 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 1} - 1}{x}$. Kun $x \to 0$, niin osoittaja ja nimittäjä $\to 0$, ts. kyseessä on 0/0-muoto, josta ei välittömästi näe raja-arvoa.

Muokataan lauseketta, laventamalla se osoittajan *liittoluvulla* $\sqrt{x + 1} + 1$ ja käyttämällä sääntöä $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)-1^2}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}.$$

Huom. Aina on syytä ensin tutkia, voiko raja-arvon nähdä suoraan, muokkaamatta lauseketta, esim.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{-5}{-1}=5,\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{2x-2}=\frac{0}{2}=0,\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x}=\sqrt{2}-2.$$

Esim. 6 (∞/∞-muoto)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{x^2-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(2+\frac{1}{x^2})}{x^2(1-\frac{1}{x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{2+0}{1-0}=2.$$

Tässä esimerkissä otettiin x^2 "väkisin" tekijäksi ja supistettiin se pois, jolloin epämääräisyys poistui. Toisin: supistetaan kyseinen murtofunktio x^2:lla:

$$\lim_{x\to\infty}{}^{(x^2}\!\!\frac{2x^2+1}{x^2-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{2+0}{1-0}=2.$$

Raja-arvon suuruudesta saat kuvan, ajattelemalla termien suuruussuhteita seuraavasti. Suurilla x:n arvoilla korkeimmat potenssit $2x^2$ ja x^2 määräävät osoittajan ja nimittäjän suuruusluokan (esim. jos x = 1000, niin osoittaja on suunnilleen 2 miljoonaa ja nimittäjä 1 miljoona). Siis

$$\text{suurilla } x\text{:n arvoilla } \frac{2x^2+1}{x^2-8}\approx\frac{2x^2}{x^2}=2.$$

Esim. 7 $$\lim_{x\to\infty}{}^{(x^2}\!\!\frac{x^2-x}{x^3+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{x+\frac{2}{x}}=0\ \ (\textit{sillä os.}\to 1\ \textit{ja nim.}\to\infty).$$

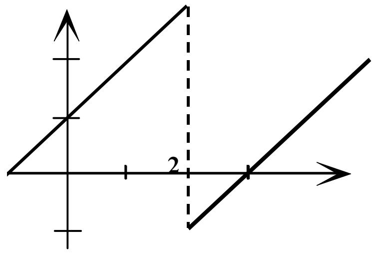
Voisit myös supistaa x^3:lla, jonka jälkeen os. → 0 ja nim. → 1.

Esimerkeissä 6 ja 7 x ei tietenkään voi lähestyä ääretöntä "kummalta puolelta tahansa" vaan ainoastaan vasemmalta.

1.3 Toispuoleiset raja-arvot

Jotta voitaisiin sanoa, että raja-arvo $\lim_{x \to a} f(x)$ ($a \in \mathbf{R}$) on äärellisenä olemassa, $f(x)$:n täytyy lähestyä samaa arvoa riippumatta siitä, kummalta puolelta x lähestyy a:ta. Aina ei näin käy, vaan vasemmalta lähestyttäessä voi tulla eri tulos kuin oikealta lähestyttäessä:

Esim. 8 $f(x) = \begin{cases} x+1, \mathit{kun}\ x \le 2 \\ x-3, \mathit{kun}\ x > 2. \end{cases}$



Kun x *lähenee 2:ta* ***plus****-puolelta*, ts. niin että x on yli 2, niin $f(x) \to 2 - 3 = -1$. Jos taas x *lähenee 2:ta* ***miinus****-puolelta*, niin $f(x) \to 2 + 1 = 3$. Nämä merkitään seuraavasti:

$$\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2+} (x-3) = -1,$$

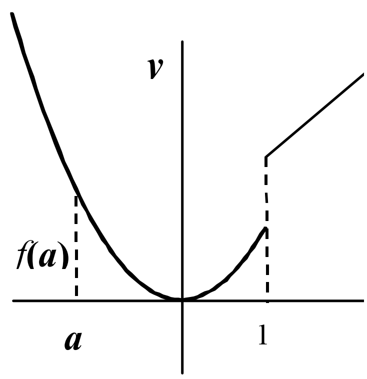
$$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} (x+1) = 3.$$

Edellinen on nimeltään ***oikeanpuoleinen*** ja jälkimmäinen ***vasemmanpuoleinen*** *raja-arvo*.

Koska tässä esimerkissä vasemman- ja oikeanpuoleiset raja-arvot ovat eri suuret, ei funktiolla ole tavallista, molemminpuolista raja-arvoa olemassa kohdassa $x = 2$.

1.4 Jatkuvuus

Esim. 9 Funktion $y = \begin{cases} x^2, \mathit{kun}\ x \le 1 \\ x+1, \mathit{kun}\ x > 1 \end{cases}$



kuvaaja on muuten jatkuva, katkeamaton käyrä, mutta kohdassa $x = 1$ käyrässä on yhden yksikön korkuinen "hyppäys", ts. kun ohitetaan kohta $x = 1$ (vasemmalta oikealle), niin tässä kohdassa y:n arvo kasvaa yhdellä yksiköllä. Kohta $x = 1$ on tämän funktion ***epäjatkuvuuskohta***.

Kohdassa $x = 1$ funktion vasemman- ja oikeanpuoleiset raja-arvot ovat eri suuret. Jokaisessa muussa kohdassa a (joka kuuluu funktion määrittelyjoukkoon) funktion vasemman- ja oikeanpuoleiset raja-arvot ovat yhtä suuret, ts. funktiolla on raja-arvo tässä kohdassa. Lisäksi raja-arvo on funktion arvon *f*(*a*) suuruinen. Tämä ajatus on seuraavan määritelmän pohjana.

Määritelmä. *Funktio f on* ***jatkuva*** *kohdassa x = a, jos*

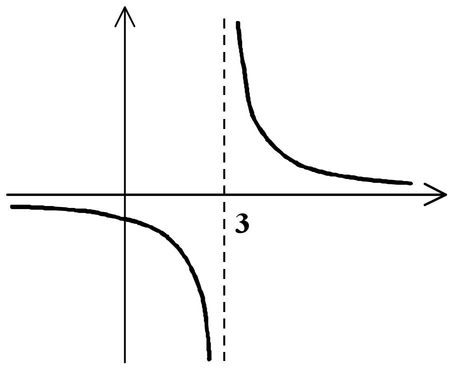
$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = f(a)}.$$

Esim. 10 Funktio $y = 2x^2 + 3x$ on jatkuva kohdassa $x = 2$ (kuten muillakin x:n arvoilla), sillä

$$\lim_{x\to 2} (2x^2 + 3x) = 14 = f(2).$$

Yleisesti: ***Polynomifunktiot*** $y = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ ovat jatkuvia kaikilla x:n arvoilla, samoin myös esim. *sini*- ja *kosini*-funktiot. ***Murtofunktiot*** (kahden polynomin osamäärät) ovat jatkuvia kaikilla niillä x:n arvoilla, joilla ne ovat määritellyt. Määrittelyjoukkoon eivät kuulu nimittäjän nollakohdat.

Esim. 11 Funktio $y = \dfrac{2}{x-3}$ ei ole määritelty, kun $x = 3$. Tässä kohdassa tämän funktion jatkuvuudesta ei siis voida puhua. Muilla x:n arvoilla funktio on määritelty ja myös jatkuva. Huomaa, että



$$\lim_{x\to 3-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 3+} f(x) = +\infty.$$

Esim. 12 Mikä arvo a:lle pitäisi valita, jotta funktio $y = \begin{cases} x^2 + a, & kun\ x < 3 \\ 2x + 1, & kun\ x \geq 3 \end{cases}$

olisi jatkuva kaikilla x:n arvoilla?

Koska ne lausekkeet, jotka määrittelevät tämän funktion f, ovat polynomeja, on f ilman muuta jatkuva muilla x:n arvoilla, paitsi arvolla $x = 3$. Kohdassa $x = 3$ funktion arvo on $f(3) = 2\cdot 3 + 1 = 7$. Se on myös sama kuin oikeanpuoleinen raja-arvo. Jatkuvuutta varten myös vasemmanpuoleisen raja-arvon täytyy olla 7:

$$\lim_{x\to 3-} (x^2 + a) = 7 \iff 9 + a = 7 \ \therefore\ \underline{\underline{a = -2.}}$$

HARJOITUKSIA

Vastauksia monisteen lopussa. Suhtaudu niihin varauksella, sillä niiden joukossa voi olla virheellisiä. Tekniikan opiskeluun kuuluu myös erilaisten tarkistuskeinojen miettiminen, sillä työelämän tehtävissä vastaukset eivät ole tarkistettavissa mistään vastauskirjoista.

A

1.1 Piirrä funktion $y = x^3 + 1$ kuvaaja. Mikä on tämän funktion (laajin mahdollinen reaalinen) määrittelyjoukko ja mikä on vastaava arvojoukko? Mikä on tässä tapauksessa x:n lauseke $f(x)$ (lue:"*f x*")? Laske

a) $f(–2) + f(1)$, b) $f(x) + f(–x)$ (lue: "*f arvolla x plus f arvolla –x*)

c) $f(x + 1)$, d) $f(1/x)$.

1.2 Olkoon $g(x) = \dfrac{2x-4}{x}$. Laske

a) $g(3)$, b) $g(2/3)$, c) $g(8 – 4h)$, d) $g(2 + \Delta x)$.

1.3 a) $\lim\limits_{x\to -3}(2x^2 - 1)$, b) $\lim\limits_{t\to 2}(2at - a + 2)$, c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-2}{2x+3}$.

1.4 a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$, b) $\lim\limits_{a\to 1}\dfrac{a^2-2a+1}{a^2-1}$, c) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{t}(2t^2+3t)$.

1.5 a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2+x-6}$, b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-3x}{x^2+5x}$, c) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{4x}-4}{2x-8}$.

1.6 a) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x-2}{2x+3}$, b) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-3}{x-5x^2}$, c) $\lim\limits_{t\to \infty}\dfrac{t-3}{1-3t^2}$.

1.7 Määritä $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)$ ja $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)$, kun

a) $f(x) = \begin{cases} ax + 2, \textit{ kun } x \le 1 \\ 2 - x, \textit{ kun } x > 1 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 3x - 5, \textit{ kun } x < 1 \\ \dfrac{2x-2}{3x^2-3}, \textit{ kun } x > 1 \end{cases}$.

1.8 Määritä sellainen a:n arvo, että edellisen tehtävän a)-kohdan funktio on jatkuva kaikilla x:n arvoilla.

B

1.9 Olkoon $f(x) = \dfrac{2x^2 - 4x}{x+1}$. Laske a) $f(2a)$, b) $f(2 - h)$, c) $f(x + h)$.

1.10 a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{2x^2 - 5x - 3}$, b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 2x + 3}{2x^2 - 5x + 3}$, c) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2 - 2x + 3}{2x^2 - 5x + 3}$.

1.11 a) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$, b) $\lim\limits_{\varphi\to 3} \dfrac{\varphi^2 - 6\varphi + 9}{\sqrt{3\varphi} - 3}$.

1.12 Määritä funktion a) $y = \dfrac{3x}{x-2}$, b) $y = \dfrac{1-x}{x-2}$ toispuoleiset raja-arvot kohdassa $x = 2$. (Kohta $x = 2$ on käyrälle ns. pystyasymptootti.)

1.13 Myöhemmin todistetaan, että $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2}{x} \sin 3x \right) = 6$ (x radiaaneissa). Täten funktion $\dfrac{2}{x}\sin 3x$ arvo on lähellä lukua 6, kun x on lähellä 0:aa. Laske (laskimella), miten paljon tämän funktion arvo poikkeaa raja-arvostaan ja mihin suuntaan (pienempi vai suurempi), kun x on a) 0,2 (*rad*), b) –0,1 (*rad*), c) 0,01 (*rad*).

C

1.14 $f(x) = x^2 - 3x$. Laske a) lauseke $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, b) tämän lausekkeen raja-arvo, kun $h \to 0$.

1.15 Kuten edellinen, mutta $f(x) = \sqrt{2x}$.

1.16 Laske funktion $\dfrac{|2x|}{2x^2 - 3x}$ toispuoleiset raja-arvot kohdassa $x = 0$. (Ohje: $|a| = a$, jos $a > 0$, mutta $|a| = -a$, jos $a < 0$.)

1.17 Kuten edellinen, mutta $f(x) = \dfrac{1}{3 + 2^{1/x}}$ (ohje: laske ensin lausekkeen $1/x$ ja sitten lausekkeen $2^{1/x}$ toispuoleiset raja-arvot).

1.18 Määritä sellainen *k*:n arvo, että funktio $y = \begin{cases} kx+2, kun\ x \le 1 \\ \dfrac{x^2-x}{x^2+x-2}, kun\ x > 1 \end{cases}$ on jatkuva kaikilla *x*:n arvoilla.

1.19 Määritä $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-t}\sin t$.

1.20 Piirrä jollakin menetelmällä (esim. *Derive*-ohjelmalla) seuraavien funktioiden kuvaajat: a) $y = e^{-0.2t}\sin 3t$, b) $y = \sin\frac{1}{t}$, c) $s = t\sin\frac{1}{t}$, d) $v = t^2\sin\frac{1}{t}$, e) $y = \dfrac{\sin x}{x}$.

1.21 Pallon pinta-ala *A* on halkaisijan *d* funktio: *A* = *A*(*d*). Esitä tämä funktio yhtälömuodossa ("kaavana"), b) Mikä on tämän funktion määrittelyjoukko *Mf*? c) Mikä tuttu käyrä on tämän funktion kuvaaja?

1.22 Funktio *f* on aidosti ***kasvava*** suljetulla välillä [*a*,*b*] (välillä $a \le x \le b$), jos $f(x_1) < f(x_2)$ aina, kun $a \le x_1 < x_2 \le b$. a) Havainnollista tällaista funktiota, piirtämällä sen kuvaaja sekä merkitsemällä kuvaan *kohdat* x_1 ja x_2 sekä funktion arvot $f(x_1)$ ja $f(x_2)$. b) Missä neljänneksissä (eli millä väliin $0 \le x \le 2\pi$ kuuluvilla *x*:n arvoilla) kosinifunktio on aidosti kasvava funktio. c) Määrittele ja havainnollista vastaavasti aidosti *vähenevä* funktio.

1.23 Määrittele käsitteet ***parillinen ja pariton funktio***. Havainnollista näitä funktiotyyppejä. Onko funktio $y = 2\cos x + 1$ parillinen funktio? Onko funktio $y = 2\sin x + 1$ pariton funktio ?

1.24 Millä tavoin funktioiden $y = x^3 + 2x + 1$ ja $y = x^4 + x^2 + 2$ arvot eli *y*:n arvot käyttäytyvät, kun a) $x \to \infty$, b) $x \to -\infty$? Yleisesti: Miten c) paritonta astetta, d) parillista astetta olevan polynomifunktion arvot käyttäytyvät, kun $x \to \pm\infty$?

1.25 Esim. funktion $f(x) = 2x^3 + 4x$ voidaan ajatella kahden funktion $u(x) = 2x^3$ ja $v(x) = 4x$ summaksi. Kun lasketaan raja-arvo $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = 250 + 20 = 270$, niin itse asiassa käytetään tulosta *"summan raja-arvo = yhteenlaskettavien raja-arvojen summa",* ts.

$$\lim_{x\to a}\left[u(x)+v(x)\right] = \lim_{x\to a} u(x) + \lim_{x\to a} v(x).$$

Tämän mukaan

$$\lim_{x\to 5}(2x^3+4x)=\lim_{x\to 5}2x^3+\lim_{x\to 5}4x=250+20=270.$$

a) Kirjoita vastaavat säännöt seuraavien funktioiden raja-arvoille:

$$k\cdot u(x)\ (k=vakio),\ \ u(x)v(x),\ \ \frac{u(x)}{v(x)}\ \ ja\ \ u(x)^k.$$

b) Laske tällaisia sääntöjä käyttäen vaihe vaiheelta seuraava raja-arvo:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-3x)^5}{128(x^3+2)}.$$

1.26 Luonnollisen logaritmijärjestelmän kantaluku *e* = 2,71828... on funktion y = $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ raja-arvo, kun $x \to \infty$. a) Laske laskinta käyttäen tämän funktion arvot, kun *x*:lle annetaan arvot 10, 100, 1000 ja –1000.

b) Mikä virhe on seuraavanlaisessa päättelyssä: Kun $x \to \infty$, niin kantaluku $(1+\frac{1}{x})\to 1$. Koska 1 korotettuna mihin potenssiin tahansa on 1, niin lausekkeen $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ raja-arvo on $1^\infty=1$.

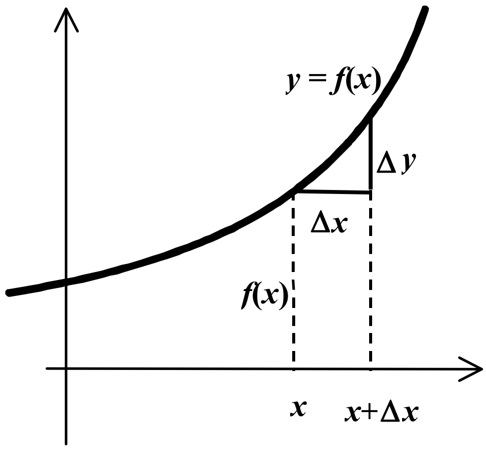
c) Luku *e* voidaan määritellä myös sarjan $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...$ (jossa on äärettömän monta termiä) summana, kun x = 1. Laske tästä sarjasta *e*:lle likiarvo siten että käytät sarjan summan tilalla sarjan seitsemättä osasummaa, ts. seitsemää ensimmäistä termiä.

*Matemaattisesti on olemassa monia muitakin tapoja, miten Neperin lukuun *e* joudutaan. Eräs on se, että etsitään funktiota, jonka derivaatta on funktio itse tämä funktio on e^x.

*Neljäs tapa on se, että määritellään ensin funktio ln *x* funktion $y=1/x$ integraalina $\ln x=\int_1^x\frac{1}{u}\,du$ (x > 1). Funktion y = ln x käänteisfunktio on *e*-kantainen eksponenttifunktio $x=e^y$. Funktio *y* = *k*/*x* (ja sen integrointi) on tekniikassa tavallinen, sillä se ilmaisee "suureiden" *x* ja *y* välisen kääntäen verrannollisuuden.

2 Derivaatta

2.1 Derivaattakäsite



Tutkitaan funktiota f kiinteällä x:n arvolla x eli kohdassa x. Annetaan x:lle positiivinen tai negatiivinen "lisäys" Δx, jolloin joudutaan kohtaan $x + \Delta x$. Lisäys Δx aiheuttaa funktion arvoon muutoksen Δy, joka voidaan esittää funktion arvojen $f(x+\Delta x)$ ja $f(x)$ erotuksena:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x).$$

Suhdetta $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ sanotaan ***erotusosamääräksi***.

Se kuvaa funktion muuttumisen "voimakkuutta", "muuttumisnopeutta" tällä Δx:n pituisella välillä ts. sitä, miten paljon funktion arvo muuttuu verrattuna välin pituuteen Δx. Jos tämä suhde on suuri, niin funktion arvot kasvavat paljon välillä $x \ldots x + \Delta x$ ja geometrisesti käyrä $y = f(x)$ nousee jyrkästi tällä välillä.

Kun annetaan Δx:n lähestyä nollaa, saadaan funktion "paikallinen muutosnopeus" kohdassa x, Tätä raja-arvoa sanotaan funktion f ***derivaataksi*** x:n arvolla x tai kohdassa x ja merkitään $f'(x)$:llä. Siis

Määritelmä. *Funktion f* ***derivaatta***

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

Esim. 1 Laske derivaatan määritelmällä funktion $f(x) = x^2 - 3x$ derivaatta (yleisellä x:n arvolla x).

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(x+\Delta x)^2 - 3(x+\Delta x)] - (x^2 - 3x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x - x^2 + 3x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2x + \Delta x - 3)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x - 3) = 2x - 3. \end{aligned}$$

Matematiikassa käytetään Δx:n sijaan usein h-kirjainta:

$$\boxed{\boldsymbol{f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}}.$$

Esim. 2 Laske funktion $y = 1/x$ derivaatta (derivaatan määritelmällä).

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

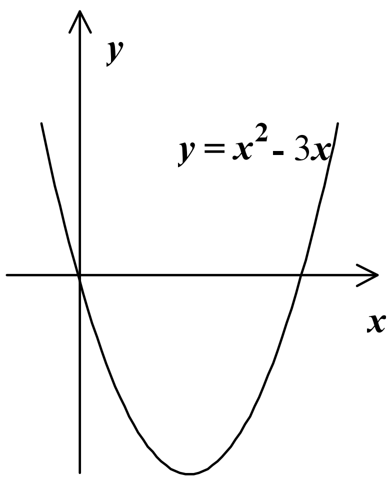
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h(x+h)x} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h)x} = -\frac{1}{x^2}.$$

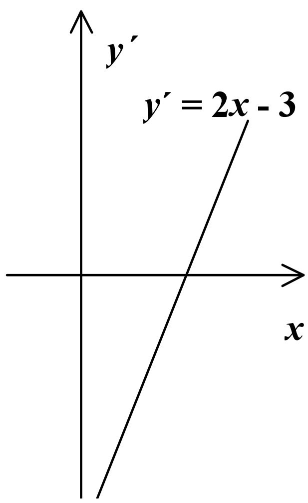
Esimerkkien 1 ja 2 tulokset voidaan esittää myös seuraavasti:

1) Funktion $y = x^2 - 3x$ *derivaatta on* $y' = 2x - 3$,

2) $y = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{1}{x^2}$.

Ensimmäisessä tuloksessa x voi olla mikä reaaliluku tahansa, ts. funktiolla $y = x^2 - 3x$ on derivaatta kaikilla x:n arvoilla. Tämä merkitsee, että funktio $y = x^2 - 3x$ on ***derivoituva*** kaikilla x:n arvoilla ja sen ***derivaattafunktio*** on $y' = 2x - 3$.





Jotta jokaiselle yksittäiselle funktiolle ei tarvitsisi johtaa erikseen derivaatan lauseketta derivaatan määritelmän avulla, jatkossa pyritään esittämään yleisiä *derivoimissääntöjä*, esim. miten derivoidaan potenssifunktio $y = x^a$ (missä $a \in \boldsymbol{R}$), tulo, osamäärä, yhdistetty funktio jne.

Erotusosamäärän $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ raja-arvoa eli derivaattaa merkitään myös $\frac{dy}{dx}$:llä (lue: *"dy dx"* tai *"y:n derivaatta x:n suhteen"*).

Mainitaan vielä eräs tapa derivaatan merkitsemiseksi, ns. ***derivaatta-operaattorin D*** käyttäminen. Esim. edellä esimerkeissä 1 ja 2 johdetut tulokset voidaan esittää muodoissa

$$D(x^2 - 3x) = 2x - 3 \text{ ja } \boxed{D\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}}.$$

Kun derivaattaoperaattori "operoi" funktioon $x^2 - 3x$, se muuttaa funktion toiseksi funktioksi $2x - 3$.

2.2 Eräitä derivoimissääntöjä

Derivoiminen tarkoittaa funktion derivaatan laskemista.

1. Vakion derivaatta on = 0, ts. jos $f(x) = a$ (= vakio), niin $f'(x) = 0$.

Tod. $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{a-a}{h} = 0.$

2. Potenssin derivaatta: $\boxed{\boldsymbol{D\, x^n = n \cdot x^{n-1}}}$ (n = 1, 2, ...).

Harjoitustehtävänä on tämän todistus erikoistapauksissa $n = 1$, 2 ja 3 (sekä mahdollisesti C-tason tehtävänä yleinen todistus). Myöhemmin todistetaan, että sama sääntö pitää paikkansa, vaikka n:n paikalla on mikä *vakio a* ($a \in \mathbf{R}$) tahansa.

Esim. 3 $D\,x^5 = 5x^4$, $D\,x = D\,x^1 = 1 \cdot x^0 = 1$. Siis $\boldsymbol{D\,x = 1}$.

3. Vakiotekijä voidaan "siirtää eteen": $\boxed{\boldsymbol{D\left[a \cdot u(x)\right] = a \cdot D\,u(x)}}$.

Tod. Jos $f(x) = a \cdot u(x)$, niin

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{a \cdot u(x+h) - a \cdot u(x)}{h} = a \cdot \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = a \cdot u'(x).$$

Esim. 4 $D(8x^7) = 8 \cdot D\,x^7 = 56x^6$, $D(-3x) = -3$,

$$D\frac{2x^5}{17a} = \frac{2}{17a}Dx^5 = \frac{10x^4}{17a}$$ (Huomaa: ***vakiotekijä*** $\frac{2}{17a}$).

4. Summa voidaan derivoida "termi termiltä":

$$\boxed{D(u(x)+v(x)) = u'(x)+v'(x)}$$

***Tod.** Jos $f(x)$ = u(x) + v(x), niin

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)+v(x+h)-[u(x)+v(x)]}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x+h)-u(x)}{h}+\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right] = u'(x)+v'(x).$$

Esim. 5 $D(x^4+x^2) = 4x^3+2x$, $D(5x^3-3x+2) = 5\cdot 3x^2-3 = 15x^2-3$,

$$\frac{d}{dt}\frac{3t^2+2t-1}{8a} = \frac{6t+2}{8a} = \frac{3t+1}{4a}$$ (huom. $\frac{1}{8a}$ on vakiotekijä),

$$\frac{d}{dx}(tx^2+3x) = 2tx+3,\quad \frac{d}{dt}(tx^2+3x) = x^2.$$

5. Tulon derivaatta: Jos u = $u(x)$ ja v = v(x), niin

$$\boxed{D\,(uv) = u'v+uv'}$$ (Tod. sivuutetaan.)

Esim. 6 Laske funktion $y = (3x^2-2x)(5x^3+3)$ derivaatta x:n arvolla 1.

$$y' = (6x-2)(5x^3+3)+(3x^2-2x)15x^2$$

$$\therefore\ y'(1) = 4\cdot 8+1\cdot 15 = 47.$$

Saman tuloksen saisit, jos kehittäisit ensin hakasulkulausekkeen polynomiksi.

6. Osamäärän derivaatta: $\boxed{D\,\frac{u}{v} = \frac{u'v-uv'}{v^2}}$, kun $u = u(x)$ ja v=$v(x)$.

(Tod. sivuutetaan.)

Esim. 7 $D\dfrac{x^2-2x}{3x+1}=\dfrac{(2x-2)(3x+1)-(x^2-2x)\cdot 3}{(3x+1)^2}=\dfrac{3x^2+2x-2}{(3x+1)^2}$.

Jos derivoitavassa funktiossa esiintyy useita muuttujia, on seuraavanlainen derivaatan merkintä käyttökelpoinen, koska siitä ilmenee, minkä muuttujan suhteen derivointi tapahtuu:

$$\frac{d}{dx}(tx^2+3x)=2tx+3,\quad \frac{d}{dt}(tx^2+3x)=1\cdot x^2+0=x^2.$$

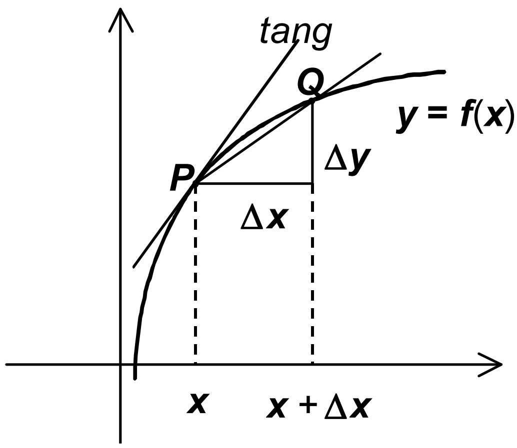
$$\frac{d}{dr}\frac{2V}{3h(5r+1)}=\frac{2V}{3h}\cdot\frac{d}{dr}\frac{1}{5r+1}=\frac{2V}{3h}\cdot\frac{0\cdot(5r+1)-1\cdot 5}{(5r+1)^2}=\frac{-10V}{3h(5r+1)^2}.$$

Huomaa edellisessä erityisesti ***vakiotekijän*** käsittely. Sama tavallisemmin:

$$f(r)=\frac{2V}{3h(5r+1)}\Rightarrow f'(r)=\frac{2V(0-1\cdot 5)}{3h(5r+1)^2}=\frac{-10V}{3h(5r+1)^2}.$$

2.3 Derivaatan geometrinen merkitys

Erotusosamäärä $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ antaa suoran PQ kulmakertoimen (vrt. viereinen kuva). Kun $\Delta x \to 0$, niin piste Q lähenee pistettä P ja suora PQ kääntyy pisteeseen P piirretyksi tangentiksi.



Täten erotusosamäärän raja-arvo eli **derivaatta f′(x) merkitsee geometrisesti sellaisen tangentin kulmakerrointa, jonka sivuamispisteenä on kohtaa *x* vastaava käyrän *y* = *f*(*x*) piste P**.

Jos siis tunnetaan *käyrällä oleva* piste $P_0(x_0,y_0)$, niin tähän pisteeseen piirretyn tangentin kulmakerroin on $k=f'(x_o)$ ja siten tangentin yhtälö on

$$\boxed{y-y_o=f'(x_o)(x-x_o)}.$$

Koska pisteeseen P_0 piirretty **normaali** on kohtisuorassa tangenttia vastaan, niin normaalin kulmakerroin on tangentin kulmakertoimen "käänteisluvun vastaluku", ts.

$$\boxed{k_n=-\frac{1}{f'(x_o)}}.$$

Esim. 8 Käyrälle $\mathrm{y} = \dfrac{4}{\mathrm{x}-1}$ piirretään tangentti pisteeseen, jonka x-koordinaatti on 3 ja y-koordinaatti siten 2. Määritä tangentin yhtälö.

$$y' = -\frac{4}{(x-1)^2} \quad \therefore k = -\frac{4}{(3-1)^2} = -1.$$

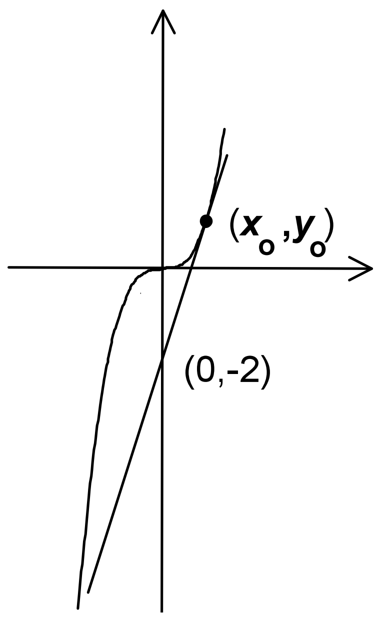
Siten tangentti on $y - 2 = -1 \cdot (x-3)$ eli $\underline{\underline{x + y - 5 = 0}}$.

Esim. 9 Käyrälle $y = x^3$ piirretään tangentti, joka kulkee pisteen (0,–2) kautta. Määritä tangentin yhtälö.

Tässä esimerkissä *ei tunneta tangentin sivuamispisteen x-koordinaattia* x_o, sillä piste (0,–2) ei ole käyrän piste. Tangentin kulmakertoimen laskeminen ei siksi onnistu niin yksinkertaisesti kuin edellisessä esimerkissä.

Koska $y = x^3$, niin $y' = 3x^2$. Merkitään sivuamispisteen x-koordinaattia x_o:lla, jolloin $y_o = x_o{}^3$ ja tangentti on muotoa

(1) $\quad y - x_o{}^3 = 3x_o{}^2(x - x_o)$.



Luvun x_o arvo saadaan lasketuksi siitä tiedosta, että tangentin pitää kulkea pisteen (0,–2) kautta, ts. tämän pisteen täytyy toteuttaa tangentin yhtälö (1):

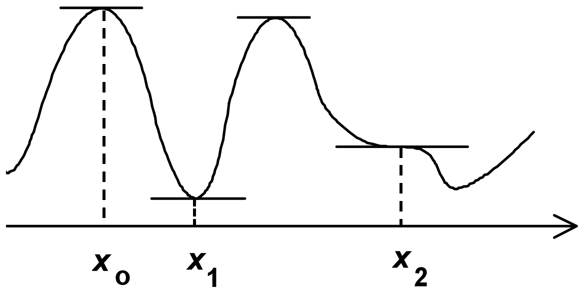
$$-2 - x_o{}^3 = 3x_o{}^2(0 - x_o)$$
$$-2 - x_o{}^3 = -3x_o{}^3$$
$$x_o{}^3 = 1 \quad \therefore x_o = 1.$$

Kun tämä x_o:n arvo sijoitetaan yhtälöön (1), yhtälö saa muodon

$$y - 1 = 3(x-1) \quad \therefore \quad \underline{\underline{y = 3x - 2}}.$$

Huom. Edellisen kuvan mukainen, pisteeseen (x_o, y_o) piirretty tangentti leikkaa käyrän pisteessä (–2,–8). Siis suora, joka on käyrän johonkin pisteeseen piirretty ***tangentti*** (eli ***sivuaja***), voi olla käyrän jonkin toisen pisteen kannalta katsottuna saman käyrän ***leikkaaja*** (eli ***sekantti***).

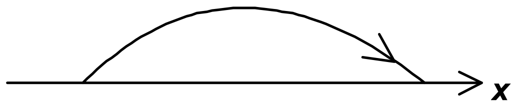
Funktion tutkimisen kannalta ovat usein tärkeitä ns. ***paikalliset ääriarvokohdat***, ts. sellaiset kohdat x_o, joissa funktion arvo (y:n arvo) on suurimmillaan tai pienimmillään, kun funktion arvoa $f(x_o)$ verrataan x_o:n lähiympäristön mukaisiin funktion arvoihin.



Esimerkiksi edellisessä kuvassa x_o on paikallinen ***maksimikohta*** ja x_1 on paikallinen ***minimikohta***. Kummassakin kohdassa tangentti on vaakasuora, ts. tangentin kulmakerroin (derivaatta) on = 0. Myös kohdassa x_2 tangentti on vaakasuora, mutta kyseessä ei ole ääriarvokohta, vaan vastaava käyrän piste on ns. ***käännepiste*** (jossa käyrän kuperuussuunta vaihtuu).

Esim. 10 Määritä heittoparaabelin

$$y = -3{,}45 \cdot 10^{-3} x^2 + 0{,}270x$$



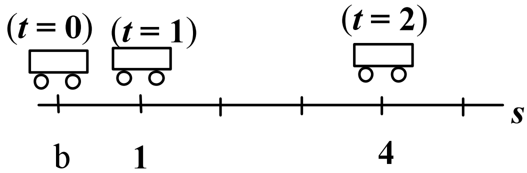
ylin piste.

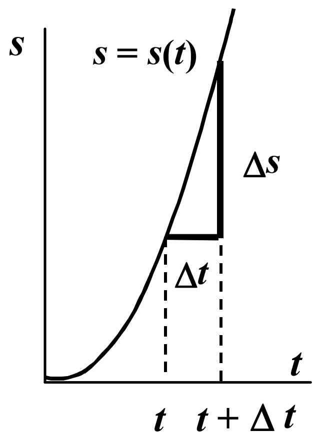
$$y' = -6{,}90 \cdot 10^{-3} x + 0{,}270 = 0 \Leftrightarrow x = 39{,}13 \ldots \therefore y \approx 5{,}28 .$$

2.4 Derivaatan sovelluksia

Tekniikassa joudutaan usein tutkimaan jonkin suureen muuttumisen nopeutta, muuttumisen "voimakkuutta" ja siten derivaattakäsite on siellä keskeinen.

Esim. 11 Jos kappale etenee pitkin matka-akselia s, sen matkakoordinaatti s muuttuu ajan t funktiona $s = s(t)$. Viereisissä kuvissa on tilanteen havainnollistus sekä funktion $s = s(t)$ kuvaaja (t, s)-koordinaatistossa.





Suhde $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ilmoittaa matkakoordinaatin muutoksen suuruuden Δs verrattuna käytettyyn aikaan Δt, ts. se kuvaa *matkakoordinaatin s* ***muuttumisen nopeutta*** tällä Δt:n pituisella aikavälillä eli antaa *keskinopeuden* aikavälinä $t \ldots t + \Delta t$.

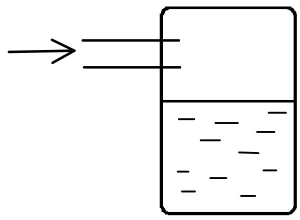
Kun Δt lähenee nollaa, niin saatu raja-arvo antaa hetkellisen nopeuden hetkellä t. Siis

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t).$$

Täten ***nopeus on matkan derivaatta ajan suhteen***: $\boxed{\boldsymbol{v = \frac{ds}{dt}}}$.

Vastaavasti kiihtyvyys kuvaa nopeuden muuttumisen "voimakkuutta" ja on siten nopeuden derivaatta: $\boxed{\boldsymbol{a = v'(t) = \frac{dv}{dt}}}$.

Esim. 12 Jos astiaan virtaa kaasua tai nestettä, ovat astiassa olevan kaasun paine p, nesteen tilavuus V ja massa m ajan t funktioita: $p = p(t)$, $V = V(t)$, $m = m(t)$. Näiden funktioiden derivaatat



$$\boldsymbol{\frac{dp}{dt}},\ \boldsymbol{\frac{dV}{dt}} \text{ ja } \boldsymbol{\frac{dm}{dt}}$$

kuvaavat kyseisten suureiden muuttumisen "voimakkuutta", ts. millä *nopeudella* paine, tilavuus ja massa muuttuvat.

*Sama määrä $V(t)$, joka on siirtynyt astiaan ajassa t (aikavälillä $0...t$), on myös kulkenut virtausputken poikkipinnan läpi. Täten derivaatta $\frac{dV}{dt}$ kuvaa myös putkessa tapahtuvan virtauksen nopeutta. Sitä sanotaan ***tilavuusvirraksi*** (tai tilavuusvirran voimakkuudeksi). Sähkövirran voimakkuus $i(t)$ taas ilmaisee varauksen virtausnopeuden:

virranvoimakkuus i(t) on varauksen q(t) derivaatta: $\boldsymbol{i = \frac{dq}{dt}}$.

*Derivaatta esiintyy tekniikassa monessa muussakin yhteydessä. Esim. ns. derivoiva säädin tutkii jonkin suureen muuttumisen nopeutta jossakin prosessissa ja korjaa tilannetta, jos tämä muutosnopeus käy liian suureksi.

*Jonkin funktion ***aikaderivaattaa*** (derivaattaa ajan suhteen) merkitään usein pilkun sijasta pisteellä esim. seuraavasti:

$$\boldsymbol{v = \dot{s}(t) = \frac{ds}{dt}}, \text{ tilavuusvirta } \boldsymbol{\dot{V}(t) = \frac{dV}{dt}}, \text{ massavirta } \boldsymbol{\dot{m}(t) = \frac{dm}{dt}},\ \boldsymbol{i(t) = \dot{q}(t) = \frac{dq}{dt}}$$

Derivaatan määritelmän ymmärtäminen on tärkeää sovellusten kannalta, sillä aina funktiosta ei tunneta sen matemaattista lauseketta, joten sen derivointiin ei voida käyttää mitään derivoimissääntöä. Jos funktio tunnetaan esim. taulukkomuodossa, saadaan derivaatan arvoja, kun derivaatan likiarvona käytetään erotusosamäärää:

$$\boldsymbol{f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}},\ \boldsymbol{jos\ h \approx 0}.$$

HARJOITUKSIA

A

2.1 Muodosta derivaatan määritelmää käyttäen seuraavien funktioiden derivaatat (käytä jossakin kohdassa lisäystä Δx ja jossakin h:ta):

a) $y = 2x + 3$, b) $y = x^2$ c) $y = \sqrt{2x}$.

2.2 Johda seuraavien funktioiden derivaatan lausekkeet (derivaatan määritelmää käyttäen)

a) x^3, b) $\frac{x+2}{x}$, c) $\frac{1}{x^2}$.

2.3 Määritä derivaatan määritelmää käyttäen funktion $y = \frac{2x-1}{x}$ derivaattafunktio ja piirrä sen kuvaaja. Millä x:n reaaliarvoilla alkuperäinen funktio on derivoituva?

2.4 Derivoi a) $y = x^4$, b) $f(x) = \frac{3x^2}{5}$, c) $2x^3 + 4x^2 - 2x + 5$.

2.5 Derivoi a) $f(t) = 2at^2 - bt + \frac{3}{t}$ (käytä apuna Esimerkin 2 tulosta)

b) $u(z) = xz^3 - z^2 \sin x$, c) $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$.

2.6 Laske funktion $g(r) = (3r^2 - 1)^2$ derivaatta a) tulon derivoimissäännöllä, b) suorittamalla ensin potenssiinkorotus. (Myöhemmin opitaan kolmas tapa: yhdistetyn funktion derivointi.)

2.7 Astian vesimäärä muuttuu lain $V(t) = 5{,}23 - 2{,}35t^2$ mukaisesti. a) Piirrä tämän funktion kuvaaja, b) Laske tilavuusvirran lauseke.

2.8 Derivoi a) $\frac{2x-1}{x^3}$, b) $\frac{5t-4}{6t^2}$, c) $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 6x - 5}{2c^2}$.

2.9 Millä x:n arvoilla funktion $y = 3x^2 - 6$ derivaatta on > 0 ?

2.10 Määritä perusparaabelin $y = x^2$ pisteeseen (2, 4) piirretyn tangentin yhtälö.

2.11 Pisteestä (1,–3) piirretään paraabelille $y = x^2$ tangentit. Määritä niiden yhtälöt.

B

2.12 Johda derivaatan määritelmää käyttäen funktion a) $x^2 + 3x + 2$, b) $\sqrt{x^2 - x}$ derivaatta.

2.13 Derivoi a) $\dfrac{2x+1}{4(x^2-4)}$, b) $\dfrac{6}{x} + \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}$.

2.14 a) $\dfrac{d}{du}\dfrac{t+2u}{t-2u}$, b) $\dfrac{d}{dt}(\dfrac{t^2}{2x} - tx^3)$.

2.15 $s(t) = s_o + v_o t + \dfrac{at^2}{2}$. Laske $v(t)$ ja $a(t)$.

2.16 Millä t:n arvolla funktio $\varphi(t) = 1 + 9t^2 - 2t^3$ kasvaa nopeimmin? Vihje: derivaattafunktion kuvaaja.

2.17 a) Todista, että potenssin derivoimissääntö pitää paikkansa myös kun eksponentti on negatiivinen kokonaisluku $-n$, ts. $\boxed{D\,x^{-n} = -nx^{-n-1}}$. (Vihje: Osamäärän derivoimissääntö.) b) Derivoi tämän avulla $2/x^3$.

2.18 a) Todista, että kolmen funktion tulon derivoimissääntö on

$\boxed{D\,(uvw) = u'\,vw + uv'\,w + uvw'}$. (Vihje: $uvw = u\cdot(vw)$.)

b) Laske tämän avulla $f'(x)$ sekä $f'(-2)$, kun $f(x) = (2+3x)^3$.

2.19 Määritä (derivaatan avulla) paraabelin $y = -x^2 - 2x + 1$ sellaisen tangentin yhtälö, joka on kohtisuorassa suoraa $x + 2y - 3 = 0$ vastaan.

2.20 Käyrälle $y=\dfrac{x}{2x-1}$ piirretään tangentit pisteestä (4, 0). Määritä sivuamispisteen x-koordinaatti x_o.

2.21 Olkoon $f(x)=x^3+2$. Määritä jokin sellainen funktio $F(x)$, että sen derivaatta $F'(x)=f(x)$. Tällaista funktiota $F(x)$ sanotaan funktion $f(x)$ *integraalifunktioksi.*

2.22 Olkoon $f(x)=x(4-x)$, x = 0,4 ja h = 0,2. Laske $f(x + kh)$, kun k = 0, 1, 2, ..., 6. Kirjoita nämä x:n ja $f(x)$:n arvot taulukoksi

x	0,4	0,6	0,8	*jne*
$f(x)$				

Laske taulukon tietojen avulla tämän taulukkomuotoisen funktion derivaatalle $f'(1)$ likiarvoja, käyttäen h:na lukua a) h = 0,4 , b) h = 0,2 , c) h = –0,2. Vertaa tuloksia derivaatan matemaattisen lausekkeen antamaan tarkkaan arvoon $f'(1)$.

C

2.23 Pisteestä (3,–5) piirretään hyperbelille $y=\dfrac{1}{x}$ tangentit. Määritä niiden välinen kulma.

2.24 Käyrälle $y=x^2+4x$ piirretään normaalit, jotka kulkevat origon kautta. Määritä normaalien kulmakertoimet.

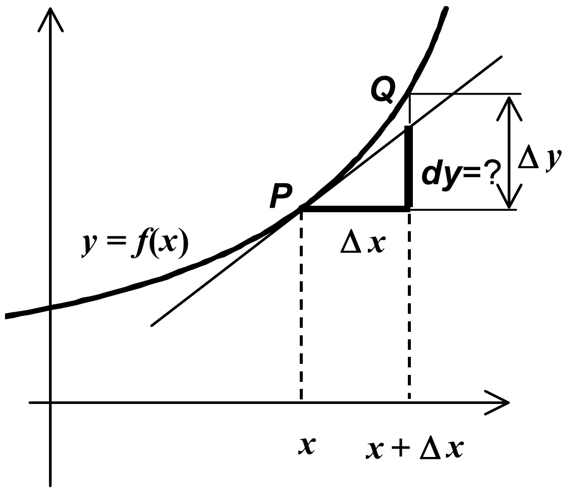
2.25 Kun käyrällä kuljetaan matka Δs pisteestä P pisteeseen Q, niin tangentin suuntakulma muuttuu tietyn määrän $\Delta\alpha$. Suhde $\Delta\alpha/\Delta s$ kuvaa käyrän kaartumisen nopeutta välillä PQ. Sen raja-arvo $d\alpha/ds$ on ***kaarevuus k*** pisteessä P. Kaarevuuden käänteisluku $\rho=1/k$ on ns. ***kaarevuussäde*** pisteessä P. Sille johdetaan myöhemmin laskukaava $\boxed{\rho=\dfrac{[1+(y')^2]^{3/2}}{y''}}$, missä y'' tarkoittaa y'-funktion derivaattaa.

Laske paraabelin $y=x^2$ kaarevuussäde a) huipussa, b) kohdassa $x=1$. (Vastaus: a) 1/2, b) n. 5,6).

3 Differentiaali

3.1 Differentiaalin määrittely ja käyttö virheen arvioinnissa

Siirrytään pisteestä P käyrää pitkin toiseen pisteeseen Q (kuva). Vastaava vaakasuora muutos on Δx ja pystysuora Δy. Kuinka suuri on y:n muutos dy, jos käyrän sijaan siirrytäänkin *tangenttia pitkin* matka, joka vastaa vaakasuoraa muutosta Δx ?



Tangentin kulmakerroin on aikaisemman mukaan derivaatta laskettuna arvolla x. Toisaalta kuvan mukaan kulmakerroin on $= \dfrac{dy}{\Delta x}$. Täten $\dfrac{dy}{\Delta x} = f'(x)$, mistä seuraa, että $dy = f'(x) \cdot \Delta x$. Lukua dy sanotaan y:n ***differentiaaliksi***. Siis

Määritelmä. Funktion $y = f(x)$ *differentiaali* $\boxed{dy = f'(x) \cdot \Delta x}$

Jos erityisesti Δx on lähellä nollaa, niin $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x)$ (koska derivaatta on erotusosamäärän raja-arvo) ja siten funktion lisäys

$$\Delta y \approx f'(x) \cdot \Delta x = dy$$

(vrt. edellinen kuva). Differentiaali dy on siis y:n muutoksen Δy hyvä likiarvo, jos x:n muutos Δx on pieni:

(1) $$\boldsymbol{\Delta y \approx dy = f'(x) \cdot \Delta x, \; kun \; \Delta x \approx 0}.$$

*Kun y:n muutoksen Δy tilalla käytetään differentiaalia dy, merkitsee se itse asiassa, että käyrä korvataan tangentillaan välillä x ... $x + \Delta x$. Tämä on eräs tapa *linearisoida* käyrä pisteen P lähistöllä.

*Toinen linearisointitapa olisi korvata käyränosa PQ janalla PQ ja kolmas olisi korvata käyränosa PQ ns. *regressiosuorallaan*. Linearisointia käytetään mm. sähkötekniikassa ja tilastotieteessä.

Esim. 1 Lasketaan muutaman funktion differentiaali:

1) $y = x^3 + 2x \Rightarrow dy = (3x^2 + 2)\Delta x,\ ts.\ d(x^3 + 2x) = (3x^2 + 2)\Delta x,$

2) $y = x^2 \Rightarrow dy = 2x\Delta x,\ ts.\ d\,x^2 = 2x\Delta x,$

3) $y = x \Rightarrow dy = 1 \cdot \Delta x$ ts. $\boxed{d\,x = \Delta x}$.

Viimeinen tulos osoittaa, että *riippumattoman muuttujan x lisäyksen* Δx *tilalla voidaan käyttää x:n differentiaalia dx*. Siten differentiaalin määritelmä saa muodon:

(2) $$\boxed{dy = f'(x)\,dx},$$

missä *dx* on *x*:n "lisäys" (posit. tai negat.).

Esim. 2 Differentioi funktio $y = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{2x^2 - x}$.

$$dy = f'(x)dx = \frac{(2x-3)(2x^2-x) - (x^2-3x+1)(4x-1)}{(2x^2-x)^2}\,dx$$

$$= \frac{5x^2 - 4x + 1}{(2x^2 - x)^2}\,dx.$$

Yhtälöstä (2) seuraa, että

$$\boxed{f'(x) = \frac{dy}{dx}},$$

ts. *derivaatta on y:n ja x:n differentiaalien osamäärä*.

Esim. 3 Vinossa heittoliikkeessä pisteen paikka (x, y) saadaan yhtälöistä

$$\begin{cases} x = 27{,}6\,t \\ y = 29{,}4\,t - 4{,}91\,t^2 \end{cases} \therefore \begin{cases} dx = 27{,}6\,dt \\ dy = (29{,}4 - 2\cdot 4{,}91t)dt = (29{,}4 - 9{,}82t)dt \end{cases}$$

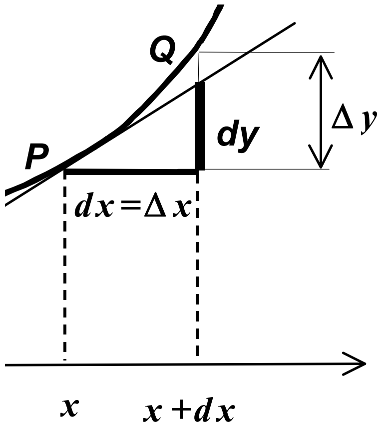
Laske ratakäyrän $y = f(x)$ derivaatta *t*:n arvolla 1 (jota vastaava piste on $x = 27{,}6$; $y = 24{,}5$).

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{(29{,}4 - 9{,}82\,t)\,dt}{27{,}6\,dt} = \frac{29{,}4 - 9{,}82\,t}{27{,}6} \overset{(t=1)}{=} 0{,}709.$$

Koska $\Delta x = dx$, niin likiarvokaava (1) saa muodon

$$\boxed{\Delta y \approx dy = f'(x)\,dx, \, kun \; dx \approx 0}.$$

Huomaa, että x:n lisäys dx (eli Δx) aiheuttaa y:n arvoon muutoksen *Δy, joka ei ole sama kuin differentiaali dy* (kuva).



Edellistä likiarvokaavaa käytetään funktion muutoksen Δy arvioimiseen seuraavien esimerkkien mukaisesti.

Esim. 4 Olkoon $y = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{2x^2 - x}$.

Muuttujan x arvo vähenee arvosta 3 yhden kymmenesosan (eli n. 3,3 %).

a) Arvoi differentiaalia käyttäen, mihin suuntaan ja kuinka paljon y muuttuu.

b) Laske y:n muutos Δy suoraan.

$x = 3, \;\; dx = -0{,}1 \;\;\; f'(x) = \dfrac{5x^2 - 4x + 1}{(2x^2 - x)^2} \overset{x=3}{=} 0{,}1511...$ (Esim. 2).

a) $\Delta y \approx dy = f'(x)dx = 0{,}1511 \cdot (-0{,}1) = -0{,}0151$.

Siis y:n arvo pienenee suunnilleen määrän 0,015 (eli n. 23 %).

b) $\Delta y = f(2{,}9) - f(3) = 0{,}05100...–0{,}06666...= –0.01566...$

Esim. 5 Olkoon $y = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{2x^2 - x}$ kuten edellä. Mittauksissa x:lle saatiin likiarvo $x = 4{,}56$. Arvioidaan, että "x:n viimeisessä desimaalissa saattaa olla kahden numeron heitto puoleen tai toiseen". Nämä lähtötiedot esitetään yleensä muodossa

$$x = 4{,}56 \pm 0{,}02.$$

Laske y virherajoineen differentiaalia käyttäen.

Nyt ei tunneta x:n virheen dx tarkkaa arvoa, eikä myöskään virheen suuntaa (etumerkkiä), vaan tiedetään ainoastaan, että virhe on välillä $-0{,}02 \le dx \le +0{,}02$. Tämä kaksoisepäyhtälö voidaan esittää itseisarvoja käyttäen muodossa $\boxed{|dx| \le 0{,}02}$. Sen mukaan *x:n (absoluuttinen) virhe dx on itseisarvoltaan korkeintaan 0,02*. Kun tästä lasketaan funktion arvon y (abs.) virheelle Δy likiarvo (differentiaalin avulla), joudutaan siinäkin käyttämään itseisarvoja ja arviointia ylöspäin seuraavasti:

$$f(x)=\frac{x^2-3x+1}{2x^2-x},\quad x=4{,}56\pm 0{,}02\ \therefore x=4{,}56,\ |dx|\le 0{,}02$$

$$f(x)=0{,}2191\ldots,\quad f'(x)=\frac{5x^2-4x+1}{(2x^2-x)^2}=0{,}0632\ldots$$

$$\boxed{|\Delta y|\approx|dy|=|f'(x)||dx|\le 0{,}0632\cdot 0{,}02=0{,}0012<0{,}002}.$$

$$\therefore\ y=0{,}219\pm 0{,}002\,.$$

Esim. $|\Delta y|$ on y:n *absoluuttinen* ja $\left|\dfrac{\Delta y}{y}\right|$ *suhteellinen virhe* (oik. virheen itseisarvo). Jälkimmäinen esitetään usein prosentteina. Yleisesti

virhe = likiarvo – oikea arvo ja ***korjaus*** = oikea arvo – likiarvo.

3.2 Kokonaisdifferentiaali

Edellisen menettelyn käyttökelpoisuus tulee paremmin esiin, jos tarkastellaan useamman kuin yhden muuttujan funktioita. Tällaisilla funktioilla derivaatan ja differentiaalin tilalla ovat ns. *osittaisderivaatat* ja *kokonaisdifferentiaali*.

Esim. 6 Jos funktio $z=x^2y+y^3$ derivoidaan siten, että derivoimismuuttujana pidetään x:ää ja muuttuja y ajatellaan derivoitaessa vakioksi, saadaan tämän funktion $z=f(x,y)$ ***osittaisderivaatta x:n suhteen***:

$$f_x=2xy+0=2xy\,.$$

(Tätä merkitään myös f'_x:llä z'_x:llä, z_x:llä tai $\dfrac{\partial z}{\partial x}$:llä).

Vastaavasti, pitämällä x vakiona ja derivoimalla y:n suhteen, saadaan funktion $z=f(x,y)$ ***osittaisderivaatta y:n suhteen***:

$$f_y=x^2+3y^2\,.$$

Funktion $z=f(x,y)$ ***kokonaisdifferentiaali*** dz saadaan, kun osittaisderivaatat kerrotaan "lisäyksillä" dx ja dy ja saadut differentiaalilausekkeet lasketaan yhteen:

$$dz = f_x \cdot dx + f_y \cdot dy = 2xy\,dx + (x^2 + 3y^2)\,dy.$$

Yleisesti: Jos $\boldsymbol{z = f(x, y)}$, niin z:n ***kokonaisdifferentiaali***

$$\boxed{dz = f_x\ dx + f_y\ dy}.$$

Muuttujien x ja y arvojen "lisäykset" dx ja dy aiheuttavat funktion arvoon z tietyn muutoksen Δz. Kokonaisdifferentiaalia dz käytetään muutoksen Δz suuruuden arviointiin, jos dx ja dy ovat lähellä nollaa:

$$\boxed{\Delta z \approx dz = f_x\ dx + f_y\ dy,\ jos\ dx \approx 0\ \ ja\ \ dy \approx 0}.$$

Esim. 7 Kartion pohjan sädettä r lisätään 2% ja korkeutta h pienennetään 1%. Laske tilavuuden V muutos ΔV.

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h,\ \therefore V_r = \tfrac{2}{3}\pi rh,\ V_h = \tfrac{1}{3}\pi r^2;\ dr = +\tfrac{2}{100}r,\ dh = -\tfrac{1}{100}h.$$

$$\begin{aligned}\Delta V \approx dV &= V_r dr + V_h dh = \tfrac{2}{3}\pi rh \cdot \tfrac{2}{100}r + \tfrac{1}{3}\pi r^2 \cdot (-\tfrac{1}{100}h)\\ &= \tfrac{4}{300}\pi r^2 h - \tfrac{1}{300}\pi r^2 h = \tfrac{3}{300}\pi r^2 h = \tfrac{3}{100}\cdot\tfrac{1}{3}\pi r^2 h = \tfrac{3}{100}V.\end{aligned}$$

$\therefore$ <u>Tilavuus kasvaa n. 3%</u>.

Esim. 8 Olkoon $z = \dfrac{x^2}{y},\ missä\ \begin{cases} x = 4{,}75 \pm 0{,}02 \\ y = 6{,}28 \pm 0{,}03 \end{cases}$. Laske z virherajoineen kokonaisdifferentiaalin avulla.

Tässä tapauksessa $|dx| \le 0{,}02\ \ ja\ \ |dy| \le 0{,}03$, joten myös z:n virheen laskemisessa on käytettävä itseisarvoja:

$$|\Delta z| \approx |dz| = |f_x dx + f_y dy| \quad \Big|\ \underline{\text{kolmioepäyhtälö}}\text{: } |a \pm b| \le |a| + |b|$$

$\therefore$ $\boxed{|\Delta z| \approx |dz| \le |f_x||dx| + |f_y||dy|}$. Tässä esimerkissä

$$f_x = \frac{2x}{y} = 1{,}512\ldots,\ f_y = -\frac{x^2}{y^2} = -0{,}5720\ldots,\ z = 3{,}5927\ldots$$

$\therefore$ $\boxed{|\Delta z| \approx |dz| \le 1{,}512 \cdot 0{,}02 + 0{,}572 \cdot 0{,}03 = 0{,}047\ldots < 0{,}05}$.

$\therefore\ z = 3{,}59 \pm 0{,}05$

HARJOITUKSIA

A

3.1 Differentioi (eli muodosta differentiaali): a) $y = \dfrac{x^2 - 1}{5x}$,

b) $y = \dfrac{x^2}{3} \cdot (x^3 - 4x)$, c) $f(t) = \dfrac{2}{t^3} - 4t$.

3.2 Pallon säde pienenee arvosta 50,0 mm yhden prosentin. Laske differentiaalin avulla, kuinka monta % a) pallon pinta-ala, b) pallon tilavuus pienenee.

3.3 Laske ympyrän ala virherajoineen differentiaalin avulla, kun halkaisija $D = (12{,}5 \pm 0{,}1)$ cm. Käytä halkaisijaa D eikä sädettä r.

3.4 Laske seuraavien funktioiden osittaisderivaatat:

a) $z = xy^3 - 5x + 2y$, b) $U = \dfrac{4t - s}{2\pi}$, c) $v = \dfrac{2t - 1}{3u}$.

Esimerkiksi b)-kohdassa on laskettava U_t ja U_s.

3.5 Differentioi (eli muodosta kokonaisdifferentiaali): $z = \dfrac{x^2 - xy}{8y}$.

3.6 Suoran ympyrälieriön korkeus on $h = (96{,}2 \pm 0{,}3)\ mm$ ja pohjan halkaisija $D = (62{,}3 \pm 0{,}2)\ mm$. Laske virherajoineen kokonaisdifferentiaalin avulla a) lieriön tilavuus, b) vaipan ala, c) kokonaisala (vaippa + pohjat). Käytä laskuissa halkaisijaa D eikä sädettä r.

B

3.7 Yhtälöt $\begin{cases} x = t^3 - 1 \\ y = \dfrac{t^2 + 2}{t} \end{cases}$ määrittelevät funktion $y = f(x)$. Laske $f'(7)$.

(Vihje: mikä on vastaava t:n arvo?)

3.8 Differentioi a) $K = \dfrac{5t^4 - 3}{t}$ b) $H = \dfrac{R + T^2}{2\pi S} = H(R, T, S)$.

3.9 Kiilan tilavuus $V = \dfrac{1}{6}(2a + c)bh$ (vrt. kaavasto). Laske V virherajoineen kokonaisdifferentiaalin avulla, kun (mm:issä esitettynä)

$a = 45{,}3 \pm 0{,}2$; $b = 35{,}4 \pm 0{,}1$; $c = 38{,}3 \pm 0{,}2$ ja $h = 97{,}5 \pm 0{,}3$.

3.10 Johda differentiaalia käyttäen pallon tilavuuden suhteelliselle virheelle laskukaava $\frac{\Delta V}{V} \approx 3 \cdot \frac{dr}{r}$. Jos siis pallon säde pienenee 0,5 %, paljonko pienenee tilavuus ?

3.11 Johda kaava $\left|\frac{\Delta V}{V}\right|$:lle, kun $V = \pi r^2 h$.

C

3.12 a) $F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\,\varepsilon\, r^2}$, b) $F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\,\varepsilon\,(a^2 + b^2)}$, missä $\varepsilon = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{C^2}{Nm^2}$

Laske F virherajoineen, kun

$r = (0{,}43 \pm 0{,}01)\, m$,

$Q_1 = (2{,}5 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-9}\, C$, $Q_2 = (1{,}9 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-12}\, C$,

$a = (0{,}25 \pm 0{,}01)\, m$, $b = (0{,}35 \pm 0{,}01)\, m$.

Vakion ε virhettä ei tarvitse ottaa huomioon (sillä ε:n arvossa on virhettä vasta neljännessä numerossa katkaisuvirheen verran).

3.13 Perustele differentiaalin avulla tulos

$$f(x + dx) \approx f(x) + f'(x)\, dx, \; jos\; dx \approx 0.$$

Laske tämän tuloksen avulla lausekkeelle $\sin 30{,}5°$ likiarvo, kun tulos $D \sin x = \cos x$ oletetaan tunnetuksi.

3.14 Jos $y = u + v$, *missä* $u = u(x)$ *ja* $v = v(x)$, niin $dy = du + dv$ eli

$$d(u + v) = du + dv,$$

sillä $dy = [u' + v']dx = u'\,dx + v'\,dx = du + dv$.

Johda samaan tapaan tulon ja osamäärän *differentioimiskaavat:*

$$d(uv) = v\,du + u\,dv, \qquad d\,\frac{u}{v} = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

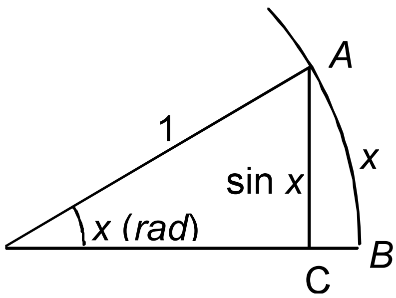
4 Derivointimenetelmiä

Edellä on ollut esillä jo eräitä derivointimenetelmiä. Niiden perusteella pystytään derivoimaan mm. polynomit ja murtofunktiot.

4.1 Trigonometriset funktiot

Olkoon x yksikköympyrän keskuskulman suuruus *radiaaneissa*, vrt. kuva.

Janan AC pituus on = $1 \cdot \sin x = \sin x$. Radiaanin määritelmän mukaan kaaren AB pituus on = $1 \cdot x = x$. Kun kulma $x \to 0$, niin kaari AB ja jana AC lähenevät toisiaan ja siten niiden pituuksien suhde $\to 1$. Tämä tulos (jonka tarkempi perustelu sivuutetaan) voidaan esittää muodossa



(1) $$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}.$$

Jos esim. $x = 0{,}01$ rad, niin $\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\sin 0{,}01}{0{,}01} = 0{,}99998...$

Esim. 1 $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3\right) = 1 \cdot 3 = 3,$$

sillä kun $x \to 0$, niin myös $3x \to 0$.

Lause. $$\boxed{\begin{aligned} &\boldsymbol{D\sin x = \cos x,} \quad \boldsymbol{D\cos x = -\sin x} \\ &\boldsymbol{D\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x,} \quad \boldsymbol{D\cot x = -\frac{1}{\sin^2 x}} \end{aligned}}$$

Tod. 1) $f(x) = \sin x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \qquad \Bigg| \quad \sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = 1 \cdot \cos x.$$

2) $f(x) = \cos x$ vastaavasti.

$$3)\ D\tan x = D\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}\ \ ja\ \ myös = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Esim. 2 $D(2x^3\cos x) = 6x^2\cos x + 2x^3(-\sin x) = 6x^2\cos x - 2x^3\sin x$.

4.2 Toisen ja korkeamman kertaluvun derivaatat

Jos funktion $y = f(x)$ derivaattafunktio $y' = f'(x)$ derivoidaan uudelleen, saadaan toisen kertaluvun derivaatta $y'' = f''(x)$, jne. Tällaisille "korkeammille" derivaatoille käytetään mm. seuraavia merkintöjä:

$$\boldsymbol{y'' = f''(x) = D^2 f(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}f(x)}$$

$$\boldsymbol{y''' = f'''(x) = D^3 f(x) = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3}{dx^3}f(x)}$$

$$\boldsymbol{y^{(4)} = f^{(4)}(x) = D^4 f(x) = \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d^4}{dx^4}f(x)\ \ jne.}$$

Esim. 3 $y = x\sin x$. Laske $y'''(\frac{\pi}{3})$.

$$y' = \sin x + x\cos x$$

$$y'' = \cos x + (\cos x - x\sin x) = 2\cos x - x\sin x$$

$$y''' = -2\sin x - (\sin x + x\cos x) = -3\sin x - x\cos x$$

$$y'''(\frac{\pi}{3}) = -3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{9\sqrt{3}+\pi}{6}.$$

4.3 Logaritmifunktio

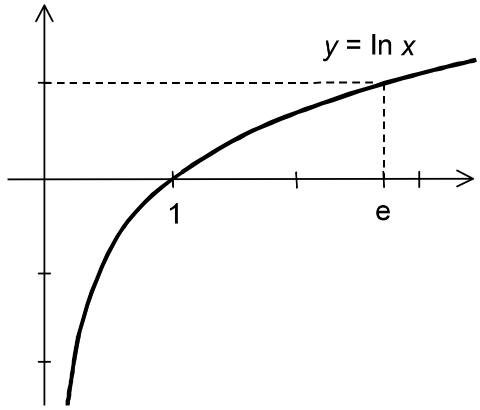
Neperin luku e = 2.71828...voidaan määritellä esim. raja-arvona

$$\boldsymbol{e = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x}.$$

Tämä raja-arvo esiintyy joskus toisessakin muodossa (mm. sähkötekniikassa). Jos nimittäin merkitään $\frac{1}{x} = v$, raja-arvo saa muodon

$$\boldsymbol{\lim_{v\to 0}(1+v)^{1/v} = e}.$$

Jos a on jokin positiivinen reaaliluku, niin yhtälön $e^x = a$ ratkaisua sanotaan luvun *a luonnolliseksi logaritmiksi* ja merkitään **ln** $\boldsymbol{a}$:lla. Seuraavaan luetteloon on koottu funktion $y = \ln x$ tärkeimmät ominaisuudet.



1) Määritelty vain kun $x > 0$. $Aj = \mathbf{R}$.

2) ln 1 = 0, ln e = 1.

3) $e^{\ln x} = x, \ \ln e^x = x.$

4) $\ln ab = \ln a + \ln b$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln a^c = c \ln a \quad (c \in \mathbf{R}).$$

5) $\log_k x = \dfrac{\ln x}{\ln k}$,

6) $\boxed{e^x = a \ \Rightarrow \ x = \ln a.}$ **7)** $\boxed{\ln x = a \ \Rightarrow \ x = e^a.}$

Esim. 4 $e^{-\ln x} = \dfrac{1}{e^{\ln x}} = \dfrac{1}{x}$, $e^{3\ln x} = \left(e^{\ln x}\right)^3 = x^3$.

$$\ln(2e^{3x}) = \ln 2 + \ln e^{3x} = \ln 2 + 3x \ln e = \ln 2 + 3x.$$

$$e^{2x+1} = 3 \Leftrightarrow 2x + 1 = \ln 3 \Leftrightarrow x = \tfrac{1}{2}(\ln 3 - 1).$$

$$\ln 4x = t \Leftrightarrow 4x = e^t \Leftrightarrow x = \tfrac{1}{4} e^t.$$

Lause. $\boxed{D \ln x = \dfrac{1}{x}}.$

***Tod.** Jos $f(x) = \ln x$, niin

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln \frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \ln(1 + \frac{h}{x}).$$

Merkitään $\dfrac{h}{x} = v$. Silloin $h = xv$ ja kun x:llä on jokin kiinteä arvo, niin h:n mukana myös $v \to 0$. Täten

$$f'(x) = \lim_{v \to 0} \frac{1}{xv} \ln(1+v) = \lim_{v \to 0} \frac{1}{x} \ln(1+v)^{1/v} = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}.$$

Esim. 5 $D\,x^2 \ln x = 2x \ln x + x^2 \dfrac{1}{x} = 2x \ln x + x$.

Seuraus. $\boldsymbol{D} \mathbf{lg}\, \boldsymbol{x} = \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x} \ln \mathbf{10}}$ (missä $\lg x = \log_{10} x$).

Tod. $D \lg x = D \dfrac{\ln x}{\ln 10} = \dfrac{1}{\ln 10} D \ln x = \dfrac{1}{\ln 10} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x \ln 10}$.

4.4 Logaritminen derivointi. Eksponentti- ja potenssifunktio

Esim. 6 Lasketaan funktion $y = x^{3x}$ (joka ei ole potenssi- eikä eksponenttifunktio) derivaatta ns. *logaritmisella derivoinnilla*:

$$y = x^{3x} \quad \Big| \text{ otetaan kummastakin puolesta logaritmi}$$

$$\ln y = 3x \ln x \quad \Big| \text{ differentioidaan kumpikin puoli}$$

$$\frac{1}{y} dy = (3 \ln x + 3x \frac{1}{x})\, dx = 3(\ln x + 1)\, dx \quad \Big| \cdot y = x^{3x}$$

$$dy = y \cdot 3(\ln x + 1) dx = x^{3x} \cdot 3(\ln x + 1) dx \quad \Big| : dx$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^{3x}(\ln x + 1).$$

Samalla menetelmällä (mutta lausekkeet ovat yksinkertaisemmat) johdetaan eksponenttifunktioiden $y = e^x$ ja $y = a^x$ sekä yleisen potenssifunktion $y = x^a$ $(a \in \mathbf{R})$ derivaatat (todistukset harjoituksina):

$$\boldsymbol{D\, e^x = e^x} \qquad \boldsymbol{D\, a^x = a^x} \ln \boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{D\, x^a = a\, x^{a-1}} \quad (\boldsymbol{a} \in \mathbf{R})$$

Logaritmista derivointia voidaan käyttää myös *virheen arvioinnissa*, vrt. harj. **4.21**.

Esim. 7

$$1)\ D\,(x^2\,e^x) = 2x\,e^x + x^2\,e^x = x\,e^x(x+2)$$

$$2)\ D\,e^x\,\tan x = e^x\,\tan x + e^x\,\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$3)\ D\,5x^{\pi} = 5\pi\,x^{\pi-1}$$

$$4)\ D\,(x\sqrt{x}) = D\,x^{3/2} = \tfrac{3}{2}x^{3/2-1} = \tfrac{3}{2}x^{1/2} = \tfrac{3}{2}\sqrt{x}$$

$$5)\ D\,\frac{6}{\sqrt[3]{x^2}} = 6\,D\,x^{-2/3} = 6\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-2/3-1}$$

$$= -4x^{-5/3} = -\frac{4}{x^{5/3}} = -\frac{4}{x\cdot x^{2/3}} = -\frac{4}{x\sqrt[3]{x^2}}.$$

4.5 Yhdistetyn funktion derivointi

Sinifunktion derivoimissääntö oli $D\sin x = \cos x$. Käsitellään yleisempää tapausta, jossa derivoitavana on esim.

$$y = \sin(5x+3),$$

ts. derivoitavana ei ole sinifunktio, vaan "sini eräästä x:n lausekkeesta $5x+3$". Tällainen funktio on yhdistetty kahdesta *sisäkkäisestä* funktiosta:

$$y = \sin u,\ \text{missä}\ u = 5x+3.$$

Yleisesti: Jos y on u:n funktio $y = f(u)$ ja tässä u on puolestaan x:n funktio $u = u(x)$, niin y on kaikenkaikkiaan x:n funktio

$$\boldsymbol{y = f(u(x))}.$$

Tässä $u(x)$ on ns. ***sisäfunktio*** ja $f(u)$ ***ulkofunktio***. Tällaisen funktion derivaatta saadaan ns. ***ketjusäännöllä***

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}}.$$

Ketjusäännön todistuksen perusidea on laventaa suhde $\frac{dy}{dx}$ differentiaalilla du. Täsmälliseen todistukseen (joka sivuutetaan) tulee lisävaikeuksia siitä, että joillakin x:n ja dx:n arvoilla laventaja du voi olla = 0.

Edellä mainitun yhdistetyn funktion

$$y = \sin u, \text{ missä } u = 5x + 3$$

derivaatta on ketjusäännön mukaan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (\cos u) \cdot 5 .$$

Koska $u = 5x + 3$, lopputulos muuttuu muotoon

$$\frac{dy}{dx} = \cos(5x + 3) \cdot 5 = 5 \cos(5x + 3) .$$

Siis lyhyesti

$$D \sin(5x + 3) = \cos(5x + 3) \cdot 5 ,$$

ts. *kun derivoitavana on sini eräästä x:n lausekkeesta 5x + 3, tuloksena on kosini samasta x:n lausekkeesta, kertaa sisäfunktion derivaatta 5.*

Eräs tavallisimmista derivointi- tai integrointivirheistä johtuu siitä, ettei osata käsitellä sisäfunktioita oikein. Opettele siksi erittäin huolellisesti yhdistettyyn funktioon liittyvät asiat. Lisää esimerkkejä:

Esim. 8 1) $y = \sin(x^2 + 2) \Rightarrow y' = \cos(x^2 + 2) \cdot 2x = 2x \cos(x^2 + 2)$.

2) $D \ln(5x^3 - 4x) = \dfrac{1}{5x^3 - 4x} \cdot (15x^2 - 4)$.

Ajattele seuraavasti: "*Derivoitavana ei ole ln x vaan ln eräästä x:n lausekkeesta $5x^3$ - 4x, jolloin derivaatta =1 per sama x:n lauseke, kertaa sisäfunktion derivaatta $15x^2$ - 4*".

3) $D (4x^2 - 1)^5 = 5 (4x^2 - 1)^4 \cdot 8x = 40x (4x^2 - 1)^4$.

"*Derivoitavana ei ole x^5 vaan x:n lauseke 5:nteen, jolloin derivaatta = 5 kertaa sama lauseke yhtä alempaan potenssiin, kertaa sisäfunktion derivaatta 8x.*"

4) $D\, e^{5x^2} = e^{5x^2} \cdot 10x = 10x\, e^{5x^2}$.

"*Derivoitavana ei ole e^x vaan e potenssiin $5x^2$. Täten derivaatta = e samaan potenssiin, kertaa sisäfunktion derivaatta 10x.*"

5) $D (\tan 8x) = \dfrac{1}{\cos^2 8x} \cdot 8 = \dfrac{8}{\cos^2 8x}$

Edellisen esimerkin kohdissa 1)... 5) esiintyneet yhdistetyt funktiot ja niiden derivointitavat olivat seuraavaa muotoa:

$$\mathbf{1)}\ \boldsymbol{D}\,\mathbf{sin}\,\boldsymbol{u(x)} = \mathbf{cos}\,\boldsymbol{u(x)\cdot u'(x)}$$

$$\mathbf{2)}\ \boldsymbol{D}\,\mathbf{ln}\,\boldsymbol{u(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{u(x)}}\cdot \boldsymbol{u'(x)}$$

$$\mathbf{3)}\ \boldsymbol{D\,u(x)^a = a\,u(x)^{a-1}\cdot u'(x)}$$

$$\mathbf{4)}\ \boldsymbol{D\,e^{u(x)} = e^{u(x)}\cdot u'(x)}$$

$$\mathbf{5)}\ \boldsymbol{D}\,\mathbf{tan}\,\boldsymbol{u(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos}^2\,\boldsymbol{u(x)}}\cdot \boldsymbol{u'(x)}.$$

Seuraavassa esimerkissäkin on kysymys tyyppiä 3) olevien potenssilausekkeitten derivoinnista.

Esim. 9 1) $D\sqrt{x^2-5} = D\,(x^2-5)^{1/2} = \frac{1}{2}(x^2-5)^{1/2-1}\cdot 2x$

$$= x\,(x^2-5)^{-1/2} = \frac{x}{\sqrt{x^2-5}}.$$

2) $D\sin^3 x = 3\sin^2 x\cdot\cos x$

(ts. $D(\sin x)^3 = 3(\sin x)^2\cdot\cos x$).

Sisäkkäisiä funktioita voi olla useampiakin kuin kaksi. Sovella tällaiseen ketjusääntöä vaihe vaiheelta seuraavasti. Ensimmäisen välivaiheen voit jättää pois, kun käsittelyvarmuus lisääntyy.

Esim. 10

$$\begin{aligned} D\ln\sin(x^2-3x) &= \frac{1}{\sin(x^2-3x)}\cdot D\sin(x^2-3x)\\ &= \frac{1}{\sin(x^2-3x)}\cdot\cos(x^2-3x)\cdot(2x-3)\\ &= \frac{2x-3}{\tan(x^2-3x)}. \end{aligned}$$

HARJOITUKSIA

A

4.1 Laske trigonometriset raja-arvot

$a)\ \lim_{x\to 0}\cos x,\quad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x},\quad c)\ \lim_{t\to 0}\frac{\tan 2t}{t}$ (ohje: $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$).

4.2 Derivoi a) $y = \frac{1-\cos x}{\sin x}$, b) $y = \sin x \cdot \cos x$.

4.3 Olkoon $y = x^2 \ln x$. Laske $a)\ y''(1),\ \ b)\ y''(e),\ \ c)\ y''(e^3)$.

4.4 Laske a) $\frac{d}{dt}(\frac{t^2}{2x} - tx^3)$, b) $\frac{d^2}{dt^2}\frac{t^2-1}{\omega t^3}$.

4.5 a) $D\,x^3e^x$, b) $D\ln\frac{2}{x}$ Vihje: logaritmin laskulait (tai yhd. funktio).

4.6 $s = (t-3)^2e^t$ (t = aika). Laske $\ddot{s}(0)$ (eli kiihtyvyys hetkellä t = 0).

4.7 a) $D\cos(x^3 - 5x^2 + 1)$, b) $\frac{d}{dt}\sin(\omega t)$, c) $\frac{d}{dt}e^{-kt}$, d) D ln (3x+2).

4.8 a) $D\sqrt[3]{r^2}$, b) $D\sqrt[3]{r^3-1}$, c) $D\frac{\sqrt{x}}{x^3}$, d) $D\ \sqrt{5-x^2}$.

4.9 Differentioi (eli muodosta differentiaali tai kokonaisdifferentiaali funktiosta riippuen)

a) $s = t^3e^{2t}$, b) $z = x^3e^{2y}$.

B

4.10 Laske raja-arvot a) $\lim_{t\to 0}\frac{\sin\omega t}{3t}$, b) $\lim_{t\to 0}\frac{\sin\omega_1 t}{\sin\omega_2 t}$, c) $\lim_{t\to 0}(1+t)^{2/t}$.

4.11 Osoita, että $\frac{d^2}{dx^2}\frac{x^3}{x^2-1} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$.

4.12 a) $D\,x^{5x+1}$, b) $D\frac{1+\tan t}{\tan t}$, c) $\frac{d^2}{dx^2}(\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9})$.

4.13 Johda logaritmisella derivoinnilla a) potenssifunktion x^a, b) eksponenttifunktion e^x, c) eksponenttifunktion 10^x derivaatta.

4.14 a) D ln tan $\frac{x}{2}$, b) $D\ln\sin\frac{1}{t}$, c) $D\frac{5}{6(2x-1)^3}$, d) $D\ln\frac{x-1}{x+1}$.

4.15 $s(t) = t\cos(\omega t + 2\pi/3)$. Laske kiihtyvyys $a = \ddot{s}$ hetkellä $t = 0$.

4.16 Eräässä virtapiirissä virranvoimakkuus pienenee eksponentiaalisesti lain $i = \frac{U}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$ mukaisesti. Laske virran muuttumisnopeus (A/s) hetkellä $t = 0$.

4.17 Muodosta kokonaisdifferentiaali:

a) $z = x^2 \sin 2y + y^2 \cos 3x$, b) $z = \ln(x + y)$, c) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = T(l, g)$.

4.18 Laske kokonaisdifferentiaalin avulla $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ virherajoineen, kun $l = (18{,}2 \pm 0{,}1)\,cm$ ja $g = (9{,}81 \pm 0{,}01)\,m/s^2$. Huomaa yksiköt.

4.19 Laske kolmion ala $A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ virherajoineen (kok. diff. avulla), kun $a = (153 \pm 3)\,mm, b = (400 \pm 5)\,mm$ ja $\gamma = 48{,}8^o \pm 0{,}5^o$.

4.20 Laske a) $D\ln\frac{1}{\sqrt{1-2x}}$, b) $y'(\frac{\pi}{3})$, kun $y = \tan^2 2x$.

C

4.21 Ratkaise tehtävät a) 4.18., b) 4.19. logaritmisen differentioinnin avulla (joka sopii yleensä hyvin tulo-, osamäärä-, potenssi- ja juuri-lausekkeitten derivointiin ja differentiointiin).

4.22 Johda derivaatan määritelmän avulla funktion $\sin^2 x$ derivaatta.

4.23 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\sqrt{x^2 - x + 1} - (x+1)}$.

4.24 a) $\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{xe^{2t} - 2t^2x}{\sin x}\right)$, b) $D(\sqrt{x})^{4x}$.

4.25 Yhtälöä, jossa esiintyy tuntemattoman funktion *y = y(x)* derivaattoja, sanotaan ***differentiaaliyhtälöksi***. Todista, että $y = x^2 + 2x$ on differentiaaliyhtälön $xy'' - y' = -2$ eräs ratkaisu.

4.26 Määritä sellaiset vakiot A ja B, että $y = Ax\sin x + Bx\cos x$ toteuttaa differentiaaliyhtälön $y'' + y = \sin x$.

4.27 Jokainen luku a voidaan kirjoittaa e:n potenssiksi: $a = e^{\ln a}$. (Tällä tiedolla voi olla käyttöä esim. ohjelmoinnissa.) Kirjoita x^x e:n potenssiksi, käytä sääntöä $\ln a^c = c \cdot \ln a$ ja derivoi näin saatu lauseke. (Toinen tapa: logaritminen derivointi.)

4.28 a) $\left(D\dfrac{1+\tan^2 2x}{1-\tan 2x} \right)_{x=0}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin x - \sin 2x}{x(\cos 2x - 1)}$.

4.29 ***Hyperbelisini ja -kosini*** määritellään yhtälöillä

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \ \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Todista, että $D\sinh x = \cosh x$, $D\cosh x = \sinh x$.

4.30 Eräässä virtapiirissä $i = i_o e^{-t/\tau}$. Laske a) kokonaisdifferentiaalin, b) logaritmisen differentioinnin avulla i virherajoineen, kun

$$i_o = 0{,}700 \pm 0{,}003, t = 3{,}00 \pm 0{,}01 \ ja \ \tau = 5{,}00 \pm 0{,}02$$

(arvot ovat tekaistuja ja mittayksiköt on jätetty yksinkertaisuuden vuoksi pois).

4.31 Epämääräisiä muotoja 0/0 ja ∞/∞ olevat raja-arvot voidaan laskea joskus ns. ***Hospitalin säännöllä***:

$$\lim_{x\to a} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x\to a} \frac{u'(x)}{v'(x)}.$$

Laske tällä säännöllä raja-arvo $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x - 1 + 2x^2}{x^4}$.

4.32 Ratkaise y yhtälöstä $\ln|y| = \frac{1}{2}\ln|x| + x - 1$

4.33 Osoita, että a) $D\sin^2 2x = 2\sin 4x$, b) $D\ln(x + \sqrt{x^2+1}\,) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$,

c) $D\ln\dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{2}{x^2-1}$, d) $Dx^x = x^x(\ln x + 1)$.

5 Määräämätön integraali

5.1 Integraalifunktio

Matematiikassa on suuri määrä toisilleen *käänteisiä operaatioita*, esim. yhteen- ja vähennyslasku, kerto- ja jakolasku, potenssiin korotus ja juurenotto, eksponenttiin korotus ja logaritminotto, sini ja arkussini, Laplace-muunnos ja sen käänteismuunnos jne. Derivoinnille käänteinen operaatio on integrointi seuraavassa mielessä:

Esim. 1 Koska funktion $\sin x$ derivaattafunktio on $\cos x$, niin funktion $\cos x$ (eräs) integraalifunktio on $\sin x$. Kun siis etsitään funktion $\cos x$ integraalifunktiota, yritetään löytää sellainen funktio, että sen derivaatta on $\cos x$. Eräs tällainen funktio on $\sin x$, sillä $D \sin x = \cos x$.

On muitakin funktioita, joiden derivaatta on cosx, nimittäin esim. $\sin x + 1$, $\sin x + \sqrt{2}$ ja yleisesti kaikki funktiot $\sin x + C$, missä C on mikä tahansa reaaliluku (vakio, *Constant*).

Esim. 2 Funktion x^5 integraalifunktioita ovat $\dfrac{x^6}{6} + C$, sillä

$$D\left(\frac{x^6}{6} + C\right) = \frac{6x^5}{6} + 0 = x^5.$$

Määritelmä. *Jos $F(x)$ on jokin sellainen funktio, että sen derivaatta $F'(x) = f(x)$, sanotaan, että $F(x)$ on $f(x)$:n* ***integraalifunktio****.*

Voidaan todistaa, että jos $F(x)$ on jokin $f(x)$:n integraalifunktio, niin $f(x)$:n kaikki integraalifunktiot ovat $F(x) + C$, missä C on mikä takansa reaalilukuvakio.

Esim. 3 Seuraavaan taulukkoon on koottu muutama funktio ja niiden "tavalliset" (vakiottomat) integraalifunktiot

funktio $f(x)$	Integraalifunktio $F(x)$
x^2	$\dfrac{x^3}{3}$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$

e^{2x}	$\frac{e^{2x}}{2}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$

5.2 Määräämätön integraali

Funktion $f(x)$ kaikkien integraalifunktioiden joukkoa sanotaan $f(x)$:n **määräämättömäksi integraaliksi** (engl. *indefinite integral*). Tätä joukkoa, joka muodostuu funktioista $F(x) + C$, merkitään seuraavasti:

$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C}$ (lue: "*integraali f x d x on F x plus C*")

Esim. 4 $\int (x^2+2)\,dx = \frac{x^3}{3} + 2x + C$, sillä $D\,op. = x^2 + 2$ (op = oikea puoli)

Esim. 5 $\int rt\,dt = r\frac{t^2}{2} + C$ (r = vakio, t = integroimismuuttuja).

Jotta ***integroiminen*** (integraalifunktion etsiminen) sujuisi, täytyy derivointisäännöt osata hyvin. Jatkossa esitetään tavallisimmat *integroimissäännöt*, jotka muuttavat integrointia mekaanisemmaksi. Edellisissä esimerkeissä käytettiin itse asiassa seuraavaa kahta yleistä integroimissääntöä, missä esim. funktion $g(x)$ integraalifunktiota on merkitty vastaavalla isolla kirjaimella $G(x)$:

1) **Summa voidaan integroida termi termiltä**:

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = F(x) + G(x) + C,$$

sillä $D\,op. = F'(x) + G'(x) + 0 = f(x) + g(x)$.

2) **Vakiotekijä voidaan siirtää integroinnissa eteen:**

$$\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot F(x) + C$$

sillä $D\,op. = k \cdot F'(x) + 0 = k \cdot f(x)$.

Esim. 6 $\int 3\sin t\,dt = 3\int \sin t\,dt = 3\cdot(-\cos t) + C = -3\cos t + C$,

$$\int \frac{5x^3-1}{x^2}\,dx = \int (5x - \frac{1}{x^2})\,dx = 5\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + C.$$

5.3 Integroimissääntöjä

1. $$\boxed{\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C}$$ **(a vakio $\neq -1$).**

Tod. $D\,op. = \dfrac{(a+1)x^a}{a+1} + 0 = x^a$.

Esim. 7. $$\int 4x^5\,dx = 4\cdot\frac{x^6}{6} + C = \frac{2x^6}{3} + C,$$

$$\int \frac{2}{x^7}\,dx = 2\int x^{-7}\,dx = 2\cdot\frac{x^{-7+1}}{-7+1} + C = 2\cdot\frac{x^{-6}}{-6} + C = -\frac{1}{3x^6} + C,$$

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}\,dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int x^{-1/2}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{x^{1/2}}{1/2} + C = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2}} + C = \sqrt{2x} + C.$$

Sääntöä 1 ei voi käyttää, jos eksponentti $a = -1$, ts. jos integroitava funktio on $x^{-1} = \dfrac{1}{x}$. Tässä tapauksessa tulos on aivan erinäköinen:

2. $$\boxed{\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C}.$$

(Itseisarvot tarvitaan, jottä x voisi olla myös negatiivinen.)

Tod. 1) $x > 0 \Rightarrow D\ln|x| = D\ln x = \dfrac{1}{x}$,

2) $x < 0 \Rightarrow D\ln|x| = D\ln(-x) = \dfrac{1}{-x}\cdot(-1) = \dfrac{1}{x}$.

Esim. 8 $$\int \frac{x^2-2}{x}\,dx = \int (x - 2\cdot\frac{1}{x})\,dx = \frac{x^2}{2} - 2\ln|x| + C = \frac{x^2}{2} - \ln x^2 + C.$$

3. $$\boxed{\int e^x\,dx = e^x + C}.$$

Esim. 9 $$\int (2 - t - 3e^t)\,dt = 2t - \frac{t^2}{2} - 3e^t + C.$$

4.

$$\boxed{\begin{array}{l} \int \sin x\,dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C \\ \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int (1+\tan^2 x)\,dx = \tan x + C \\ \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\frac{1}{\tan x} + C \end{array}}$$

Esim. 10

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos^2 x}\,dx = \int (2 - \frac{1}{\cos^2 x})\,dx = 2x - \tan x + C\,.$$

HARJOITUKSIA

A

5.1 Integroi a) $x + 2x^2$, b) $4x^5$, c) $2x^3 - 3x + 2$, d) $x + \sin x$.

5.2 a) $\int dx$, b) $\int \frac{2}{x^3}\,dx$, c) $\int \frac{dx}{2x}$, d) $\int \sin t\,dt$, e) $\int \sin t\,dx$.

5.3 Todista, että

a) $\int \sin kx\,dx = -\frac{1}{k}\cos kx + C$ (ohje: D op. =...),

b) $\int e^{kx}\,dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C$.

5.4 Laske edellisen harjoituksen avulla a) $\int \sin \omega t\,dt$, b) $\int 6e^{3\varphi}\,d\varphi$.

5.5 a) $\int x^2 \cdot x^3\,dx$, b) $\int x^2(x-1)^2\,dx$, c) $\int (x^2 + x - 1)^2\,dx$.

5.6 a) $\int \frac{x-1}{x}\,dx$, b) $\int \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$.

5.7 a) $\int x\sqrt{x}\,dx$, b) $\int \sqrt[3]{x}\,dx$, c) $\int \sqrt[3]{2x}\,dx$.

5.8 a) $\int \frac{a}{\sin^2 t}\,dt$, b) $\int \frac{5dt}{\cos^2 t}$, c) $\int \frac{2 - \sin^2 t}{t\cos^2 t} \cdot 3t\,dt$

5.9 a) $\int \frac{x^3 + x}{5x^2}\,dx$, b) $\int \frac{x^3 + x}{5x^3}\,dx$, c) $\int \frac{(x^3 + x - 1)\,dx}{5x^2}$.

B

5.10 Määritä funktion $f(x)=2x^3+x^2$ sellainen integraalifunktio *F(x),* että se toteuttaa ehdon $F(2)=3$.

5.11 Todista, että

a) $\int \ln x\, dx = x\ln x - x + C$, b) $\int x e^x\, dx = x e^x - e^x + C$.

5.12 a) $\int 7x^2\sqrt{2x}\, dx$, b) $\int a\sqrt[n]{x^m}\, dx$, c) $\int \sqrt[3]{\dfrac{Ap^2x}{n-1}}\, dx$.

5.13 Määritä matka $s=s(t)$, kun nopeus $v=1+2t+t^2$ ja ns. alkuehtona on, että $s(1)=2$ (ts. hetkellä t = 1 kappale on kohdassa s = 2).

5.14 Laske $\int \tan^2 x\, dx$. (Vihje: $\tan^2 x = 1+\tan^2 x - 1$.)

C

5.15 Todista, että $\int \dfrac{1}{\sin x}\, dx = \ln\left|\tan\dfrac{x}{2}\right| + C$.

5.16 Integraalin $\int \cos(2x+1)\, dx$ arvo voidaan laskea "kokeillen" seuraavasti. Arvo on suunnilleen $\sin(2x+1)$. Mutta tämän derivaatta ei ole aivan $\cos(2x+1)$, vaan $\cos(2x+1)\cdot 2$. Siten tulos täytyy jakaa kahdella: $\int \cos(2x+1)\, dx = \dfrac{\sin(2x+1)}{2} + C$. Laske vastaavasti

a) $\int \sin 3t\, dt$ b) $\int \sin(\omega t+\varphi)\, dt$, c) $\int e^{2t-1}\, dt$, d) $\int x e^{x^2}\, dx$.

5.17 Jos ***differentiaaliyhtälö*** (jossa esiintyy tuntemattoman funktion $y(x)$ ainakin yksi derivaatta) voidaan kirjoittaa muotoon $y' = u(x)$ tai $y'' = u(x)$ jne., se ratkeaa suoraan integroimalla. Esim. tehtävässä **5.13** oli diff.yhtälö $s' = 1+2t+t^2$ ja sen *alkuehto* määräsi vakion C suuruuden. Ratkaise diff.yhtälöt

a) $y' = \sin x + 3x$, alkuehtona $\begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases}$, b) $s'' = t + e^{2t}$, alkuehtoina $s(0)=1,\ v(0)=2$.

6 Määrätty integraali

6.1 Yleistä

Edellä käsitelty määräämätön integraali on oikeastaan vain eräänlainen "vastaderivaatta" (engl. *antiderivative*). Sen arvo on *funktiojoukko*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C\,.$$

Vaikka ***määrätty integraali***

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad (\text{"}\textbf{integraali a:sta b:hen f x d x}\text{"})$$

on merkintätavaltaan lähes samanlainen kuin määräämätön integraali, on se käsitteenä aivan erilainen. Määrätty integraali on erään summan raja-arvo ja sellaisena tietynlainen summakäsitteen yleistys. Määrätyn integraalin arvo on vakio (reaaliluku), jos a ja b ovat vakioita.

Näillä kahdella käsitteellä on kuitenkin tietty yhteys toisiinsa, sillä ns. ***päälauseen*** mukaan määrätty integraali voidaan laskea integraalifunktion F(x) avulla seuraavasti:

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}\,.$$

Erotuksesta $F(b) - F(a)$ käytetään suomalaisessa kirjallisuudessa merkintää

$$\Big/_{\!a}^{\,b} \boldsymbol{F(x)} \qquad (\text{"}\textbf{\textit{sijoitus a:sta b:hen F x}}\text{"}).$$

Jatkossa käytetään vinon sijoitusviivan tilalla yleensä pystyviivaa (koska vino viiva puuttuu tekstinkäsittelyohjelmasta). Siten päälauseen tulos on

$$\boxed{\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx = \Big|_a^b F(x) = F(b) - F(a).}}$$

Esim. 1 1) $\int_2^3 (x^2 - 1)\,dx = \Big/_{\!2}^{\,3} \left(\frac{x^3}{3} - x\right) = \left(\frac{3^3}{3} - 3\right) - \left(\frac{2^3}{3} - 2\right) = \frac{19}{3} - 1 = 5\tfrac{1}{3}$

Huomaa, että integroitava funktio ja integraalifunktio täytyy kirjoittaa <u>sulkeisiin</u>, koska kyseiset operaatiot vaikuttavat summaan eikä ainoastaan ensimmäiseen termiin.

2) $\int_0^\pi \sin x\,dx = \Big/_{\!0}^{\,\pi} (-\cos x) = -(\cos\pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2\,.$

Integraalin $\int_a^b f(x)\,dx$ yhteydessä $[a,b]$ on nimeltään ***integroimisväli***, a ja b ovat ***integroimisrajat***, a on ***alaraja*** ja b ***yläraja***. Funktio $f(x)$ on ***integroitava funktio*** (eli integrandi) ja x on *integroimismuuttuja*.

Ulkomaisessa kirjallisuudessa "sijoitusviiva" merkitään yleensä integraalifunktion perään esim. seuraavasti:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

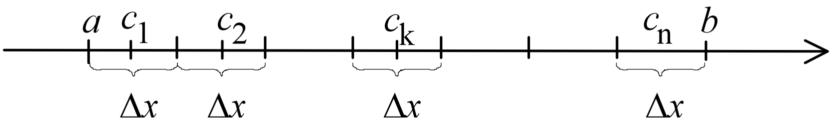
Koska määrättyä integraalia laskettaessa integroimismuuttujan tilalle sijoitetaan ylä- ja alarajat, on samantekevää, millä kirjaimella integroimismuuttujaa merkitään. Siten esim.

$$\int_1^2 \cos t\,dt = \int_1^2 \cos u\,du = \int_1^2 \cos x\,dx = \Big|_1^2 \sin x = \sin 2 - \sin 1 \approx 0{,}0678\,.$$

6.2 Integraalin määrittely

Oletetaan, että annettuna on väli $[a,b]$ eli $a \le x \le b$ sekä funktio $y = f(x)$.

Jaetaan väli $[a,b]$ n:ään yhtä suureen osaväliin ja merkitään yhden osavälin pituutta Δx:llä. Olkoot $c_1, c_2, \ldots, c_n$ osavälien keskipisteet.



Muodostetaan summa

$$S_n = f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + \ldots + f(c_n)\Delta x = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x\,.$$

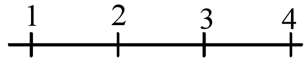
Määrätty integraali on tämän summan raja-arvo, kun $n \to \infty$. Siis

Määritelmä. $$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x}.$$

Oikealla puolella esiintyvää summaa voidaan käyttää integraalin likiarvona mm. silloin, kun integraalin tarkkaa arvoa ei pystytä laskemaan. Siis

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x\,.$$

Esim. 2 Laske integraalin $I = \int_1^4 \frac{x}{x-5}\, dx$ likiarvo siten, että käytät kolmea osaväliä.



Tässä tapauksessa osavälin pituus $\Delta x = 1$ ja välien keskipisteet c_k ovat 1,5 2,5 ja 3,5. Täten

$$I \approx f(1{,}5)\cdot 1 + f(2{,}5)\cdot 1 + f(3{,}5)\cdot 1$$
$$= \frac{1{,}5}{1{,}5-5} + \frac{2{,}5}{2{,}5-5} + \frac{3{,}5}{3{,}5-5} \approx -3{,}76.$$

Jos 3 osavälin sijaan käytettäisiin esim. 6 osaväliä, saataisiin integraalille parempi likiarvo. Tälle integraalille pystytään myöhemmin (7. luvussa) laskemaan tarkkakin arvo seuraavasti:

$$I = \int_1^4 (1 + \frac{5}{x-5})\, dx = \Big|_1^4 (x + 5\ln|x-5|) = (4 + 5\ln|-1|) - (1 + 5\ln|-4|)$$
$$= 4 + 0 - 1 - 5\ln 4 = 3 - 5\ln 4 \approx -3{,}9314.$$

Integraalin määritelmässä osavälien Δx ei tarvitsisi olla yhtä pitkiä eikä pisteiden c_i välien keskipisteitä, kunhan vain jokaisen osavälin pituus $\to 0$.

6.3 Integraali "summana"

Edellisen mukaan määrätty integraali oli erään summan raja-arvo:

(1) $$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\, \Delta x\, .$$

Kun n kasvaa, summan osavälit Δx lyhenevät ja välien keskipisteet c_k joutuvat yhä lähemmäksi toisiaan. Rajatilanteessa osavälit korvautuvat "äärettömän lyhyillä" osaväleillä dx. Summan termit $f(c_k)\cdot \Delta x$ korvautuvat tuloilla $f(x)\cdot dx$, missä hyppäyksittäin (*diskreetisti*) muuttuvien arvojen c_k tilalla on ilman hyppäyksiä (jatkuvasti) a:sta b:hen muuttuva arvo x. Näin ajateltuna ***integraali on "summa", jonka "termit" ovat muotoa $f(x)\cdot dx$ olevia tuloja.***

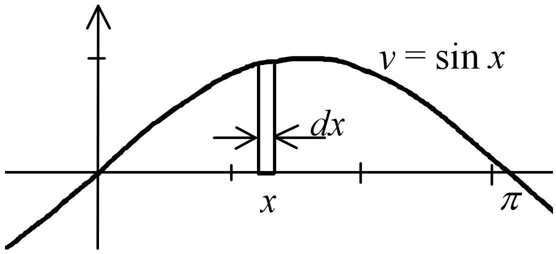
Tekniikassa on usein hyödyllistä ajatella integraali tällaiseksi "summaksi", jossa lasketaan yhteen "äärettömän monta muotoa f(x)·dx olevaa tuloa".

Tulon *f(x)·dx* ensimmäinen tekijä *f(x)* on kullakin x:n arvolla jokin reaaliluku (makrosuure) ja toinen tekijä dx on "äärettömän pieni", "differentiaalinen" suure (mikrosuure). Tällaisella ***"pienten differentiaalien menetelmällä"*** korvataan rajallemenoprosessi.

Esim. 3 Laske sinikäyrän $y = \sin x$ ja x-akselin välinen pinta-ala välillä $[0, \pi]$.

Kohdassa x olevan, "äärettömän kapean" *liuskan*

$$\begin{cases} kanta = dx \ \ (>0) \\ korkeus = \sin x \ \ (>0) \end{cases}$$

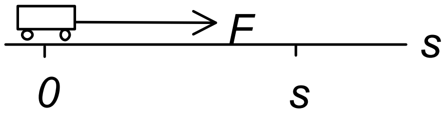


(esim. kohdassa $x = 1$ liuskan korkeus on $\sin 1 \approx 0{,}841$).

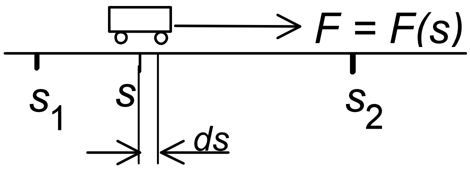
Liuskan ala dA on korkeuden ja kannan tulo: $dA = \sin x \cdot dx$. Koko ala on liuskojen alojen "summa":

$$A = \int dA = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \Big|_0^{\pi} (-\cos x) = -(\cos \pi - \cos 0) = 2.$$

Esim. 4 1) Jos matka-akselin s suuntainen vakiovoima F kuljettaa kappaletta matkan s, se tekee työn



$$W = F\,s.$$



2) Jos voima F ei ole vakio, vaan muuttuu paikan s mukana jonkin säännön $F = F(s)$ mukaisesti (esim. siksi, että kappale on kiinni jousessa, joka venyy s:n kasvaessa), tarvitaan integraalilaskentaa seuraavasti.

Kohdassa s kappaleeseen vaikuttaa voima $F(s)$ (*"F arvolla s"*). Jos tästä kohdasta siirrytään "äärettömän pieni" matka ds eteenpäin, niin tällä matkalla ds voimalla voidaan katsoa olevan vakioarvon $F(s)$ ja siten tällä matkalla voima tekee työn

$$dW = F(s)\,ds.$$

Koko työ matkalla $s_1 \ldots. s_2$ saadaan osatöiden "summana":

$$\boldsymbol{W = \int dW = \int_{s_1}^{s_2} F(s)\,ds}.$$

6.4 Integraalin perusominaisuuksia

Päälause. *Jos $f(x)$ on jatkuva välillä $[a,b]$ ja $F(x)$ on jokin sen integraalifunktio tällä välillä, niin*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \Big|_a^b F(x) = F(b) - F(a)}$$

(Tod. sivuutetaan). Edellä on jo esitetty eräitä esimerkkejä tämän lauseen käyttämisestä.

Integraalin määritelmässä alaraja a oli ylärajaa b pienempi. Joskus joudutaan laskemaan integraaleja, joissa integroimisrajat ovat yhtä suuret tai alaraja on ylärajaa suurempi. Täydennetään integraalin määrittelyä seuraavasti:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \qquad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

*Nämä lisämääritelmät ovat sopusoinnussa päälauseen kanssa, sillä

$$\int_a^a f(x)\,dx = \Big|_a^a F(x) = F(a) - F(a) = 0,$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = \Big|_b^a F(x) = F(a) - F(b) = -[F(b) - F(a)] = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Esim. 5 $\displaystyle\int_{-1}^{-e} \frac{1}{x}\,dx = \Big|_{-1}^{-e} \ln|x| = \ln|-e| - \ln|-1| = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1.$

Seuraavat kaksi tulosta ovat vastaavat kuin määräämättömällä integraalilla.

1. $\displaystyle\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx \quad (k = \text{vakio}),$

2. $\displaystyle\int_a^b [u(x) + v(x)]\,dx = \int_a^b u(x)\,dx + \int_a^b v(x)\,dx.$

Näiden mukaan vakiotekijä voidaan siirtää integroitaessa eteen ja summa voidaan integroida termi termiltä.

Tuloksia 1 ja 2 voidaan perustella ajattelemalla integraali "summaksi". Laki 1 esittää, että jos jokaisessa termissä on yhteinen tekijä k, se voidaan siirtää tekijäksi summan eteen. Laki 2. taas merkitsee summausjärjestyksen vaihtamista: ensin lasketaan yhteen kaikki termit $u(x) \cdot dx$ ja sitten termit $v(x) \cdot dx$.

Esim. 6 $\int_1^4 \left(\sqrt{nrt} - t\sin\frac{\pi}{7}\right) dt = \sqrt{nr}\int_1^4 t^{1/2} dt + (\sin\frac{\pi}{7})\int_1^4 t\, dt$

$$= \sqrt{nr}\ \Big|_1^4 \frac{t^{3/2}}{3/2} + (\sin\tfrac{\pi}{7})\ \Big|_1^4 \frac{t^2}{2} = \frac{2}{3}\sqrt{nr}\ \Big|_1^4 t\sqrt{t} + \frac{1}{2}(\sin\tfrac{\pi}{7})\ \Big|_1^4 t^2$$

$$= \frac{14}{3}\sqrt{nr} + \frac{15}{2}\sin\tfrac{\pi}{7}.$$

Jos c on välin $[a,b]$ jokin piste, niin "summaus" voidaan suorittaa kahdessa osassa: ensin a:sta c:hen ja sitten c:stä b:hen. Tämä ajattelu johtaa seuraavaan lakiin, joka pitää paikkansa myös kun c on välin $[a,b]$ ulkopuolella:

3. $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

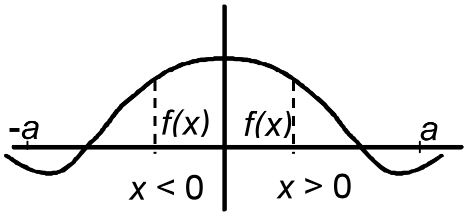
Esim. 7 Jos integroitava funktio on parillinen tai pariton funktio (integroimisvälillä) ja integroimisväli on origon suhteen symmetrinen, integrointia voidaan yksinkertaistaa seuraavilla säännöillä:

4. $$f(x)\ \textit{parillinen} \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\cdot\int_0^a f(x)\,dx,$$

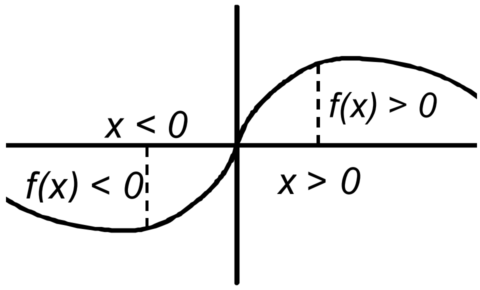
5. $$f(x)\ \textit{pariton} \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

Tod. Jaetaan $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$ kahden integraalin $I_1 = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx$ ja $I_2 = \int_0^a f(x)\,dx$ summaksi (sääntö 3). Väitetään, että parillisella funktiolla nämä integraalit ovat yhtä suuret ja parittomalla funktiolla vastaluvut.

Jos $f(x)$ on parillinen funktio, niin väleillä $[-a,0]$ ja $[0,a]$ funktion arvot $f(x)$ ja siis myös tulot $f(x)\cdot dx$ ovat pareittain yhtä suuret. Täten myös integraalit I_1 *ja* I_2 ovat yhtä suuret.



Jos taas $f(x)$ on pariton funktio, niin tulot $f(x)\cdot dx$ ovat pareittain vastalukuja ja siten samoin ovat integraalit I_1 ja I_2.



HARJOITUKSIA

A

6.1 a) $\int_1^2 2x^3\,dx$, b) $\int_0^3 (x^2+2x-1)\,dx$ c) $\int_0^1 3e^t\,dt$, d) $\int_2^2 \frac{x}{x+1}\,dx$.

6.2 a) $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$, b) $\int_0^{\pi} \cos x\,dx$, c) $\int_0^{3\pi/2} \cos x\,dx$.

6.3 Laske integraalille $\int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx$ likiarvo, jakamalla integroimisväli neljään yhtä suureen osaan.

6.4 a) $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\,dx$, b) $\int_1^2 \frac{2x+3}{4x}\,dx$, c) $\int_4^5 \frac{6\,dt}{t^2}$, d) $\int_1^4 \frac{r}{\sqrt{s}}\,ds$.

6.5 Jousivoima on (tietyissä rajoissa) verrannollinen jousen venymään (tai lyhenemään) s: $F = ks$. Laske työintegraalin avulla, kuinka suuri työ tehdään, kun jousi, jonka jousivakio on $k = 4{,}00\ MN/m$, puristetaan kokoon 25 mm.

6.6 Piirrä käyrä $y = e^x - 1$ sekä laske tämän käyrän ja x-akselin välisen alueen ala välillä $0 \le x \le 1$. Käytä laskemisessa <u>pienten differentiaalien menetelmää</u> (liuska kohdassa x jne).

6.7 Käytä funktioiden parillisuutta tai parittomuutta seuraavien integraalien laskemisessa:

a) $\int_{-\pi/6}^{\pi/6} 4\cos x\,dx$ b) $\int_{-2\pi/3}^{2\pi/3} 2a\sin t\,dt$, c) $\int_{-2}^{2} \frac{2ax^3}{b}\,dx$.

6.8 a) $\int_0^2 x^2 \cdot (1+x^3)\,dx$, b) $\int_2^0 x^2 \cdot (1+x^3)\,dx$ c) $\int_{-2}^2 x^2 \cdot (1+x^3)\,dx$.
(Varo: sellaista integrointisääntöä ei ole, että tulo integroitaisiin siten, että kumpikin tekijä integroidaan.)

B

6.9 a) $\int_1^4 u(1-\sqrt{u})^2\,du$, b) $\int_1^4 \frac{x^2-2x+1}{\sqrt{x}}\,dx$.

6.10 Piirrä käyrä $y = x(x-3)$ ja laske sen ja x-akselin välisen alueen pinta-ala. Käytä laskemisessa <u>pienten differentiaalien menetelmää</u>. Ohje: Liuskan korkeus = $|f(x)| = -f(x)$ (miksi?).

6.11 Laske integraalille $\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,dx$ likiarvo, jakamalla väli 0...π neljään osaan ja käyttämällä lisäksi integroitavan funktion parillisuutta (Huom. laskin RAD-näytölle!).

6.12 Jousen normaalipituus on 25,0 *cm*. Jousen venyttäminen 5,0 *mm* vaatii 1,00 *kN*:n voiman. a) Laske jousivakio (vrt. harj. **6.5**). b) Kuinka suuri työ tehdään, kun jousi venytetään pituudesta 27,0 *cm* pituuteen 30,0 *cm*?

6.13 Laske $\frac{d}{dt}\int_t^{2t}(x^2 - x\sqrt{x})\,dx$.

C

6.14 Todista, että a) parillisen ja parittoman funktion tulo ja osamäärä ovat parittomia, b) kahden parittoman funktion tulo ja osamäärä ovat parillisia. Sovellus: Laske

a) $\int_{-\pi}^{\pi} x^2\sin x\,dx$, b) integraalin $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx$ likiarvo 4 osavälin avulla. (Integroitava funktio *f* ei ole määritelty kohdassa x = 0, mutta asettamalla lisämääritelmä *f*(0) = 1 funktio *f* saadaan jatkuvaksi koko integroimisvälillä.)

6.15 Etsi (kokeilemalla) funktio, jonka derivaatta on a) e^{3x}, b) $\sin 3x$, c) $(1+2x)^5$, d) $\sqrt{1+2x}$. Laske tulosten avulla näiden funktioiden integraalit välillä [0,2].

7 Integroimismenetelmiä

Edellä on esitetty tavallisimpia "perusfunktioita" koskevat integroimiskaavat, nimittäin potenssien x^a ja $x^{-1} = 1/x$ ja eksponenttifunktion e^x integrointi sekä funktioiden $\sin x$, $\cos x$ ja $\tan x$ derivaattojen integrointi. Näitä tuloksia on käytetty sekä määräämättömälle että määrätylle integraalille.

7.1 Yhdistetyn funktion integrointi

Yhdistettyjen funktioiden derivaatoista saadaan integroimiskaavoja, joissa yhteistä on se, että integroitavana funktiona on jokin yhdistetty funktio kerrottuna sisäfunktion derivaatalla. (Jos sisäfunktion derivaatta puuttuu, integrointi voi olla erittäin vaikeaa.) Tulokset esitetään seuraavassa määräämättöminä integraaleina, mutta niitä voidaan (peruslauseen takia) soveltaa määrättyihinkin integraaleihin.

Derivoimistuloksesta $D\, e^{u(x)} = e^{u(x)} \cdot u'(x)$ saadaan "kääntäen" integroimiskaava

1. $\boxed{\int \boldsymbol{e^{u(x)} \cdot u'(x)\, dx = e^{u(x)} + C}}$.

Esim. 1 $\int x^2 e^{2x^3}\, dx = \int e^{2x^3} \cdot 6x^2 \cdot \frac{1}{6}\, dx = \frac{1}{6} \int e^{2x^3} \cdot 6x^2\, dx = \frac{1}{6} \cdot e^{2x^3} + C$.

Integroitavassa funktiossa oli mukana *sopiva x:n potenssi* sisäfunktion derivaataksi, mutta vakiotekijä 6 puuttui. Tämä vakiotekijä saatiin lisättyä, kun integraalin eteen otettiin sen kumoamiseksi tekijä $\frac{1}{6}$.

Esim. 2 $\int_0^1 e^{2x}\, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} \cdot 2\, dx = \frac{1}{2} \Big|_0^1 e^{2x} = \frac{1}{2}(e^2 - e^0) = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$.

Funktion e^{2x} integraalifunktio $\frac{1}{2} e^{2x}$ löydetään myös "kokeilemalla" (vrt. Harj. 5.16 tai Harj. 6.15) seuraavasti. Integraalifunktio on suunnilleen e^{2x}. Tämän derivaatta ei ole aivan e^{2x}, vaan $e^{2x} \cdot 2$. Siksi oikean integraalifunktion täytyy olla $e^{2x}/2$.

Derivoimistuloksesta $D \cos u(x) = -\sin u(x) \cdot u'(x)$ saadaan "kääntäen" seuraava integroimiskaava:

2. $$\boxed{\int \sin u(x)\cdot u'(x)\,dx = -\cos u(x) + C}.$$

Esim. 3 $$\int_0^1 \sin(2t-1)\,dt = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \sin(2t-1)\cdot 2\,dt = -\tfrac{1}{2}\Big|_0^1 \cos(2t-1)$$
$$= -\tfrac{1}{2}(\cos 1 - \cos(-1)) = -\tfrac{1}{2}(\cos 1 - \cos 1) = 0,$$

$$\int \sin 5t\,dt = \tfrac{1}{5}\int \sin 5t\cdot 5\,dt = -\tfrac{1}{5}\cos 5t + C\,,$$

$$\int t\sin(\omega t^2+\varphi)\,dt = \tfrac{1}{2\omega}\int \sin(\omega t^2+\varphi)\cdot 2\omega t\,dt$$
$$= -\tfrac{1}{2\omega}\cos(\omega t^2+\varphi) + C \quad .$$

Esim. 4 $$\int \cos kx\,dx = \tfrac{1}{k}\int (\cos kx)\cdot k\,dx = \tfrac{1}{k}\sin kx + C\,\mathbf{.}$$

Seuraava sääntö on potenssin x^a integroimissäännön yleistys:

3. $$\boxed{\int u(x)^a\cdot u'(x)\,dx = \frac{u(x)^{a+1}}{a+1} + C}$$ **(a vakio ≠ -1)**

(Tod. Derivoi op.) Jos siis ***integroitavana funktiona on x:n lausekkeen u(x) potenssi kerrottuna*** ***<u>sisäfunktion</u>*** ***derivaatalla u′(x)***, niin integraalifunktio = sama lauseke korotettuna yhtä korkeampaan potenssiin ja jaettuna uudella eksponentilla.

Esim. 5 $$\int x(x^2-3)^5\,dx = \tfrac{1}{2}\cdot\int (x^2-3)^5\cdot 2x\,dx$$
$$= \tfrac{1}{2}\,\frac{(x^2-3)^6}{6} + C = \frac{(x^2-3)^6}{12} + C,$$

$$\int x\sqrt{1-3x^2}\,dx = -\tfrac{1}{6}\int (1-3x^2)^{1/2}\cdot(-6x)\,dx = -\tfrac{1}{6}\,\frac{(1-3x^2)^{3/2}}{3/2} + C$$
$$= -\tfrac{1}{9}(1-3x^2)\sqrt{1-3x^2} + C,$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\cos x\,dx = \Big|_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{3} = \frac{1}{3}.$$

Esim. 6 $$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int x(x^2-1)^{-1/2}\,dx = \tfrac{1}{2}\int (x^2-1)^{-1/2}\cdot 2x\,dx$$
$$= \tfrac{1}{2}\,\frac{(x^2-1)^{1/2}}{1/2} + C = \sqrt{x^2-1} + C.$$

Funktion $1/x$ integroimissäännön yleistys on

4. $$\boxed{\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln|u(x)| + C}$$

Tod. $D\ op. = \dfrac{1}{u(x)} \cdot u'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

*Jos siis **integroitavan funktion nimittäjänä on jokin x:n lauseke u(x) ja osoittajana on <u>koko nimittäjän</u> derivaatta**, niin integraalin arvo on* $\ln|u(x)| + C$.

Esim. 7 $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-1}\,dx = \tfrac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-1}\,dx = \tfrac{1}{2}\ln|x^2-1| + C.$

Vertaa esimerkkiin 6. Siinä integroitavana oli aika samannäköinen lauseke, mutta osoittajana ei ollut <u>koko nimittäjän</u> derivaatta vaan ainoastaan nimittäjässä olevan <u>sisäfunktion</u> derivaatta.

Esim. 8 $\displaystyle\int \tan x\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + C.$

$\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+2}\,dx = \ln(e^x+2) + C$ (itseisarvoja ei tarvita).

$$\int_2^3 \frac{1}{1-x}\,dx = -\int_2^3 \frac{-1}{1-x}\,dx = -\Big|_2^3 \ln|1-x| = -(\ln 2 - \ln 1) = -\ln 2.$$

Sama toisin:

$$\int_2^3 \frac{1}{1-x}\,dx = -\int_2^3 \frac{1}{x-1}\,dx = -\Big|_2^3 \ln|x-1| = -(\ln 2 - \ln 1) = -\ln 2.$$

Esim. 9 Integraalin $I = \displaystyle\int \frac{x}{x+2}\,dx$ osoittajassa on liian korkea x:n potenssi koko nimittäjän derivaataksi. Suoritetaan jako (jakokulmassa), jolloin vaillinaiseksi osamääräksi tulee 1 ja jakojäännökseksi –2. Täten

$$I = \int \left(1 + \frac{-2}{x+2}\right) dx = \int \left(1 - 2\cdot\frac{1}{x+2}\right) dx = x - 2\ln|x+2| + C.$$

Jako voidaan suorittaa myös seuraavasti:

$$\frac{x}{x+2} = \frac{x+2-2}{x+2} = \frac{(x+2)-2}{x+2} = 1 - \frac{2}{x+2}.$$

7.2 Sijoitusmenetelmä (muuttujan vaihto)

Yhdistetyn funktion integrointi voi helpottua, jos sisäfunktio valitaan uudeksi integroimismuuttujaksi ts. jos integraaliin tehdään sijoitus $u(x) = t$. Oikean tuloksen saamiseksi dx:ää täytyy käsitellä differentiaalin tavoin.

Esim. 10

$\int \sin(2x+3)\,dx$	tehdään sijoitus $2x+3=t$ ja differenti-
$= \int \sin t \cdot \frac{1}{2}\,dt$	oidaan tämän yhtälön kumpikin puoli:
$= -\frac{1}{2}\cos t + C$	$2\,dx = 1\cdot dt \therefore dx = \frac{1}{2}\,dt$
$= -\frac{1}{2}\cos(2x+3) + C$	Palataan takaisin muuttujaan x

Differentiaalin dx käsittely toi integraaliin mukaan sisäfunktion vaatiman "korjauksen" $\frac{1}{2}$. Sijoitusta käytettäessä tarvittiin enemmän välivaiheita kuin aikaisemmalla tavalla, joka oli seuraava:

$$\int \sin(2x+3)\,dx = \frac{1}{2}\int \sin(2x+3)\cdot 2\,dx = -\frac{1}{2}\cos(2x+3) + C.$$

Myöhemmissä luvuissa käsitellään integraaleja, joissa sijoitusmenettelyn käyttäminen on selvästi tarpeellisempaa (lähes välttämätöntä).

Esim. 11

$\int t\cdot\sin(\omega t^2+\varphi)\,dt$	sij. $\omega t^2 + \varphi = u$
$= \int \sin(\omega t^2+\varphi)\cdot t\,dt$	diff. $2\omega t\,dt = du \therefore t\,dt = \frac{1}{2\omega}du$

$$= \int \sin u \cdot \frac{1}{2\omega}\,du = \frac{1}{2\omega}\int \sin u\,du = -\frac{1}{2\omega}\cos u + C$$

$$= -\frac{1}{2\omega}\cos(\omega t^2+\varphi) + C.$$

Jos sijoitusmenettelyä käytetään <u>määrättyyn integraaliin</u>, täytyy integroimisrajat vaihtaa uutta muuttujaa vastaaviksi:

Esim. 12

$\int_2^3 \frac{1}{1-x}\,dx$	sij. $1-x=t$, diff. $-1\cdot dx = dt \therefore dx = -dt$
$= \int_{-1}^{-2} \frac{1}{t}(-dt)$	$\begin{cases} \boldsymbol{x}\textbf{: 2…3} \\ \boldsymbol{t}\textbf{: −1…−2} \text{ (koska } t = 1-x) \end{cases}$

$$= -\Big|_{-1}^{-2} \ln|t| = -(\ln 2 - \ln 1) = -\ln 2.$$

7.3 Osittaisintegrointi

Jos $u = u(x)$ *ja* $v = v(x)$, niin tulon derivoimissäännön mukaan

$$D\,uv = u'v + uv'.$$

Täten "kääntäen"

$$\int_a^b (u'v + uv')\,dx = \Big|_a^b\,uv$$

eli

$$\int_a^b u'v\,dx + \int_a^b uv'\,dx = \Big|_a^b\,uv.$$

Tästä seuraa ***osittaisintegrointikaava***

$$\boxed{\int_a^b \boldsymbol{uv'}\,\boldsymbol{dx} = \Big|_a^b\,\boldsymbol{uv} - \int_a^b \boldsymbol{u'v}\,\boldsymbol{dx}}.$$

Määräämättömällä integraalilla sijoitusmerkki jää pois ja tulos on

$$\boxed{\int \boldsymbol{uv'}\,\boldsymbol{dx} = \boldsymbol{uv} - \int \boldsymbol{u'v}\,\boldsymbol{dx}}.$$

Huom. Totuttele kirjoittamaan näissä kaavoissa esiintyvät funktiot aina viereisen kaavion mukaiseen järjestykseen, jolloin ensimmäisessä pystyrivissä tapahtuu derivointi ($u \Rightarrow u'$) ja toisessa integrointi ($v' \Rightarrow v$). Osittaisintegroinnissa *ylemmän rivin tulon uv' integraali = lävistäjätulo uv (tai sijoitus siihen) miinus alemman rivin tulon u'v integraali.*

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{u} = \ldots & \boldsymbol{v'} = \ldots \\ \boldsymbol{u'} = \ldots & \boldsymbol{v} = \ldots \end{pmatrix}$$

Osittaisintegrointi muuttaa integraalin $\int uv'\,dx$ integraaliksi $\int u'v\,dx$. Jos u-funktio on sellainen, että se yksinkertaistuu derivoinnissa (esim. polynomi- tai $\ln x$ -funktio) ja v'-funktio ei juurikaan mutkistu integroinnissa (esim. $\sin x$, $\cos x$ tai e^x), niin uusi integraali $\int u'v\,dx$ voi olla helpompi laskea kuin alkuperäinen.

Esim. 13

$$\begin{aligned} \int x\sin x\,dx &= -x\cos x - \int 1\cdot(-\cos x)\,dx \\ &= -x\cos x + \int \cos x\,dx \\ &= -x\cos x + \sin x + C \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} u = x & v' = \sin x \\ u' = 1 & v = -\cos x \end{pmatrix}$$

Esim. 14 $\int_0^1 (3x-1)e^{2x}\,dx = \Big|_0^1 (3x-1)\frac{e^{2x}}{2} - \int_0^1 3\cdot\frac{e^{2x}}{2}\,dx$

$$\begin{pmatrix} u=3x-1 & v'=e^{2x} \\ u'=3 & v=\dfrac{e^{2x}}{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} &= 2\cdot\frac{e^2}{2} - (-1)\cdot\frac{e^0}{2} - \frac{3}{2}\Big|_0^1 \frac{e^{2x}}{2} \\ &= e^2 + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}(e^2 - e^0) \\ &= \frac{5+e^2}{4}. \end{aligned}$$

Huomaa seuraavan kahden integraalin ero:

$$\int xe^{2x}\,dx, \qquad \int xe^{x^2}\,dx$$

Jälkimmäisessä integraalissa tekijä x on sopiva x:n potenssi sisäfunktion derivaataksi, vain vakio 2 täytyy lisätä (vrt. Esim. 1). Edellisessä integraalissa tekijä x on "liikaa". Se poistuu osittaisintegroinnilla.

Esim. integraali $\int x^2 e^{2x}\,dx$ vaatii kaksi osittaisintegrointia jotta tekijä x^2 poistuisi. Suorita integroinnit!

*Kokeile käyttää viereisen kuvan mukaista laajennettua kaaviota. (1. lävistäjätulo tulee mukaan – merkkisenä, toinen + merkkisenä ja kolmas taas – merkkisenä.)

$$\begin{pmatrix} x^2 & e^{2x} \\ 2x & \frac{1}{2}e^{2x} \\ 2 & \frac{1}{4}e^{2x} \\ 0 & \frac{1}{8}e^{2x} \end{pmatrix}$$

***Esim. 15** $\int x^2 \ln x\,dx = \int (\ln x)\cdot x^2\,dx \quad \Bigg| \begin{pmatrix} u=\ln x & v'=x^2 \\ u'=\dfrac{1}{x} & v=\dfrac{x^3}{3} \end{pmatrix}$ *Näin päin*!

$$= (\ln x)\frac{x^3}{3} - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{x^3}{3}\,dx$$

$$= \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3}\int x^2\,dx = \frac{x^3\ln x}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3} + C$$

$$= \frac{x^3}{9}(3\ln x - 1) + C.$$

*Tämäntapaisissa integraaleissa täytyy siis u-funktioksi valita $\ln x$ eikä x^2. Tavallisempi mutta pidempi tapa olisi sijoituksen $\ln x = t$ käyttäminen.

7.4 Osittaisintegroinnilla johdettuja valmiskaavoja

Esim. sinin potenssille on voimassa ns. ***palautus- eli rekursiokaava***

$$\int \sin^n x\, dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cdot \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\, dx.$$

Se palauttaa sinin potenssin integroinnin kaksi yksikköä alemman potenssin integrointiin.

*Näytetään tapauksen $n = 5$ avulla tämän kaavan johtamisperiaate:

$$I_5 = \int \sin^5 x\, dx \quad \left| \quad \begin{pmatrix} u = \sin^4 x & v' = \sin x \\ u' = 4\sin^3 x \cdot \cos x & v = -\cos x \end{pmatrix} \right.$$

$$\begin{aligned} &= \sin^4 x \cdot (-\cos x) - \int 4\sin^3 x \cdot \cos x \cdot (-\cos x)\, dx \\ &= -\sin^4 x \cdot \cos x + 4\int \sin^3 x \cdot (1 - \sin^2 x)\, dx \\ &= -\sin^4 x \cdot \cos x + 4\int \sin^3 x\, dx - 4 \cdot I_5. \end{aligned}$$

Kun termi $-4 \cdot I_5$ siirretään yhtälön vasemmalle puolelle ja yhtälö jaetaan 5:llä, saadaan

$$I_5 = -\frac{1}{5}\sin^4 x \cdot \cos x + \frac{4}{5}\int \sin^3 x\, dx.$$

Esim. 16 Sovelletaan palautuskaavaa *määrättyyn* integraaliin:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx = -\frac{1}{2}\Big|_0^{\pi/2} \sin^1 x \cdot \cos x + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin^0 x}_{=1}\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}(0 - 0) + \frac{1}{2}\Big|_0^{\pi/2} x = \frac{\pi}{4}.$$

*Esimerkiksi integraaliin $\int \sin^5 3x\, dx$ ei voida soveltaa suoraan em. palautuskaavaa, sillä kyseessä on yhdistetyn funktion $\sin 3x$ potenssin integrointi. Palautuskaavaa sovellettaessa sisäfunktion derivaatta 3 jäisi huomioimatta. *Ennen kuin palautuskaavaa voidaan käyttää, integraaliin on tehtävä sijoitus $3x = t$.*

Kaavastosta löytyy useita muitakin integroimiskaavoja, jotka voidaan johtaa osittaisintegroinnilla. Tällaisia ovat mm. seuraavat:

1) Joukko palautuskaavoja. Näillä integroidaan mm. seuraavat funktiot:

$$\cos^n x, \qquad \frac{1}{\sin^n x}, \qquad x^n \sin ax, \qquad \frac{1}{(x^2+a^2)^n}.$$

2) Esim. sähkötekniikassa voi olla käyttöä kaavastosta löytyvällä funktion $\boldsymbol{e^{kx} \sin bx}$ integroimiskaavalla:

$$\int e^{kx} \sin bx \, dx = \frac{k \sin bx - b \cos bx}{k^2 + b^2} \cdot e^{kx} + C.$$

3) Miten käytät kaavaston kaavaa

$$\int \boldsymbol{x^n e^x \, dx = e^x (x^n - n x^{n-1} + n(n-1) x^{n-2} - + \ldots + (-1)^n n!) + C}$$

integraalin $\int x^5 e^x \, dx$ laskemiseen ?

HARJOITUKSIA

A

7.1 a) $\int e^{-x} \, dx$, b) $\int_{-1}^{1} e^{3x} \, dx$, c) $\int \sin 3x \, dx$, d) $\int_0^{\pi/2} \cos 5x \, dx$.

7.2 a) $\int_0^2 t\, e^{at^2} \, dt$, b) $\int 3x\, e^{-x^2} \, dx$, c) $\int_0^1 \sin \omega t \, dt$, d) $\int r \sin 2t \, dt$.

7.3 a) $\int (2x-1)^3 \, dx$, b) $\int \sqrt{3x-1} \, dx$, c) $\int_0^2 x \sqrt[3]{x^2+1} \, dx$.

7.4 a) $\int \frac{1}{2u+1} \, du$, b) $\int \frac{1}{\sqrt{2u+1}} \, du$, c) $\int \frac{1}{\tan t} \, dt$.

7.5 Laske käyrän $y = e^{-2x}$, koordinaattiakselien ja suoran $x = 2$ rajoittaman alueen pinta-ala.

7.6 Laske sijoitusmenetelmällä edellä olleista integraaleista seuraavat:

a) $\int \sin 3x \, dx$, b) $\int_0^1 \sin \omega t \, dt$, c) $\int_{-1}^{1} e^{3x} \, dx$, d) $\int (2x-1)^3 \, dx$.

7.7 a) $\int x \sin 2x \, dx$, b) $\int_0^{\pi/6} t \cos 3t \, dt$, c) $\int (3t-1) \sin 3t \, dt$.

7.8 a) $\int x\, e^{3x}\, dx$, b) $\int x^2\, e^{3x}\, dx$, c) $\int x\, e^{3x^2}\, dx$.

7.9 Laske palautuskaavalla a) $\int_0^{\pi/2} \sin^3 t\, dt$, b) $\int_0^{\pi/2} \sin^4 t\, dt$.

B

7.10 a) $\int (x-1)e^{2x^2-4x}\, dx$, b) $\int_0^{\pi/3} \cos(3t-\pi/6)\, dt$.

7.11 Laske $\int_0^{T/3} \sin 2\omega t\, dt$, missä t on aika, ω on kulmataajuus ja $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ on jaksonaika.

7.12 a) $\int_1^5 \dfrac{dx}{x+3}$ b) $\int_0^1 \dfrac{x}{x+1}\, dx$, c) $\int_0^5 \dfrac{x\, dx}{2x+1}$

7.13 a) $\int \dfrac{3x}{\sqrt{4-x^2}}\, dx$, b) , $\int_{\sqrt{5}}^3 \sqrt{9-x^2} \cdot x\, dx$.

7.14 a) $\int_1^{2e} \dfrac{\ln x}{x}\, dx$, b) $\int \tan 2x\, dx$.

7.15 a) $\int_0^{\pi/6} x \cos 2x\, dx$, b) $\int \varphi\, (re^{-3\varphi})^2\, d\varphi$.

7.16 Laske osittaisintegroimalla a) $\int_1^{e/2} x^2 \ln 2x\, dx$, b) $\int_1^{e^2} \sqrt{u} \cdot \ln u\, du$.

7.17 Laske sijoitusmenetelmällä a) $\int \dfrac{6x}{\sqrt{4-x^2}}\, dx$, b) $\int_0^5 \dfrac{x\, dx}{2x+1}$.

7.18 Laske sijoitusta $\ln x = t$ käyttäen integraali $\int x^3 \ln x\, dx$.

7.19 a) $\int e^{2t} \sin(\omega t)\, dt$, b) $\int_0^1 x^6\, e^x\, dx$.

7.20 Laske käyrän $y = x \cdot \sin 2x$ ja x-akselin rajoittaman sen alueen ala, joka on ensimmäisenä origosta oikealle. (Piirrä kuva.)

7.21 Piirrä käyrä $y = 3\cos(2x + \pi/4)$ ja laske sen ja x-akselin rajoittaman "yhden alueen" pinta-ala.

7.22 Laske integraali $\int \sin^3 5x \, dx$ (ensin sijoitus $5x = t$, sitten palautus-kaava).

C

7.23 Integraalin $I = \int \sin x \cdot \cos x \, dx$ voit laskea kahdella tavalla:

1) $I = \int \sin^1 x \cdot \cos x \, dx = \dfrac{\sin^2 x}{2} + C$,

2) $I = \frac{1}{2} \int \sin 2x \, dx = \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2} \cos 2x) + C$
$= -\frac{1}{4}(1 - 2\sin^2 x) + C = \frac{1}{2}\sin^2 x - \frac{1}{4} + C.$

Kuinka on mahdollista, että saat eri tuloksen (vaikka lasket oikein)?

7.24 Johda (osittaisintegroimalla) integraalille $\int_a^b \cos^n x \, dx$ palautuskaava.

7.25 Todista osittaisintegroinnilla, että

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C.$$

Ohje: Suorita osittaisintegrointi kahdesti ($u = e^x$), jolloin päädyt alkuperäiseen integraaliin, mutta – merkkisenä.

Mikä olisi helpompi tapa todistaa tämä kaavastosta löytyvä kaava?

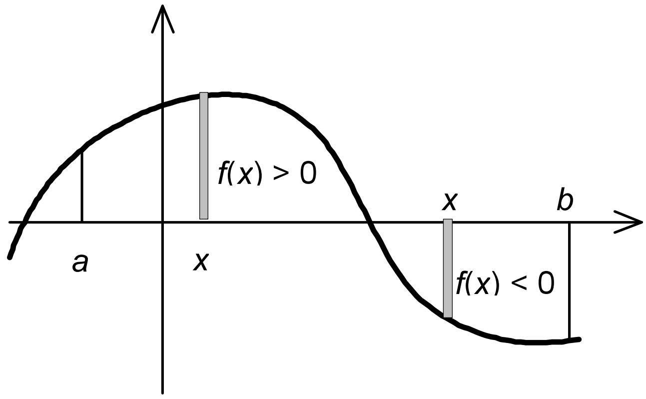
7.26 a) $\int \sin^2 \omega t \cos^3 \omega t \, dt$, b) $\int \sin^2 t \cos^2 t \, dt$, c) $\int \sin 2\omega t \cos 3\omega t \, dt$ (vihje c)-kohtaan: muuta tulo summaksi).

7.27 a) Piirrä funktioiden $y = \sin^2 x$ *ja* $y = \sin x^2$ kuvaajat välillä $[-2\pi, 2\pi]$, b) Integroi nämä välillä $[-\pi, \pi]$. Vihje: käytä parillisuutta. Jälkimmäinen integraali pystytään laskemaan vain *numeerisilla menetelmillä* (likiarvomenetelmillä) tai myöhemmin myös sarjaopin avulla.

8 Pinta-ala ja tilavuus

8.1 Pinta-ala

1) Käyrän $y = f(x)$ ja x-akselin välinen pinta-ala jollakin välillä $[a,b]$.



Käytetään pienten differentiaalien menetelmää, jonka lähtökohtana on kohdassa x oleva "äärettömän kapea" liuska. Jos $f(x)$:n arvo eli y-koordinaatin arvo kohdassa x on positiivinen, $f(x)$ käy liuskan korkeudeksi. Jos taas $f(x) < 0$, liuskan korkeudeksi on otettava $f(x)$:n vastaluku $-f(x)$, *sillä* ***korkeuden*** *(joka on janan pituus)* ***pitää aina olla ≥ 0***.

$$\text{liuskan korkeus } h(x) = \begin{cases} f(x), \; jos\ f(x) \geq 0 \\ -f(x), \; jos\ f(x) < 0. \end{cases}$$

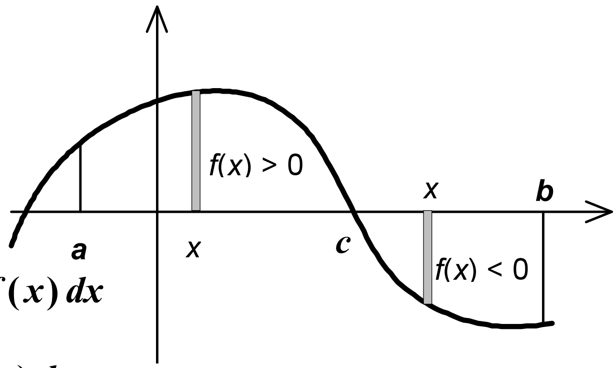
Liuskan kanta on aina = $dx > 0$. Siten liuskan ala (korkeus kertaa kanta) on

$$dA = h(x) \cdot dx = \begin{cases} f(x) \cdot dx, \; jos\ f(x) \geq 0 \\ -f(x) \cdot dx, \; jos\ f(x) < 0. \end{cases}$$

Koko ala on tällaisten *liuskojen alojen "summa"* :

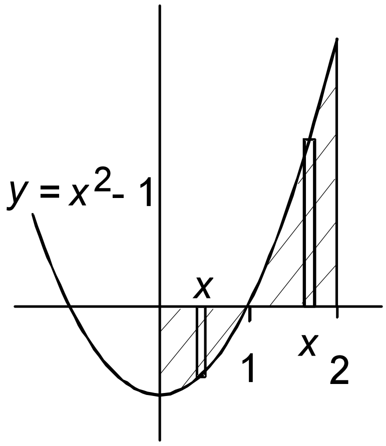
$$\boldsymbol{A = \int_a^b h(x)\,dx}.$$

Esim. viereisen kuvan tapauksessa etsitään ensin leikkauskohta c ratkaisemalla yhtälö $f(x) = 0$ ja sitten "summataan" erikseen liuskojen alat välillä $a...c$ ja $c...b$. Siis



$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b -f(x)\,dx} \\ &= \boldsymbol{\int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx.} \end{aligned}$$

Esim. 1 Laske viereisen kuvan mukaisen viivoitetun alueen ala.



Kohdassa x olevan liuskan kanta = dx > 0. Liuskan korkeus on

$$h(x)=\begin{cases}-(x^2-1), \text{kun } 0\le x\le 1\\ \quad x^2-1, \text{kun } 1\le x\le 2.\end{cases}$$

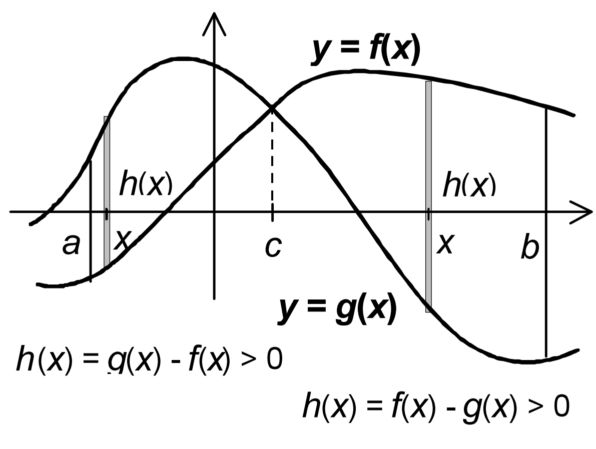
Koko ala on liuskojen alojen $dA=h(x)\cdot dx$ "summa":

$$A=\int_0^2 h(x)\,dx$$
$$=\int_0^1 -(x^2-1)\,dx+\int_1^2 (x^2-1)\,dx$$
$$=-\Big|_0^1\Big(\frac{x^3}{3}-x\Big)+\Big|_1^2\Big(\frac{x^3}{3}-x\Big)$$
$$=-\Big(\frac{1}{3}-1\Big)+\left[\Big(\frac{8}{3}-2\Big)-\Big(\frac{1}{3}-1\Big)\right]=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2.$$

Tarkistus: Viimeiseltä riviltä näkyy kummankin osan ala $\frac{2}{3}$ ja $\frac{4}{3}$ erikseen. Alat ovat positiivisia, kuten pitääkin olla ja oikeaa suuruusluokkaa.

2) Käyrien $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ välinen ala välillä $[a, b]$

Liuskan korkeus $h(x)$ saadaan kun ***isommasta y-koordinaatista vähennetään pienempi***.



Esim. viereisessä kuvassa

$$h(x)=\begin{cases}g(x)-f(x)\ \textit{välillä}\ [a,c]\\ f(x)-g(x)\ \textit{välillä}\ [c,b]\end{cases}$$

ja siten

$$\boldsymbol{A=\int_a^b h(x)\,dx=\int_a^c[g(x)-f(x)]\,dx+\int_c^b[f(x)-g(x)]\,dx}$$

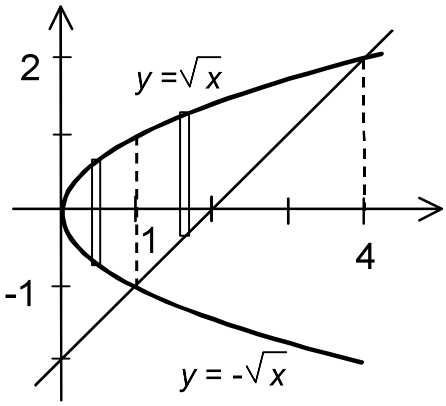
*Voidaan myös sanoa, että edellisessä kuvassa välillä $[a,c]$ *yläkäyränä* on $y = g(x)$ ja *alakäyränä* on $y = f(x)$. Välillä $[c,b]$ taas yläkäyrä on $y = f(x)$ ja alakäyrä $y = g(x)$. Liuskan korkeus kummallakin välillä saadaan kun välin *yläkäyräarvosta vähennetään alakäyräarvo*.

Esim. 2 Paraabelin $x = y^2$ ja suoran $y = x - 2$ välisen alueen ala.

Ratkaisemalla yhtälöpari

$$\begin{cases} x = y^2 \\ y = x - 2 \end{cases}$$

saadaan käyrien leikkauspisteiksi $(1,-1)$ ja $(4,2)$.

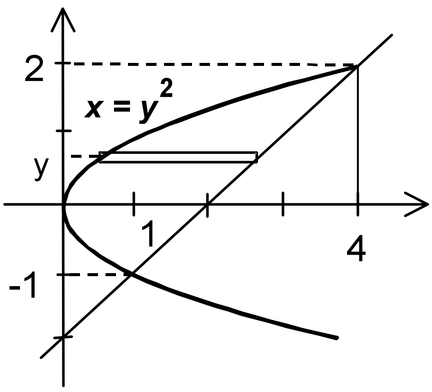


Paraabeli $x = y^2$ jakautuu kahdeksi käyräksi $y = \pm\sqrt{x}$. Alueen pinta-alaa laskettaessa yläkäyränä on koko ajan $y = \sqrt{x}$. Sen sijaan alakäyrä vaihtuu kohdassa $x = 1$, sillä välillä $[0,1]$ se on $y = -\sqrt{x}$ ja välillä $[1,4]$ $y = x - 2$. Siten

$$A = \int_0^1 \left[\sqrt{x} - (-\sqrt{x})\right] dx + \int_1^4 \left[\sqrt{x} - (x-2)\right] dx$$

$$= 2 \cdot \int_0^1 \sqrt{x}\, dx + \int_1^4 (\sqrt{x} - x + 2)\, dx = 4\tfrac{1}{2} \quad (\textit{suorita laskut}).$$

Toinen tapa: Käytetään *vaakaliuskaa* (integroimismuuttujaa y) kohdassa y. Liuskan korkeus on dy. Liuskaa vastaava suurin x:n arvo on $x = y + 2$ ja pienin on $x = y^2$. Näiden erotus $y + 2 - y^2$ on liuskan kanta. Siten liuskan ala



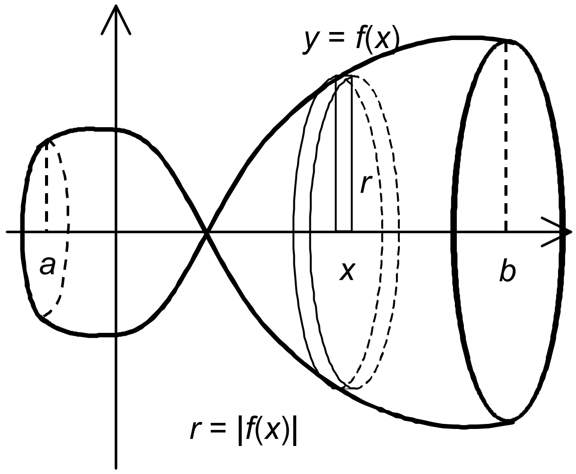
$$dA = (y + 2 - y^2) \cdot dy.$$

Kyseisessä alueessa y muuttuu arvosta -1 arvoon 2, joten koko ala on "summa"

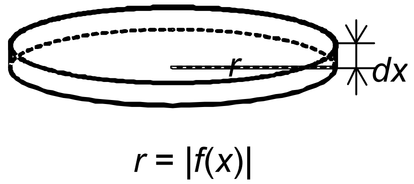
$$A=\int_{-1}^{2}(y+2-y^2)\,dy == \Big|_{-1}^{2}\left(\frac{y^2}{2}+2y-\frac{y^3}{3}\right)=...=4\tfrac{1}{2}.$$

8.2 Pyöräyskappaleen tilavuus

1) Käyrä $y=f(x)$ pyörähtää ***x-akselin*** ympäri välillä $[a,b]$.

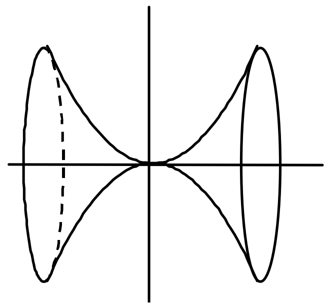


Kun kohdassa x oleva dx:n levyinen liuska pyörähtää, syntyy ympyrälevy. Sen "korkeus" on dx ja pohjan säde $r=|f(x)|$.



Levyn tilavuus on siten $dV=\pi r^2\cdot dx=\pi\cdot|f(x)|^2\cdot dx=\pi\cdot f(x)^2\cdot dx$. Koko kappaleen tilavuus saadaan näiden äärettömän monen levyn tilavuuksien "summana". Levyn tilavuus dV on lausuttu x:n avulla ja x saa arvoja a:sta b:hen, joten "summauskin" tapahtuu a:sta b:hen. Siis

$$\boxed{\boldsymbol{V=\pi\cdot\int_a^b f(x)^2\,dx}}.$$

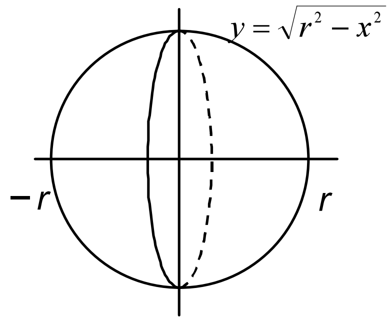


Esim. 3 Paraabeli $y=x^2$ pyörähtää x-akselin ympäri välillä $[-1,1]$. Symmetrian nojalla

$$V=2\cdot\pi\cdot\int_0^1(x^2)^2\,dx=\frac{2\pi}{5}.$$

Esim. 4 Johda r-säteisen pallon tilavuudelle kaava

$$\boldsymbol{V=\tfrac{4}{3}\pi r^3}.$$



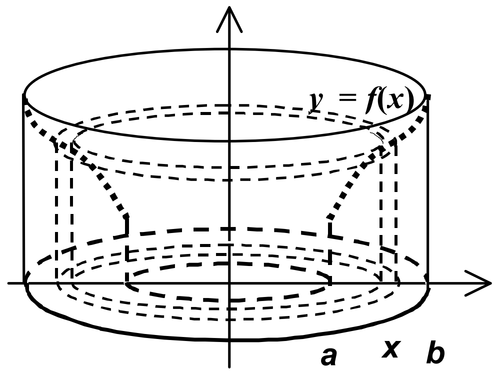
Pyörähtävä käyrä on $x^2+y^2=r^2,\ y\geq 0$ eli $y=+\sqrt{r^2-x^2}$. Siten (symm.)

$$V=2\cdot\pi\int_0^r\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2dx$$

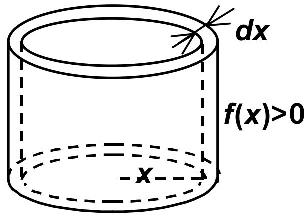
$$=2\pi\int_0^r(r^2-x^2)\,dx$$

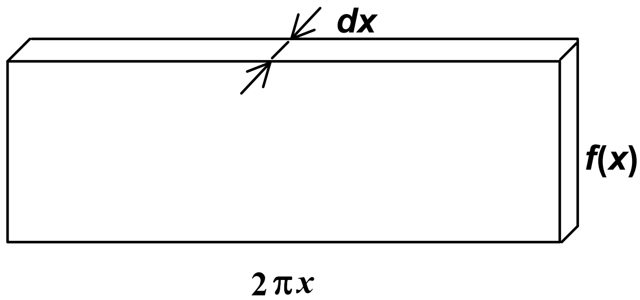
$$= 2\pi \cdot \Big|_0^r (r^2 x - \frac{x^3}{3}) = 2\pi (r^3 - \frac{r^3}{3}) = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

2) Oletetaan, että $0 < a < b$ ja että $f(x) > 0$ *välillä* $[a,b]$ (jotta liuskan korkeudessa ei tarvitse käyttää itseisarvoja). Tämä alue pyörähtää ***y-akselin*** ympäri. Laske tilavuus V.



Kun kohdassa x oleva dx:n levyinen liuska pyörähtää, syntyy ohut *lieriörengas*, jonka korkeus on $f(x)$, pohjan säde on x ja paksuus dx (vrt. seuraava kuva).





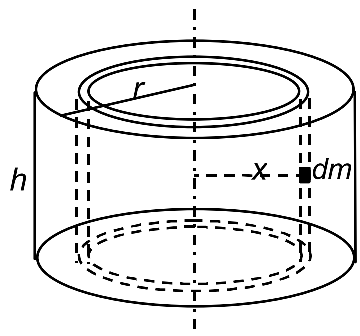
Jos tämä "äärettömän ohut" rengas leikataan sivuviivaa pitkin auki ja levitetään tasoon, niin syntyvä kappale voidaan ajatella dx:n paksuiseksi suorakulmaiseksi särmiöksi . Sen tilavuus on

$$\boldsymbol{dV = 2\pi x \cdot f(x) \cdot dx}.$$

Koko pyöräyskappaleen tilavuus on näiden sisäkkäisten renkaiden "summa", missä renkaan säde x saa arvot a:sta b:hen. Siis

$$\boldsymbol{V = 2\pi \int_a^b x\, f(x)\, dx}.$$

*Samantapaisesti lasketaan ***lieriön hitausmomentti*** akselin a suhteen. Etäisyydellä x akselista a olevilla "massapisteillä" dm on jokaisella hitausmomentti $x^2 dm$. Näistä massapisteistä muodostuu rengas. Sen hitausmomentti $\boldsymbol{dJ_a}$ on =



$$(\textit{yhteinen etäisyys } x)^2 \cdot \textit{massojen dm "summa"},$$

ts.

$$dJ_a = x^2 \cdot \textit{renkaan massa} = x^2 \cdot \rho \cdot \textit{renkaan tilavuus}$$
$$= x^2 \cdot \rho \cdot 2\pi x \cdot h \cdot dx = \rho \cdot 2\pi h x^3\, dx \quad (\rho = \textit{tiheys})$$

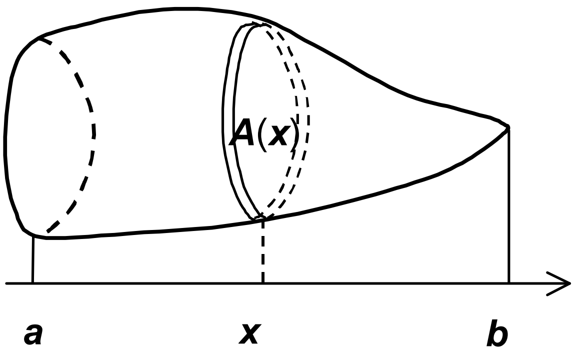
$$\therefore J_a = \rho \cdot 2\pi h \int_0^r x^3 dx = \frac{\rho \cdot \pi r^4 h}{2} = \frac{\rho \cdot \pi r^2 h \cdot r^2}{2} = \frac{\rho V \cdot r^2}{2} \quad \therefore \boldsymbol{J_a = \frac{mr^2}{2}}.$$

8.3 Edellistä yleisemmän kappaleen tilavuus

Jos tunnetaan kappaleen poikkileikkauksen pinta-ala $A(x)$ eri kohdissa x, niin dx:n paksuisen levyn tilavuus

$$dV = A(x) \cdot dx$$

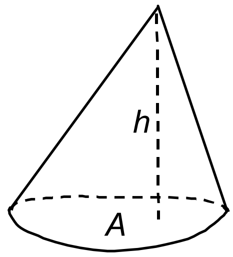
ja koko tilavuus on levyjen tilavuuksien "summa":



$$\boxed{V = \int_a^b A(x)\,dx}.$$

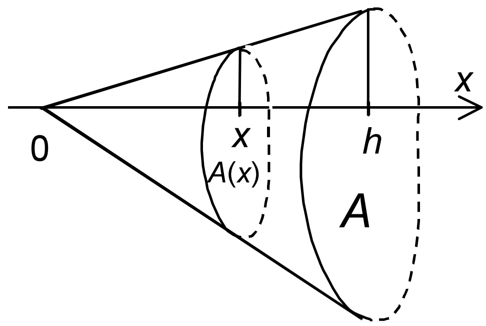
Esim. 5 Johda kartion tilavuudelle kaava

$$\boldsymbol{V = \tfrac{1}{3} Ah}.$$



Valitaan x-akseliksi kartion korkeusviiva (joka on kohtisuorassa pohjaa vastaan) ja origoksi kartion kärki. Lasketaan ensin kohdassa x olevan poikkileikkauksen ala $A(x)$ *yhdenmuotoisuuden* avulla.

Kartion *huippuosa on yhdenmuotoinen koko kartion kanssa mittakaavassa* $x : h$ (= vastinviivojen suhde). Näiden kappaleiden pohjat ovat eräitä vastinpintoja ja siten niiden alojen suhde = *mittakaavan neliö*, ts.



$$\frac{A(x)}{A} = \left(\frac{x}{h}\right)^2.$$

Täten $A(x) = \dfrac{A}{h^2} x^2$. Tästä saadaan integroimalla tilavuudeksi

$$V = \int_0^h A(x)\,dx = \frac{A}{h^2} \int_0^h x^2\,dx = \frac{A}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{Ah}{3}.$$

HARJOITUKSIA

A

8.1 Laske käyrän $y = x^2 - 4$ ja x-akselin välinen ala.

8.2 Laske käyrän $y = 2e^{-x} - 2$ ja x-akselin välinen ala välillä $[-1, 1]$.

8.3 Laske käyrien $y = x^2$ *ja* $y = x^3$ välisen sirppimäisen alueen ala.

8.4 Käyrä $y = x^3 + x^2 - 2x$ leikkaa x-akselin kolmessa pisteessä. Laske muodostuneen kaksoisalueen ala.

8.5 Laske paraabelien $y = 6x - x^2$ *ja* $y = x^2 - 2x$ välisen alueen ala.

8.6 Laske käyrän $y = \tan x$ ja x-akselin välinen ala välillä $[0, \pi / 4]$

8.7 Käyrän $y = x^3$ ja x-akselin välinen alue välillä $[-2, 2]$ pyörähtää a) x-akselin, b) y-akselin ympäri. Laske tilavuus.

8.8 Käyrän $y = \sqrt{x}$ ja suoran $y = x$ välinen alue pyörähtää x-akselin ympäri. Laske tilavuus.

B

8.9 Laske käyrien $y = e^x$ *ja* $y = e^{-x}$ välinen ala välillä $[-1, 1]$. Piirrä kuva.

8.10 Piirrä käyrä $y^2 - x - 3y = 0$ ja laske sen ja y-akselin välinen ala (käytä vaakaliuskoja).

8.11 Laske (vaakaliuskoja käyttäen) paraabelin $x = -y^2 + 2y + 8$ ja suorien x = 0, $y = -1$, $y = 3$ välinen ala.

8.12 Laske käyrän $y^2 = 4x$ ja suoran $4x - 3y - 4 = 0$ välisen alueen ala.

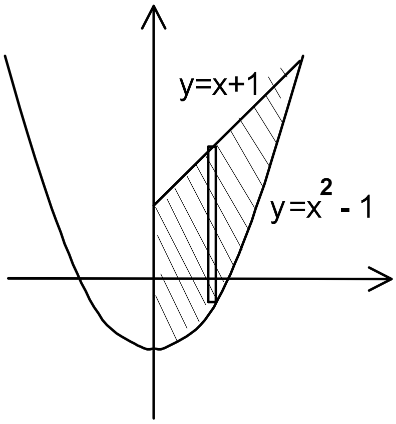
8.13 Käyrän $y^2 = 4x$ ja suoran $y = x$ välinen alue pyörähtää x-akselin ympäri. Laske tilavuus.

8.14 Johda suoran ympyräkartion tilavuus, käsittelemällä kartiota pyöräyspintana (suora pyörähtää).

8.15 Käyrän $y = \cos x$ ja koordinaattiakselien 1. neljännekseen rajoittama yhtenäinen alue pyörähtää a) x-akselin, b) y-akselin ympäri. Laske tilavuus.

8.16 Käyrän $y = \sqrt{x}$ ja suoran $y = x$ välinen alue pyörähtää y-akselin ympäri. Laske (pystyliuskasta ja sen pyörähtämisestä lähtien) V.

8.17 Täydennä (vihkoosi): Viereisen kuvan mukainen liuska kohdassa x pyörähtää y-akselin ympäri.

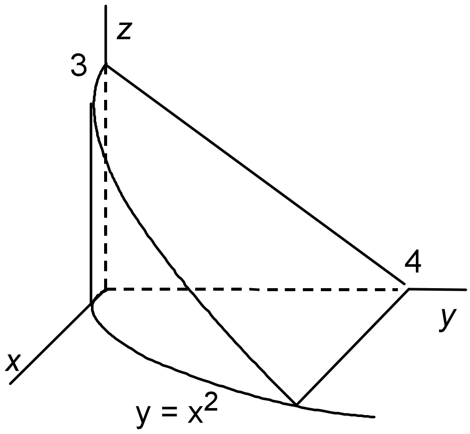


$$\begin{cases} \textit{liuskan kanta} = \\ \textit{liuskan korkeus} = \end{cases}$$

Lieriörenkaan tilavuus $dV =$

$\therefore$ Pyöräyskappaleen tilavuus $V =$

8.18 Laske viereisen kappaleen tilavuus. Vihje: Laske x-akselia tai y-akselia vastaan kohtisuoran leikkauksen ala $A(x)$ tai $A(y)$.



C

8.19 Laske käyrän $y = x^2 \ln x$, x-akselin ja ehdon $x \geq 1/e$ määräämän alueen ala.

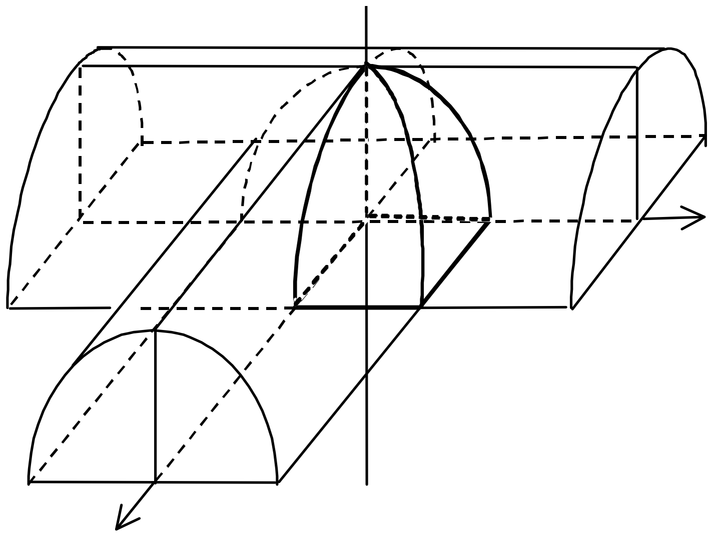
8.20 Käyrä $y^2 = x^2 - x^4$ eli $y = \pm x\sqrt{1 - x^2}$ on sekä x- että y-akselin suhteen symmetrinen ja ∞-merkin muotoinen. Piirrä kuva ja laske käyrän rajoittaman alueen ala.

8.21 Laske r-säteisen pallon segmentin tilavuus, kun segmentin korkeus on h. (Vihje: vrt. pallon tilavuus, mutta integroimisrajat ovat $r - h$ ja r.)

8.22 Kun paraabeli pyörähtää akselinsa ympäri, syntyy pyöräysparaboloidi. Kun tätä leikataan akselia vastaan kohtisuoralla tasolla, saadaan "paraboloidikappale". Osoita, että tällaisen kappaleen tilavuus on puolet vastaavan lieriön tilavuudesta. (Ohje: Sijoita paraabeli ylöspäin aukeavaksi ja origohuippuiseksi. Paraabelin yhtälön saat sen tiedon avulla, että piste (r, h) toteuttaa yhtälön. Käytä vaakaliuskaa.)

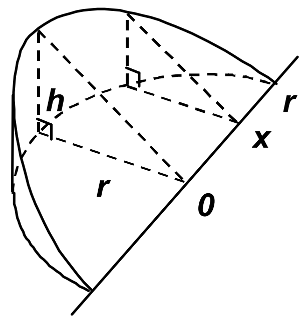
8.23 Johda a) suoran r-säteisen ympyräkartion b) yleisen A-pohjaisen kartion tilavuuden lauseke niin, että sijoitat kartion pohjan xy-tasoon ja huipun z-akselille sekä lasket korkeudella z olevan dz:n paksuisen levyn tilavuuden.

8.24 Kaksi ympyrälieriötä, joiden säteet ovat = r ja akselit yhtyvät x- ja y-akseleihin, leikkaa toisensa. Seuraavaan kuvaan on piirretty vahvennetulla viivalla kahdeksasosa leikkauskappaleesta. Laske leikkauskappaleen tilavuus. Ohje: Korkeudella z olevan leikkauskuvio on neliö, jonka ala $A(z)$ täytyy ensin laskea. Neliön sivun saat Pythagoraan lauseella.



8.25 Käyrän $y = \ln x$, x-akselin ja suoran $x = e$ välinen alue pyörähtää a) y-akselin , b) x-akselin ympäri. Laske tilavuus. (Vihje b-kohtaan: $x = e^y$ ja vaakaliuska. Toisin: sij. $\ln x = t$.)

8.26 Suorasta ympyrälieriöstä leikataan halkaisijaa pitkin viereisen kuvan mukainen kiilamainen lieriölohko, jonka korkeus on h ja pohjan säde r. Laske tilavuus. Ohje: leikkauskolmion kanta y saadaan ympyrän yhtälöstä $x^2 + y^2 = r^2$ ja korkeus z yhdenmuotoisista kolmioista.

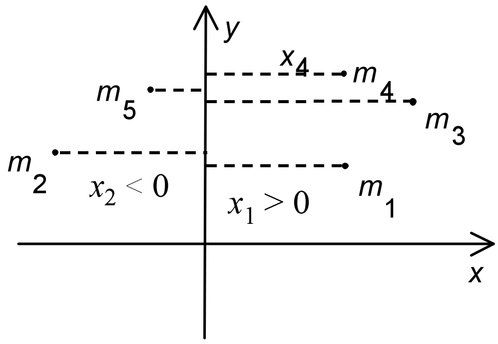


9 Tasoalueen momentit ja painopiste

9.1 *Yleistä momenteista

Oletetaan, että xy-tasossa on n massapistettä $m_1,\ldots,m_n$ pisteissä $(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$.

Yhden massapisteen m_i ***staattinen momentti*** esim. y-akselin suhteen on tulo $x_i m_i$ ja ***hitausmomentti*** (neliöllinen momentti) on tulo $x_i^{\,2} m_i$.



Momentit ovat luonteeltaan "*summautuvia*" ts. koko massapistesysteemin staattinen momentti S_y ja samoin hitausmomentti J_y ovat osiensa vastaavien momenttien summia:

(1)
$$S_y = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i,\quad J_y = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} m_i\,.$$

Jos äärellisen monen erillisen massapisteen tilalla on kappale, joka muodostuu äärettömän monesta massapisteestä, niin summat (1) korvautuvat integraaleilla, jotka voidaan teoreettisesti esittää muodossa

(2)
$$S_y = \int_{(m)} x\,dm,\quad J_y = \int_{(m)} x^2\,dm,$$

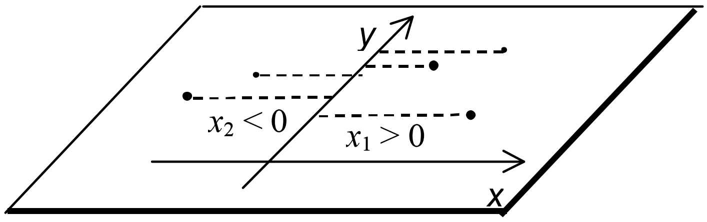
missä integraalin alarajaan merkitty (m) kuvaa sitä, että "summaukseen" on otettava mukaan kappaleen kaikki osat, ts. että *summaus on suoritettava yli koko kappaleen*.

Kirjoita yhtälöitä (1) ja (2) vastaavat yhtälöt, kun momenttiakselina on x !

Hitausmomentti on yhteydessä siihen, millainen "hitaus" systeemillä on pyörähtää kyseisen akselin ympäri. Mitä suurempi esim. J_y on, sitä vaikeammin massasysteemi pyörähtää y-akselin ympäri. ***Hitausmomentti (neliömomentti) on aina > 0*** (koska $x^2 > 0$ ja $dm > 0$).

Staattinen momentti taas voi olla >, = tai < 0. Jatkon kannalta on ehkä hyödyllistä ajatella xy-taso vaakasuoraksi tasoksi, joka on tuettu y-akselin kohdalta (kun tutkitaan momentteja y-akselin suhteen), jolloin tilanne on seuraavan kuvan mukainen:

Jos $S_y > 0$ ja "tukiviivana" on y-akseli, niin massapistesysteemi pyrkii vääntämään tasoa y-akselin ympäri x-akselin positiiviselle puolelle.



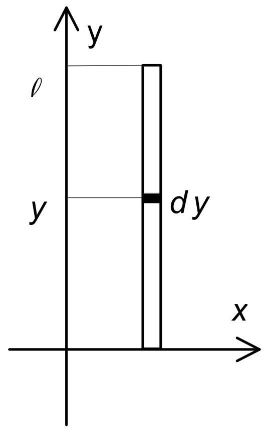
Jos taas $S_y < 0$, vääntövaikutus on vastakkaiseen suuntaan ja sitä suurempi, mitä suurempi $|S_y|$ on. Jos $S_y = 0$, systeemi on y-akseliin nähden tasapainossa, ts. y-akseli on systeemin eräs *tasapainoakseli* (painopisteakseli).

Esim. 1 Lasketaan viereisen kuvan mukaisen sauvan momentit S_x *ja* J_x, ts. momentit *x-akselin suhteen*. Olkoon

ρ = pituusyksikön massa (kg/m),

ℓ = sauvan pituus (m).

Täten sauvan massa $m = \rho \cdot \ell$ (kg).



Kohdassa y olevan dy:n pituisen sauvanosan massa on

$$dm = \rho \cdot dy .$$

Kun tämä sijoitetaan alla oleviin "teoreettisiin" momentti-integraaleihin, ne muuttuvat tavallisiksi integraaleiksi, jossa muuttujana on y ja summaus tapahtuu 0:sta ℓ:ään:

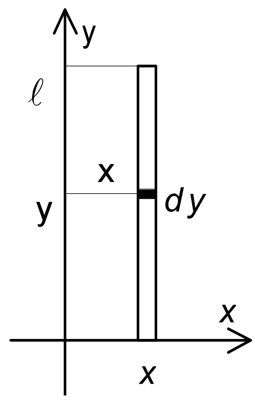
$$S_x = \int_{(m)} y\, dm = \int_0^\ell y\, \rho \cdot dy = \rho \Big|_0^\ell \frac{y^2}{2} = \rho \frac{\ell^2}{2} = \frac{\ell}{2} \cdot \rho\ell = \frac{\ell}{2} \cdot m$$

$$J_x = \int_{(m)} y^2\, dm = \rho \int_0^\ell y^2\, dy = \rho \frac{\ell^3}{3} = \frac{\ell^2}{3} \cdot \rho\ell = \frac{\ell^2}{3} \cdot m = \left(\frac{\ell}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot m$$

Edellinen tulos osoittaa, että *staattista* momenttia laskettaessa sauvan koko massa voitaisiin ajatella yhdeksi massapisteeksi m, joka on sijoitettu sauvan keskipisteeseen (painopisteeseen). *Hitausmomenttia* (neliöllistä momenttia) laskettaessa näin <u>ei saa</u> tehdä, sillä sauvan hitausmomentti <u>ei ole</u> $(\ell/2)^2 \cdot m$.

Esim. 2 Lasketaan edellisen sauvan momentit *y-akselin* suhteen, olettaen, että sauva on *ohut* ja kohdassa x. Teoreettiset integraalit ovat

$$S_y = \int_{(m)} x\, dm, \quad J_y = \int_{(m)} x^2\, dm$$



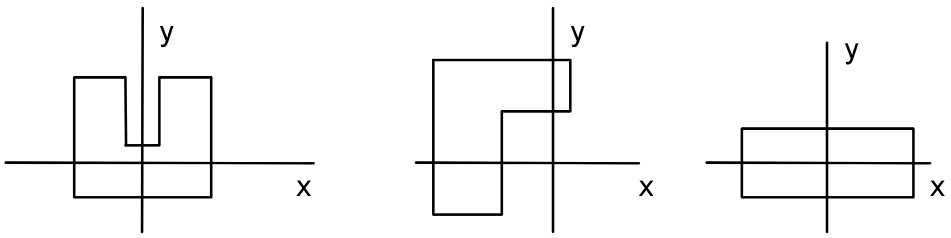
Ohuuden vuoksi sauvan jokaisen palan voidaan katsoa olevan samalla etäisyydellä x momenttiakselista y. Siten jokaisessa "yhteenlaskettavassa" $x\, dm$ on vakiotekijä x tai x^2, joka voidaan ottaa tekijäksi "summan" eteen. Siis

$$S_y = x \int_{(m)} dm = x \cdot m, \quad J_y = x^2 \int_{(m)} dm = x^2 \cdot m.$$

Tässä esimerkissä laskeminen voitiin suorittaa em. teoreettisten integraalien avulla, muuttamatta niitä määrätyiksi integraaleiksi.

Jatkossa kappaleen ja sen massan tilalla on ***tasoalue*** *xy-tasossa.* Tällöin hitausmomentin sijaan käytetään nimitystä ***neliömomentti*** (tai pintahitausmomentti tms.) ja merkintöjen J_x, J_y tilalla ovat merkinnät $\boldsymbol{I_x}$ ja $\boldsymbol{I_y}$.

Jos tasoalue ajatellaan levyksi, jonka yhdellä pinta-alayksiköllä on massa 1, niin pinta-alan lukuarvo on samalla massan lukuarvo ja laskennan tukena voidaan käyttää edellä mainittua vaakasuoraa xy-tasoa, jossa levy sijaitsee. Siten esim. seuraavien kuvien mukaisten alueiden momenteista voidaan tehdä joukko laskemista helpottavia päätelmiä alueiden symmetrian tai sijainnin perusteella (päätelmät on seuraavassa esitetty kuvien jälkeen).



Kuva 1 Kuva 2 Kuva 3

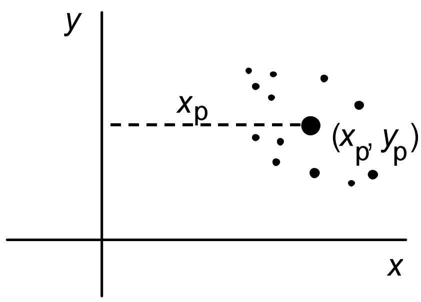
Kuva 1: Symmetrian nojalla $S_y = 0,\ S_x = 2 \cdot S_x(op)$, missä *op* tarkoittaa oikean puoleista kappaleenosaa. $I_x = 2 \cdot I_x(op),\ I_y = 2 \cdot I_y(op)$.

Kuva 2: $S_y < 0$ (vaakataso kallistuu negat. x-akselin puolelle), $S_x > 0$.

Kuva 3: $S_x = S_y = 0,\ I_x < I_y$ (levyllä on pienempi hitaus pyörähtää x-akselin kuin y-akselin ympäri).

9.2 Staattinen momentti ja painopiste

Staattista momenttia käytetään apuna, kun lasketaan massapistesysteemin, voimasysteemin, tasoalueen tms. *painopiste* (x_p, y_p).



Massapistesysteemin staattinen momentti esim. y-akselin suhteen voidaan laskea paitsi osiensa momenttien summana (kaava (1) edellä), myös siten, että kaikki massa ajatellaan sijoitetuksi systeemin painopisteeseen (x_p, y_p). Siten y-akselin suhteen saadaan momentiksi

$$S_y = x_p \cdot m \quad \therefore \quad \boxed{x_p = \frac{S_y}{m}} = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}.$$

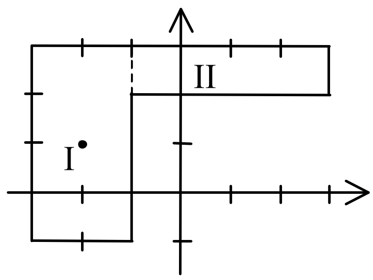
Vastaavasti $S_x = y_p \cdot m \therefore \boxed{y_p = \frac{S_x}{m}} = \frac{\sum y_i m_i}{\sum m_i}$.

Näissä summissa voi massojen m_i tilalla olla voimia F_i tai jatkossa erityisesti myös alueita A_i, joiden painopisteet (x_i, y_i) tunnetaan.

Seuraavassa käytetään yleensä edellisiä kehystettyjä kaavoja lähtökohtina painopistelaskuissa, mutta massan m tilalla on alueen pinta-ala A.

Vielä yksi esimerkki integroinnin (liuskojen käytön) pohjustamiseksi:

Esim. 3 Laske viereisen alueen painopiste.

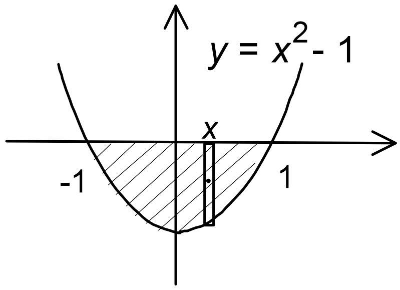


Alue muodostuu kahdesta osasta, joiden keskipisteet (painopisteet) tunnetaan. Siten osien staattiset momentit voidaan laskea, koska staattista momenttia laskettaessa osa voidaan ajatella kokonaan sijoittuneeksi painopisteeseensä. (Sama ei käy osan neliömomentille!)

$$S_y = (-2)\cdot 8 + 1\cdot 4 = -12, \quad S_x = 1\cdot 8 + 2\tfrac{1}{2}\cdot 4 = 18, \quad A = 8 + 4 = 12$$

$$\boxed{\boldsymbol{x_p = \frac{S_y}{A}}} = \frac{-12}{12} = \mathbf{-1}, \qquad \boxed{\boldsymbol{y_p = \frac{S_x}{A}}} = \frac{18}{12} = \mathbf{1\tfrac{1}{2}}.$$

Esim. 4 Laske viereisen alueen painopiste.



Symmetrian nojalla $x_p = 0$, joten laskettavana on $\boxed{y_p = \frac{S_x}{A}}$. Edellisessä esimerkissä alue muodostui kahdesta suorakulmio-osasta. Nyt alue muodostuu suorakulmioliuskoista. Kohdassa x olevan ***liuskan***

$$\begin{cases} \boldsymbol{kanta = dx} \\ \boldsymbol{korkeus = -(x^2 - 1)} \\ \boldsymbol{keskipiste = (x, \tfrac{1}{2} f(x)) = (x, \tfrac{1}{2}(x^2 - 1)).} \end{cases}$$

Huomaa tarkoin, että välillä $-1...1$ *käyrän* $y = x^2 - 1$ *pisteiden y-koordinaatit eli f(x):n arvot ovat negatiivisia. Siksi* ***liuskan korkeudessa tarvitaan miinusmerkki korjaamaan sen positiiviseksi****. Liuskan keskipisteen y-koordinaatin täytyy tässä esimerkissä olla negatiivinen, joten siihen* ***ei saa*** *lisätä miinusmerkkiä.*

Täten liuskan ala (korkeus kertaa kanta) on $\boldsymbol{dA = -(x^2 - 1) \cdot dx}$.

Liuskan momentti x-akselin suhteen saadaan, kun ala dA kerrotaan liuskan keskipisteen y-koordinaatilla:

$$\boldsymbol{dS_x = \tfrac{1}{2} f(x) \cdot dA} = \tfrac{1}{2} \cdot (x^2 - 1) \cdot \left[-(x^2 - 1)\, dx\right] = -\tfrac{1}{2}(x^2 - 1)^2\, dx .$$

Koko ala ja S_x saadaan, kun nämä lausekkeet integroidaan -1:stä 1:een. Alueen *vp*:n ja *op*:n alat ja samoin momentit x-akselin suhteen ovat yhtä suuret (mutta y-akselin suhteen kumoa-vat toisensa), joten

$$A = 2 \cdot \int_0^1 -(x^2 - 1)\, dx = 2 \cdot \int_0^1 (1 - x^2)\, dx = 2 \cdot \Big|_0^1 (x - \frac{x^3}{3}) = 2 \cdot (1 - \frac{1}{3}) = \frac{4}{3},$$

$$S_x = 2 \cdot (-\tfrac{1}{2}) \int_0^1 (x^2 - 1)^2\, dx = -\int_0^1 (x^4 - 2x^2 + 1)\, dx = -(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1) = -\frac{8}{15}$$

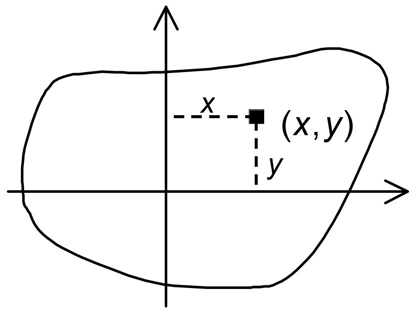
$$\therefore\ y_p = \frac{S_x}{A} = -\frac{8 \cdot 3}{15 \cdot 4} = -\frac{2}{5}.$$

Laske harjoituksena myös S_y alueen <u>oikeanpuoleiselle</u> <u>puolikkaalle</u> (sama pystyliuska, $\boldsymbol{dS_y = x\, dA} = ...$)

9.3 Kaksinkertainen integraali

Tasoalueen T momentteja voidaan laskea myös siten, että lähdetään liuskan sijaan liikkeelle *pinta-alkiosta*, jonka leveys on dx ja korkeus dy ja ala siten

$$\boldsymbol{dA = dy \cdot dx}.$$



Jos tällainen "***pala***" on kohdassa (x, y), sen staattiset momentit ja neliömomentit ovat

$$dS_x = y \cdot dA = y\ dy\ dx, \qquad dS_y = x \cdot dA = x\ dy\ dx,$$
$$dI_x = y^2 \cdot dA = y^2\ dy\ dx, \quad dI_y = x^2 \cdot dA = x^2\ dy\ dx$$

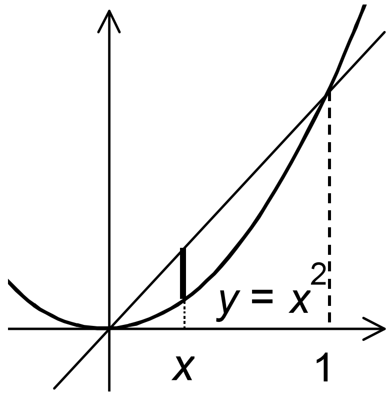
Kun nämä summataan "*yli koko alueen T*", saadaan integraalit

$$\boldsymbol{S_x = \iint_T y\ dy\ dx,\quad S_y = \iint_T x\ dy\ dx,\quad I_x = \iint_T y^2\ dy\ dx,\quad I_y = \iint_T x^2\ dy\ dx}.$$

Tässä käytetään kaksinkertaisia integraalimerkkejä osoittamaan, että summaus suoritetaan sekä x- että y-suunnassa. Jos alueen T rajat pystytään määrittelemään, integrointi muuttuu kahden sisäkkäisen integroinnin suorittamiseksi, kuten seuraavat esimerkit osoittavat.

Esim. 5 Lasketaan suoran $y = x$ ja paraabelin $y = x^2$ rajoittaman alueen T neliömomentti x-akselin suhteen, ts.

$$I_x = \iint_T y^2\ dy\ dx.$$



Alue T saadaan kun x *muuttuu 0:sta 1:een ja jokaisella kiinteällä x:n arvolla y muuttuu* ***alakäyrä-arvosta*** x^2 ***yläkäyrä-arvoon x***, siis

$$\boxed{T: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le x \end{cases}}$$

Varo: Vaikka y:kin saa alueessa T arvoja 0:sta 1:een, eivät y:n rajat voi olla 0 ja 1, sillä alue $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$ olisi neliö.

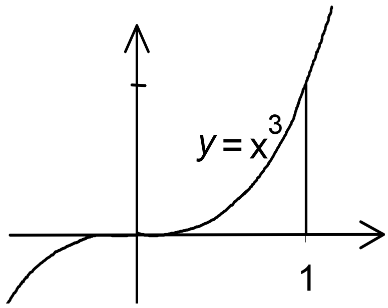
Suoritetaan summaus T:n yli kahdessa vaiheessa: Aluksi pidetään *x kiinteänä ja suoritetaan summaus y-suunnassa*, ts. annetaan *y*:n muuttua arvosta x^2 arvoon *x*. Näin saadaan integraali

$$\int_{x^2}^{x} y^2 \, dy .$$

(Tällöin lasketaan tavallaan yhtä pystyliuskaa vastaava osa integraalista.) Sitten *suoritetaan summaus x-suunnassa*, ts. annetaan *x*:n muuttua 0:sta 1:een. Näin saadaan integraali

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_T y^2 \, dy \, dx = \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{x} y^2 \, dy \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[\Big|_{x^2}^{x} \frac{y^3}{3} \right] dx = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{3} \right] dx \\ &= \frac{1}{3} \Big|_0^1 \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^7}{7} \right] = \frac{1}{3} \cdot \frac{7-4}{28} = \frac{1}{28} \end{aligned}$$

Esim. 6 Olkoon *T* käyrän $y = x^3$ ja *x*-akselin välinen alue välillä $0 \le x \le 1$. Laske *T*:n painopiste. Nyt *T* on



$$\boxed{T: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x^3. \end{cases}}$$

$$A = \int_0^1 x^3 \, dx = \frac{1}{4},$$

$$S_y = \iint_T x \, dy \, dx = \int_0^1 \left[\int_0^{x^3} x \, dy \right] dx \quad \Big| \text{ x on sisäintegraalissa vakio}$$

$$= \int_0^1 \left[x \Big|_0^{x^3} y \right] dx = \int_0^1 x \cdot x^3 \, dx = \frac{1}{5}$$

$$S_x = \iint_T y \, dy \, dx = \int_0^1 \left[\int_0^{x^3} y \, dy \right] dx = \int_0^1 \left[\Big|_0^{x^3} \frac{y^2}{2} \right] dx = \int_0^1 \frac{x^6}{2} \, dx = \frac{1}{14}$$

$$\therefore x_p = \frac{S_y}{A} = \frac{4}{5}, \quad y_p = \frac{S_x}{A} = \frac{2}{7}.$$

HARJOITUKSIA

A

9.1 Suoran tangon pituus $\ell = 6$ (m) ja pituusyksikön massa ρ on 4 (kg/m). Valitaan xy-akselisto niin, että tanko on xy-tasossa, y-akseli on tangon suuntainen, tanko leikkaa x-akselin kohdassa $x = 3$ (m) ja siitä on 2 yksikköä (2 m) x-akselin "alapuolella". Laske a) integroimalla (esimerkin 1 tapaan), b) esimerkin 1 tulosten avulla tangon staattinen momentti ja hitausmomentti x-akselin suhteen.

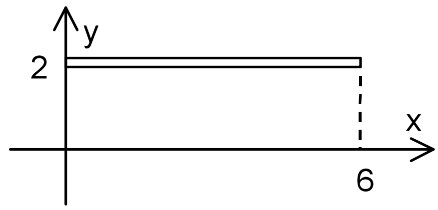
9.2 Laske esimerkin 4 tapaan (liuskasta alkaen) käyrän $y = \frac{1}{x}$ ja x-akselin välille 1...3 rajoittaman alueen painopiste.

9.3 Kuten **9.2**, mutta käyränä $y = x^2$ ja välinä [0,2].

9.4 Kuten **9.2**, mutta käyränä on $y = -x^2 + 1$ ja välinä a) $[0,1]$, b) $[1,2]$.

B

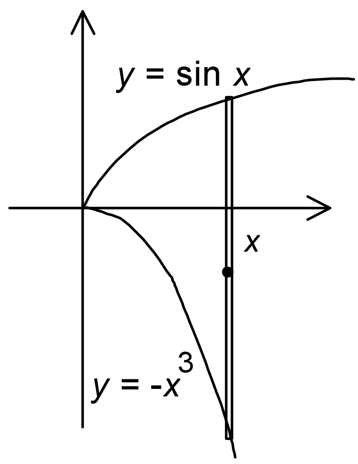
9.5 Viereisen kuvan mukainen ohut sauva ei ole homogeeninen, vaan sen tiheys kasvaa suoraan verrannollisena x:ään: $\rho = kx$. Tangon päässä tiheys on 5 (yksikköä). Laske



$$dS_x,\ dS_y,\ dJ_x,\ dJ_y \ \ sekä\ \ S_x,\ S_y,\ J_x,\ J_y.$$

9.6 Laske käyrän $y = \cos t$ ja t-akselin välille $[0, \pi/2]$ rajoittaman alueen painopiste.

9.7 Esitä viereisen kuvan mukaisessa tapauksessa seuraavat <u>yhtä liuskaa</u> koskevat suureet (joista saataisiin integroimalla momenttien lausekkeet esim. välillä 0...1):



kanta =

korkeus =

keskipiste =

$dS_y =$

$dS_x =$

9.8 Suorita esimerkin **6** laskut pystyliuskoja käyttäen (ts. esimerkin **4** tapaan).

9.9 Laske sinikäyrän $s = 2\sin 3t$ ja t-akselin rajoittaman "perusalueen" (puoli jaksoa origosta oikealle) painopiste.

9.10 Laske kaksinkertaisten integraalien avulla x-akselin, käyrän $y = x^2$ ja suoran $y = x = 1$ rajoittamalle alueelle a) S_x ja I_y, b) S_y ja I_x.

9.11 Kuten edellinen, mutta käyränä $y = \sqrt{x}$.

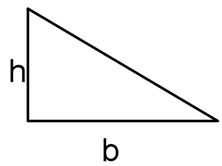
9.12 Laske kaksinkertaisten integraalien avulla x-akselin ja käyrän $y = -x^2 + 1$ rajoittaman alueen neliömomentit I_x *ja* I_y.

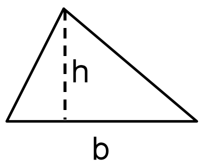
C

9.13 Kuten tehtävä **9.2**, mutta käyränä on $y = 4\,e^{-2x}$ ja välinä $[0,1]$.

9.14 Laske käyrien $y = \sin x$ *ja* $y = \cos x$ välisen kaksoisalueen, joka rajoittuu välille 0...π, painopiste.

9.15 Suorakulmaisen kolmioalueen kanta on b ja korkeus h. Laske kaksinkertaisten integraalien avulla alueen painopiste ja neliömomentit kateettien suhteen.





Jos kolmion kantana on toinen kateeteista, niin miksi momentit kannan suhteen eivät muutu, vaikka kolmio vinoutetaan viereisen kuvan mukaisesti? Vihje: vaakaliuskan palat.

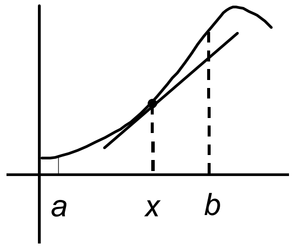
9.16 Alueen painopisteen tai pyöräyskappaleen tilavuuden laskemiseen voidaan joskus käyttää ns. ***Guldinin sääntöä***: Oletetaan, että xy-tasossa oleva alue ei leikkaa (esim.) x-akselia. Jos alue pyörähtää x-akselin ympäri, niin syntyvän pyöräyskappaleen tilavuus saadaan, kun pyörähtävän alueen pinta-ala kerrotaan alueen painopisteen kulkemalla matkalla, ts.

$$\boldsymbol{V_x = 2\pi\, y_p A}.$$

Sovella sääntöä seuraavissa tapauksissa: a) Alue $x^2 + y^2 - 8y + 7 \le 0$ pyörähtää x-akselin ympäri. Laske muodostuvan renkaan tilavuus. b) Laske r-säteisen puoliympyrälevyn painopiste. c) Ympyränsektorin säde on 4 ja keskuskulma $30°$. Laske tämän alueen painopisteen etäisyys reunasäteestä. Kyseisen pyöräyskappaleen tilavuuden kaavan löydät kaavastosta.

10 Funktion tutkiminen

10.1 Funktion kasvaminen ja lokaalit ääriarvot

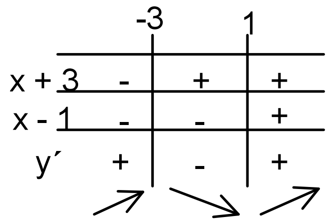


Aikaisemmin on jo korostettu sitä, että derivaatta mittaa funktion muuttumisen voimakkuutta (nopeutta). Geometrisesti derivaatta $f'(x)$ esittää käyrän $y = f(x)$ tangentin kulmakerrointa kohdassa *x*. Jos $f'(x) > 0$ (ja jatkuva), niin funktio f kasvaa tässä kohdassa (ts. tämän kohdan jossakin ympäristössä). Vastaavasti ehdosta $f'(x) < 0$ seuraa, että *f* vähenee kohdassa *x*.

Esim. 1 Funktio $y = x - \frac{1}{2}x^2$ on kasvava esim. välillä $[0,1]$, sillä derivaatta $y' = 1 - x \geq 0$ tällä välillä (ja $y' = 0$ välin päätepisteessä $x = 1$).

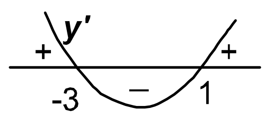
Esim. 2 $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$

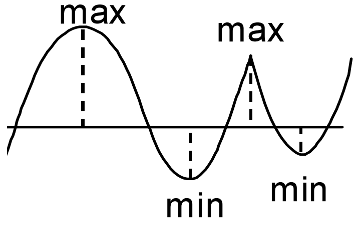
$$y' = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x^2 + 2x - 3) \;\Big|\; \text{nollakohdat 1 ja -3}$$
$$= 3(x-1)(x+3)$$



Viereisen merkkitaulukon mukaan funktio vähenee välillä (–3,1). Kohdassa –3 funktio muuttuu kasvavasta väheneväksi ja kohdassa 1 päinvastoin.

*Derivaatan merkki voidaan päätellä myös seuraavasti: Derivaattakäyrä on ylöspäin aukeava paraabeli, jonka nollakohdat ovat –3 ja 1, joten nollakohtien välillä derivaatta on negatiivinen ja välin ulkopuolella positiivinen.

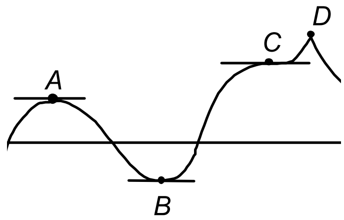




Kohta x_o on funktion *f* ***paikallinen*** *eli lokaali* ***maksimikohta***, jos funktion arvo $f(x_o)$ on suurempi kuin funktion arvot kohdan x_o (riittävän pienessä) ympäristössä $(x_o - h, x_o + h)$. Maksimikohtaa x_o vastaava funktion arvo $y_o = f(x_o)$ on funktion ***maksimiarvo*** ja piste $(x_o.y_o)$ on

maksimipiste. Määrittele vastaavat minimiä koskevat käsitteet. Maksimi- ja minimikohtien yhteisnimitys on ***ääriarvokohdat***.

Tavallisissa ääriarvopisteissä käyrän tangentti on vaakasuora ts. $y' = 0$. Kaikki kohdat joissa $y' = 0$ eivät välttämättä ole ääriarvokohtia (vrt. piste C viereisessä kuvassa). Käyrän ääriarvopisteiden joukossa voi olla myös erikoispisteitä, esim. kärkiä, joissa derivaattaa ei ole olemassa (piste D). Siis:



Lause 1 *Ääriarvokohdat löydetään niiden x:n arvojen joukosta, joissa* $\boldsymbol{f'(x) = 0}$ *tai* $f'(x)$ *ei ole olemassa.*

Ääriarvon laatu mahdollisessa ääriarvokohdassa ts. se, onko kyseessä maksimi, minimi vai ei ollenkaan ääriarvo, voidaan ratkaista yleensä tutkimalla ***derivaatan merkinmuutosta***.

Esim. 3 Esimerkin 2 funktiolla

$$y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$$

		-3		1	
x + 3	-		+		+
x - 1	-		-		+
y′	+		-		+
	↗		↘		↗

kohta $x = -3$ on maksimikohta, sillä tässä kohdassa $y' = 0$ ja kun ohitetaan tämä kohta (vasemmalta oikealle mentäessä), niin derivaatta muuttaa merkkinsä positiivisesta negatiiviseksi. Myös kohdassa $x = 1$ on $y' = 0$, mutta derivaatalla on merkinmuutos $(-, +)$, joten kyseessä on minimikohta. Yleisesti:

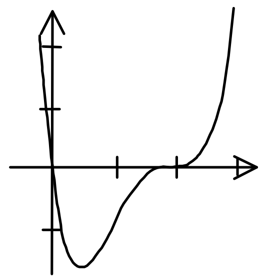
Lause 2 *Oletetaan, että* x_o *on lauseen 1 mukainen mahdollinen ääriarvokohta. Jos derivaatalla on tässä kohdassa merkinmuutos* $(+, -)$, *kyseessä on maksimikohta. Jos merkinmuutos on* $(-, +)$, *kyseessä on minimikohta. Jos taas derivaatan merkki on sama kohdan* x_o *kummallakin puolella, kyseessä ei ole ääriarvokohta.*

Esim. 4 $y = x(x-2)^3$

$$y' = (x-2)^3 + x \cdot 3(x-2)^2 = (x-2)^2(4x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = \tfrac{1}{2}.$$

<u>Mahdollisia ääriarvokohtia</u> on siis kaksi: $x = \frac{1}{2}$ *ja* $x = 2$. Edellinen on minimikohta, jälkimmäinen ei ole ääriarvokohta (vrt. viereinen merkkitaulu). Vastaavat y:n arvot ovat 0 ja $-27/16 \approx -1{,}7$.

		1/2		2	
$(x-2)^2$	+		+		+
4x-2	−		+		+
	−		+		+
	↘		↗		↗



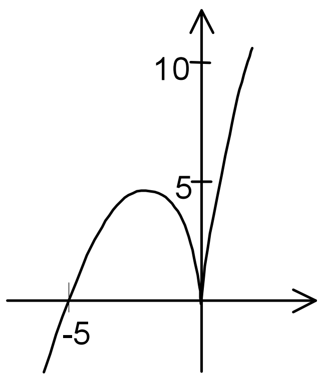
Käyrä on suunnilleen viereisen kuvan mukainen.

***Esim. 5** $y = x^{2/3}(x+5)$ $\qquad y' = \dfrac{5(x+2)}{3x^{1/3}}$ (laske).

1) y':*n nollakohdat*: $x = -2, (+,-) \therefore$ *maks.*

2) y' *ei ole olemassa*: $x = 0 \ (-,+) \ \therefore$ *min.*

Maksimipiste: $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \cdot \sqrt[3]{4} \approx 4{,}8 \end{cases}$

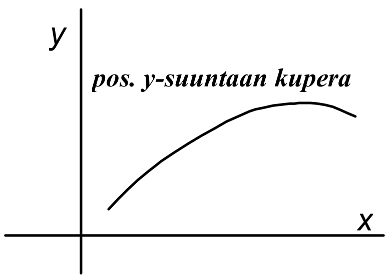


Minimipiste: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \end{cases}$ Tämä on kärki, sillä

$$\begin{cases} \text{kun x} \to 0+, \text{ niin y}' \to \infty, \\ \text{kun x} \to 0-, \text{ niin y}' \to -\infty. \end{cases}$$

10.2 Kuperuussuunta, käännepiste

Viereisen kuvan mukainen käyrä $y = f(x)$ on ylöspäin eli *positiivisen y-akselin suuntaan kupera.*



Mekaniikassa ja lujuusopissa *y*-akseli on usein alaspäin. Siksi jälkimmäinen sanonta voi tekniikassa olla edellistä parempi.

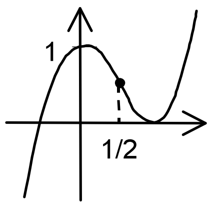
Joskus käyrän kaartumissuunta esitetään kupera-sanan (convex) sijaan kovera-sanan (concave) avulla, jolloin yllä oleva käyrä on alaspäin kovera (concave downward).

Edellisen kuvan tapaisella positiiviseen *y*-suuntaan kuperalla käyrällä tangentin kulmakerroin pienenee, kun x kasvaa. Siten derivaattakäyrä on laskeva käyrä, ts. sen kulmakerroin eli y'' on negatiivinen. Siis

Käyrä *positiiviseen y-suuntaan kupera* $\Rightarrow y'' < 0$.
Käyrä *negatiiviseen y-suuntaan kupera* $\Rightarrow y'' > 0$.

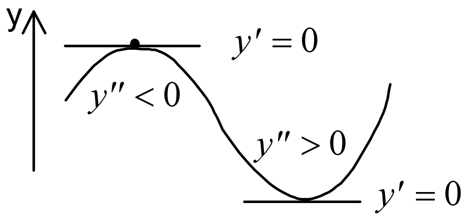
Esim. 6 $\quad y = 2x^3 - 3x^2 + 1, \quad y'' = 12x - 6$.

Kohdassa $x = 1/2$ y'':n merkki vaihtuu $-$:sta +:ksi, ts. kuperuuden suunta vaihtuu tässä kohdassa positiiviseen y-suuntaan kuperasta negatiiviseen y-suuntaan kuperaksi.



Käyrän kuperuuden suuntaa voidaan käyttää myös ääriarvon laadun tutkimiseen seuraavasti:

$$\boxed{\begin{array}{l} y' = 0,\ y'' > 0 \Rightarrow \text{min.} \\ y' = 0,\ y'' < 0 \Rightarrow \textit{maks.} \end{array}}$$



Esim. 7 $y = \frac{1}{2}x^4 - x^2 + 1$

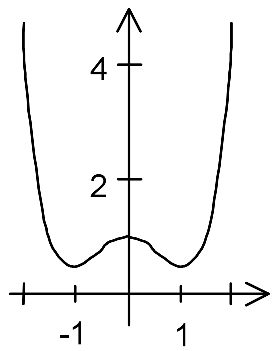
$y' = 2x^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 0 \vee x = 1$

$y'' = 6x^2 - 2 = 2(3x^2 - 1)$

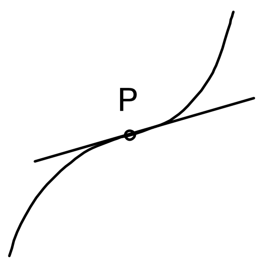
$y''(-1) > 0 \therefore$ min. *Minimipiste* $(-1, 1/2)$

$y''(0) < 0$ $\therefore$ maks. *Maksimipiste* $(0,1)$

$y''(1) > 0$ $\therefore$ min. *Minimipiste* $(1, 1/2)$.



Määritelmä. *Käyrän piste P on* ***käännepiste****, jos käyrällä on tässä pisteessä yksikäsitteinen tangentti ja käyrän kuperuussuunta vaihtuu.*

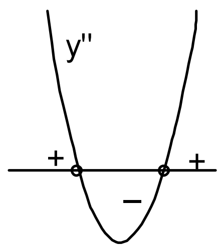


Käännepisteessä (engl. *point of inflection*) käyrä menee tangenttinsa lävitse ja "jonkin matkaa lähes tangenttiaan pitkin", mistä syystä tämä kohta käyrällä on käyttökelpoinen käyrän linearisoinnin kannalta (esim. sähkötekniikassa). Koska käännepistettä ohitettaessa y'' vaihtaa merkkinsä, niin käännepisteessä joko $y'' = 0$ (jos y'' on jatkuva) tai y'' ei ole olemassa. Jälkimmäisessä tapauksessa käännepisteessä täytyy y':n olla olemassa, jotta käyrällä olisi yksikäsitteinen tangentti tässä pisteessä. Siis

Lause 3 *Käännepistekohdat löydetään niiden kohtien x joukosta, joissa* $\boldsymbol{f''(x) = 0}$ (tai $f''(x)$ *ei ole olemassa*). *Tällainen kohta on käännepistekohta, jos siinä lisäksi* $f''(x)$*:llä on merkinmuutos* (*ja lisäksi tai-tapauksessa* $f'(x)$ *on olemassa*).

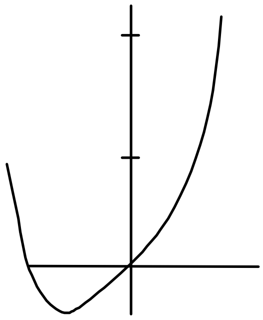
***Esim. 8** 1) Esimerkin **7** käyrällä $y = \frac{1}{2}x^4 - x^2 + 1$ on

$$y'' = 2(3x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$



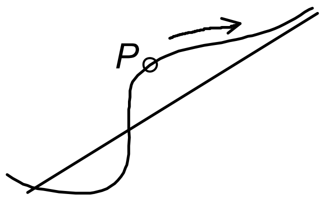
Näissä kohdissa y' on olemassa ja y'':lla on merkinmuutokset (viereinen kuva). Siis käyrällä on kaksi kännepistettä $(\pm 1/\sqrt{3}, 13/18)$.

2) Käyrällä $y = 2x^4 + x$ on $y'' = 24x^2$, joten kohta $x = 0$ on y'':n nollakohta. Siinä ei kuitenkaan y'':lla ole merkinmuutosta, joten kyseessä ei ole käännepiste. Tässä kohdassa käyrä on jonkin matkaa lähes lineaarinen.



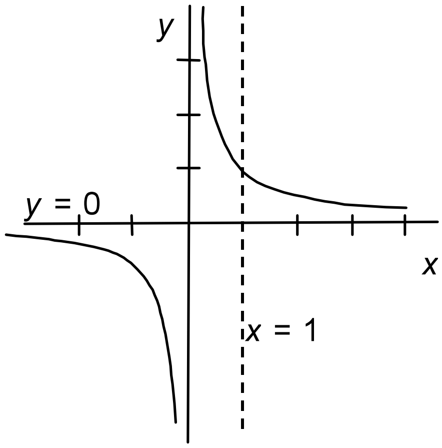
10.3 Asymptootit

Suora on käyrän ***asymptootti***, jos käyrän pisteen P etäisyys suorasta lähenee nollaa, kun piste P siirtyy äärettömyyteen (käyrän jotakin haaraa pitkin).



Seuraavassa tutkitaan lähinnä murtofunktioiden asymptootteja.

Esim. 9 $\quad y = \dfrac{1}{x-1}$.



1^o. Kun $x \to 1$, niin $y \to \infty$, ts. käyrä lähenee suoraa $x = 1$, kun $y \to \infty$

$\therefore$ $\boldsymbol{x = 1}$ on käyrän **pystyasymptootti**.

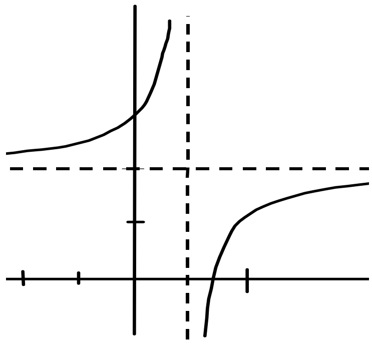
Tarkemmin sanoen

$$\begin{cases} \text{kun } x \to 1+, \text{ niin } y \to +\infty \\ \text{kun } x \to 1-, \text{ niin } y \to -\infty. \end{cases}$$

2^o. Kun $x \to \infty$, niin $y \to 0$ $\therefore$ $\boldsymbol{y = 0}$ (eli x-akseli) on **vaakasuora asymptootti**. Tarkemmin sanoen

$$\begin{cases} x \to +\infty \Rightarrow y \to 0+ \\ x \to -\infty \Rightarrow \text{y} \to 0- \end{cases}.$$

Esim. 10 $\quad y = \dfrac{2x-3}{x-1}$



1^o. $\boldsymbol{x = 1}$ on pystyasymptootti (Esim. 9).

2^o. Suoritetaan jako $\Rightarrow$

$$y = 2 - \frac{1}{x-1} \to 2, \text{ kun } x \to \pm\infty$$

$\therefore$ $\boldsymbol{y = 2}$ **on vaakasuora asymptootti**.

Käyrä lähenee pystyasymptoottia seuraavasti: $\begin{cases} x \to 1+ \Rightarrow y \to -\infty \\ x \to 1- \Rightarrow y \to +\infty \end{cases}$.

Edellisissä esimerkeissä pitäisi kuvien piirtämistä varten todeta lisäksi, että derivaatoilla ei ole nollakohtia, joten funktioilla ei ole ääriarvoja. Lisätukea antaisivat myös käyrien kuperuussuuntien (y'':n merkkien) tutkimiset ja muutamat lisäpisteet (esim. $x = 0 \Rightarrow y = ?$).

Yhteenveto: *Murtofunktion asymptoottien määrittäminen*. Oletetaan, että murtofunktio on supistetussa muodossa.

1) *Nimittäjän nollakohdista* saadaan ***pystyasymptootit***.

2) *Tutkitaan, mitä arvoa (tai lauseketta) y lähenee, kun* $x \to +\infty$ *tai* $x \to -\infty$. Jos *osoittajan aste on* $\geq$ *nimittäjän aste*, täytyy tätä varten ensin suorittaa jako. Jos jaon tulos on esim.

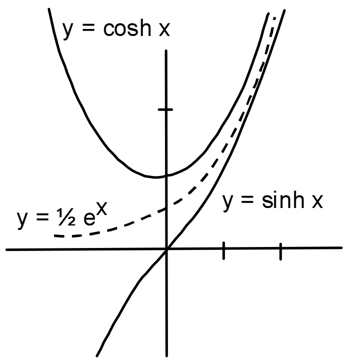
$$y = 3x + 2 + \frac{4}{x+2},$$

niin suora $y = 3x + 2$ on ***vino asymptootti***, sillä kun $|x|$ on suuri, niin $4/(x + 2) \approx 0$ ja käyrä siten lähes sama kuin suora $y = 3x + 2$.

Käyrällä $y = x^2 + \dfrac{4}{x+2}$ on asymptoottina itseään yksinkertaisempi käyrä $y = x^2$.

*Muillakin kuin murtofunktioilla on asymptootteja. Esim. käyrällä $y = \frac{1}{2}e^x$ on x-akseli asymptoottina (sillä kun $x \to -\infty$, niin $y \to 0$). *Hyperbelifunktioilla*

$$\boldsymbol{y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \; y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$$ käyrä $y = \frac{1}{2} e^x$ on asymptootti, sillä $e^{-x} \to 0$, *kun* $x \to \infty$.



HARJOITUKSIA

A

Huom. *Käyrien tutkimisen yhteydessä saattaa kokeissa olla graafisen laskimen käyttö kielletty*. Harjoittelussa grafiikkaa piirtävä laskin tai matematiikkaohjelma on hyvänä tukena.

10.1 Millä välillä funktio $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}$ on vähenevä?

10.2 Määritä käyrän $y = x^3 + 3x^2 - 1$ ääriarvopisteet ja niiden laatu sekä piirrä kuvaaja suunnilleen.

10.3 Määritä funktion $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ käännepisteet ja piirrä kuva.

10.4 Määritä seuraavien käyrien asymptootit:

a) $y = \dfrac{3}{3x+1}$ b) $y = \dfrac{x}{2x+1}$, c) $s = \dfrac{t^2+t-1}{t+1}$.

10.5 Tutki käyrää (asymptootit, ääriarvot, niiden laatu, kuva)

a) $y = \dfrac{x}{2x+1}$, b) $y = \dfrac{x^2+x+1}{x}$.

B

10.6 Määritä käyrän $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$ ääriarvopisteet ja niiden laatu sekä piirrä kuvaaja suunnilleen.

10.7 Tutki käyrää $y = xe^x$ (ääriarvot, käännepisteet, kuperuussuunta, kuva).

10.8 Tutki käyrää a) $y = \dfrac{x}{x^2+1}$, b) $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ (asymptootit, ääriarvot, kuva).

10.9 Määritä funktion $(x-1)^2(x+1)^3$ ääriarvot ja piirrä kuvaaja.

10.10 Määritä funktion $f(t) = \sin 3t - 3\sin t$ jakso T sekä maksimi- ja minimipisteet välillä $[0, 2\pi]$. Piirrä (esim. tietokoneen avulla) kuvaaja.

C

10.11 Määritä funktion $(x-1)\sqrt[3]{x^2}$ ääriarvot ja piirrä kuvaaja.

10.12 Tutki seuraavia käyriä (asymptootit, ääriarvot, kuperuussuunta, erillisiä pisteitä, kuva):

a) $y = 2x + \dfrac{1}{x^2}$, b) $y = \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2$, c) $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$, d) $y = \dfrac{x^3+2}{x}$.

10.13 Määritä funktion $(x-2)\sqrt[3]{x}$ ääriarvot ja piirrä kuvaaja.

10.14 Kuinka monta reaalijuurta yhtälöllä $x^3 - x + 1 = 0$ on ?

10.15 Määritä funktion $2{,}35\sin\omega t + 4{,}22\cos\omega t$ ääriarvokohdat välillä $[0{,}2T]$, $(T = 2\pi/\omega)$. (Sähkötekniikassa valitaan tällaisissa yhteyksissä muuttujaksi yleensä ωt. Silloin esim. väli $0 \le t \le 2T$ on sama kuin väli $0 \le \omega t \le 4\pi$.)

10.16 Tutki käyrää $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$. (Vihje: Laske asymptootteja varten raja-arvot, kun $x \to \infty$ *ja* $x \to -\infty$. Huomaa: $\sqrt{x^2+1} = |x|\sqrt{1+1/x^2}$.)

10.17 Tutki käyrän $y = \ln(e^x + 1)$ kulkua. (Vihje: Onko ääriarvoja? Mikä on y:n arvo likimain, kun x on suuri. Miten käy, kun $x \to -\infty$? Mikä on kuperuussuunta?)

10.18 Jos $f(t) = -t^2 + 3t$ ja $g(t) = -(t-2)^2 + 3(t-2)$, ts. $g(t) = f(t-2)$, niin g-funktiossa on 2 yksikön suuruinen ***viive*** f-funktioon nähden, sillä sen arvon, jonka f saa esim. hetkellä t = 0 (tai yleisesti hetkellä t_1), funktio g saa vasta hetkellä t = 2 (tai yleisesti hetkellä $t_1 + 2$).

a) Piirrä f- ja g- funktioiden kuvaajat.

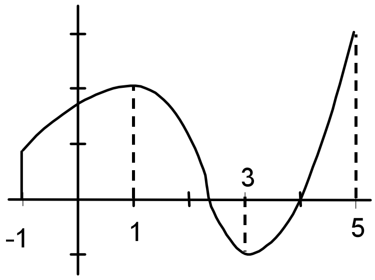
b) Minkä funktion g saat, kun funktioon $f(t) = \cos t$ lisäät viipeen $\pi/2$, ts. mikä tavallinen funktio on $f(t-2)$ eli $\cos(t-\pi/2)$?

c) Minkä funktion saat, kun funktioon $y = \dfrac{1}{x}$ lisäät *x-suuntaisen siirron* ("x-viipeen") 2. Entä jos perusparaabeliin lisäät x-suuntaisen siirron 2 ja y-suuntaisen siirron 3 ?

d) Millainen on siis esim. funktion $y - 3 = (x+1)^3$ kuvaaja ?

11 Ääriarvotehtäviä

11.1 Funktion suurin ja pienin arvo



Edellä on käsitelty ääriarvoja eli funktion *paikallisesti* suurimpia ja pienimpiä arvoja. Jos on määritettävä funktion absoluuttisesti (*globaalisti*) suurin tai pienin arvo jollakin välillä [a, b], täytyy sitä varten määrittää funktion arvot 1) välin päätepisteissä ja 2) mahdollisissa ääriarvokohdissa. Esim. viereisen kuvan mukainen (jatkuva) funktio saa välillä [–1,5] pienimmän arvonsa –1 ääriarvokohdassa 3 ja suurimman arvonsa 3 välin loppupisteessä 5. (Erikoiskohtien, esim. epäjatkuvuuskohdan tai pystyasymptootin vaikutus on tutkittava erikseen.)

Esim. 1 Määritä (jatkuvan) funktion $y = x^3 + 3x^2 - 1$ suurin ja pienin arvo välillä $[-3,2]$.

$y' = 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee -2$. Näissä mahdollisissa ääriarvokohdissa funktio saa arvot $y(0) = -1,\ y(-2) = 3$.

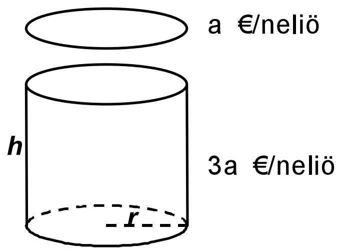
Päätepistearvot ovat $y(-3) = -1,\ y(2) = 19$.

$\therefore$ suurin arvo on 19 ja sen funktio saa päätepisteessä 2.
pienin arvo on –1 ja sen funktio saa kohdissa –3 ja 0.

11.2 Sovelluksia

Teknillisissä tai geometrisissa ääriarvotehtävissä ei yleensä tarvita niin tarkkaa erittelyä kuin edellisessä esimerkissä, vaan yleensä tyydytään etsimään mahdolliset ääriarvokohdat (derivaatan nollakohdat). Jos kyseeseen tulevia ääriarvokohtia on vain yksi, tehtävän luonteesta selviää yleensä ilman ääriarvon laadun tutkimista ja päätepistearvojen tutkimista, antaako se funktiolle suurimman tai pienimmän arvon.

Esim. 2 Lieriön muotoisen astian (saunapadan, kattilan tms) kannen neliöhinta (esim. a €$/m^2$) on vain kolmannes vaipan ja pohjan neliöhinnasta. Määritä ainekustannuksiltaan edullisin astian muoto (olettaen, että muoto ei vaikuta materiaalipaksuuksiin).



Olkoon astian tilavuus V (= vakio) ja kannen neliöhinta a (= vakio), jolloin muun materiaalin neliöhinta on $3a$ ja kokonaishinta on

$$H = \pi r^2 a + (\pi r^2 + 2\pi r h)3a = a(4\pi r^2 + 6\pi rh).$$

Hinta on siten kahden muuttujan r ja h funktio. *Muuttujat r ja h eivät kuitenkaan molemmat ole vapaasti valittavissa, vaan niitä sitoo toisiinsa se tieto, että astian tilavuuden täytyy olla V* ts. että

$$\pi r^2 h = V \qquad (\textbf{\textit{sidosehto}}).$$

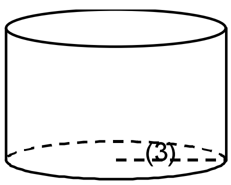
$\therefore h = V / \pi r^2$. Sijoitetaan tämä hinnan H lausekkeeseen:

$$H = a(4\pi r^2 + 6\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2}) = 2a(2\pi r^2 + \frac{3V}{r}).$$

Hinta on pienimmillään, kun funktio $f(r) = 2\pi r^2 + \dfrac{3V}{r}$ on "minimissään" ts. kun $f'(r) = 4\pi r - \dfrac{3V}{r^2} = 0$. Tästä saataisiin r:lle yksi arvo ($r = \sqrt[3]{3V / 4\pi}$) ja sidosehdosta vastaava h:n arvo. Edullisin muoto saadaan kuitenkin helpommin sijoittamalla V:n paikalle takaisin sidosehdon mukainen arvo:

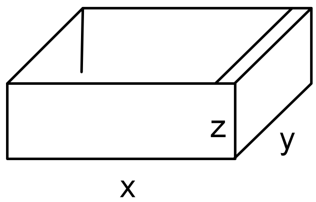
$$4\pi r = \frac{3V}{r^2} \quad \Big| \; V = \pi r^2 h$$

$$4\pi r = \frac{3\pi r^2 h}{r^2} \Leftrightarrow 4r = 3h \Leftrightarrow \underline{\underline{\mathbf{r:h = 3:4}}}$$



Useamman kuin yhden muuttujan (jatkuvalla) funktiolla ääriarvokohdat löydetään vastaavasti osittaisderivaattojen nollakohtien joukosta.

Esim. 3 Suorakulmaisen särmiön muotoisen kannettoman laatikon yksi reuna vahvistetaan kaksinkertaiseksi. Laske ainemenekiltään edullisin laatikon muoto.



Materiaalimäärää esittää käytetyn levyn pinta-ala

$$A = xy + 2xz + 3yz \quad \Big| \quad \textbf{sidosehto:}\; xyz = V \;\therefore\; z = \frac{V}{xy}$$

$$= xy + 2\frac{V}{y} + 3\frac{V}{x}.$$

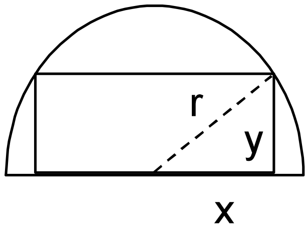
$$\begin{cases} A_x = y - 3\dfrac{V}{x^2} = 0 \\ A_y = x - 2\dfrac{V}{y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3\dfrac{xyz}{x^2} \\ x = 2\dfrac{xyz}{y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 3yz & | : y \neq 0 \\ xy = 2xz & | : x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3z \\ y = 2z \end{cases} \quad \therefore \underline{\underline{\mathbf{x:y:z = 3:2:1}}}$$

Tässä esimerkissä pinta-ala oli alunperin kolmen muuttujan funktio, mutta sidosehto muutti sen kahden muuttujan funktioksi. *Palloa tai ympyrää koskevissa tehtävissä sidosehto saadaan usein Pythagoraan lauseesta ja kartiota tai kolmiota koskevissa tehtävissä yhdenmuotoisuudesta*.

Esim. 4 Puoliympyrälevystä leikataan mahdollisimman suuri suorakulmio. Määritä tämän muoto (kannan ja korkeuden suhde).

On selvää, että suurimman suorakulmion kanta on levyn halkaisijalla. Merkitään kantaa $2x$:llä ja korkeutta y:llä. Silloin



$$A = 2xy \quad \Big| sidosehto\ x^2 + y^2 = r^2$$
$$= 2x\sqrt{r^2 - x^2} = 2\sqrt{x^2(r^2 - x^2)}$$

Derivointia yksinkertaistaa se, että ala A on suurimmillaan, kun juuren alla oleva lauseke on suurimmillaan. Siksi riittää maksimoida funktio

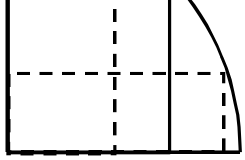
$$y = x^2(r^2 - x^2) = r^2x^2 - x^4.$$

$$y' = 2r^2x - 4x^3 = 0 \Leftrightarrow 2x(r^2 - 2x^2) = 0 \overset{x \neq 0}{\Leftrightarrow} r^2 = 2x^2 \quad \Big| \ sidosehto$$

$$x^2 + y^2 = 2x^2 \Leftrightarrow y^2 = x^2 \Leftrightarrow y = (\pm)x$$

$$\therefore \underline{\underline{\textbf{kanta} = \mathbf{2} \cdot \textbf{korkeus}}}.$$

Lopputulos on oikeastaan aika itsestään selvä, sillä <u>neljännes</u>ympyrään piirretyn vastaavan kuvion täytyy olla neliö.



*Kokeile ratkaista tehtävä niin, että merkitset säteen ja kannan välistä kulmaa α:lla. Silloin $A = 2xy$ ja sidosehtoja on kaksi: $x = r\cos\alpha$ ja $y = r\sin\alpha$.

Harjoituksia

A

11.1 Lieriönmuotoisen a) kannettoman, b) kannellisen tölkin tilavuus on V. Minkä muotoiseksi tölkki tulisi valmistaa, jotta tarvittava peltimäärä olisi mahdollisimman pieni ?

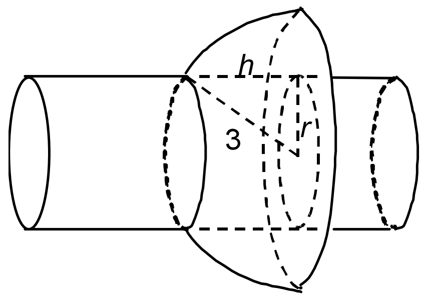
11.2 Kannettoman laatikon pohja on neliö. Yksi laatikon sivutahoista vahvistetaan kaksinkertaiseksi. Mikä on materiaalimenekiltään edullisin astian muoto?

11.3 Suorakulmaisen särmiön muotoisen muropaketin pohja ja ylin pinta ovat kaksinkertaiset. Minkä muotoinen paketti olisi mahdollisimman edullinen, jos muodon ratkaisisi ainoastaan pakettiin tarvittava pahvimäärä?

B

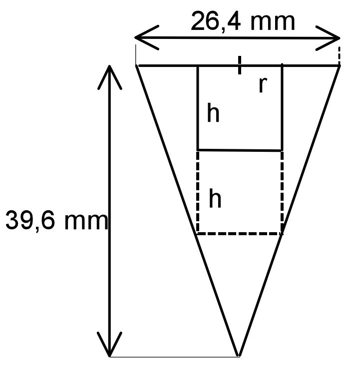
11.4 Kattilan pohja ja neljännes reunasta on tehty kolme kertaa niin kalliista (eli kaksi kertaa kalliimmasta) aineesta kuin muu reuna ja kansi on puolta halvempaa kuin tämä muu reuna. Laske hinnaltaan edullisin muoto. (Vihje: merkitse korkeutta $4h$:lla.)

11.5 Puolipalloon, jonka säde on 30,0 mm, porataan lieriönmuotoinen reikä. Reiän pinta on lieriön vaippa, ja se pitäisi saada mahdollisimman suureksi (esim. siksi, että osa kiinnittyisi pyöreään akseliin mahdollisimman tiukkaan). Laske porausreiän säde.



11.6 Neliöpohjaisen kannettoman laatikon kokonaisala on $5{,}00\ m^2$. Laske tilavuuden maksimiarvo.

11.7 Viereisen kuvan mukaiseen kartioon porataan akselia pitkin reikä, joka ulottuu puoleen väliin siitä kohdasta, jolloin kartion reuna tulisi vastaan. Määritä reiän säde niin, että kartio kevenee mahdollisimman paljon. (Sidosehdon saat yhdenmuotoisista kolmioista.)

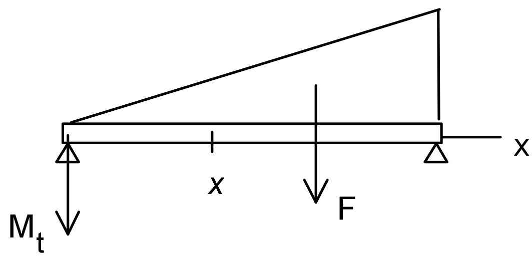


C

11.8 Mieti edellisten tehtävien kohdalla, miksi laskemisen tuloksena saatu mahdollinen ääriarvokohta antaa kyseiselle suureelle halutun suurimman tai pienimmän arvon.

11.9 Oheisen kolmiokuorman F taivutusmomentti kohdassa x on

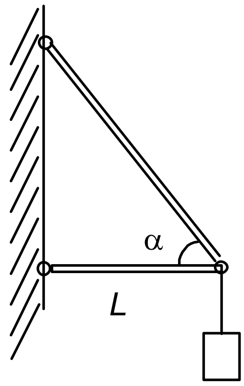
$$M_t = \frac{F}{3}(x - \frac{x^3}{\ell^2}),$$



missä ℓ on palkin pituus. Laske kohta, jossa taivutusmomentti on suurimmillaan.

11.10 Kun viereisen kuvan tapaista ulokekannatinta mitoitetaan, kulma α pitää valita siten, että lauseke

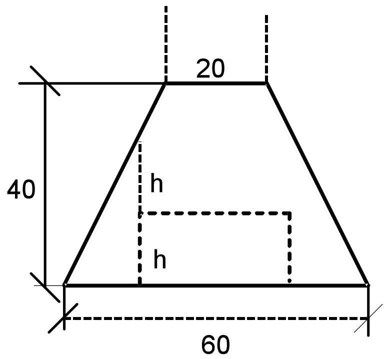
$$\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} + \frac{1}{\tan\alpha}.$$



on pienimmillään. Määritä tämä α:n arvo.

11.11 Pyöreän pilarin jalusta on katkaistun kartion muotoinen. Jalustan halkaisija on alhaalla 60,0 *cm* ja 40,0 *cm*:n korkeudella 20,0 *cm* (vrt. kuva).

Jalustaan porataan pohjasta päin reikä, joka ulottuu puoleen väliin reunaa. Reikä täytetään massalla, joka on kaksi kertaa niin painavaa kuin muu jalusta. Kuinka monta % jalustan painoa voidaan näin lisätä ?



11.12 Jännite muuttuu (kuvitellun) lain

$$u = \tfrac{1}{6}(e^{-t} - e^{-7t})$$

mukaisesti. Millä hetkellä jännite on suurimmillaan ja mikä on sen suuruus tällöin? (Varmista myös esim. kuperuussuunnan ja asymptoottien tutkimisen avulla ts. hahmottelemalla kuvaaja, että kyseessä oleva ääriarvokohta antaa suurimman arvon.)

VASTAUKSIA

1.1 $Mj = Aj =$ **R**, $x^3 + 1$, -5, 2, $x^3 + 3x^2 + 3x + 2$, $\dfrac{x^3+1}{x^3}$

1.2 $\dfrac{2}{3}$, -4, $\dfrac{3-2h}{2-h}$, $\dfrac{2\Delta x}{2+\Delta x}$ **1.3** 17, 3a + 2, $\dfrac{1}{9}$ **1.4** $\dfrac{1}{6}$, 0, 3

1.5 1/5, -3/5, 1/4 **1.6** 1/2, –1/5, 0 **1.7** a + 2, 1, –2, 1/3

1.8 –1 **1.9** $\dfrac{8a^2-8a}{2a+1}$, $\dfrac{2h^2-4h}{3-h}$, $\dfrac{2x^2+4hx-4x+2h^2-4h}{x+h+1}$ (esim. c)-kohdassa funktion lausekkeeseen sijoitetaan *jokaisen x:n tilalle* ja lauseke sievennetään)

1.10 4/7, 1, 1/2 **1.11** 4, 0 **1.12** a) $-\infty$, ∞, b) ∞, $-\infty$

1.13 Funktion arvo on määrän a) 0,354 (eli n. 5,9 %), b) 0,0896 (eli n. 1,5 %) c) n. 0,0009 (0,015%) pienempi raja-arvoaan.

1.14 a) $2x + h - 3$, b) $2x - 3$ **1.15** $1/\sqrt{2x}$ **1.16** 2/3 ja –2/3
1.17 1/3 ja 0 **1.18** –5/3 **1.19** 0

1.20 Koska sinin arvo on välillä –1 ... 1, niin esim. a)-kohdan käyrä "värähtelee" eksponenttifunktioiden $y = \pm e^{-0.2t}$ välillä ja siten vaimenee t:n kasvaessa. Mitkä käyrät rajoittavat esim. c)-kohdan funktiota? Onko b)-kohdan funktiolla edes toispuoleisia raja-arvoja kohdassa $t = 0$?

1.21 $A = 4\pi r^2 = \pi d^2$, joukko $d \geq 0$, paraabelin puolikas

1.22 a) Kuvaaja on oikealle nouseva käyrä, b) III ja IV nelj.

1.23 *parillinen*: $f(-x) = f(x)$ kaikilla x:n arvoilla, ts. $f(-x) \equiv f(x)$ (*identtisesti samat*), *pariton:* $f(-x) \equiv -f(x)$. On, Ei.

1.24 c) lähestyvät "eri ääretöntä" (ts. toinen $\to +\infty$ ja toinen $\to -\infty$), sillä itseisarvoltaan suurilla x:n arvoilla määräävä termi on asteluvultaan korkein termi.

1.25 b) -1/40 **1.26** b) x:n täytyy antaa lähestyä ääretöntä yhtä aikaa ("samalla vauhdilla") sekä kantaluvussa että eksponentissa. Kun x on suuri (esim. 1000), niin kantaluku on lähellä 1:tä (1,001), mutta samalla eksponentti on suuri (1000). Siksi potenssin arvo ei ole lähellä 1:tä vaan tässä tapauksessa lähellä 2,7:ää. Muoto 1^∞ on eräs "epämääräinen muoto", joka tällä kertaa saa arvon 2,7182....c) 2,7181 (viimeinen numero ei enää ole oikea)

2.1 $2,\ 2x,\ \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$ **2.2** $3x^2,\ -\dfrac{2}{x^2},\ -\dfrac{2}{x^3}$ **2.3** $\dfrac{1}{x^2},\quad x \neq 0$

2.4. $4x^3,\ \frac{6}{5}x,\ 6x^2+8x-2$ **2.5** $4at-b-\dfrac{3}{t^2},\ 3xz^2-2z\sin x,\ 4\pi r^2$

2.6. $12r(3r^2-1)$ **2.7** Alaspäin aukeava paraabeli, $-4{,}70t$

2.8 $\dfrac{3-4x}{x^4},\ \dfrac{-5t+8}{6t^3},\ \dfrac{3x^2-6x+6}{2c^2}$ **2.9** $x>0$ **2.10** $y=4x-4$

2.11 $y=6x-9,\quad y=-2x-1$ **2.12** $2x+3,\ \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$

2.13 $-\dfrac{x^2+x+4}{2(x^2-4)^2},\ -6\dfrac{x^2+x-1}{x^4}$ **2.14** $\dfrac{4t}{(t-2u)^2},\ \dfrac{t}{x}-x^3$

2.15 $v_o+at,\ a$ **2.16** 1,5 **2.17** b) $-6/x^4$ **2.18** b) $9(2+3x)^2,\ 144$

2.19 $y=2x+5$ **2.20** $\pm\sqrt{2}$ **2.21** $\dfrac{x^4}{4}+2x\ (+vakio)$ 1,6 1,8

2,2 $f'(2)=2$ **2.23** n. $25{,}2^o$ **2.24** $-\frac{1}{4}$**,** $1\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$

3.1 $a)\ dy=\dfrac{x^2+1}{5x^2}dx$**,** b) $dy=\dfrac{x^2}{3}(5x^2-12)dx$ c) $df=(-\dfrac{6}{t^4}-4)dt$

3.2 2%, 3% **3.3** $(123\pm 2)\,cm^2$ **3.4** a) $z_x=y^3-5,\ z_y=3xy^2+2$

b) $U_t=2/\pi, U_s=-1/2\pi$, c) $v_t=2/3u,\ v_u=\dfrac{1-2t}{3u^2}$

3.5 $dz=\dfrac{2x-y}{8y}dx-\dfrac{x^2}{8y^2}dy$ **3.6** a) $(293\pm 3)\,cm^3$, b) $(188\pm 2)\,cm^2$,

c) $(249\pm 2)\,cm^2$ **3.7** 1/24 **3.8** $dK=\dfrac{15t^4+3}{t^2}dt$,

$dH=\frac{1}{2\pi S}dR+\frac{T}{\pi S}dT-\frac{R+T^2}{2\pi S^2}dS$ **3.9** $(74{,}1\pm 0{,}8)\,cm^3$ **3.10** 1,5%

3.11 $\left(\left|\dfrac{\Delta V}{V}\right|\approx\right)\left|\dfrac{dV}{V}\right|\leq 2\left|\dfrac{dr}{r}\right|+\left|\dfrac{dh}{h}\right|$ **3.12** a) $(0{,}23\pm 0{,}04)\cdot 10^{-9}\,N$

b) $(0{,}23\pm 0{,}04)\cdot 10^{-9}\,N$ **3.13** kyseessä on tulos "$\Delta f \approx f'(x)\cdot dx$, jos $dx\approx 0$" toisin kirjoitettuna., 0,50756

(huom. $0{,}5^o=\dfrac{\pi}{180}\cdot 0{,}5\,(rad)$)

3.14 esim. $d\frac{u}{v}=\frac{u'v-uv'}{v^2}dx=\frac{u'dx\cdot v-u\cdot v'dx}{v^2}=\frac{du\cdot v-u\cdot dv}{v^2}$

4.1 1, 3/2, 2 **4.2** $\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}\;(=\frac{1}{1+\cos x})$, $\cos 2x$ **4.3** 3, 5, 9

4.4 $\frac{t-x^4}{x}$, $\frac{2t^2-12}{\omega t^5}$ **4.5** $x^2e^x(x+3)$, $-1/x$

4.6 $\ddot{s}(t)=e^t(t^2-2t-1)\therefore \ddot{s}(0)=-1$ **4.7** $(10x-3x^2)\sin(x^3-5x^2+1)$, $\omega\cos\omega t$, $-ke^{-kt}$, $3/(3x+2)$

4.8 $\frac{2}{3\sqrt[3]{r}}$, $\frac{r^2}{\sqrt[3]{(r^3-1)^2}}$, $-\frac{5}{2x^3\sqrt{x}}=\frac{-5\sqrt{x}}{2x^4}$

4.9 $t^2e^{2t}(2t+3)dt$, $dz=3x^2e^{2y}dx+2x^3e^{2y}dy$

4.10 $\omega/3$, ω_1/ω_2, e^2 **4.12** $x^{5x}(5x\ln x+5x+1)$, $\frac{-1-\tan^2 t}{\tan^2 t}$, $2x\ln x+x$, **4.14** $\frac{1}{\sin x}$, $-\frac{1}{t^2\tan\frac{1}{t}}$, $\frac{-5}{(2x-1)^4}$, $\frac{2}{x^2-1}$

4.15 $-\omega\sqrt{3}$ **4.16** $-U/L$

4.17 a) $dz=(2x\sin 2y-3y^2\sin 3x)dx+(2x^2\cos 2y+2y\cos 3x)dy$,

b) $\frac{dx+dy}{x+y}$, c) $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}(\frac{dl}{l}-\frac{dg}{g})$ **4.18** $(0{,}856\pm 0{,}003)\,s$

4.19 $(230\pm 10)\,cm^2$ **4.20** $\frac{1}{1-2x}$, $-16\sqrt{3}$ **4.21** Samat vastaukset kuin edellä. **4.22** Käytä sääntöä $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ ja "summat tuloiksi" -kaavoja. Vast. $2\sin x\cos x=\sin 2x$ **4.23** $-4/3$

4.24 $\frac{4x(e^{2t}-1)}{\sin x}$**,** $2x^{2x}(\ln x+1)$ **4.25** $vp=x\cdot 2-(2x+2)=op$

4.26 $A=0, B=-\frac{1}{2}$ **4.27** $Dx^x=De^{x\ln x}=\ldots=x^x(\ln x+1)$

4.28 a) 2 b) $-1/2$ (lauseke $=\frac{1-\cos x}{-x\sin x}=\frac{1-\cos^2 x}{-x(1+\cos x)\sin x}$, vrt. myös harj. 4.31) **4.30** $0{,}384\pm 0{,}004$ **4.31** $2/3$ (Sovella H:n sääntöä 3 tai 4 kertaa) **4.32** $y=\pm e^{x-1}\sqrt{|x|}$

5.1 $\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3+C$, $\frac{2}{3}x^6+C$, $\frac{1}{2}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x+C$, $\frac{1}{2}x^2-\cos x+C$

5.2 $x+C,\quad -\dfrac{1}{x^2}+C,\quad \tfrac{1}{2}\ln|x|+C,\quad -\cos t+C,\quad x\sin t+C$

5.4 $-\tfrac{1}{\omega}\cos\omega t+C,\quad 2e^{3\varphi}+C$ **5.5** $\tfrac{1}{6}x^6+C,\quad \tfrac{1}{5}x^5-\tfrac{1}{2}x^4+\tfrac{1}{3}x^3+C$

$x^5/5+x^4/2-x^3/3-x^2+x+C$ **5.6** $x-\ln|x|+C,\quad \dfrac{x^4+6x^2-3}{3x}+C$

5.7 $\tfrac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C,\quad \tfrac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+C,\quad \tfrac{3}{4}x\sqrt[3]{2x}+C$

5.8 $-a/\tan t+C,\quad 5\tan t+C,\quad 3(\tan t+t)+C$

5.9 $\tfrac{1}{10}x^2+\tfrac{1}{5}\ln|x|+C,\quad \tfrac{1}{5}(x-1/x)+C,\quad \tfrac{1}{5}(x^2/2+\ln|x|+1/x)+C$

5.10 $x^4/2+x^3/3-23/3$ **5.11** derivoi op.

5.12 $2x^3\sqrt{2x}+C,\quad \dfrac{an}{m+n}x\sqrt[n]{x^m}+C,\quad \dfrac{3x}{4}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{Ap^2x}{n-1}}+C$

5.13 $s=t+t^2+t^3/3-1/3$ **5.14** $\tan x-x+C$

5.15 Esimerkin 8 edellä on todistettu, että $D\ln|x|=1/x$, joten

$$Dop=\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot D\tan\frac{x}{2}=\ldots$$

5.16 $-\dfrac{\cos 3t}{3}+C,\quad -\dfrac{\cos(\omega t+\varphi)}{\omega}+C,\quad \dfrac{e^{2t-1}}{2}+C,\quad \dfrac{e^{x^2}}{2}+C$

5.17 $y=-\cos x+\tfrac{3}{2}x^2+4,\quad s=\dfrac{t^3}{6}+\dfrac{e^{2t}}{4}+\dfrac{3t}{2}+\dfrac{3}{4}$

6.1 15/2, 15, 3e – 3, 0 **6.2** 1, 0, –1 **6.3** 1,1086... ≈ 1,11 (tarkempi arvo 1,11144) **6.4** $-\ln 2,\quad \dfrac{3\ln 2+2}{4},\quad 3/10,\quad 2r$

6.5 1250 Nm (1,25 kJ) **6.6** $e-2$ **6.7.** 4 0 0 **6.8** 40/3, –40/3, 16/3 **6.9** 37/10, 76/15 **6.10** 9/2 **6.11** 6,447 (tarkka 2π)

6.12 $W=\int_{0{,}02m}^{0{,}05m}0{,}200\dfrac{MN}{m}s\,ds=210\ Nm$ **6.13** $7t^2+(1-4\sqrt{2})t\sqrt{t}$

6.14 Jos esim. $u(x)$ on pariton ja $v(x)$ parillinen ja $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$, niin

$f(-x)=\dfrac{u(-x)}{v(-x)}=\dfrac{-u(x)}{v(x)}=-f(x)$, ts. f on pariton. a) 0, b) tarkempi kuin 4 osavälin antama arvo olisi 3,70387

6.15 $\dfrac{e^{3x}}{3}(+C)$, $\dfrac{-\cos 3x}{3}$, $\dfrac{(1+2x)^6}{12}$, $\dfrac{(1+2x)\sqrt{1+2x}}{3}$

7.1 $-e^{-x}+C$, $\frac{1}{3}(e^3-1/e^3)$, $-\frac{1}{3}\cos 3x+C$, $1/5$

7.2 $\dfrac{e^{4a}-1}{2a}$, $-\frac{3}{2}e^{-x^2}+C$, $\frac{1}{\omega}(1-\cos\omega)$, $-\frac{r}{2}\cos 2t+C$

7.3 $\frac{1}{8}(2x-1)^4+C$, $\frac{2}{9}(3x-1)\sqrt{3x-1}+C$, $\frac{3}{8}(5\sqrt[3]{5}-1)$

7.4 $\frac{1}{2}\ln|2u+1|+C$, $\sqrt{2u+1}+C$, $\ln|\sin t|+C$ **7.5** $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2e^4}$

7.6 Vastaukset edellä

7.7 $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{2}x\cos 2x+C$, $\dfrac{\pi-2}{18}$, $\dfrac{\sin 3t}{3}-\dfrac{3t-1}{3}\cos 3t+C$

7.8 $\dfrac{e^{3x}}{9}(3x-1)+C$, $\dfrac{e^{3x}}{27}(9x^2-6x+2)+C$, $\dfrac{1}{6}e^{3x^2}+C$

7.9 $2/3$, $3\pi/16$ **7.10** $\frac{1}{4}e^{2x^2-4x}+C$, $1/3$ **7.11** $3/4\,\omega$

7.12 $\ln 2$, $1-\ln 2$, $\frac{1}{4}(10-\ln 11)$ **7.13** $-3\sqrt{4-x^2}+C$, $8/3$

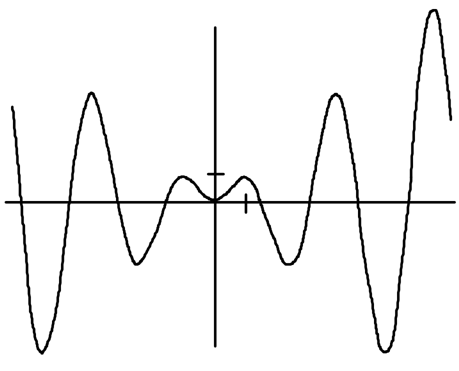
7.14 $\frac{1}{2}\ln^2 2+\ln 2+\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}\ln|\cos 2x|+C$ **7.15** $\frac{1}{24}(\pi\sqrt{3}-3)$,

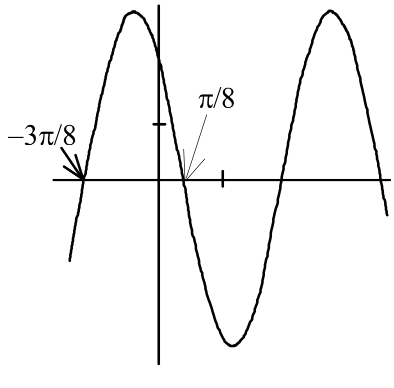
$-\dfrac{r^2e^{-6\varphi}}{36}(6\varphi+1)+C$ **7.16** $\dfrac{\mathrm{e}^3}{36}-\dfrac{\ln 2}{3}+\dfrac{1}{9}$, $\frac{1}{9}(8\mathrm{e}^3+4)$

7.17 $-6\sqrt{4-x^2}+C$ (sij. $4-x^2=t$), $\dfrac{10-\ln 11}{4}$

7.18 $\dfrac{x^4}{16}(4\ln x-1)+C$ **7.19.** $-\dfrac{e^{2t}}{\omega^2+4}(\omega\cos\omega t-2\sin\omega t)+C$,

$265e-720$ **7.20** $\pi/4$ (kuva seuraavalla sivulla) **7.21** 3 (kuva seuraavalla sivulla)





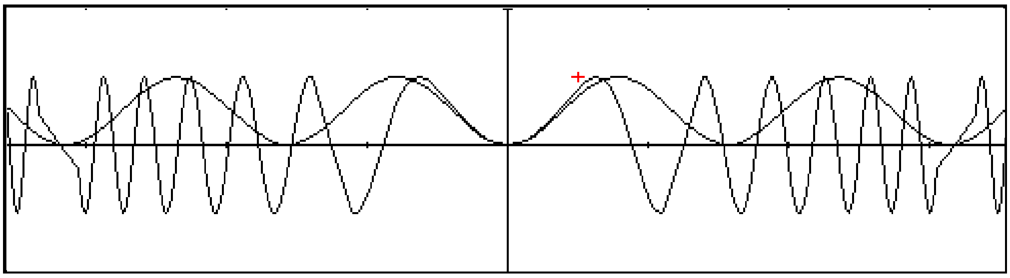
7.22 $-\frac{1}{15}\cos 5x\cdot(\sin^2 5x+2)+C$

7.26 a) $\dfrac{\sin^3 \omega t}{3\omega}-\dfrac{\sin^5 \omega t}{5\omega}+C$ (jos kirjoitat $\cos^2 \omega t$:*n tilalle* $1-\sin^2 \omega t$) tai

$\dfrac{1}{15}\sin \omega t(-\cos^4 \omega t+\cos^2 \omega t+2)+C$ (jos käytät sijoitusta ja palautuskaavaa)

b) $\frac{1}{8}(-2\cos^3 t\sin t+\cos t\sin t+t)+C$, c) $\dfrac{\cos \omega t}{2\omega}-\dfrac{\cos 5\omega t}{10\omega}+C$

7.27 $\sin^2 x$ -käyrä on π-jaksoinen, $\sin x^2$ on "tihenevä":



8.1 32/3 **8.2** $2(e-2+1/e)$ **8.3** 1/12 **8.4** 37/12 **8.5** 64/3
8.6 ½ln 2 **8.7** a) $256\pi/7$ b) $128\pi/5$ **8.8** $\pi/6$
8.9 $2(e+1/e-2)$ **8.10** 9/2 **8.11** 92/3 **8.12** $5\frac{5}{24}$ **8.13** $32\pi/3$
8.15 a) $\pi^2/4$, b) $\pi(\pi-2)$ **8.16** $2\pi/15$ **8.17** $V_y=16\pi/3$
8.18 32/5 **8.19** $\dfrac{1}{9}-\dfrac{4}{9e^3}$ **8.20** 4/3 **8.21** Katso tulos kaavastosta
8.24 $16r^3/3$ **8.25** b) $\pi(e-2)$ **8.26** $\frac{2}{3}r^2h$

9.1 $S_x=24\,(kgm)\,(\int_{-2m}^{4m}4\dfrac{kg}{m}\,y\,dy)$ $J_x=96(kgm^2)$ **9.2** $(\dfrac{2}{\ln 3},\dfrac{1}{3\ln 3})$

9.3 $(3/2,6/5)$ **9.4** a) $(3/8,2/5)$, b) $(27/16,-19/20)$ —olihan laskuissasi alan lauseke varmasti positiivinen ja S_x negatiivinen (eikä päinvastoin) ?

9.5 $\dfrac{5}{3}x\,dx$, $\dfrac{5}{6}x^2\,dx$, $\dfrac{10}{3}x\,dx$, $\dfrac{5}{6}x^3\,dx$, 30, 60, 60, 270 **9.6** $(\frac{\pi}{2}-1,\frac{\pi}{8})$

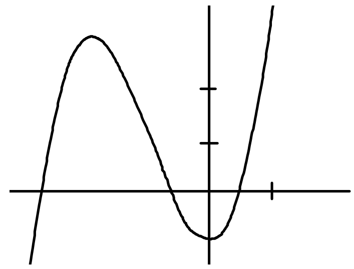
9.7 $dA=[\sin x-(-x^3)]\,dx$, keskipisteen y-koordinaatti on $\dfrac{\sin x+(-x^3)}{2}$

9.9 $(\pi/6, \pi/4)$ **9.10** a) 1/10, 1/5 b) 1/4, 1/21 **9.11** a) 1/4, 2/7 b) 2/5, 2/15 **9.12** 32/105, 4/15 (käytä symmetriaa)

9.13 $(\dfrac{e^2-3}{2(e^2-1)}, \dfrac{e^2+1}{e^2})$ **9.14** $(\dfrac{\pi(1+\sqrt{2})}{4}, \dfrac{\sqrt{2}}{8})$ **9.15** Kolmion momenttien laskukaavat löytyvät kaavastosta.

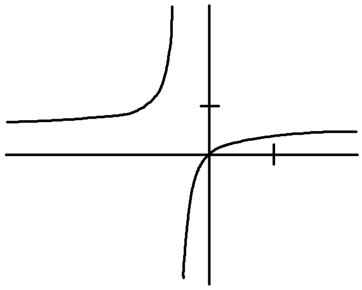
9.16 a) $72\pi^2$, b) $\dfrac{4}{3\pi}r$, c) $\dfrac{8(2-\sqrt{3})}{\pi}$

10.1 [0,2] **10.2** min. piste $(0,-1)$, maks. piste $(-2,3)$ (vier. kuva)



10.3 (1,1) **10.4** a) $x=-1/3 \; ja \; y=0$, b) $x=-1/2 \; ja \; y=1/2$, c) $t=-1 \; ja \; s=t$

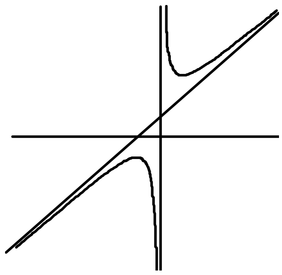
10.5 a) asymptootit $x=-1/2 \; ja \; y=1/2$, ei ääriarvoja,



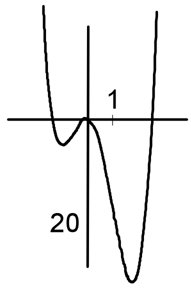
b) asymptootit

$x=0 \; ja \; y=x+1$,

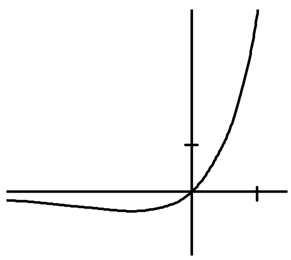
min (1,3), maks. $(-1,-1)$

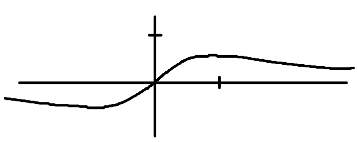
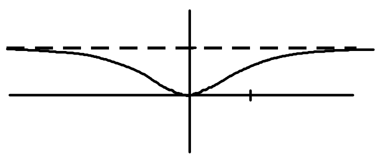


10.6 maks. (0,0), minimipisteet (2,-32) ja (-1,-5). (Kuvassa *x*- ja *y*-asteikot ovat eri suuret.)

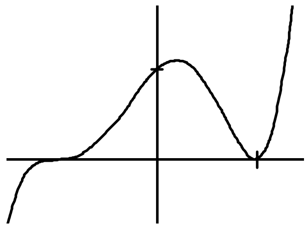


10.7 min. $(-1,-1/e)$, käännepiste $(-2,-2/e^2)$.



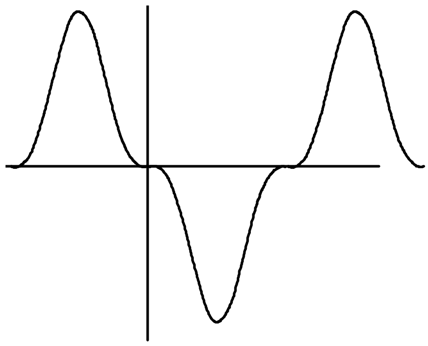
10.8 a)  , b) 

10.9 maks. piste n. $(0{,}2;1{,}1)$, min. piste $(1{,}0)$

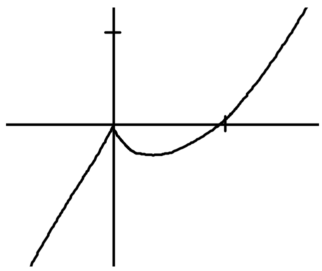


10.10

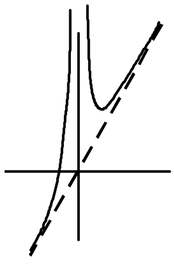
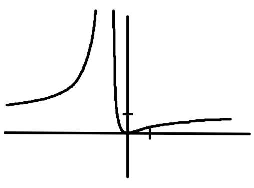
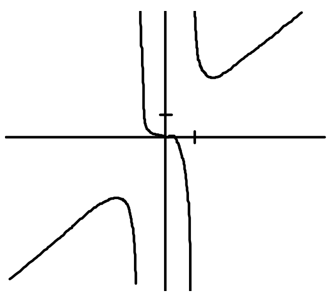
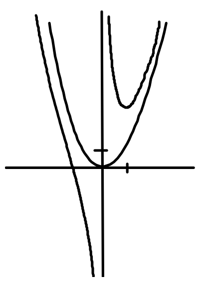
$T = 2\pi$, maks. $(3\pi / 2{,}4)$, min. $(\pi / 2{,}-4)$

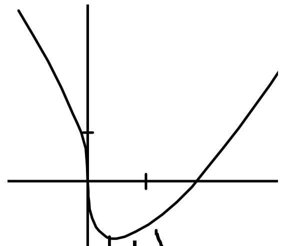


10.11 maksimipiste (kärki) $(0{,}0)$, min.piste n. $(0{,}4;-0{,}33)$



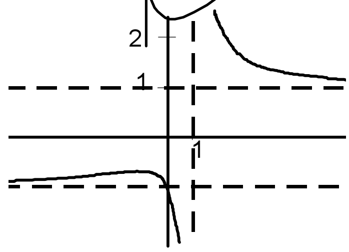
10.12

a)  b) , c)  d) 



10.13 min. piste n. $(1/2;-1{,}19)$ (viereinen kuva)

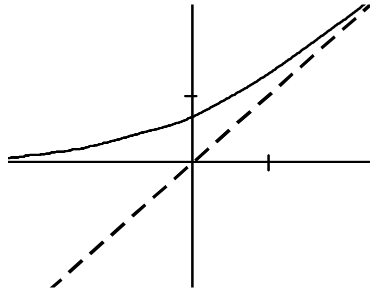
10.14 yksi reaalijuuri



10.15 $\omega t{:}n$ maksimikohdat $0{,}508$ ja $0{,}508+2\pi$ ja $\omega t{:}n$ minimikohdat $0{,}508+\pi$ ja $0{,}508+3\pi$

10.16 maks. $(-1,-\sqrt{2}/2)$, asympt. $x=1$ *ja* $y=\pm 1$ (ks. viereinen kuva)

10.17. ks. viereinen kuva



11.1 a) $r=h$, b) $d=h$

11.2 $x{:}h=5{:}2$ **11.3.** $x{:}y{:}z=1{:}1{:}2$

11.4 $r:h=12{:}7$ **11.5** 21,2 *mm* (r = h).

11.6 $1{,}08\,m^3$ **11.7** 8,8 *mm*

11.8 Esim. tehtävässä 11.7 *r* voi olla välillä (0;13,2 *mm*). Jos *r* on lähellä nollaa, on reiän tilavuus *V* pieni. Jos taas *r* on lähellä 13,2 *mm*, on korkeus *h* pieni ja siksi *V* pieni. Jokin reiän muoto näiden ääritapausten väliltä antaa tilavuudelle suurimman arvon. Koska mahdollisia ääriarvokohtia *r* tulee laskennassa vain yksi, tämän täytyy antaa tilavuudelle suurimman arvon.

11.9 $x=\ell/\sqrt{3}$ **11.10** n. $54{,}7^o$ **11.11** 23,1%

11.12 $t\approx 0{,}324$, $u\approx 0{,}120$