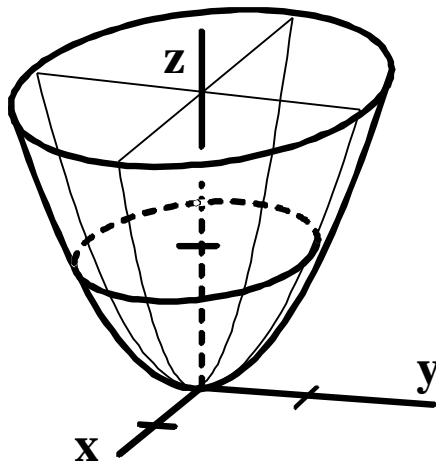


Antti Majaniemi

MATEMATIIKKA III



$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B [u(x, y) dx + v(x, y) dy]$$

2016

ISBN 978-952-93-8170-8



Tämä teos on lisensoitu Creative Commons Nimeä-EiKaupallinen 4.0 Kansainvälinen -lisenssillä. Tarkastele lisenssiä osoitteessa <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/deed.fi>.

Antti Majaniemen perikunta on päättänyt antaa tämän teoksen käytettäväksi yllä olevalla lisenssillä. Painatus ei ollut enää kannattavaa alhaisen kysynnän vuoksi, mutta tällä tavalla oppimateriaali on edelleen opiskelijoiden ja oppilaitosten käytettävissä.

Tämä teos on ladattavissa osoitteessa <http://anttimajaniemi.fi>

Turussa 20.11.2016

Jari Majaniemi

jari @ anttimajaniemi.fi

Sisällys

1	Vektorilaskennan kertausta ja täydennystä	1
1.1	Vektorin komponenttiesitys	1
1.2	Pistetulo ja ortogonaaliprojektio	2
1.3	Ristitulo eli vektoritulo ja kolmoistulot	5
2	Taso	9
2.1	Tason yhtälö	9
2.2	Pisteen etäisyys tasosta	11
2.3	Tason vektori- ja parametriesitykset	12
*2.4	Tasoa koskevia lisätehtäviä	13
3	Suora	17
3.1	Suora kahden tason leikkauksena	17
3.2	Suoran vektori yhtälö ja parametriesitys	17
*3.3	Suoran normaalimuoto	19
4	Toisen asteen pinnoista	22
4.1	Pallo	22
4.2	Ellipsoidi	23
4.3	Hyperboloidit	24
4.4	Kartio	27
4.5	Lieriöt	27
4.6	Paraboloidit	28
5	Koordinaatistoista	32
5.1	Koordinaatiston kierto tasossa kulman α verran	32
5.2	Tasokuvion kierto xy-koordinaatiston origon ympäri	33
5.3	Vastaavat tulokset avaruudessa	34
5.4	Napakoordinaatisto avaruudessa	35
5.5	Pallokoordinaatisto	36
5.6	Lieriökoordinaatisto	37
6	Osittaisderivaatat ja kokonaisdifferentiaali	40
6.1	Kahden muuttujan funktio ja sen derivointi	40
6.2	Kokonaisdifferentiaali	41
6.3	Yhdistetyn funktion derivointi	42
6.4	Ratkaisemattoman funktion derivointi	44
7	Ääriarvot	48
7.1	Maksimi ja minimi	48
7.2	Pienimmän neliösumman menetelmän sovelluksia	50
8	Integraalilaskentaa	56
8.1	Viivaintegraali	56
8.2	Työ voimakentässä	57

8.3	Pintaintegraali _____	59
9	Laplace-muunnos _____	62
9.1	Laplace-muunnos eli L-muunnos _____	62
9.2	Käänteismuunnos _____	64
9.3	Derivaatan ja integraalin L-muunnos _____	65
9.4	L-muunnoksen käyttäminen diff.yhtälöiden ratkaisemiseen _____	67
9.5	Virtapiirin vastinpiiri L-muunnoksessa _____	68
9.6	Viive, yksikköaskel ja yksikköimpulssi _____	70
10	Sarjoista _____	77
10.1	Lukujono ja sarja _____	77
10.2	Aritmeettinen ja geometrinen sarja _____	78
10.3	Potenssisarja _____	80
10.4	Potenssisarjan muodostamistapoja _____	81
10.5	Sarjojen sovelluksia _____	86
11	Fourier´n sarja _____	92
11.1	F-sarjaan liittyviä käsitteitä _____	92
11.2	F-sarjan kertoimien määrittäminen _____	93
11.3	Jaksollisen funktion, jonka jakso on T, Fourier´n sarja _____	95
12	Diff.yhtälön numeerinen ratkaiseminen _____	100
12.1	Eulerin menetelmä _____	100
12.2	Runge-Kutta-menetelmä _____	102
Vastauksia _____		103

Kuten edellisissäkin osissa, myös tässä monisteessa on asioita, joiden käsittelytapa ja käsittelyn laajuus riippuvat opintosuunnasta.

Tähän painokseen olen tehnyt joitakin painovirheiden korjauksia ja muuttanut useaan kuvaan viivanpaksuutta, jotta kuvat näkyisivät painettuina paremmin.

Turussa 1. 8. 1998

Antti Majaniemi

Toinen, päivitetty painos. Olen päivittänyt Antti Majaniemen alkuperäiseen monisteeseen harjoitustehtäviä tämän päivän tilanteeseen paremmin sopiviksi.

Turussa 16. 8. 2007

Jari Majaniemi

1 Vektorilaskennan kertausta ja täydennystä

1.1 Vektorin komponenttiesitys

1) Jokainen avaruusvektori \vec{a} voidaan esittää muodossa

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

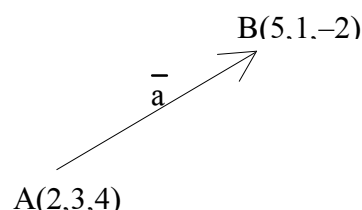
missä esim. $a_2\vec{j}$ on yksikkövektorin \vec{j} suuntainen komponenttivektori. Luvut (skalaarit) a_1, a_2 ja a_3 ovat vektorin \vec{a} (skalaari)**komponentit** kannan $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ suhteen. Jatkossa kantavektoreina ovat aina \vec{i}, \vec{j} ja \vec{k} ja vektorin \vec{a} komponenttiesitys lyhennetään matriisin tyyppiseen muotoon

$$\vec{a} = [a_1, a_2, a_3].$$

Pisteellä ja sen koordinaateilla esitetään paikkaa avaruudessa, kun taas vektorilla esitetään tietyn suuruista ja suuntaista *siirtymää* pisteestä toiseen. Geometrisesti **komponentit** a_1, a_2, a_3 **ovat samat kuin koordinaattien muutokset vektorin alkupisteestä loppupisteeseen.**

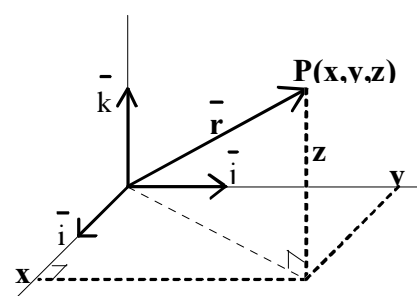
Esim. 1 Pisteestä $A(2,3,4)$ pisteeseen $B(5,1,-2)$ piirretyn vektorin komponenttiesitys on

$$\vec{a} = \vec{AB} = [3, -2, -6].$$



2) Origosta O pisteeseen $P(x,y,z)$ piirrettyä vektoria \vec{r} sanotaan pisteen P **paikkavektori**ksi. Sen komponentit ovat samat kuin pisteen P koordinaatit, ts.

$$\vec{r} = [x, y, z]$$



Esimerkiksi pisteen $P(3,-2,-6)$ paikkavektori on $\vec{r} = [3, -2, -6]$, ts. kyseessä on sama vektori kuin Esimerkissä 1, mutta siirrettynä alkamaan origosta.

3) Vektorien peruslaskutoimitukset, **summa** ja **skalaarilla** (luvulla) **kertominen** voidaan suorittaa **komponentteittain**:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{a} = [a_1, a_2, a_3] \\ \vec{b} = [b_1, b_2, b_3] \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{a} + \vec{b} = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3] \\ t\vec{a} = [ta_1, ta_2, ta_3], t \in \mathbf{R}. \end{array} \right.$$

Vektorin \vec{a} **vastavektori** $-\vec{a} = (-1)\vec{a}$ ja **erotus** $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

4) Vektorin $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]$ **pituus** $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Esim. 2 Vektorin $\vec{a} = [3, -2, -6]$ pituus on $|\vec{a}| = \sqrt{9 + 4 + 36} = 7$.

5) Vektorin \vec{a} suuntainen **yksikkövektori** \vec{a}^0 saadaan, kun \vec{a} jaetaan pituudellaan eli kerrotaan pituuden käänteisluvulla:

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}.$$

Esim. 3 Jos Esimerkin 2 vektorista \vec{a} otetaan seitsemäsosa, saadaan \vec{a} :n suuntainen yksikkövektori $\vec{a}^0 = \frac{1}{7}\vec{a} = \frac{1}{7}[3, -2, -6] = [\frac{3}{7}, -\frac{2}{7}, -\frac{6}{7}]$.

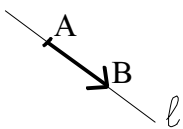
*Vektorin \vec{a} pituutta sanotaan joskus vektorin *normiksi* ja merkitään $\|\vec{a}\|$:lla. Vektorin *normointi* tarkoittaa vektorin jakamista pituudellaan eli muuttamista samansuuntaiseksi yksikkövektoriksi.

6) **Vektorin** $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]$ **suunta** on $a_1:a_2:a_3$. Vektorin suunta voidaan supistaa tai laajentaa millä tahansa positiivisella reaaliluvulla. Vektorin \vec{a} suuntaisen **suoran suunta** on $a_1:a_2:a_3$, millä tahansa positiivi- tai negatiiviluvulla supistettuna tai laajennettuna.

Esim. 4 Jos $A = (1, 2, 3)$ ja $B = (-1, 0, 1)$, niin $\vec{c} = \overrightarrow{AB} = [-2, -2, -2]$.

Vektorin \vec{c} suunta $= (-2):(-2):(-2) = (-1):(-1):(-1)$.

Suoran $\ell = AB$ suunta $= (-1):(-1):(-1) = 1:1:1$.



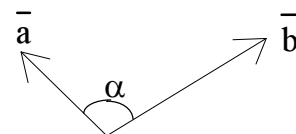
Vektori $\vec{s} = [1, 1, 1]$ on suoran ℓ eräs **suuntavektori**. Suoran suuntavektoreiksi käyvät kaikki vektorit, jotka ovat saman- tai vastakkaisuuntaisia kuin \vec{s} .

1.2 Pistetulo ja ortogonaaliprojektio

1) Vektorien \vec{a} ja \vec{b} **pistetulo** eli **skalaaritulo** on luku (skalaari)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha, \quad (\text{"a piste b"})$$

missä α on vektorien \vec{a} ja \vec{b} välinen kulma, $0 \leq \alpha \leq \pi$.



Pistetulon arvo on positiivinen tai negatiivinen sen mukaan, onko α terävä vai tylppä.

2) Komponenttimuodossa:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{a} = [a_1, a_2, a_3] \\ \bar{b} = [b_1, b_2, b_3] \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

3) Jos $\bar{a}, \bar{b} \neq \bar{0}$, niin kohdan 1) mukaan vektorien \bar{a} ja \bar{b} välinen kulma saadaan trigonometrisestä yhtälöstä

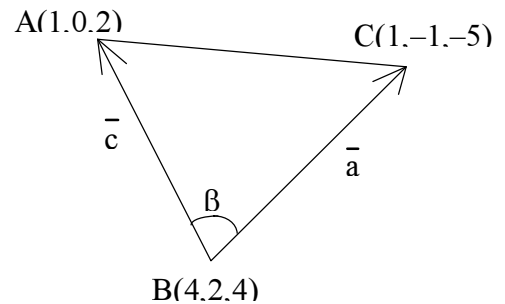
$$\boxed{\cos \alpha = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| |\bar{b}|}}$$

Esim. 5 Laske viereisen kolmion B-kulma. Esim. kärjen C vastaista sivua merkitään yleensä c :llä.

$$\bar{c} = \vec{BA} = [-3, -2, -2]$$

$$\bar{a} = \vec{BC} = [-3, -3, -9]$$

$$\cos \beta = \frac{9 + 6 + 18}{\sqrt{9 + 4 + 4} \sqrt{9 + 9 + 81}} = \frac{33}{\sqrt{17} \sqrt{99}} \therefore \beta \approx 36,4^\circ.$$



4) Kohdan 3) tuloksesta seuraa **kohtisuuruus-** eli **ortogonaalisuusehto**: Jos $\bar{a}, \bar{b} \neq \bar{0}$, niin

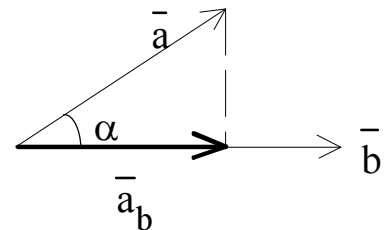
$$\boxed{\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = 0}$$

5) Vektorin \bar{a} **skalaarikomponentti** vektorilla \bar{b} on luku (skalaari)

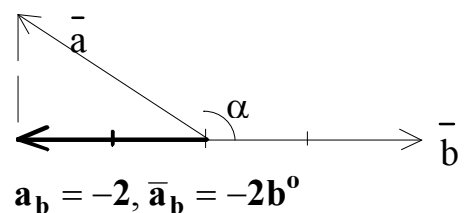
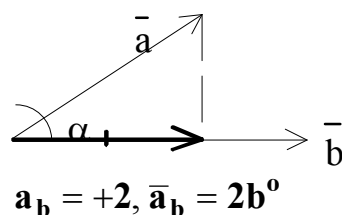
$$a_b = |\bar{a}| \cos \alpha$$

ja **projektiovektori** on vektori

$$\bar{a}_b = a_b \bar{b}^o.$$



Esim. 6

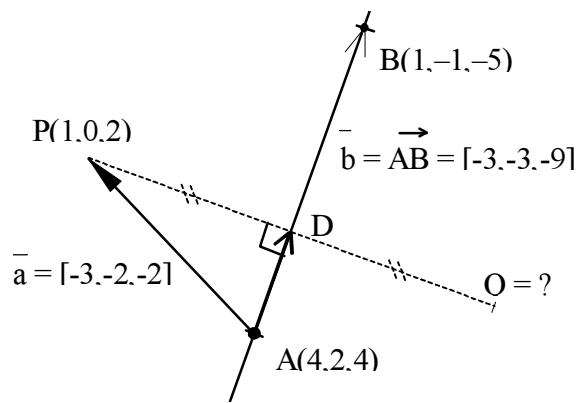


Koska $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$ ja $\vec{a}^o = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, niin skalaarikomponentin ja projektiovektorin lausekkeet saavat seuraavat muodot:

$$\boxed{a_b = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}} \quad \boxed{\vec{a}_b = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right) \vec{b}}$$

*Skalaarikomponentin ja projektiovektorin merkinnät ovat liian samanlaiset. Sen vuoksi voisi olla paikallan merkitä skalaarikomponenttia (eli skalaariprojektiota) esim. $\text{skal}(\vec{a}_b)$:llä. Sen itseisarvo $|\text{skal}(\vec{a}_b)|$ antaa projektiovektorin pituuden.

Esim. 7 Laske pisteen P peilikuva suoran AB suhteen, kun pisteiden P, A ja B koordinaatit ovat kuvan mukaiset.



$$\vec{AD} = \vec{a}_b$$

$$= \left(\frac{9+6+18}{9+9+81} \right) \vec{b}$$

$$= \frac{1}{3} \vec{b} = [-1, -1, -3]$$

$$\vec{PD} = \vec{AD} - \vec{a} \quad (\text{sillä } \vec{a} + \vec{PD} = \vec{AD})$$

$$= [-1, -1, -3] - [-3, -2, -2] = [2, 1, -1]$$

Lasketaan Q:n koordinaatit Q:n paikkavektorin \vec{r}_Q avulla:

$$\vec{r}_Q = \vec{r}_P + 2 \cdot \vec{PD} = [1, 0, 2] + 2[2, 1, -1] = [5, 2, 0] \therefore \underline{\underline{Q = (5, 2, 0)}}$$

*Toinen ratkaisutapa, jossa käytetään vielä enemmän vektoreita:

$$\vec{a} = \vec{AP} = \vec{r}_P - \vec{r}_A, \quad \vec{b} = \vec{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A, \quad \vec{a}_b = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right) \vec{b}$$

$$\vec{r}_D = \vec{r}_A + \vec{a}_b$$

$$\vec{r}_Q = \vec{r}_P + 2 \cdot \vec{PD} = \vec{r}_P + 2 \cdot (\vec{r}_D - \vec{r}_P) = 2\vec{r}_D - \vec{r}_P$$

$$\therefore \vec{r}_Q = 2 \cdot (\vec{r}_A + \vec{a}_b) - \vec{r}_P$$

1.3 Ristitulo eli vektoritulo ja kolmoistulot

Kirjoitetaan vektorit \vec{a} ja \vec{b} alekkain ja niiden perään 1. komponentit:

$$\vec{a} = [a_1, a_2, a_3] a_1$$

$$\vec{b} = [b_1, b_2, b_3] b_1$$

Näiden vektorien **ristitulo** $\vec{a} \times \vec{b}$ ("a risti b") on vektori, jonka komponentteina ovat edellisestä saatavat 2-riviset determinantit:

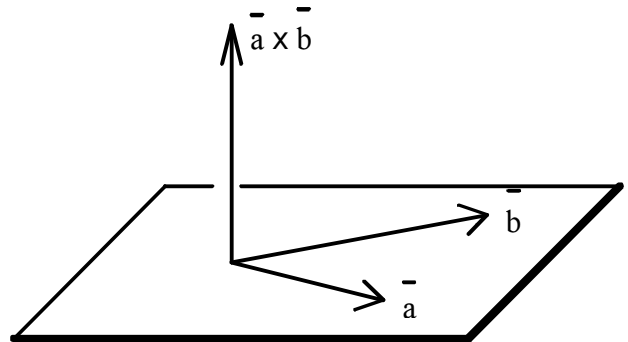
$$(1) \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = [a_2 b_3 - a_3 b_2, \dots]$$

Esim. 8 Jos $\begin{cases} \vec{a} = [1, -2, 3] & 1 \\ \vec{b} = [2, -1, 1] & 2 \end{cases}$, niin $\vec{a} \times \vec{b} = [1, 5, 3]$. Edelleen

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{a} = [1, 5, 3] \cdot [1, -2, 3] = 1 - 10 + 9 = 0 \quad \therefore \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}.$$

Samalla periaattella voidaan todistaa yleisesti, että *ristitulovektori* $\vec{a} \times \vec{b}$ on kohtisuorassa sekä vektoria \vec{a} että vektoria \vec{b} vastaan.

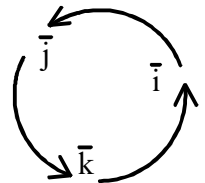
Täten ristitulo antaa vektorien \vec{a} ja \vec{b} määräämän **tason normaalin suunnan** (vrt. kuva).



Lisäksi kolmikko $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ muodostaa ns. *oikeakätisen systeemin*.

Esim. 9 $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$, sillä esim.

$$\begin{cases} \vec{i} = [1, 0, 0] & 1 \\ \vec{j} = [0, 1, 0] & 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{i} \times \vec{j} = [0, 0, 1] = \vec{k}.$$



Nämä kolme tulosta saadaan toisistaan **syklisesti eli kiertovaihtelulla**.

*Koska $\vec{a} \times \vec{b}$ on vektori, on mahdollista muodostaa tämän vektorin ja kolmannen vektorin \vec{c} pistetulo ja ristitulo:

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} \quad (\text{skalaarikolmitulo}) \quad \vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} \quad (\text{vektorikolmitulo}).$$

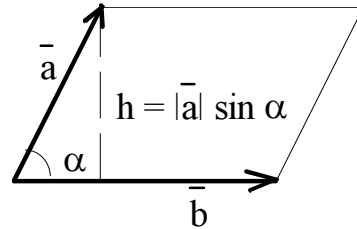
Skalaarikolmitulon arvo on luku (skalaari) ja vektorikolmitulon vektori.

Geometrisia tuloksia

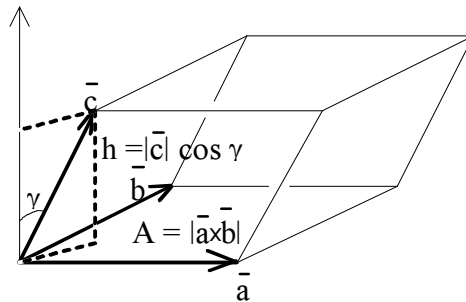
1) Ristitulovektorin $\bar{a} \times \bar{b}$ pituus on (lukuarvoltaan) yhtä suuri kuin vektorien \bar{a} ja \bar{b} määräämän *suunnikkaan ala* ts. (vrt kuva)

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}| |\bar{b}| \sin \alpha$$

Tämän puolikas on siten vektorien \bar{a} ja \bar{b} määräämän kolmion ala.



2) Jos vektorikolmikko $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ muodostaa oikea/vasenkätisen systeemin, niin skalaarikolmitulon arvo $\bar{a} \times \bar{b} \cdot \bar{c}$ on näiden kolmen vektorin määräämän *suuntaissärmiön tilavuus/tilavuuden vastaluku*.



***Laskulakeja:** Komponenttiesityksen avulla voidaan todistaa mm. seuraavat laskulait. ("Erikoslait" on lihavoitu. Näitä käytetään mm. sähkötekniikassa.)

$$V = |\bar{a} \times \bar{b}| |\bar{c}| \cos \gamma = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$$

- 1) $\bar{b} \times \bar{a} = -\bar{a} \times \bar{b}$ (*antisymmetrisyys*)
- 2) $\bar{a} \times \bar{a} = \bar{0}, \quad \bar{a} \times \bar{0} = \bar{0}$
- 3) $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$
- 4) $\bar{a} \times (t\bar{b}) = (t\bar{a}) \times \bar{b} = t(\bar{a} \times \bar{b})$
- 5) $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$ (*ristin ja pisteen vaihtosääntö*)
- 6) $\bar{a} \times \bar{b} \times \bar{c} = (\bar{a} \cdot \bar{c})\bar{b} - (\bar{b} \cdot \bar{c})\bar{a}$ (vektorikolmitulon *kehityskaava*)

Samaan tapaan tai edellisten lakien avulla voidaan todistaa

- 7) $\bar{a} \times \bar{b} \cdot \bar{c} = \bar{b} \times \bar{c} \cdot \bar{a} = \bar{c} \times \bar{a} \cdot \bar{b}$ (*kiertosääntö*)
- 8) $\bar{a} \times (\bar{b} \cdot \bar{c}) = (\bar{a} \cdot \bar{c})\bar{b} - (\bar{a} \cdot \bar{b})\bar{c}$ (*toinen kehityskaava*)

Esim. 10 $\bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = \bar{0}$ (Laki 2).

Esimerkistä 9 seuraa antisymmetrisyyden nojalla, että

$$\bar{j} \times \bar{i} = -\bar{k}, \quad \bar{k} \times \bar{j} = -\bar{i}, \quad \bar{i} \times \bar{k} = -\bar{j}.$$

$(\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{a} + \bar{b}) = \bar{0}$ (koska lain 2 mukaan *jokaisen vektorin ristitulo itsensä kanssa* = $\bar{0}$)

$$\begin{aligned}
 (\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{a} - \bar{b}) &= \bar{a} \times \bar{a} - \bar{a} \times \bar{b} + \bar{b} \times \bar{a} - \bar{b} \times \bar{b} \\
 &= \bar{0} - \bar{a} \times \bar{b} - \bar{a} \times \bar{b} + \bar{0} = -2(\bar{a} \times \bar{b}).
 \end{aligned}$$

Ristitulo ja skalaarikolmitulo voidaan esittää myös 3-rivisinä determinantteina:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad \bar{a} \times \bar{b} \cdot \bar{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

HARJOITUKSIA

A

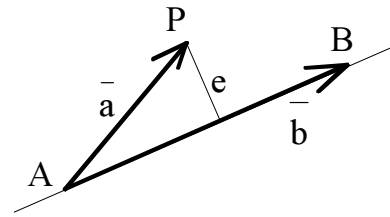
- 1.1 Pisteestä $P(-1,3,2)$ siirrytään 5 yksikköä vektorin $A(-1,9,4)$ $B(5,6,2)$ suuntaan. Mihin pisteeseen joudutaan?
- 1.2 Laske vektorin $\bar{a} = [4, -3, 0]$ ja koordinaattiakselien välisten kulmien kosinit. Näitä sanotaan vektorin \bar{a} *suuntakosineiksi*. (Vihje: Ajattele, että \bar{a} -vektori alkaa origosta. Esim. eräs y -akselin suuntainen vektori on $\bar{j} = [0, 1, 0]$.)
- 1.3 Laske vektorin $\bar{c} = [2, -1, 3]$ skalaarikomponentti ja ortogonaali-projektio (projektiovektori) suoralla $A(-1,9,4)$ $B(5,6,2)$. (Vihje: aseta \bar{c} alkamaan pisteestä A.)
- 1.4 Laske vektorien $[4, 2, -1]$ ja $[2, -4, 3]$ ristitulovektorin suunta.
- 1.5 Samasta pisteestä P lähtevät vektorit $\bar{a} = [3, -4, 2]$ ja $\bar{b} = [-1, 2, 4]$ määräävät erään tason. Määritä tämän tason normaalin suunta. (*Normaali* on normaalivektorin suuntainen suora.)
- 1.6 Laske vektorien $\bar{a} = [3, -1, 4]$, $\bar{b} = [2, 3, -2]$ ja $\bar{c} = [4, -3, 2]$ skalaari- ja vektorikolmitulot.

B

- 1.7 Kolmion (kolmiolevyn) painopiste jakaa jokaisen keskijanan kärjestä lukien suhteessa 2 : 1. Laske kolmion $A(1, 2, 2)$ $B(0, -1, -1)$ $C(1, 0, 1)$ painopiste.
- 1.8 Piste P etäisyys suorasta AB voidaan laskea monella tavalla:

a) Käyttämällä skalaarikomponenttia ja Pythagoraan lausetta,

b) Käyttämällä perustrigonometriaa seuraavalla tavalla:



$$e = |\bar{a}| \sin \alpha, \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}, \quad \cos \alpha = \dots$$

$$c) \quad e = |\bar{a}| \sin \alpha = \frac{|\bar{a}| |\bar{b}| \sin \alpha}{|\bar{b}|} = \frac{|\bar{a} \times \bar{b}|}{|\bar{b}|}.$$

Laske näillä kolmella tavalla pisteen $P(1,1,0)$ etäisyys suorasta $A(0,2,3) B(2,3,1)$.

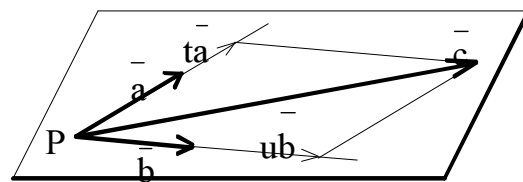
1.9 Vektorit $\bar{a} = [1, 1, 2]$, $\bar{b} = [2, 0, 1]$ ja $\bar{c} = [3, -2, 0]$ alkavat samasta pisteestä P. Laske \bar{c} :n kärjen etäisyys vektorien \bar{a} ja \bar{b} määräämstä tasosta. (Ohje: projisioi \bar{c} vektorien \bar{a} ja \bar{b} määräämän tason normaalille.)

1.10 Pisteestä $P(1, -1, -1)$ piirretään suoralle $A(2, -1, -5) B(2, 5, 1)$ normaali PD. Määritä suoran AB ne pisteet, jotka ovat etäisyydellä $\sqrt{2}$ pisteestä D.

C

1.11 Osoita yleisesti, että kolmiolevyn painopisteen koordinaatit ovat kärkien koordinaattien keskiarvot (vrt. 1.7).

1.12 Samasta pisteestä P lähtee kolme vektoria $\bar{a} = [2, 3, 1]$, $\bar{b} = [4, -2, 1]$ ja $\bar{c} = [-2, 3, z]$. Laske, millä z-komponentin arvolla vektori \bar{c} on vektorien \bar{a} ja \bar{b} määräämässä tasossa, ts. \bar{c} on muotoa



$$\bar{c} = t\bar{a} + u\bar{b} \quad (t, u \in \mathbf{R}).$$

Laske myös kertoimien t ja u arvot tässä tapauksessa.

1.13 Todista laskulakien avulla: jos skalaarikolmitulon kaksi vektoria ovat samoja, niin skalaarikolmitulon arvo = 0.

1.14 Osoita, että vektorin $\bar{a} = [a_1, a_2, a_3]$ suuntakosinit (vrt. harj. 1.2.) ovat samat kuin vektorin \bar{a}^o komponentit.

2 Taso

2.1 Tason yhtälö

Analyttisessä avaruusgeometriassa geometriset, lähinnä viivoja ja pintoja koskevat tehtävät muutetaan algebrallisiksi, laskennallisiksi vektoreita ja koordinaatteja käyttäen.

Tehtävä: Tunnetaan tason T yksi piste $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ja normaalin suunta $a:b:c$. Johda tason T yhtälö.

Olkoon $P(x, y, z)$ avaruuden yleinen piste. Milloin piste P kuuluu tasoon T ?

$$P \in T \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{P_0P} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{P_0P} = 0.$$

Koska

$$\vec{n} = [a, b, c] \text{ ja}$$

$$\vec{P_0P} = [x - x_0, y - y_0, z - z_0],$$

niin ehto $\vec{n} \cdot \vec{P_0P} = 0$ saa muodon

$$(1) \quad \boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}$$

Esim. 1 Jos taso kulkee pisteen $(2, 3, -5)$ kautta ja sen normaalin suunta on $4:(-6):1$, niin tason yhtälö on

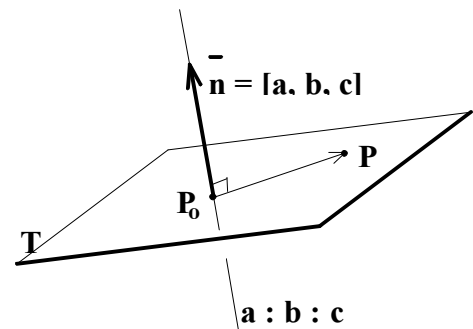
$$4 \cdot (x - 2) - 6 \cdot (y - 3) + (z + 5) = 0.$$

$$\text{eli} \quad 4x - 6y + z + 15 = 0.$$

Yleisesti, jos tason yhtälöstä (1) poistetaan sulkeet, yhtälö saa muodon

$$(2) \quad \boxed{ax + by + cz + d = 0}.$$

Huom. Tason yhtälölle (1) tai (2) on tyypillistä, että se on *lineaarinen* ja että siinä *tuntemattomien kertoimet antavat normaalin suunnan*.



Esim. 2 Yhtälö $5x - y + 2z - 3 = 0$ on lineaarinen ja esittää siten tasoa. Tason normaalin suunta on $5:(-1):2$. Tason pisteitä saat kun annat kahdelle muuttujalle jonkin arvon ja ratkaiset kolmannen:

$$x = 0, z = 0 \Rightarrow y = -3 \quad \therefore (0, -3, 0)$$

$$x = 0, z = 2 \Rightarrow y = 1 \quad \therefore (0, 1, 2) \text{ jne.}$$

Esim. 3 *Kolmen pisteen kautta kulkeva taso.* Määritä pisteiden $A(2,3,1)$, $B(4,1,-3)$ ja $C(1,1,1)$ kautta kulkevan tason yhtälö. Tason normaalivektori ja normaalin suunta saadaan *ristitulon* avulla.

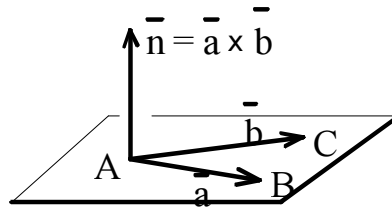
$$\vec{a} = \vec{AB} = [2, -2, -4] \quad 2 \quad \therefore \vec{a} \times \vec{b} = [-8, 4, -6]$$

$$\vec{b} = \vec{AC} = [-1, -2, 0] \quad -1$$

\therefore Normaalin suunta on $(-8):4:(-6)$
 $= 4:(-2):3$.

Yhtälö on siten

$$4(x-2) - 2(y-3) + 3(z-1) = 0 \text{ eli } 4x - 2y + 3z - 5 = 0.$$



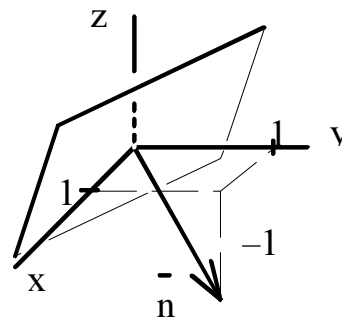
*Tarkistus: Pisteiden A, B ja C koordinaatit toteuttavat yhtälön.

Esim. 4 *Sijainniltaan erikoisia tasoja.*

- 1) Jos tason yhtälöstä puuttuu vakiotermi, kyseessä on *origin kautta kulkeva taso*.

Esim. yhtälön $x + y - z = 0$ eli yhtälön $z = x + y$ kuvaaja on origin kautta kulkeva taso, sillä yhtälö on lineaarinen ja piste $(0,0,0)$ toteuttaa yhtälön.

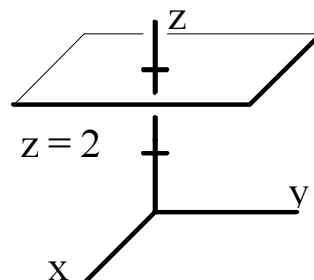
Tason normaalin suunta on $1:1:(-1)$ ts. eräs normaalivektori on $\vec{n} = [1, 1, -1]$.



- 2) Esim. yhtälön

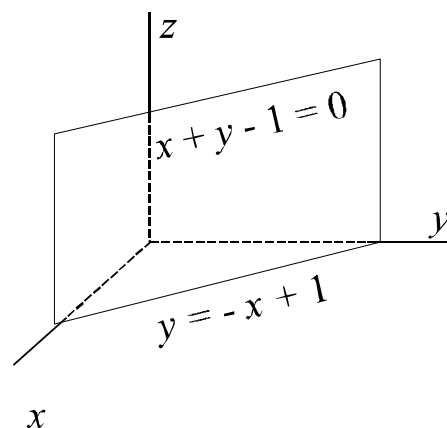
$$z = 2$$

toteuttavat kaikki ne pisteet (x,y,z) , joilla z -koordinaatti on $= 2$, mutta x - ja y -koordinaatit saavat olla mitä tahansa (yhtälö ei aseta niille mitään ehtoa). Kyseessä on



"korkeudella 2" oleva taso eli z-akselia vastaan kohtisuora taso, joka leikkaa z-akselin kohdassa 2. Jos siis tason yhtälössä on *vain yksi muuttuja* (ts. kahden muun kerroin = 0), taso on kohtisuorassa vastaavaa akselia vastaan.

- 3) Taso $x + y - 1 = 0$ muodostuu niistä pisteistä (x, y, z) , joiden x - ja y -koordinaatteja sitoo tämä yhtälö ja z saa olla mikä tahansa. Kyseessä on siis taso, joka leikkaa xy -tason pitkin suoraa $x + y - 1 = 0$ ja joka on pystysuora eli z -akselin suuntainen.



2.2 Pisteen etäisyys tasosta

***Tehtävä:** Johda laskukaava pisteen $P_1(x_1, y_1, z_1)$ etäisyydelle e tasosta

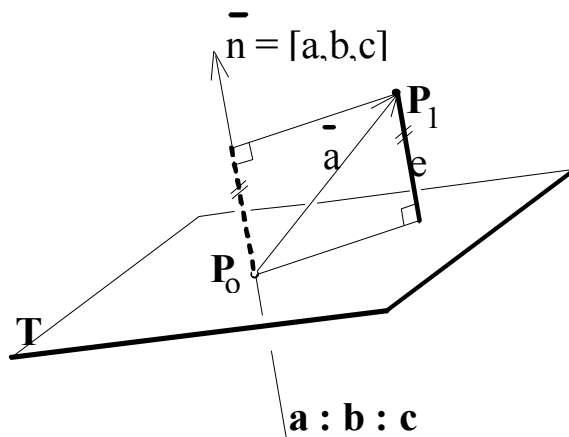
$$T: ax + by + cz + d = 0.$$

Olkoon $P_0(x_0, y_0, z_0)$ tason T jokin piste. Etäisyys e on yhtä suuri kuin vektorin

$$\vec{a} = \vec{P_0P_1} = [x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0]$$

skalaarikomponentin a_n itseisarvo:

$$e = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}.$$



Koska $P_0 \in T$, niin $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$ ja siten

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{n} &= \vec{n} \cdot \vec{a} = a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0) \\ &= ax_1 + by_1 + cz_1 - \underbrace{ax_0 - by_0 - cz_0}_{=d} = ax_1 + by_1 + cz_1 + d. \end{aligned}$$

Koska lisäksi $|\vec{n}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, niin

$$e = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Esim. 5 Laske pisteen $(2, -3, -4)$ etäisyys tasosta $z = x + 3y - 2$.

Tason yhtälössä täytyy siirtää ensin kaikki termit samalle puolelle, ts. yhtälön täytyy olla muodossa $x + 3y - z - 2 = 0$. Täten

$$e = \frac{|2 + 3 \cdot (-3) - (-4) - 2|}{\sqrt{1 + 9 + 1}} = \frac{5}{\sqrt{11}}.$$

2.3 Tason vektori- ja parametriesitykset

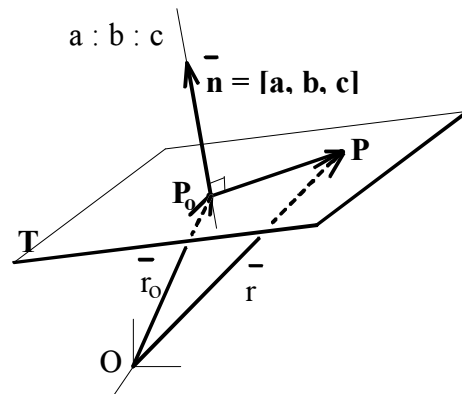
Tasolle voidaan johtaa kaksi erityyppistä vektoriesitystä, joista edellinen oli jo oikeastaan esillä tason yhtälöä johdettaessa. Jälkimmäisen esityksen ajatustapa on sovellusten kannalta käyttökelpoisempi.

*1) Taso muodostui sellaisista pisteistä P , että

$$\vec{n} \cdot \vec{P}_o P = 0.$$

Vektori $\vec{P}_o P = \vec{r} - \vec{r}_o$, missä \vec{r} ja \vec{r}_o ovat pisteiden P ja P_o paikkavektorit. Täten tasolle T saadaan vektoryhtälö

$$(3) \quad \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_o) = 0.$$



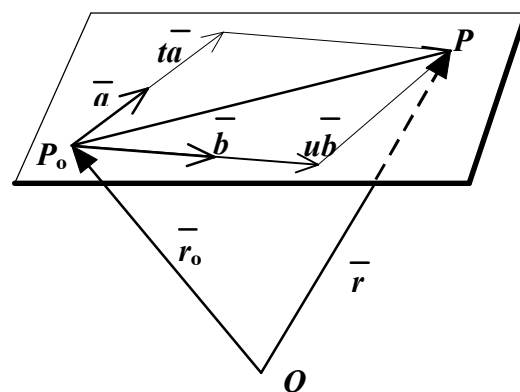
Koska $\vec{n} = [a, b, c]$ ja $\vec{r} - \vec{r}_o = [x - x_o, y - y_o, z - z_o]$, yhtälö (3) on itse asiassa sama kuin yhtälö $a(x - x_o) + b(y - y_o) + c(z - z_o) = 0$ lyhyesti kirjoitettuna.

*2) Jos tasosta tunnetaan kaksi vektoria \vec{a} ja \vec{b} , jotka eivät ole samaneikä vastakkaisuuntaisia, niin vektori $\vec{r} - \vec{r}_o$ voidaan esittää muodossa

$$\vec{r} - \vec{r}_o = t\vec{a} + u\vec{b}, \text{ missä } t, u \in \mathbf{R}.$$

Tästä saadaan tason T yleisen pisteen P paikkavektorille \vec{r} seuraava yhtälö:

$$(4) \quad \vec{r} = \vec{r}_o + t\vec{a} + u\vec{b}, \quad t, u \in \mathbf{R}.$$



Esimerkiksi edellisessä kuvassa $\vec{r} \approx \vec{r}_o + 2,1\vec{a} + 1,9\vec{b}$.

Kun yhtälössä (4) kertoimet t ja u saavat kaikki reaalilukuarvot, niin paikkavektorin \vec{r} kärki "piirtää" koko tason T . Siksi yhtälö (4) on tason parametrimuotoinen vektoryhtälö, jossa on kaksi parametria t ja u . Vektorit \vec{a} ja \vec{b} ovat tason suuntavektorit.

*3) Yhtälö (4) on komponenttimuodossa seuraava:

$$[x, y, z] = [x_0, y_0, z_0] + t [a_1, a_2, a_3] + u [b_1, b_2, b_3].$$

Koska vastinkomponenttien täytyy olla yhtälön kummallakin puolella samoja, tämä yhtälö hajoaa kolmeksi yhtälöksi

$$(5) \quad \begin{cases} x = x_0 + ta_1 + ub_1 \\ y = y_0 + ta_2 + ub_2 \\ z = z_0 + ta_3 + ub_3 \end{cases} \quad (\text{tason parametriyhtälöt}).$$

***Esim. 6** Jos $A(2,3,1)$, $B(4,1,-3)$ ja $C(1,1,1)$ ovat tason T kolme pistettä, niin tason suuntavektoreiksi voidaan valita

$$\vec{a} = \vec{AB} = [2, -2, -4] \quad \text{ja} \quad \vec{b} = \vec{AC} = [-1, -2, 0].$$

Tason vektorimuotoinen yhtälö on siten (esim.)

$$\vec{r} = [2, 3, 1] + t[2, -2, -4] + u[-1, -2, 0] \quad (t, u \in \mathbf{R})$$

ja parametriyhtälöt ovat

$$\begin{cases} x = 2 + 2t - u \\ y = 3 - 2t - 2u \\ z = 1 - 4t \end{cases}$$

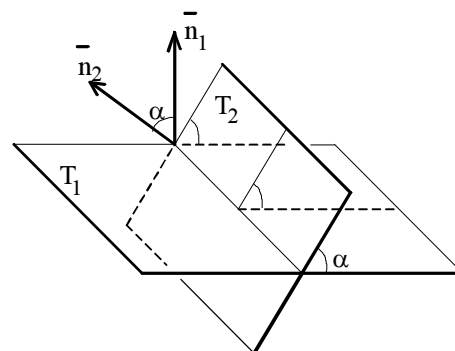
Tästä saadaan tason pisteitä antamalla parametreille arvoja.

*2.4 Tasoa koskevia lisätehtäviä

*1) Kahden tason välinen diedrikulma on sama kuin tasojen normaalien välinen terävä kulma. Se saadaan siten yhtälöstä

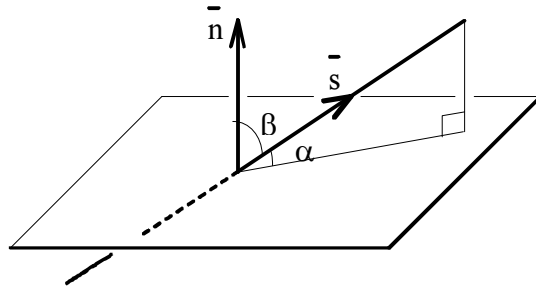
$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}.$$

Ilman itseisarvoja tuloksena voisi olla vastaava tylppä kulma.



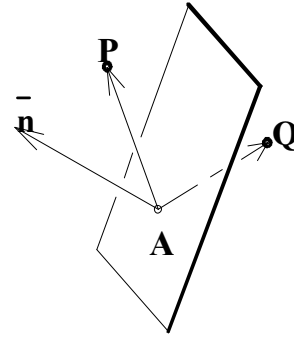
*2) Tason ja suoran välinen kulma α saadaan laskemalla ensin tason normaalin \vec{n} ja suoran välinen terävä kulma β yhtälöstä

$$\cos \beta = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{s}|}{\|\vec{n}\| \|\vec{s}\|}$$



(Jos suoran suuntavektori \vec{s} sattuu suuntautumaan kuvan tilanteessa alaviistoon, niin ilman itseisarvoja edellinen yhtälö antaisi suoran ja normaalin välisen tylpän kulman.) Kulma α saadaan sitten β :n komplementtikulmana $\alpha = \pi/2 - \beta$.

*3) Kaksi pistettä P ja Q ovat eri puolilla tasoa T, jos vektoreista \vec{AP} ja \vec{AQ} toinen muodostaa terävän- ja toinen tylpän kulman normaalin \vec{n} kanssa (vrt. kuva) ts. jos näiden vektorien pistetuloista \vec{n} :n kanssa toinen on positiivinen ja toinen negatiivinen.



HARJOITUKSIA

A

- 2.1 Tasolla T olevan pisteen $A(2, -5, 4)$ kautta piirretään T:lle normaali, joka kulkee myös pisteen $B(-4, 3, 10)$ kautta. Määritä a) tason normaalin suunta, b) tason T jokin normaalivektori, c) T:n yhtälö.
- 2.2 Mikä on sen tason yhtälö, joka on tason $x + 2y - z = 1$ suuntainen ja kulkee pisteen $(-1, 1, 2)$ kautta?
- 2.3 Määritä tason $x + 2y - 3z + 2 = 0$ neljä pistettä.
- 2.4 Määritä pisteiden $(2, 2, 1)$, $(3, 0, 2)$ ja $(1, 1, 3)$ kautta kulkevan tason yhtälö.
- 2.5 Laske tasojen $2x + 3y - z + 2 = 0$ ja $2x + 3y - z + 5 = 0$ välinen etäisyys. (Tasot ovat yhdensuuntaiset, miksi?)

- *2.6 Määritä tason $\begin{cases} x = 3 - 4t - 5u \\ y = 2 + 2t - 3u \\ z = 3 + t + 2u \end{cases}$ suuntavektorit ja normaalivektori.

B

- 2.7 Kahden tason yhteinen normaali leikkaa nämä tasot pisteissä $(2,1,0)$ ja $(1,-1,4)$. Mitkä ovat näiden tasojen yhtälöt?
- 2.8 Millä a :n arvolla pisteen $(1,0,1)$ etäisyys tasosta $ax + y - 3z + 1 = 0$ on $\sqrt{2}/2$?
- 2.9 Millä a :n arvolla pisteet $(1,3,2)$, $(-1,4,2)$, $(4,0,5)$ ja $(a, 2a+1, 4)$ ovat samassa tasossa?
- 2.10 Millainen on seuraavan yhtälön kuvaaja avaruudessa?
a) $x = 3$, b) $y + 1 = 0$, c) $z = 2y$, d) $x + y + 1 = 0$, e) $x + y + z = 0$.
- 2.11 Määritä sen tason yhtälö, joka leikkaa xy -tason pitkin suoraa $3x + 2y = 6$ ja z -akselin kohdassa $z = -1$ (xy -tason geometriassa yhtälö $3x + 2y = 6$ esittää suoraa, mutta avaruusgeometriassa pystytasoa).
- 2.12 Mitä suoraa pitkin sellainen taso leikkaa yz -tason, joka kulkee pisteen $(4,3,2)$ kautta ja jonka normaalin suunta on $1:2:2$?
- 2.13 Osoita, että piste $(2, 12, 4)$ on tasossa $\begin{cases} x = 2 - 3t - 4u \\ y = 1 + 2t - u \\ z = -2 + 3t + 2u \end{cases}$.

C

- 2.14 Ovatko pisteet $(2,1,0)$ ja $(-1,2,3)$ samalla vai eri puolilla tasoa $2x - 3y + z - 2 = 0$?
- 2.15 Pisteestä $P(2,-3,1)$ siirrytään tason $T: x + 3y + z = 2$ normaali-vektorin $\vec{n} = [1, 3, 1]$ määräämä matka pisteeseen Q . Osoita, että siirtymissuunta on tällä kertaa tasoon päin.
- 2.16 Pisteestä $P(2,-3,1)$ siirrytään tason $T: 2x - 3y + z + 5 = 0$ normaalivektorin $\vec{n} = [2, -3, 1]$ määräämä matka pisteeseen Q .

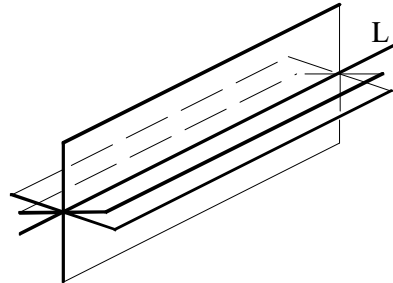
a) Osoita, että etäisyys tasosta kasvaa.

b) Onko siirtymissuunta tällä kertaa tasoon päin (sen toiselle puolelle) vai tasosta poispäin?

2.17 *Tasoviuhka.* Oletetaan, että kaksi tasoa

$$T: ax + by + cz + d = 0 \quad \text{ja}$$

$$T': a'x + b'y + c'z + d' = 0$$



leikkaavat toisensa. Kiinteällä k :n arvolla yhtälö

$$(ax + by + cz + d) + k(a'x + b'y + c'z + d') = 0$$

esittää jotakin näiden tasojen leikkaussuoran L kautta kulkevaa tasoa, koska se on 1) lineaarinen ja 2) leikkaussuoran piste toteuttaa kummankin tason T ja T' yhtälön ja siten myös vm. yhtälön.

Antamalla k :lle arvoja saadaan kaikki muut leikkaussuoran kautta kulkevat tasot paitsi tasoa T' .

Sovellus: Määritä tasojen $x + y - z + 1 = 0$ ja $2x + y - z + 3 = 0$ leikkaussuoran kautta kulkevista tasoista se, joka kulkee myös pisteen $(1, -2, 1)$ kautta.

2.18 Määritä tasojen $3x - 2y + z - 12 = 0$ ja $5x - y + 9 = 0$ leikkaussuoran kautta kulkevista tasoista se, joka on kohtisuorassa tasoa $x + 3y - 16 = 0$ vastaan (käytä tasoviuhkaa, ks. edellinen tehtävä).

2.19 Määritä tasoviuhkasta $(3x + 4y - 5) + k(2y - z) = 0$ ne kaksi tasoa, jotka ovat etäisyydellä 1 origosta.

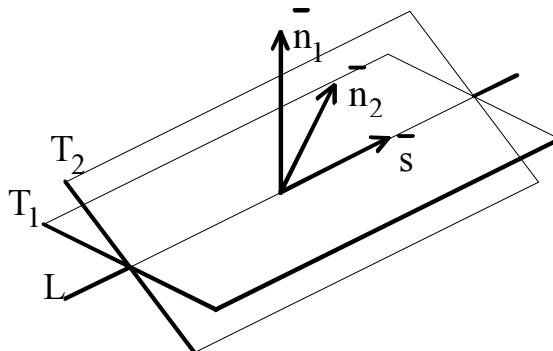
3 Suora

3.1 Suora kahden tason leikkauksena

Jos tasot

$$(1) \quad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

leikkavat toisensa, niin **yhtälöpari (1) esittää näiden tasojen leikkaussuoraa**, sillä leikkaussuoran pisteet ovat kummassakin tasossa eli toteuttavat kummankin yhtälön.



Suoran (1) suuntavektori \vec{s} on kohtisuorassa kummankin tason normaalia vastaan, joten **suoran (1) suunnan antaa tasojen (1) normaalien ristitulo**.

Esim. 1 Määritä suoran $\begin{cases} 4x + y - 3z = 5 \\ 2x - 3y + z = 1 \end{cases}$ suunta ja suoran jokin piste.

$$\begin{cases} \vec{n}_1 = [4, 1, -3] & 4 \\ \vec{n}_2 = [2, -3, 1] & 2 \end{cases} \quad \vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = [-8, -10, -14]$$

\therefore Suoran suunta on $(-8):(-10):(-14) = 4:5:7$.

Suoran pisteitä saat, kun valitset yhdelle tuntemattomista jonkin arvon ja ratkaiset kaksi muuta yhtälöparista, esim.

$$x = 0 \Rightarrow \begin{cases} -3y + z = 1 \cdot 3 \\ y - 3z = 5 \cdot 1 \end{cases} \Rightarrow -8y = 8 \Rightarrow y = -1, z = -2.$$

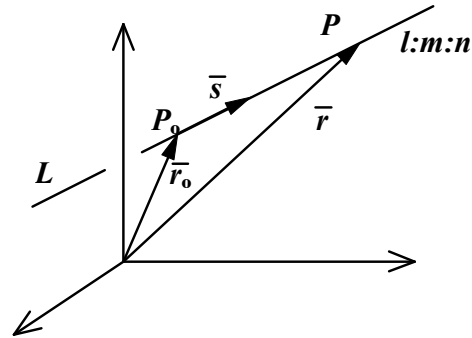
\therefore Suoran eräs piste on $(0, -1, -2)$.

3.2 Suoran vektoriyhtälö ja parametriesitys

Tehtävä: Tunnetaan suoran L yksi piste $P_o(x_o, y_o, z_o)$ ja suoran suunta $l:m:n$ eli (eräs) suuntavektori $\vec{s} = [l, m, n]$. Johda suoralle vektoriyhtälö.

Suoran ns. **suuntalukuina** (suuntavektorin komponentteina) käytetään perinteisesti kirjaimia l , m ja n . Luonnollisempi mutta mutkikkaampi merkintä olisi esim. s_1, s_2, s_3 tai s_x, s_y, s_z .

Avaruuden yleinen piste P on suoralla L , jos sen paikkavektori \vec{r} saadaan siten, että P_0 :n paikkavektoriin \vec{r}_0 lisätään suuntavektori \vec{s} sopivalla luvulla t kerrottuna, ts. jos



$$(2) \quad \boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s}} \quad (t \in \mathbf{R}).$$

Esim. kuvassa $\vec{r} \approx \vec{r}_0 + 2,4\vec{s}$. Kun t saa kaikki reaalityyppiset arvot, niin \vec{r} :n kärki "piirtää" koko suoran L . Siten (2) on suoran vektorimuotoinen parametriesitys, parametrina t .

Yhtälö (2) on komponenttimuodossa seuraava:

$$[x, y, z] = [x_0, y_0, z_0] + t[l, m, n].$$

Tämä hajoaa kolmeksi yhtälöksi

$$(3) \quad \boxed{\begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn \end{cases}} \quad (\text{suoran parametriesitys}).$$

Esim. 2 Esimerkissä 1 suoran suunnaksi saatiin 4:5:7 ja suoran erääksi pisteeksi $(0, -1, -2)$. Täten suoran vektoryhtälö on

$$\vec{r} = [0, -1, -2] + t[4, 5, 7]$$

ja parametreyhtälöt ovat

$$\begin{cases} x = 4t \\ y = -1 + 5t \\ z = -2 + 7t \end{cases}$$

Ratkaistaan ensimmäisestä yhtälöstä t :n arvo $t = x/4$ ja sijoitetaan se muihin. Näin saadaan suoralle esitys

$$\begin{cases} y = -1 + 5x/4 \\ z = -2 + 7x/4 \end{cases} \quad \text{eli} \quad \begin{cases} 5x - 4y = 4 \\ 7x - 4z = 8 \end{cases}$$

*Parametrin eliminointi muutti parametriesityksen kahden tason leikkausuoraesitykseksi. Tasot eivät ole samat kuin alunperin esimerkissä 1, vaan tasoista edellinen on pystysuora (z -akselin suuntainen) ja jälkimmäinen y -akselin suuntainen. Suoran kautta kulkee nimittäin äärettömän monta tasoa,

ns. *tasoviuhka*. Suoran yhtälöiksi voidaan valita minkä tahansa kahden tällaisen tason yhtälöt.

Parametriyhtälöistä (tai vektoriyhtälöstä) saadaan helposti suoran pisteitä, kun parametrille t annetaan arvoja. Myös suoran ja tason leikkauspisteen laskemisessa parametriesitys on usein laskuiltaan yksinkertaisin.

Esim. 3 Laske suoran $A(3,-2,1)$ $B(1,4,3)$ ja tason $2x - y + 4z = 6$ leikkauspiste Q .

Suoran AB suunta $= (-2):6:2 = 1:(-3):(-1)$.

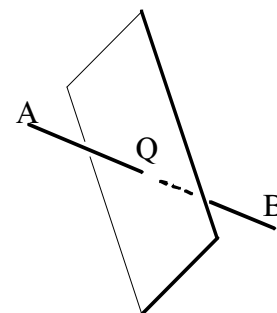
Suoran kolme parametriyhtälöä ja tason yhtälö muodostavat yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 - 3t \\ z = 1 - t \\ 2x - y + 4z = 6 \end{cases}$$

Kun $x:n$, $y:n$ ja $z:n$ lausekkeet kolmesta ensimmäisestä yhtälöstä sijoitetaan alimpaan yhtälöön, t :lle tulee yhtälö

$$2(3+t) - (-2-3t) + 4(1-t) = 6 \quad \therefore t = -6.$$

Kolmesta ensimmäisestä yhtälöstä saadaan tällä $t:n$ arvolla leikkauspisteeksi $Q = (-3, 16, 7)$.



*3.3 Suoran normaalimuoto

*Kun suoran kolmesta parametriyhtälöstä (3) ratkaistaan yhdestä $t:n$ lauseke ja sijoitetaan kahteen muuhun, jäljelle jää kaksi parametritonta yhtälöä (vrt. Esimerkin 2 loppuosa). Parametrin eliminointi voidaan tehdä niinkin, että yhtälöistä (3) ratkaistaan jokaisesta $t:n$ lauseke ja saadut lausekkeet merkitään yhtäsuuriksi (nehän ovat kaikki $t:n$ suuruksia ja siten keskenäänkin yhtä suuria):

$$(4) \quad \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \quad (= t).$$

*Tämänmuotoista suoran esitystä sanotaan perinteisesti suoran *normaalimuodoksi*. Siitä näkyy välittömästi suoran yksi piste ja suunta (niinkuin parametrimuodostakin).

Esim. 4 Kaksoisyhtälö $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = z-3$ esittää suoraa, jonka suunta on 3:2:1 ja eräs piste on (2,-1,3). Esitys voidaan hajoittaa kahdeksi yhtälöksi, esim. yhtälöiksi

$$\frac{x-2}{3} = z-3 \quad \text{ja} \quad \frac{y+1}{2} = z-3 \quad (\text{kolmas } \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} \text{ seuraa}$$

näistä). Yhtälöt ovat sievennettyinä $\begin{cases} x-3z+7=0 \\ y-2z+7=0 \end{cases}$.

HARJOITUKSIA

A

3.1 a) Määritä suoran $\begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$ suunta. b) Osoita, että yhtälöpari

$$\begin{cases} 3x - 1 = 0 \\ 3y - 3z + 5 = 0 \end{cases} \text{ esittää samaa suoraa.}$$

3.2 Määritä suoran $\begin{cases} x - 2y + 4z - 14 = 0 \\ x + 20y - 18z + 30 = 0 \end{cases}$ suunta ja kaksi pistettä.

3.3 Suoran suunta on 3:4:(-1) ja suora kulkee pisteen (2,-7,9) kautta. Määritä suoran a) vektoriyhtälö, b) parametriyhtälöt, c) jokin esitys yhtälöparina.

3.4 Määritä edellisen suoran ja tason $x + 2y - z = 3$ leikkauspiste.

3.5 Leikkaavatko suorat $\begin{cases} x = 3z + 4 \\ y = 2z + 3 \end{cases}$ ja $\begin{cases} x = z + 2 \\ y = z - 2 \end{cases}$ toisensa vai kulkevatko ne *ristikkäin*?

B

3.6 Pisteen P(2,-1,3) kautta piirretään tasolle $3x - 2y + z + 3 = 0$ normaali. Laske a) tämän normaalin ja tason leikkauspiste Q, b) pisteen P *peilikuva* R tämän tason suhteen. Piirrä tilannetta havainnollistava kuva (ei koordinaatistoon todelliseen asemaan sijoitettua kuvaa).

3.7 Laske pisteen P(1,0,2) peilikuva Q suoran A(4,2,4) B(1,-1,-5) suhteen siten, että lasket ensin (parametrimuotoisen) suoran AB ja pisteestä P tälle suoralle piirretyn normaalitason leikkauspisteen D. (Muita tapoja: Esim. 7 luvussa 1)

- 3.8 Pisteen $P(1,0,0)$ kautta piirretään suoralle L :
$$\begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ x + z - 5 = 0 \end{cases}$$
 normaalitaso T . Määritä a) T :n yhtälö, b) $Q = L \cap T$, c) P :n etäisyys suorasta L , d) P :n peilikuva R suoran L suhteen.
- 3.9 Laske pisteen $(3,3,2)$ etäisyys viereisestä suorasta
$$\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$
 a) suoran normaalitason, b) projektiovektorin avulla.
- 3.10 Kuinka suuren kulman edellisen tehtävän suora muodostaa tason $x + 5y - 7z + 2 = 0$ normaalin kanssa?
- 3.11 Jana $A(2,5,0)$ $B(6,-3,8)$ jaetaan neljään yhtä suureen osaan. Esitä jakopisteiden paikkavektorit samantapaisessa muodossa kuin suoran vektoriyhtälö on. Mitkä ovat näiden jakopisteiden koordinaatit?
- 3.12 Määritä janan $(2,0,1)$ $(4,-2,3)$ a) keskipiste ja b) keskinormaalitaso.

C

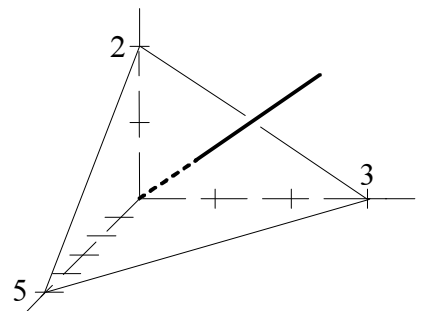
- 3.13 a) Osoita, että suorat $x - 3 = -y - 3 = \frac{z - 6}{2}$ ja $\frac{x - 3}{2} = y = 1 - z$ leikkaavat toisensa. Mikä on leikkauspiste? b) Laske näiden suorien välinen (terävä) kulma. c) Mikä on näiden suorien määräämän tason vektoriyhtälö? d) Entä koordinaattiyhtälö?

- 3.14 Laske seuraavan tason ja suoran leikkauspiste:

$$\vec{r} = [2, -1, 3] + u[4, 1, 0] + v[6, 2, 2] \quad \vec{r} = [6, 2, 3] + t[-3, -1, -5]$$

- 3.15 Taso leikkaa koordinaattiakselit kohdissa 5, 3 ja 2 (kuva). a) Osoita, että tason yhtälö voidaan esittää muodossa

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1.$$



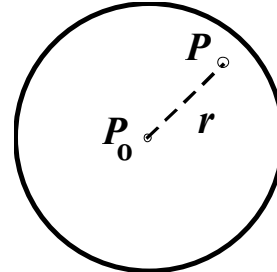
- b) Laske origosta tasolle piirretyn normaalin "kantapiste" eli leikkauspiste tason kanssa. Tasosta on piirretty näkyviin vain ns. *jälkikolmio*, ts. se osa, jonka *koordinaattitasot* leikkaavat tästä tasosta. Koordinaattitasot xy , xz ja yz ovat ns. *perustaso*, *pystytaso* ja *sivutaso*.

- 3.16 Laske tehtävien 3.8 ja 3.9 mukaisten ristikkäisten suorien välinen lyhin etäisyys. Sen antaa suorien yhteinen normaali. Vihje: $\vec{P_1P_2} \perp \vec{s}_1, \vec{s}_2$, missä esim. P_1 on suoran L_1 yleinen piste (parametri-muodossa tai paikkavektorilla esitettynä).

4 Toisen asteen pinnoista

4.1 Pallo

Piste $P(x,y,z)$ on r -säteisen pallon pinnalla silloin ja vain silloin kun janan $\overline{P_0P}$ pituus = r eli tämän pituuden neliö = r^2 , siis



$$(1) \quad \boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2}$$

Kun neliöön korotukset suoritetaan, pallon yhtälö (1) saa muodon

$$(2) \quad \boxed{x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0}$$

Esim. 1 Yhtälöstä $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y = 1$ saadaan **neliöimällä** yhtälö

$$(x - 1)^2 + (y + \frac{1}{2})^2 + z^2 = \frac{9}{4},$$

joten kyseessä on pallo, jonka kp. on $(1, -\frac{1}{2}, 0)$ ja säde $\frac{3}{2}$.

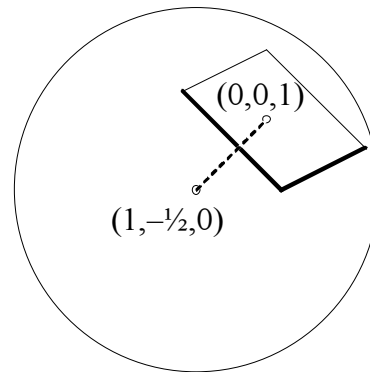
Esim. 2 Määritä edellisen pallon pisteeseen $(0,0,1)$ piirretyn **tangenttitason** T yhtälö. Säteen suunta

$$(-1) : \frac{1}{2} : 1 = 2 : (-1) : (-2)$$

antaa tangenttitason normaalin suunnan. Koska taso T kulkee lisäksi pisteen $(0,0,1)$ kautta, yhtälö on

$$2x - y - 2(z - 1) = 0 \text{ eli}$$

$$2x - y - 2z + 2 = 0.$$



Pallon yhtälöille (1) ja (2) on tyypillistä, että niissä **toisen asteen termien kertoimet ovat samat**, mutta eivät välttämättä = 1, sillä yhtälön voi kertoa tai jakaa nolasta eroavalla luvulla.

Jotta muotoa (2) oleva yhtälö esittäisi palloa, neliöinnin jälkeen oikealle puolelle (säteen neliöksi) täytyy tulla positiivinen luku kuten Esimerkissä 1. Jos tämä luku = 0, kyseessä on "0-säteinen pallo" eli piste. Jos taas tämä luku on < 0 , yhtälö ei esitä mitään pintaa. Esim. yhtälössä

$$(x-1)^2 + (y + \frac{1}{2})^2 + z^2 = -\frac{9}{4}$$

vp. on aina > 0 , mutta op. < 0 , joten mikään (x,y,z) -piste ei toteuta sitä.

4.2 Ellipsoidi

Jos ellipsi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ pyöräytetään x -akselin ympäri, saadaan ns. **pyöräysellipsoidi**, jonka **akselina** on x . Kun tätä litistetään (tai venytetään) z -akselin suunnassa, saadaan yleinen **ellipsoidi**, jonka yhtälö on muotoa

$$(3) \quad \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.}$$

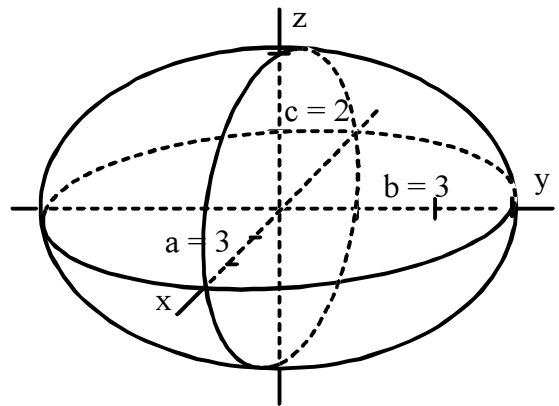
(Tarkempi perustelu sivuutetaan, vrt. harj. 4.13. ja 4.14.)

Luvut a , b ja c ovat ellipsoidin **puoliakselit**, vrt. seuraava kuva.

Esim. 3 $4x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36 \quad | :36$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1.$$

Kyseessä on ellipsoidi, jonka puoliakselit ovat $a = b = 3$ ja $c = 2$. Koska x - ja y -akselin suuntaiset puoliakselit ovat yhtä pitkät, ellipsi leikkaa xy -tason pitkin ympyrää.



Pinta on siten **pyöräysellipsoidi**, jonka **akselina** on z . Koska z -suuntainen puoliakseli on muita lyhempi, pinta on saatu 3-säteisestä pallosta litistämällä palloa z -suunnassa (eli korvaamalla pallon z -koordinaatit $\frac{2}{3}z$:lla).

Tämän ellipsoidin muotoa voidaan tutkia myös *tasoleikkausten* avulla:

1) *Leikkaus xy-tasossa:*

$$z = 0 \Rightarrow 4x^2 + 4y^2 = 36 \text{ eli } x^2 + y^2 = 9 \therefore 3\text{-säteinen ympyrä}$$

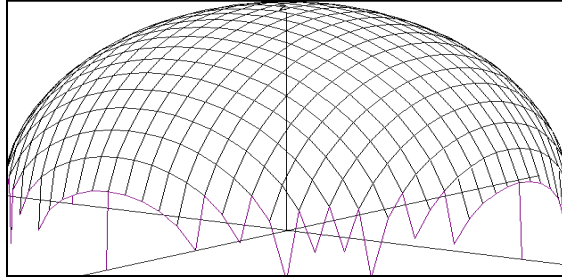
2) *Leikkaus yz-tasossa:*

$$x = 0 \Rightarrow 4y^2 + 9z^2 = 36 \text{ eli } \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$$

\therefore ellipsi, puoliakselit y - suunnassa = 3, z - suunnassa = 2.

Käsittele vastaavasti kolmas "pääleikkaus" $y = 0$.

Esimerkiksi *Derive*-ohjelman piirtämä kuva muodostuu itse asiassa pinnan tasoleikkauksista. Viereisessä kuvassa on edellisen ellipsoidin puolikas.



Esimerkin 3 ellipsoidi osoittaa ehkä yhtälöä (3) havainnollisemmin, että ellipsoidin yhtälö eroaa pallon yhtälöstä seuraavassa mielessä:

Ellipsoidin yhtälölle on tyypillistä, että siinä ovat mukana kaikki kolme toisen asteen termiä ja niiden kertoimet ovat **samanmerkkiset**. Aidolla ellipsoidilla nämä kolme kerrointa eivät kaikki ole yhtä suuria, muuten kyseessä on ellipsoidin erikoistapaus, pallo.

Jos mukana on myös 1. asteen termejä, ellipsoidin keskipiste ei ole origossa ja se löytyy neliöimällä samaan tapaan kuin pallolla.

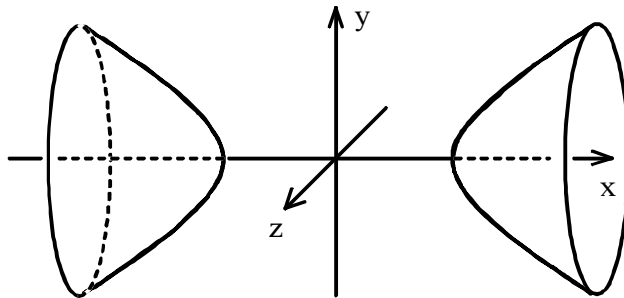
4.3 Hyperboloidit

Hyperbelistä ja liittohyperbelistä $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$ saadaan pyöryttämällä ja

litistämällä **2- ja 1-vaippaiset hyperboloidit** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1$:

1) **kaksivaippainen hyperboloidi**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

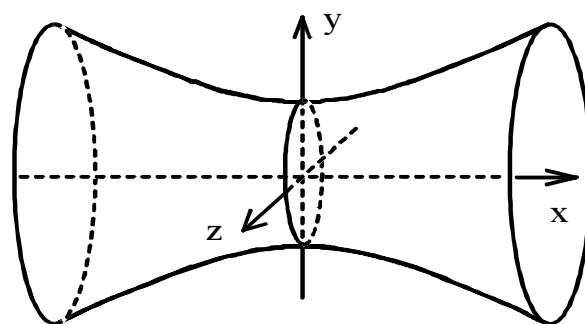


Yhtälössä on **kaksi miinusmerkkiä**, ja etumerkiltään vähemmistössä oleva termi eli tässä x antaa hyperboloidin akselin suunnan.

2) yksivaippainen hyperboloidi

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Yhtälössä on **yksi** miinusmerkki, ja etumerkiltään vähemmistössä oleva termi eli tässä x antaa hyperboloidin akselin suunnan.



Jos hyperboloidin keskipiste ei ole origossa, mukana on myös 1. asteen termejä. Keskipiste saadaan selville neliöimällä.

Hyperboloidin yhtälölle on tyypillistä, että siinä ovat mukana kaikki kolme toisen asteen termiä ja niiden kertoimet eivät kaikki ole samanmerkkisiä. Lisäksi (mahdollisen neliöinnin jälkeen) vakiotermi ei ole 0.

Jos vakiotermi on 0, kyseessä on kartio, mikä esitellään tarkemmin seuraavassa kohdassa.

Esim. 4 Tutki seuraavaa pintaa (laji, mahdollinen keskipiste ja akselin suunta, kuva)

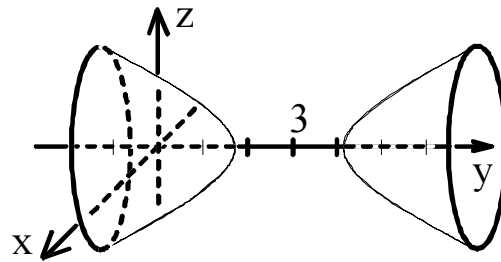
$$\begin{aligned} x^2 - 4y^2 + z^2 + 24y &= 32 && | \text{neliöinti} \\ x^2 - 4(y^2 - 6y) + z^2 &= 32 \\ x^2 - 4(y^2 - 2 \cdot y \cdot 3 + 3^2) + z^2 &= 32 - 4 \cdot 3^2 \\ x^2 - 4(y - 3)^2 + z^2 &= -4 && | :(-4) \\ -\frac{x^2}{4} + \frac{(y - 3)^2}{1} - \frac{z^2}{4} &= 1 \end{aligned}$$

Tämä on 2-vaippainen hyperboloidi (2 miinusmerkkiä, kun op. on = 1). Keskipiste on (0,3,0) ja akseli on y-akselin suuntainen (koska y-termi on etumerkiltään vähemmistössä). Näiden tietojen perusteella saadaan hahmoteltua pinnan kuvaaja suunnilleen, vrt. seuraava kuva. Siitä nähdään, että akseli on y (eikä ainoastaan y-akselin suuntainen).

Tasoleikkausten avulla saadaan tarkempi kuva pinnasta:

1) Akselileikkaus:

$$x = 0 \Rightarrow \frac{(y-3)^2}{1} - \frac{z^2}{4} = 1.$$

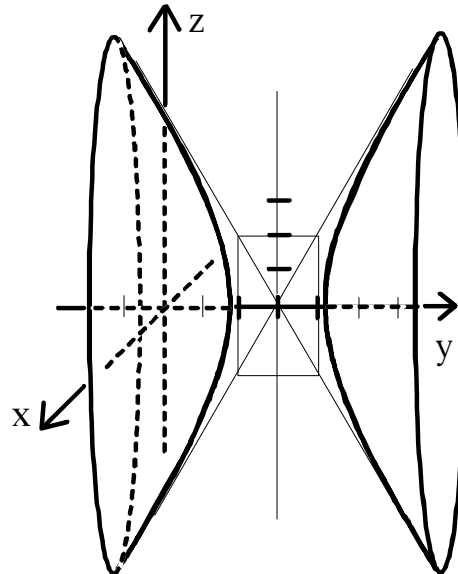


Tämä on y -suuntaan kaartuva hyperbeli, jonka puoliakselit ovat 1 ja 2 ja keskipiste $(3,0)$. Asymptootit saadaan piirtämällä suorakulmiolle lävistäjät (viereinen kuva).

2) Akselia vastaan kohtisuora leikkaus:

$$y = 0 \Rightarrow x^2 + z^2 = 32$$

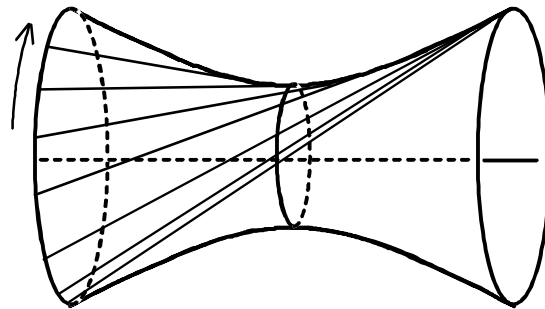
\therefore ympyrä.



Kyseessä on siis (aika laakea) 2-vaippainen pyöräyshyperboloidi, akselina on y ja keskipisteenä $(0,3,0)$.

Yksivaippainen hyperboloidi on eräs ns. **viivainpinta**, ts. se syntyy siten että suora liikkuu avaruudessa tietyllä tavoin.

Tavallisimmat viivainpinnat ovat erilaiset lieriöt (joissa liikkuva suora säilyttää suuntansa) ja kartiot (liikkuva suora kulkee aina saman pisteen kautta). Myös taso voitaisiin ajatella viivainpinnaksi.



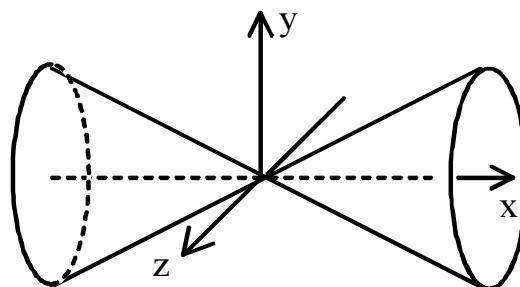
Viivainpinta-ominaisuus tekee yksivaippaisen hyperboloidin käyttökelpoiseksi tekniikassa (esim. tukirakenteet, jyrshintä jne).

4.4 Kartio

Kartion (kartiopinnan) yhtälö on muuten samanlainen kuin hyperboloidin, mutta siinä on (mahdollisen neliöinnin jälkeen) **vakiotermi** = 0. Esimerkiksi

$$(4) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

esittää kartiota, jonka akseli on x (koska x -termi on etumerkiltään vähemmistössä) ja kärki on origossa.



Hyperboloidien ja kartion

yhtälöiden samankaltaisuus johtuu siitä, että hyperbelien $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$

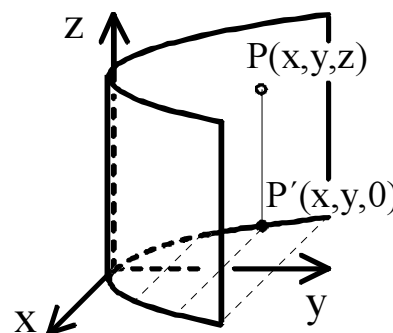
asymptootit voidaan esittää muodossa $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$. Kun nämä pyörähtävät ja suoritetaan litistys, saadaan kartio. Kartio (4) on siis itse asiassa edellä käsiteltyjen hyperboloidien **asymptoottikartio**.

Kartio (4) on ns. **elliptinen kartio**, sillä sen poikkileikkaus on ellipsi tai sen erikoistapaus, ympyrä. Jos kartiopinnan poikkileikkaus on esim. paraabeli, kartio on **parabolinen**. Tällaisen kartion yhtälö ei enää ole toista astetta vaan se on korkeampiasteinen.

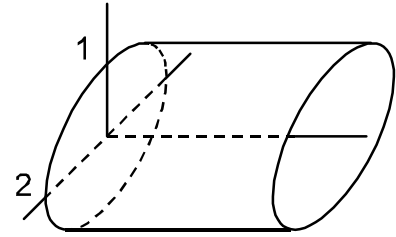
4.5 Lieriöt

Jos lieriön sivuviivat ovat jonkin akselin suuntaisia, lieriöpinnan yhtälöstä puuttuu vastaava muuttuja.

Esim. 5 Yhtälö $y = x^2$ esittää erästä **parabolista lieriötä**, jonka sivuviivat ovat z -akselin suuntaiset. Yhtälön mukaan nimittäin x - ja y -koordinaatteja sitoo ehto $y = x^2$, kun taas z saa olla mikä tahansa.



Esim. 6 Yhtälö $x^2 + 4z^2 = 4$ eli yhtälö $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{1} = 1$ esittää erästä **elliptistä lieriötä**. Sillä on akselina y-akseli ja poikkileikkaus on ellipsi, jonka puoliakselit ovat 2 ja 1.



Jos lieriön poikkileikkaus on hyperbeli tai liittohyperbeli, kyseessä on **hyperbolinen lieriö**. Käytännössä tärkeimmät lieriöt ovat pyöreäslieriöitä eli ympyrälieriöitä. Millainen on esimerkiksi yhtälön $(y-3)^2 + z^2 = 4$ kuvaaja? (Piirrä kuva.)

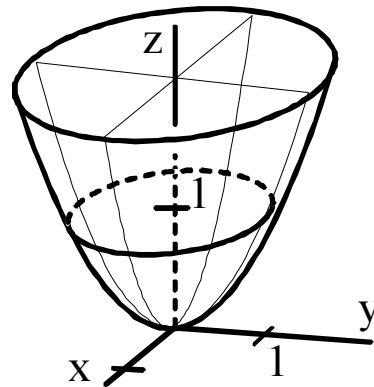
4.6 Paraboloidit

Esim. 7 Yhtälön $z = x^2 + y^2$ kuvaaja on ns. **perusparaboloidi**. Sen kuvaajaa voidaan tutkia tasoleikkauksilla:

$$x = 0 \Rightarrow z = y^2$$

$$y = 0 \Rightarrow z = x^2$$

$$z = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1.$$



Akselileikkaukset ovat siis perusparaabeleja ja akselia vastaan kohtisuorat leikkaukset ympyröitä.

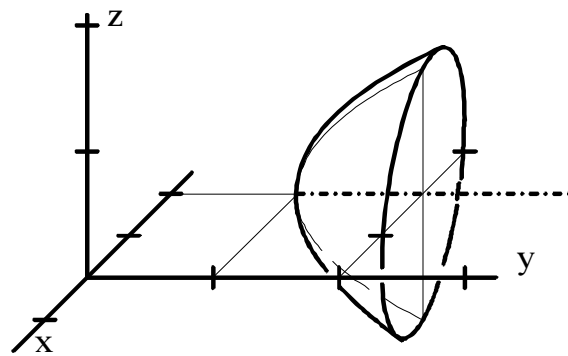
Yleisemmin esim. $z = ax^2 + by^2$, missä a ja b ovat samanmerkkisiä, esittää ns. **elliptistä paraboloidia**, jossa z-akselia vastaan kohtisuorat leikkaukset ovat ellipsejä ja akselileikkaukset paraabeleja.

Elliptisille paraboloidille on siis tyypillistä, että yksi muuttujista esiintyy yhtälössä vain 1. asteen termissä ja kaksi muuta samanmerkkisissä 2. asteen termeissä. Poikkeava eli ensimmäisen asteen termi antaa akselin suunnan. Jos huippu ei ole origossa, se saadaan selville neliöimällä.

Esim. 8 Tutki pintaa $x^2 + z^2 + 4x - y + 5 = 0$. Suoritetaan x :lle neliöinti (koska x esiintyy paitsi toisen myös ensimmäisen asteen termissä):

$$(x+2)^2 + z^2 = y-5+2^2, \text{ sievennettynä } y-1 = (x+2)^2 + z^2.$$

Kyseessä on elliptinen paraboloidi, jonka akseli on $\parallel y$ -aks. ja huippu on $(-2, 1, 0)$. Leikkaus $y = 2$ antaa 1-ympyrän, joten paraboloidi on tyypiltään *pyöräysparaboloidi*. Sen kuvaajasta on pala viereisessä kuvassa.



Pyörähdysparaboloideja käytetään mm. lautasantenneissa, taskulampuissa, parabolisissa peileissä jne. Käyttö perustuu siihen, että akselin suuntaiset säteet heijastuvat polttopisteeseen tai päinvastoin *polttopisteestä lähtevät säteet heijastuvat yhdensuuntaisiksi*.

Erikoisin toisen asteen pinta on **hyperbolinen paraboloidi eli satulapinta**. Sen yhtälö on muuten samanlainen kuin elliptisen paraboloidin, mutta *toisen asteen termit ovat erimerkkiset*.

Esim. 9 Tutki pintaa $x^2 - z^2 - y = 0$ eli $y = x^2 - z^2$. Käytetään tutkimiseen tasoleikkauksia:

$$1) z = 0 \Rightarrow y = x^2 \quad \therefore \text{ylöspäin aukeava paraboli } xy\text{-tasossa}$$

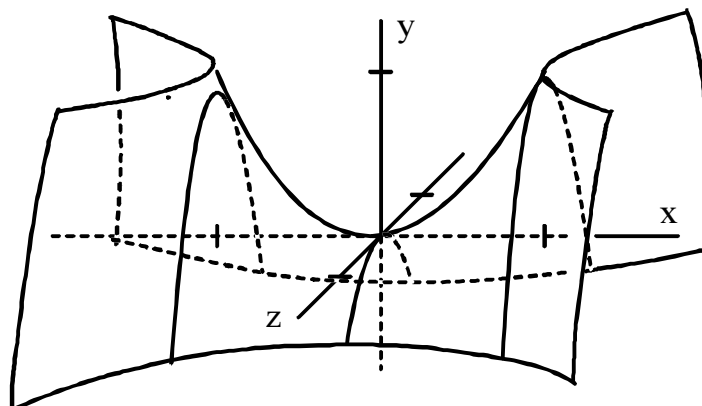
$$2) x = 0 \Rightarrow y = -z^2 \quad \therefore \text{alaspäin aukeava paraboli } yz\text{-tasossa}$$

$$3) y = a > 0 \Rightarrow x^2 - z^2 = a \quad \text{eli} \quad \frac{x^2}{a} - \frac{z^2}{a} = 1$$

$\Rightarrow x$ -suuntaan kaartuva hyperbeli

$$4) y = -a < 0 \Rightarrow x^2 - z^2 = -a \quad \text{eli} \quad \frac{z^2}{a} - \frac{x^2}{a} = 1$$

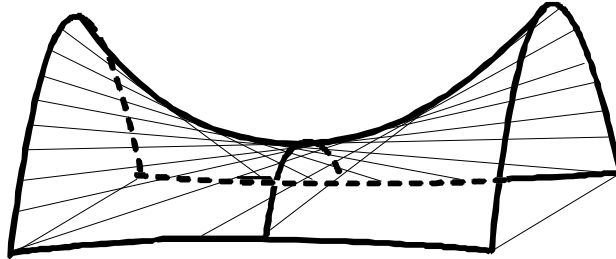
$\Rightarrow z$ -suuntaan kaartuva hyperbeli



Origo on edellisen pinnan ns. *satulapiste*. Origohuippuiset paraabelit, joista toinen on ylös- ja toinen alaspäin aukeava, ovat ns. *satulaparaabelit*.

Joissakin matematiikan esimerkeissä satulapisteellä on avaruudessa vastaavantapainen merkitys kuin käännepisteellä tasogeometriassa. Esimerkiksi edellinen pinta on xy -suunnassa negatiivisen y -akselin suuntaan kupera, mutta zy -suunnassa positiivisen y -akselin suuntaan kupera. Hyperbolista paraboloidia ei saada pyöräyttämällä ja litistämällä.

Satulapintaa käytetään jonkin verran tekniikassa, mm. katto-rakenteissa. Voidaan todistaa, että satulapintakin on *viivainpinta*. Pala satulapintaa saadaan niin, että kahden pystyssä olevan paraabelinkaaren välille "pingoitetaan vaijereita".



HARJOITUKSIA

A

- 4.1 Origon kautta kulkevan pallon kp. on $(1, -2, 3)$. Määritä yhtälö.
- 4.2 Määritä pinnan $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 2z = 7$ pisteeseen $(4, 2, -3)$ piirretyn tangenttitason yhtälö.
- 4.3 Tutki pintaa a) $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$, b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 3 = 0$.
- 4.4 Tutki pintaa a) $x^2 - y^2 + z^2 = 1$, b) $x^2 - y^2 - z^2 = 1$,
c) $x^2 - y^2 - z^2 = 0$.
- 4.5 Tutki pintaa a) $x^2 + z^2 = 1$, b) $x^2 - y^2 = 1$, c) $x^2 + y^2 + z = 0$, d) $x + 2y + 1 = 0$.

B

- 4.6 Mikä pallon $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 5 = 0$ piste on kauimpana origosta? (Vihje: Origon ja kp:n kautta kulkeva suora parametri-muodossa)

- 4.7** Pallo sivuaa tasoa $x + 2y - z = 1$ pisteessä $(2, 0, 1)$ ja kulkee origon kautta. Määritä yhtälö. (Vihje: Pallon keskipiste saadaan tason normaalin yhtälöstä sopivalla parametrin t arvolla eli keskipiste on muotoa $(2+t, 2t, 1-t)$. Mistä saat t :lle ehtoyhtälön?)
- 4.8** Tutki pintaa a) $x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 4z = 2$, b) $x^2 + 4y^2 - z = 0$.
- 4.9** Tutki pintaa a) $x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 4z = 3$, b) $4x^2 + y^2 - z^2 = 4y$.
- 4.10** Määritä sen ympyrän säde ja keskipiste, jonka taso $2x + y + z = 2$ leikkaa pallosta $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
- 4.11** Tutki pintoja a) $4x^2 + y^2 - 4y - z^2 + 4 = 0$, b) $4x^2 - 4y + z^2 + 4 = 0$.

C

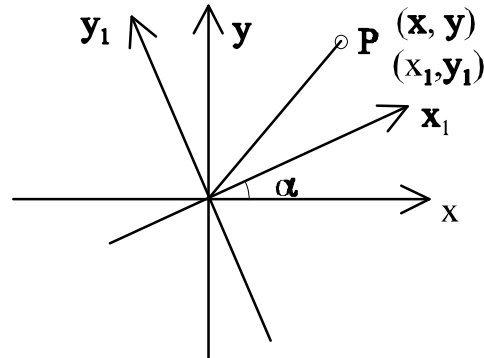
- 4.12** Määritä sellainen a :n arvo, että pinta $4x^2 - 2ay^2 + z^2 - az + a - 1 = 0$ on kartio. Tutki sitten tämä kartio.
- 4.13** Kun käyrä $y = f(x)$ pyörähtää x -akselin ympäri, syntyy pyöräyspinta. a) Perustelee: Piste $P(x, y, z)$ on tällä pinnalla $\Leftrightarrow y^2 + z^2 = f(x)^2$. b) Johda sovelluksena sellaisen kartion yhtälö, joka syntyy, kun suora $y = \frac{b}{a}x$ pyörähtää x -akselin ympäri. c) Suorita tähän kartioon litistys z -suunnassa, muuttamalla pinnan yhtälössä jokaisen pisteen z -koordinaatti suhteessa c/b (eli uuden pinnan z on $= \frac{c}{b}$ kertaa vanhan pinnan z). Mikä on saadun elliptisen kartion yhtälö?
- 4.14** Edellisen tehtävän a)- kohdan mukaan pyöräyspinnan yhtälö (akselina x) saadaan, kun pyörähtävän käyrän yhtälössä $y = f(x)$ eli yhtälössä $y^2 = f(x)^2$ termi y^2 korvataan summalla $y^2 + z^2$. Johda tämän perusteella (ja sitten litistämällä) ellipsoidin yhtälö.
- 4.15** Kartion akselin ja sivuviivan välinen kulma on 60° ja huippu on pisteessä $(2, -1, 0)$. Mikä on kartion yhtälö, jos sen akseli on x -akselin suuntainen?

5 Koordinaatistoista

5.1 Koordinaatiston kierto tasossa kulman α verran

Pisteen P vanhojen ja uusien koordinaattien välille on aikaisemmin johdettu yhtälöt

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 = (\cos \alpha)x + (\sin \alpha)y \\ y_1 = (-\sin \alpha)x + (\cos \alpha)y \end{cases}$$



Sama yhtälöpari (1) on matriisimuodossa

$$(1)' \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Kerroinmatriisi $A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ on ns. **kiertomatriisi**.

Matriisin A determinantti on $\det A = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$. Koska A on säännöllinen eli $\det A \neq 0$, niin A :lla on **käänteismatriisi** A^{-1} . Se on

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

sillä $AA^{-1} = I$ (suorita kertominen). Toinen laskutapa (kertaa $\text{adj } A$):

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj } A = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = A^T.$$

Kiertomatriisi A on siis siinä mielessä erikoinen matriisi, että sen käänteismatriisi saadaan vaihtamalla A :n vaakarivit pystyriveiksi, ts. **transponoimalla** A . Tällaista neliömatriisia sanotaan **ortogonaalimatriisiksi**.

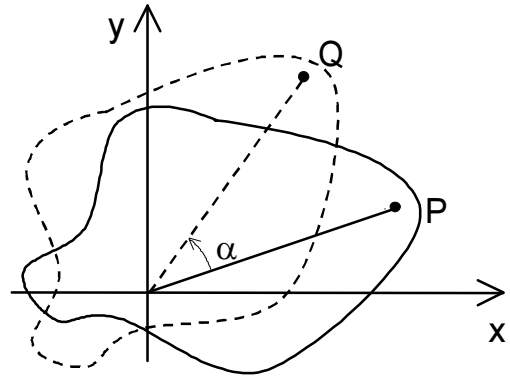
Esim. 1 Määritä pisteen $(2,3)$ uudet koordinaatit, kun koordinaatistoa kierretään kulman $-\pi/6$ verran.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(-\pi/6) & \sin(-\pi/6) \\ -\sin(-\pi/6) & \cos(-\pi/6) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sqrt{3}-3/2 \\ 1+3\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \therefore \begin{cases} x_1 = \sqrt{3}-3/2 \approx 0,23 \\ y_1 = 1+3\sqrt{3}/2 \approx 3,6 \end{cases} \end{aligned}$$

5.2 Tasokuvion kierto xy -koordinaatiston origon ympäri

Pidetään nyt xy -koordinaatisto paikallaan, mutta kierretään kuviota xy -tasossa origon ympäri kulman α verran.

Kierrossa kuvion jokainen piste $P(x_P, y_P)$ muuttuu uudeksi pisteeksi $Q(x_Q, y_Q)$. Mikä yhteys on pisteiden P ja Q välillä?



Muutos on sama kuin jos kuvio pysyisi paikallaan ja koordinaatistoa kierrettäisiin vastakkaiseen suuntaan, kulman $-\alpha$ verran. Näinollen Q :n koordinaatit saadaan kiertomatriisin avulla, kun kiertokulmana käytetään kulman α sijaan kulmaa $-\alpha$. Siis

$$\begin{bmatrix} x_Q \\ y_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & \sin(-\alpha) \\ -\sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} = A^T \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix}$$

Yhteenveto:

1) **Koordinaatiston kierto:** Pisteen P vanhojen ja uusien koordinaattien välillä on yhteys

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \text{ missä } A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \text{ on ns. } \mathbf{kiertomatriisi}.$$

*Käänteiskaavat ovat $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = A^T \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ ($A^{-1} = A^T$, sillä kiertomatriisi A on ortogonaalimatriisi).

2) **Kuvion kierto:** Alkuperäisen kuvion yleisen pisteen P ja kierretyn kuvion vastaavan pisteen Q xy -koordinaattien välillä on yhteys

$$\begin{bmatrix} x_Q \\ y_Q \end{bmatrix} = A^T \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} \quad (\text{ja kääntäen } \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_Q \\ y_Q \end{bmatrix}).$$

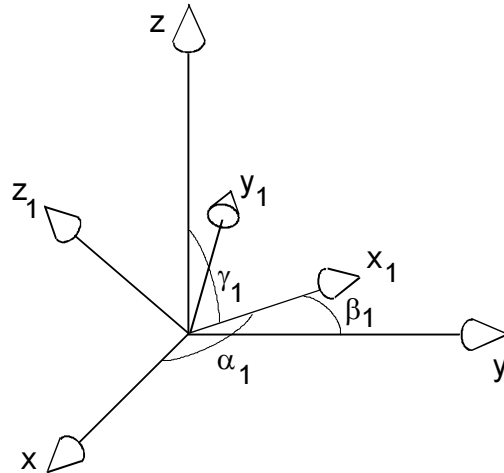
5.3 Vastaavat tulokset avaruudessa

1) Kun *koordinaatistoa kierretään* avaruudessa, niin kiertokulman α tilalla on yhdeksän kiertokulmaa:

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 = x_1$ - akselin ja alkuperäisten akselien väliset kulmat.

$\alpha_2, \beta_2, \gamma_2 = y_1$ - akselin ja alkuperäisten akselien väliset kulmat.

$\alpha_3, \beta_3, \gamma_3 = z_1$ - akselin ja alkuperäisten akselien väliset kulmat.



Nämä kulmat tosin eivät kaikki ole vapaasti valittavissa, sillä esim. z_1 -akselin täytyy olla muita vastaan kohtisuorassa. Voidaan todistaa, että kiertomatriisi muodostuu näiden kulmien kosineista:

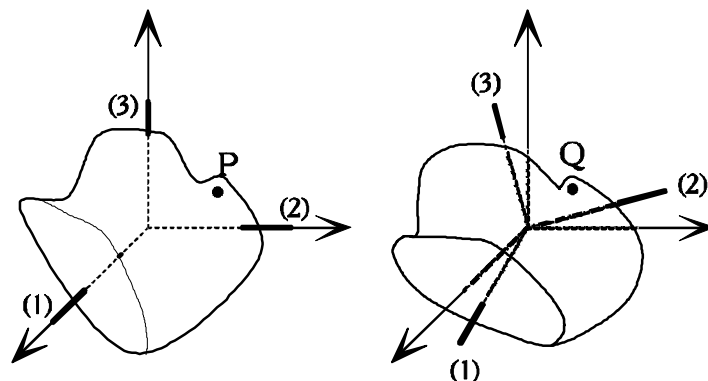
$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \beta_1 & \cos \gamma_1 \\ \cos \alpha_2 & \cos \beta_2 & \cos \gamma_2 \\ \cos \alpha_3 & \cos \beta_3 & \cos \gamma_3 \end{bmatrix}$$

ja että kiertokaavat ovat nytkin
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

*Kuten edellä, matriisi A on ortogonaalimatriisi ts. $A^{-1} = A^T$.

2) *Kappaleen kiertoa* varten ajatellaan, että kappaleen mukana kiertyy myös kappaleen "sisäinen" akselisto, jonka akselit ennen kiertoa yhtyivät x -, y - ja z -akseliin.

Jos sisäinen 1-akseli muodostaa kierron jälkeen paikallaan pysyviin x -, y - ja z -akseleihin nähden kulmat $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ja 2-akseli kulmat $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ sekä 3-akseli kulmat $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$, niin kappaleen yleinen



piste $P(x_P, y_P, z_P)$ kiertyy pisteeksi $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$, jonka koordinaatit saadaan yhtälöstä

$$\begin{bmatrix} x_Q \\ y_Q \\ z_Q \end{bmatrix} = A^T \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix}.$$

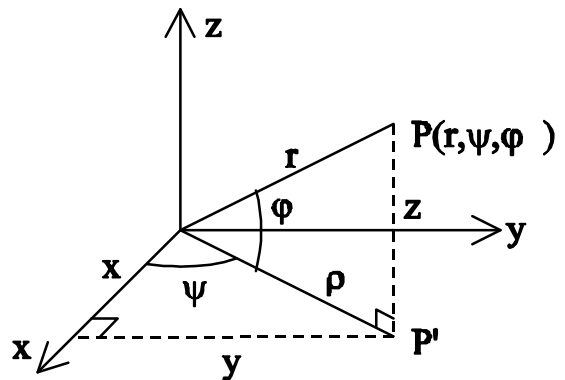
5.4 Napakoordinaatisto avaruudessa

Pisteen P paikka avaruudessa on täysin määrätty, jos tavallisten xyz -koordinaattien sijaan tunnetaan P :n *avaruusnapakoordinaatit* (r, ψ, φ) , missä

$r = P$:n etäisyys origosta,

$\psi = P$:n perusprojektion P' vaihekulma xy -tasossa.

$\varphi = P$:n "korkeuskulma" (kuva).



Koska ψ on xy -tason vaihekulma, se rajoitetaan tavallisesti välille $0 \dots 2\pi$. Poikkeuksena ovat esim. spiraalit ja ruuviviiva, joissa ψ voi saada suurempiakin arvoja sekä negatiivisia arvoja.

Jos piste P on xy -tason yläpuolella, niin korkeuskulma φ on positiivinen. Kulma φ on suurimmillaan silloin, kun P on positiivisella z -akselilla, jolloin $\varphi = \pi/2$. Jos piste P on negatiivisella z -akselilla, niin $\varphi = -\pi/2$, joka on φ :n pienin arvo. Siis

$$-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$$

Merkitään projektiopisteen P' etäisyyttä origosta ρ :lla (roo). Koska ρ ja ψ ovat P' :n napakoordinaatit xy -tasossa, niin P' :n suorakulmaiset koordinaatit ovat (napakoordinaatiston muunnoskaavojen mukaan)

$$\begin{cases} x = \rho \cos \psi \\ y = \rho \sin \psi \end{cases} \quad (\text{vrt. kuva}).$$

Nämä ovat myös pisteen P x - ja y -koordinaatit. Kuvan pystysuorasta suorakulmaisesta kolmiosta nähdään, että P :n z -koordinaatti on $z = r \sin \varphi$ ja että $\rho = r \cos \varphi$. Kun tämä ρ :n arvo sijoitetaan edelliseen yhtälöpariin, saadaan

P :n kaikki suorakulmaiset koordinaatit x , y ja z lausuttua napakoordinaattien r , ψ ja φ avulla. Nämä *muunnoskaavat* ovat seuraavat:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \psi \\ y = r \cos \varphi \sin \psi \\ z = r \sin \varphi \end{cases}$$

Kääntäen avaruusnapakoordinaatit voidaan lausua suorakulmaisten koordinaattien avulla:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (\text{pisteen } (x, y, z) \text{ etäisyys origosta}),$$

$$\tan \psi = \frac{y}{x} \quad (\text{tästä saadaan laskettua } \psi, \text{ oikea neljännes kuviosta}),$$

$$\sin \varphi = \frac{z}{r} \quad (\text{tästä saadaan laskettua } \varphi, \text{ joka on välillä } [-\pi/2, \pi/2]).$$

*Koska φ on välillä $[-\pi/2, \pi/2]$, niin $\varphi = \arcsin \frac{z}{r}$. Sen sijaan ψ :n arvo ei ole aina arkustangentin arvo, koska ψ :n arvo ei aina ole tällä välillä.

Esim. 2 Pisteen $(-1, 2, -3)$ avaruusnapakoordinaatit ovat

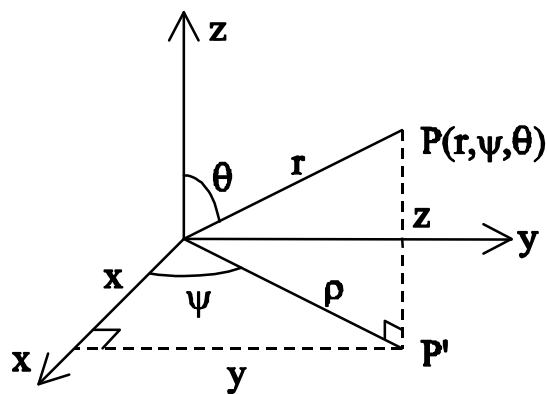
$$r = \sqrt{14}, \quad \tan \psi = \frac{2}{-1}, \text{ II neljännes} \therefore \psi \approx 116,6^\circ, \quad \sin \varphi = \frac{-3}{\sqrt{14}} \therefore \varphi \approx -53,3^\circ.$$

5.5 Pallokoordinaatisto

*Pallokoordinaatit ovat muuten samat kuin avaruusnapakoordinaatit, mutta korkeuskulman φ tilalla on z -akselista laskettu kulma θ ("teetta", vrt. kuva), jolloin

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Täten $\sin \varphi = \cos \theta$ ja $\cos \varphi = \sin \theta$ ja muunnoskaavat saavat muodon



$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \psi \\ y = r \sin \theta \sin \psi \\ z = r \cos \theta \end{cases}, \text{ kääntäen } \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \tan \psi = \frac{y}{x} \\ \cos \theta = \frac{z}{r} \end{cases}.$$

Esim. 3 1) Yhtälön $\theta = \frac{\pi}{6}$ kuvaaja on kartio, jonka akselina on z ja akselin ja sivuviivan välinen kulma on $\frac{\pi}{6}$, sillä tämän pinnan jokaisella pisteellä on θ :lla arvo $\frac{\pi}{6}$, kun taas r :lle ei aseteta mitään ehtoa, ts. r saa olla miten suuri ei-negatiivinen luku tahansa, ja ψ :lle ei aseteta mitään ehtoa, ts. piste voi olla millä puolella z -akselia tahansa. Piirrä kuva!

2) Yhtälöpari $\begin{cases} \theta = \pi/6 \\ r = 2 \end{cases}$ esittää edellisen kartion ja pallon $r = 2$ leikkausviivaa eli vaakasuoraa ympyrää, jonka säde on 1 ja joka on korkeudella $\sqrt{3}$ xy -tason yläpuolella. Piirrä kuva! Tavallisessa xyz -koordinaatistossa sama pinta voidaan esittää lieriön ja tason leikkausviivana:

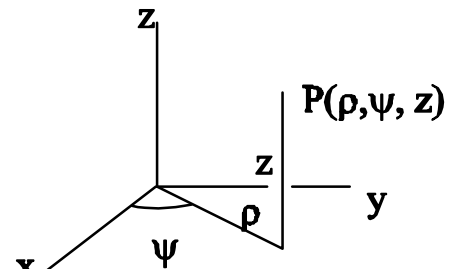
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = \sqrt{3} \end{cases}.$$

Huomaa, että yleisesti **pinnalla on yksi yhtälö ja viivalla kaksi** (viiva on kahden pinnan leikkaus).

5.6 Lieriökoordinaatisto

*Pisteen P paikka on määrätty myös, jos tunnetaan P :n perusprojektion P' napakoordinaatit ρ ja ψ sekä P :n "korkeus" z . Näiden *lieriö-* eli *sylinterikoordinaattien* ja tavallisten karteesisien (suorakulmaisten) koordinaattien väliset muunnoskaavat ovat

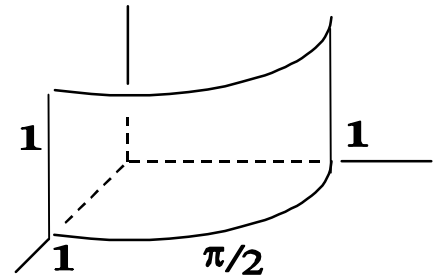
$$\begin{cases} x = \rho \cos \psi \\ y = \rho \sin \psi \\ z = z \end{cases} \text{ ja kääntäen } \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \psi = \frac{y}{x} \\ z = z \end{cases}.$$



Esim. 4 Lieriöpinnan osan

$$\begin{cases} \rho = 1 \\ 0 \leq \psi \leq \pi/2 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

pinta-ala on $\pi/2$.


HARJOITUKSIA
A, B

5.1 Laske a) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} -6 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

5.2 Laske matriisiin $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ käänteismatriisista A^{-1} toinen

vaakarivi. (Mikä rivi adjungoidusta matriisista täytyy laskea?)

5.3 Tarkastellaan kolmiota $A(0,0)$ $B(5,0)$ $C(3,7)$. Koordinaatistoa kierretään $+20,0^\circ$ (origon ympäri). Määritä kärkien B ja C uudet koordinaatit matriisilaskentaa käyttäen. Piirrä kuva ja tarkista tulokset siitä mittaamalla.

5.4 Edellisen harjoituksen kolmiota kierretään $+20,0^\circ$ kolmioksi ADE . Määritä uusien kärkien D ja E koordinaatit (matriisilaskentaa käyttäen). Piirrä kuva ja tarkista tulokset siitä mittaamalla.

5.5 a) Miksi pisteeksi muuttuu kappaleen piste $(2, -3, 4)$, kun kappaletta kierretään origon ympäri ja (koordinaatiston) kiertomatriisi on viereinen matriisi A ?

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

*b) Osoita, että A on sopiva kiertomatriisiksi eli että A on ortogonaalimatriisi.

5.6. Kappale kiertyy origon ympäri. Kiertomatriisi A on viereisen mukainen. a) Miksi pisteeksi muuttuu kappaleen piste $P(2,4,3)$? b) Kuinka suuren kulman x -akseliin nähden muodostaa kierron jälkeen se kappaleen akseli, joka ennen kiertoa yhtyi y -akseliin?

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5.7 Kappaleen sisäinen 1-akseli (ts. vektori $\vec{i} = [1, 0, 0]$) kiertyy vektorin $\vec{a} = [1, 1, 0]$ suuntaiseksi ja 2-akseli (ts. $\vec{j} = [0, 1, 0]$) vektorin $\vec{b} = [-1, 1, 2]$ suuntaiseksi ($\vec{a} \perp \vec{b}$, sillä $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$).

a) Mihin suuntaan kiertyy 3-akseli (ts. vektori $\vec{k} = [0, 0, 1]$)?

b) Määritä kiertomatriisi A (ohje: esim. $\cos \alpha_1 = \frac{\vec{i} \cdot \vec{a}}{|\vec{i}| |\vec{a}|}$).

c) Miksi pisteeksi Q muuttuu kappaleen piste $P(2, 3, -4)$ kierrossa?

5.8 Laske alueen $\begin{cases} \rho = 3 \\ 0 \leq \psi \leq \pi/2 \\ 0 \leq z \leq 2 \end{cases}$ pinta-ala.

5.9 Laske pisteen $(-2, -1, 3)$ a) avaruusnapakoordinaatit, b) pallokoordinaatit, c) lieriökoordinaatit.

5.10 Millainen on a) avaruusnapakoordinaatistoyhtälön $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ kuvaaja, b) lieriökoordinaatistoyhtälön $z = \rho^2$ kuvaaja, c) lieriökoordinaatistossa yhtälöparin $\rho = 1, z = \psi$ kuvaaja. Piirrä kuvat.

5.11 Suorakulmainen xyz -koordinaatisto siirretään (yhdensuuntaisesti) pisteeseen $A(a, b, c)$, ts. uuden $x_1 y_1 z_1$ -koordinaatiston origo tulee pisteeseen A . Johda vektorilaskentaa käyttäen **koordinaatiston siirtokaavat**

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{a} \\ \mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{b} \\ \mathbf{z} = \mathbf{z}_1 + \mathbf{c} \end{cases}$$

(Ohje: $\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP}$)

5.12 Kun koordinaatisto siirretään sopivaan pisteeseen, yhtälöstä

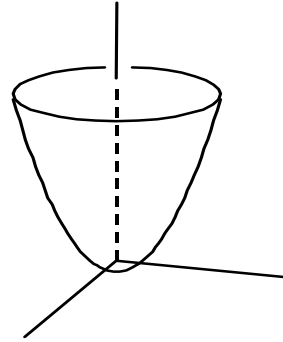
$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 8z = 3$$

häviävät 1. asteen termit. Määritä tämä piste.

6 Osittaisderivaatat ja kokonaisdifferentiaali

6.1 Kahden muuttujan funktio ja sen derivointi

Esim. 1 Yhtälö $z = x^2 + y^2$ on muotoa $z = f(x, y)$ ja se määrittelee erään **kahden muuttujan funktion** f . Funktion **kuvaaja** on paraboloidi. Tässä x ja y voivat olla mitä reaalilukuja tahansa, kun taas z voi olla vain ei-negatiivinen reaaliluku. Täten funktion (laajin mahdollinen reaalinen) **määrittelyjoukko** on koko xy -taso eli kaikkien reaalilukuparien (x, y) joukko \mathbf{R}^2 ja arvojoukko on ei-negatiivisten reaalilukujen joukko. Tämä funktio on koko määrittelyalueessaan **jatkuva** (pinta on jatkuva pinta, ilman hyppäyskohtia).



Funktion $z = f(x, y)$ **osittaisderivaatat** x :n ja y :n suhteen ovat raja-arvoja:

$$f_x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}, \quad f_y = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}.$$

Täten **esim.** f_y saadaan, kun ajatellaan, että x on vakio ja derivoidaan näin saatu yhden muuttujan y funktio. Joskus osittaisderivaatan merkissä käytetään yläpilkkua, vaikka standardien mukaan osittaisderivaatan merkkiin sitä ei kuulu. Tämä siksi, että esim. V_x tarkoittaa usein pyörähdyskappaleen tilavuutta, kun akselina on x , eikä tilavuusfunktion derivaattaa. M_x taas voi tekniikassa olla taivutusmomentti kohdassa x .

Osittaisderivaatoilla on monta muutakin merkitsemistapaa, mm.

$$f_y = f'_y = z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \quad (\partial = \text{"doo"}).$$

Merkintä $\frac{\partial z}{\partial x}$ luetaan *doo z doo x* tai **z :n (osittais)derivaatta x :n suhteen**.

Kun ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat derivoidaan uudelleen, saadaan seuraavat neljä toisen kertaluvun osittaisderivaattaa:

$$z_{xx} = f_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad z_{xy} = f_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad z_{yx} = f_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \quad z_{yy} = f_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Esim. 2 Jos $z = x^2 y + \sin xy$, niin

$$z_x = 2xy + y \cos xy, \quad z_y = x^2 + x \cos xy$$

$$\begin{cases} z_{xx} = 2y - y^2 \sin xy \\ z_{xy} = 2x + \cos xy - xy \sin xy = z_{yx} \\ z_{yy} = -x^2 \sin xy \end{cases}$$

Esim. 3 Ihannekaasulla on $pV = nRT$ (n, R vakioita). Muuttujista p, V ja T voidaan mitkä tahansa kaksi ottaa riippumattomiksi muuttujiksi ja kolmas näiden funktioksi, esim.

$$p = nR \frac{T}{V} \quad (= f(V, T)).$$

Se muuttuja, joka osittaisderivaattaa muodostettaessa pidetään vakiona, merkitään joskus näkyviin alakulmaan, esim.

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T = nR \left(-\frac{T}{V^2} \right) = -\frac{nRT}{V^2}.$$

6.2 Kokonaisdifferentiaali

Funktion $z = f(x, y)$ kokonaisdifferentiaalista

$$\boxed{dz = f_x \cdot dx + f_y \cdot dy}$$

on jo puhuttu yhden muuttujan funktion yhteydessä. Siellä sitä käytettiin lähinnä funktion muutoksen Δz likiarvona, jos x :n ja y :n muutokset $\Delta x = dx$ ja $\Delta y = dy$ ovat itseisarvoiltaan pieniä:

$$\boxed{\Delta z \approx dz = f_x \cdot dx + f_y \cdot dy, \text{ jos } dx \approx 0 \text{ ja } dy \approx 0.}$$

Mikäli virheiden suuntaa (etumerkkiä) ei tunneta, vaan tunnetaan ainoastaan virheiden itseisarvojen ylärajat, niin laskuissa piti käyttää itseisarvoja seuraavasti:

Jos esim. $|dx| \leq 0,02$, ts. $-0,02 \leq dx \leq 0,02$ (eli x :n virhe dx on välillä $-0,02 \dots 0,02$) ja $|dy| \leq 0,03$, niin

$$\boxed{|\Delta z| \approx |dz| \leq |f_x| \cdot |dx| + |f_y| \cdot |dy| \leq |f_x| \cdot 0,02 + |f_y| \cdot 0,03 = \dots}$$

Seuraava esimerkki kuvaa *differentioimisen*, ts. differentiaalilin tai kokonaisdifferentiaalilin käyttämistä toisenlaisessa yhteydessä.

Esim. 4 Vääntövarsijousella ns. jousto z ja joustokulma φ riippuvat josta kuormittavasta voimasta F seuraavien yhtälöiden mukaisesti:

$$\begin{cases} z + a \cos \varphi = a \cos \delta \\ \varphi - bF \sin \varphi = \delta \end{cases} \quad (\text{muut suureet ovat vakioita}).$$

Johda hetkelliselle jäykkyydelle $\frac{dF}{dz}$ laskukaava φ :n funktiona.

Differentioidaan kumpikin yhtälö termi termiltä. Oikeat puolet ovat vakioita, joten niiden differentiaalit ovat $= 0$. Termissä $bF \sin \varphi$ on kaksi muuttujaa, joten sen differentiointi merkitsee kokonaisdifferentiaalain muodostamista. Muissa termeissä on vain yksi muuttuja, joten ne differentioidaan yhden muuttujan funktiona ("derivaatta kertaa muuttujan differentiaali"). Siis

$$\begin{cases} 1 \cdot dz - a \sin \varphi \cdot d\varphi = 0 \\ 1 \cdot d\varphi - (b \sin \varphi \cdot dF + bF \cos \varphi \cdot d\varphi) = 0 \end{cases}$$

Jälkimmäisestä yhtälöstä voidaan ratkaista dF :n lauseke ja ensimmäisestä dz :n lauseke. Kun nämä jaetaan keskenään, niin $d\varphi$:t supistuvat pois. Toisesta alkuperäisestä yhtälöstä saadaan ratkaistua F :n lauseke. Kun se sijoitetaan edelliseen lausekkeeseen, jäljelle jää vain muuttujaa φ . (Harj. Suorita laskut.)

6.3 Yhdistetyn funktion derivointi

Yhden muuttujan yhdistetty funktio $y = f(u(x))$ eli funktio

$$y = f(u), \text{ missä } u = u(x)$$

derivoitiin ns. *ketjusäännöllä*:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Yleistetään tämä siihen tapaukseen, että ulkofunktio f on kahden muuttujan u ja v funktio. Derivoitavana on siis seuraava funktio:

$$z = f(u, v), \text{ missä } \begin{cases} u = u(x) \\ v = v(x) \end{cases}.$$

Jos ajatellaan, että u :n ja v :n lausekkeet sijoitetaan f :n lausekkeeseen, siitä tulee pelkästään x :n lauseke, ts. z on vain yhden muuttujan x funktio $z = z(x)$. Täten **tehtävänä on laskea tavallinen derivaatta** $\frac{dz}{dx}$. Differentioidaan ensin ulkofunktio $z = f(u, v)$:

$$dz = f_u \cdot du + f_v \cdot dv \quad | : dx$$

$$\therefore \boxed{\frac{dz}{dx} = f_u \cdot \frac{du}{dx} + f_v \cdot \frac{dv}{dx}} \quad (\text{ketjusääntö})$$

Esim. 5 Jos $z = u^2 + 3uv$, missä $u = \sin x$, $v = x^2$, niin

$$\frac{dz}{dx} = (2u + 3v) \cdot \cos x + 3u \cdot 2x \quad (\text{missä } u = \sin x, v = x^2).$$

Yleensä riittää, että derivaatta jätetään tähän muotoon. Jos esim. $x = \pi$, niin $u = \sin \pi = 0$, $v = \pi^2$ $\therefore \frac{dz}{dx} = 3\pi^2 \cos \pi = -3\pi^2$.

Esim. 6 Jos $s = x^3 \ln y$, missä $x = \cos 2t$, $y = t^2 e^{5t}$, niin

$$\frac{ds}{dt} = 3x^2 \ln y \cdot (-2 \sin 2t) + \frac{x^3}{y} \cdot (2te^{5t} + 5t^2 e^{5t}).$$

(Mikä on derivaatan arvo esim. hetkellä $t = 2,34$?)

***Esim. 7** Jos $z = x^2 \ln y$, missä $\begin{cases} x = t / 2u \\ y = u \sin 2t \end{cases}$, niin kaikenkaikkiaan z on t :n

ja u :n funktio ja siten tässä esimerkissä **derivointi merkitsee osittaisderivaattojen laskemista t :n ja u :n suhteen**. Jos ajatellaan u vakioksi, saadaan

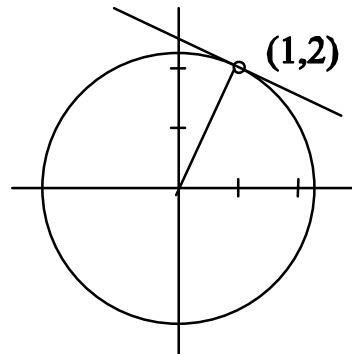
$$\frac{\partial z}{\partial t} = 2x \ln y \cdot \frac{1}{2u} + \frac{x^2}{y} \cdot 2u \cos 2t.$$

Vastaavasti, kun t pidetään derivoitaessa vakiona, saadaan

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2x \ln y \cdot \left(-\frac{t}{2u^2}\right) + \frac{x^2}{y} \cdot \sin 2t.$$

6.4 Ratkaisemattoman funktion derivointi

Esimerkiksi yhtälö $x^2 + y^2 - 5 = 0$ määrittelee kaksi funktiota $y = \pm\sqrt{5-x^2}$. Jos rajoitetaan vain esim. pisteen $(1, 2)$ lähiympäristöön, jäljelle jää yksi funktio $y = \sqrt{5-x^2}$.



Oletetaan yleisesti, että yhtälö

$$(1) \quad F(x, y) = 0$$

määrittelee jossakin alueessa funktion $y = y(x)$. Lasketaan tämän derivaatta seuraavasti. Differentioidaan yhtälö (1), jolloin saadaan

$$F_x \cdot dx + F_y \cdot dy = 0 \quad \therefore \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}}$$

Esim. 8 Määritä edellä olleen käyrän $x^2 + y^2 - 5 = 0$ pisteeseen $(1, 2)$ piirretyn tangentin yhtälö.

$$F = x^2 + y^2 - 5.$$

$$\text{Pisteessä } (1, 2) \quad F_x = 2x = 2, \quad F_y = 2y = 4 \quad \therefore k = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

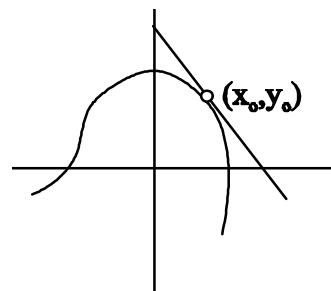
$$\therefore \text{ tangentti on } y - 2 = -\frac{1}{2} \cdot (x - 1) \text{ eli } x + 2y - 5 = 0.$$

Yleisemmin käyrän $F(x, y) = 0$ pisteeseen (x_0, y_0) piirretyn **tangentin yhtälö** on

$$y - y_0 = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)} \cdot (x - x_0)$$

eli sievennettynä

$$\boxed{F_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + F_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) = 0}$$



Esim. 9 Edellisen tehtävän mukaisesti tangentiksi saadaan

$$\begin{aligned} 2 \cdot (x - 1) + 4 \cdot (y - 2) &= 0 \quad | :2 \\ x + 2y - 5 &= 0. \end{aligned}$$

Edellä olleet tulokset yleistyvät avaruuteen seuraavasti.

1) Jos yhtälö $F(x, y, z) = 0$ määrittelee funktion $z = f(x, y)$ jossakin pisteen (x_0, y_0, z_0) lähiympäristössä, niin tässä alueessa

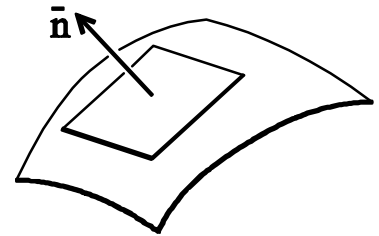
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}.$$

2) Pinnan $F(x, y, z) = 0$ pisteeseen (x_0, y_0, z_0) piirretyn *tangenttitason* yhtälö on

$$F_x(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0) \cdot (y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0) \cdot (z - z_0) = 0$$

Koska tason yhtälössä tuntemattomien x , y ja z kertoimina ovat tason normaalin suuntaluvut, niin edellisestä seuraa, että pinnan $F(x, y, z) = 0$ eräs *normaalivektori* pisteessä (x, y, z) on

$$\bar{n} = [F_x, F_y, F_z].$$



Tätä vektoria sanotaan pinnan $F(x, y, z) = 0$ *gradientiksi*.

HARJOITUKSIA

A

6.1 Derivoi a) $z = \frac{x^4}{2y}$, b) $z = 2x^3 \sin 2y$, c) $z = x^3(2x + y)^3$.

6.2 Muodosta kolmen muuttujan funktiolle $u = e^x \ln y + z^2 \cos y$ ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat.

6.3 Differentioi funktiot a) $z = e^x \sin 2y$, b) $V = nR \frac{T}{P}$.

6.4 Derivoi (ketjusäännöllä)

a) $z = x^3 \ln y$, missä $x = \cos 2t$, $y = t^2 e^t$,

b) $z = 3x^2 - 5y^2$, missä $x = r \sin 2\varphi$, $y = r \cos(2\varphi - \pi)$ (missä r ja φ ovat muuttujia).

6.5 Määritä käyrän $2x^2 + \sin(x - y) = 0$ pisteeseen $(0,0)$ piirretyn tangentin yhtälö.

6.6 Määritä pinnan $xe^{2z} - y \sin x + z = 0$ pisteeseen $(0,3,0)$ piirretyn a) tangenttitaso yhtälö, b) normaalin yhtälöt.

B

6.7 Derivoi

a) $z = \arctan \frac{x}{y}$, b) $T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} = f(\ell, g)$, c) $v = v_0 \frac{p_0}{p} (1 + \alpha t) = f(p, t)$.

6.8 Osoita, että ihannekaasulla $\frac{\partial p}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} = -1$.

6.9 Laske funktiolle $f(x, y, z) = 2x^2y + y^2 + z^3$ 1. ja 2. kertaluvun osittaisderivaatat.

6.10 Muodosta funktion a) $z = \frac{x+y}{x-y}$, b) $z = \ln \frac{x+y}{x-y}$ toisen kertaluvun osittaisderivaatat.

6.11 Laske z , Δz ja dz , kun $x = 3,01$, $dx = 0,07$, $y = 5,0$ ja $dy = 0,2$.

6.12 Laske z virherajoineen, kun $z = \arcsin xy$, missä $\begin{cases} x = 0,25 \pm 0,01 \\ y = 0,33 \pm 0,02 \end{cases}$

6.13 Derivoi ketjusäntöä käyttäen

a) $z = \ln(u^2 + uv)$, missä $u = e^{3x}$, $v = \cos(2x + \pi/4)$,

b) $\arcsin xy$, missä $x = s^2 + 2st$, $y = st - t^3$.

6.14 Derivoi (ketjusäännöllä)

a) $z = e^{x+2y}$, missä $x = \sin 2t$, $y = \frac{2}{t}$,

b) $f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{z}$, missä $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^{2t}$,

c) $z = \sin uv$, missä $u = \ln xy$, $v = \frac{x}{y}$.

6.15 Määritä pinnan $z = x^2 - 3xy$ pisteeseen $(2, 2, -8)$ piirretyn tangentti-tason yhtälö.

6.16 Pisteestä $(5, 5, 0)$ piirretään pinnalle $z = x^2 + y^2$ normaali. Määritä normaalin kantapiste eli se piste $(x_0, y_0, x_0^2 + y_0^2)$, josta piirretty normaali kulkee kyseisen pisteen kautta.

C

6.17 Kolmion sivuja a ja b jatketaan 1 % ja 2%. Laske kokonais-differentiaalia käyttäen, paljonko kulmaa $\gamma = 45^\circ$ pitäisi muuttaa, jotta ala $A = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ ei muuttuisi.

6.18 Kaasujousella $\begin{cases} pV^\kappa = \text{vakio} \\ F = (p - p_0)A \\ V = (h_1 - f)A \end{cases}$. Osoita, että $\frac{dF}{df} = \kappa \frac{pA^2}{V}$.

6.19 Funktiioon $z = f(x, y)$ tehdään muunnos $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$. Osoita, että

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

6.20 Kun a , b ja c valitaan sopivasti, pinnoilla

$$x^2 + 4y^2 - 4z^2 = 4 \quad \text{ja} \quad x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + 10 = 0$$

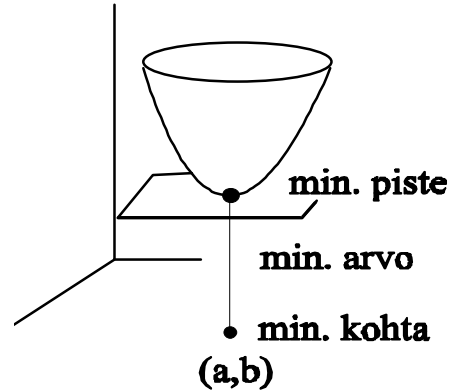
on yhteinen normaali pisteessä $(2, 1, 1)$. Määritä nämä kertoimet a , b ja c .

6.21 Pinnan $z = x + y^2$ eräästä pisteestä, jonka koordinaatit ovat kokonaislukuja, piirretään normaali. Se leikkaa yz -tason pisteessä $(0, 1, 3)$. Määritä normaalin yhtälöt.

7 Ääriarvot

7.1 Maksimi ja minimi

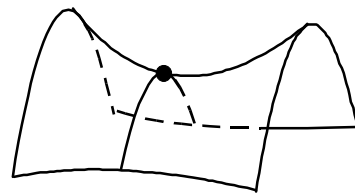
Jos funktion $z = f(x, y)$ arvo z on kohdassa (a, b) pienempi kuin (a, b) :n lähipisteissä, niin (a, b) on funktion paikallinen **minimikohta**. Vastaava z :n arvo $f(a, b)$ on funktion **minimiarvo**.



Maksimi- ja minimikohdat ovat nimeltään funktion **ääriarvokohdat**. Maksimi- ja minimiarvot (z :n arvot) ovat funktion **ääriarvot**.

Jos pinnalla $z = f(x, y)$ on ääriarvopisteessä tangenttitaso, tämä taso on vaakasuora eli pinnan normaalivektori on z -akselin suuntainen. Tämä merkitsee, että pinnan normaalivektorin kaksi ensimmäistä komponenttia f_x ja f_y ovat $= 0$.

Kaikki tällaiset pisteet eivät ole ääriarvopisteitä, sillä esim. satulapinnan $z = x^2 - y^2$ satulapisteessä $(0, 0)$ osittaisderivaatat ovat nolliä, mutta tämä piste ei ole ääriarvopiste (vaan eräänlainen käännepiste). Ne pisteet taas, joissa f_x tai f_y ei



ole olemassa, ovat jonkinlaisia erikoispisteitä (esim. kärkiä) ja voivat antaa ääriarvon. Nämä geometriset tarkastelut ovat seuraavan tuloksen pohjana:

Lause 1 *Funktion $f(a, b)$ ääriarvokohdat (x, y) ovat niiden (x, y) -parien joukossa, joissa osittaisderivaatat ovat $= 0$:*

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$$

(tai f_x tai f_y ei ole olemassa).

Lause 1 yleistyy useammankin kuin kahden muuttujan funktiolle.

Yhden muuttujan funktiolla ääriarvon laatu voitiin tutkia mm. y'' :n avulla (esim. $y' = 0, y'' > 0 \Rightarrow \text{min.}$). Seuraava tulos on tämän yleistys (ei tod.).

Lause 2 *Oletetaan, että kohdassa (a, b) on $f'_x = f'_y = 0$ (joten (a, b) on mahdollinen ääriarvokohta). Merkitään*

$$H = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2.$$

Jos kohdassa (a, b) on

- 1) $H > 0$ ja $f''_{xx} > 0$, niin (a, b) on minimikohta,
- 2) $H > 0$ ja $f''_{xx} < 0$, niin (a, b) on maksimikohta,
- 3) $H < 0$, niin kyseessä ei ole ääriarvokohta (vaan satulapistetms.)
- 4) $H = 0$, niin kyseessä voi olla ääriarvokohta, mutta sen laatu on tutkittava muilla keinoin, esim. (a, b) :n lähipisteiden avulla.

Esim. 1 Määritä funktion $z = x^2 + y^3 - 6xy + 50$ a) mahdolliset ääriarvokohdat, b) ääriarvon laatu, c) ääriarvot.

$$a) \begin{cases} z'_x = 2x - 6y = 0 \\ z'_y = 3y^2 - 6x = 0 \end{cases} \Big| :3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 6y = 0 \\ -2x + y^2 = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 18 \\ y_2 = 6 \end{cases}.$$

$$b) \quad z_{xx} = 2, \quad z_{yy} = 6y, \quad z_{xy} = -6 \quad \therefore H = 12y - 36.$$

$$\text{Kohta } (0,0): \quad H < 0 \quad \therefore \text{ei ääriarvokohta.}$$

$$\text{Kohta } (18,6): \quad H > 0, \quad z_{xx} > 0 \quad \therefore \text{minimikohta.}$$

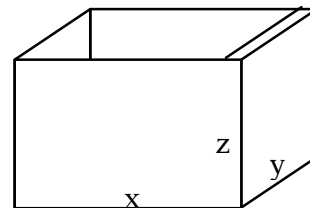
$$c) \text{ Minimiarvo } z_{\min} = z(18,6) = -58.$$

Teknillisissä tehtävissä Lausetta 2 ei tavallisesti tarvita, sillä ääriarvon laatu selviää yleensä suoraan tehtävän luonteen perusteella samaan tapaan kuin yhden muuttujan funktiolla.

Esim. 2 Suorakulmaisen särmiön muotoisen kannettoman laatikon yksi sivu vahvistetaan kaksinkertaiseksi. Optimoi laatikon muoto materiaalimenekin kannalta.

Merkitään laatikon tilavuutta V :llä. Jos yz -pääty vahvistetaan (vrt. kuva), niin kokonaispinta-ala on

$$A = xy + 2xz + 3yz.$$



Laatikon muoto on optimaalinen silloin, kun tämä kokonaispinta-ala $A = xy + 2xz + 3yz$ on pienimmillään.

Pinta-ala A on kolmen muuttujan funktio, mutta muuttujia *sitoo* toisiinsa se tieto, että laatikon tilavuuden tulee olla V , ts. että

$$xyz = V \quad (\text{side-ehto})$$

Side-ehto muuttaa A :n kahden muuttujan funktioksi, sillä sen mukaan $xz = V/y$ ja $yz = V/x$, joten

$$A = xy + \frac{2V}{y} + \frac{3V}{x}.$$

Lähdetään etsimään pinta-alan mahdollisia ääriarvokohtia:

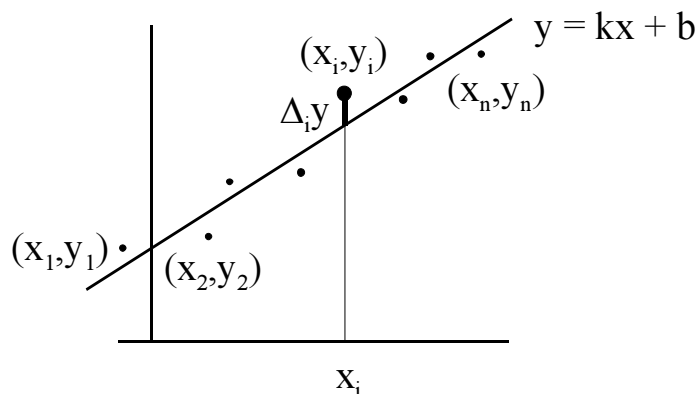
$$\begin{cases} A_x = y - \frac{3V}{x^2} = 0 \\ A_y = x - \frac{2V}{y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 y = 3V \\ xy^2 = 2V \end{cases} \quad V=xyz \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 y = 3xyz \\ xy^2 = 2xyz \end{cases}.$$

Kun kumpikin yhtälö jaetaan tulolla $xyz \neq 0$, saadaan yhtälöpari

$$\frac{x}{z} = 3 = \frac{3}{1}, \quad \frac{y}{z} = 2 = \frac{2}{1} \quad \therefore x : y : z = 3 : 2 : 1.$$

7.2 Pienimmän neliösumman menetelmän sovelluksia

1. Otsikossa mainitun menetelmän ehkä tavallisin sovellus on annettuun pistejoukkoon $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ mahdollisimman hyvin liittyvän suoran $y = kx + b$, ns. **regressiosuoran** määrittäminen (seuraava kuva).



Johdetaan regressiosuoran $\boxed{y = kx + b}$ kertoimille k ja b laskukaavat pienimmän neliösumman menetelmällä. Kohdassa x_i pisteellä on y -koordinaatti y_i ja suoran pisteellä on y -koordinaatti $y = kx_i + b$. Näiden

erotus on ns. *pystypoikkeama*, jota voidaan merkitä $\Delta_i y$:llä (vrt. edellinen kuva). Siis

$$\Delta_i y = y_i - (kx_i + b) = y_i - kx_i - b \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Osa näistä poikkeamista on positiivisia, osa negatiivisia. Suoran pitäisi kulkea niin, että poikkeamien yhteismäärä, tarkemmin sanoen poikkeamien itseisarvojen summa olisi mahdollisimman pieni. Käytetään itseisarvojen sijasta *poikkeamien neliöiden summaa*, ts. funktiota

$$f(k, b) = \sum_{i=1}^n [y_i - kx_i - b]^2.$$

Etsitään sellaiset k :n ja b :n arvot, että tämä funktio on pienimmillään.

$$\begin{cases} f'_k = \sum 2[y_i - kx_i - b] \cdot (-x_i) = 0 \quad :2 \\ f'_b = \sum 2[y_i - kx_i - b] \cdot (-1) = 0 \quad :2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum [-x_i y_i + kx_i^2 + bx_i] = 0 \\ \sum [-y_i + kx_i + b] = 0 \end{cases}.$$

Vaihdetaan summausjärjestystä niin, että lasketaan ensin yhteen kaikki $x_i y_i$ -termit, sitten kaikki kx_i^2 -termit jne.

$$\begin{cases} \sum (-x_i y_i) + \sum kx_i^2 + \sum bx_i = 0 \\ \sum (-y_i) + \sum kx_i + \sum b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sum x_i y_i + k \sum x_i^2 + b \sum x_i = 0 \\ -\sum y_i + k \sum x_i + nb = 0 \end{cases}.$$

Tämä on lineaarinen yhtälöpari, tuntemattomina k ja b . Kun ensimmäinen yhtälö kerrotaan n :llä ja toinen $(-\sum x_i)$:llä ja yhtälöt lasketaan sitten yhteen, niin b eliminoiduu ja k :lle saadaan lauseke

$$k = \frac{n \cdot \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n \cdot \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}.$$

Vastaavasti saadaan ratkaistua b :

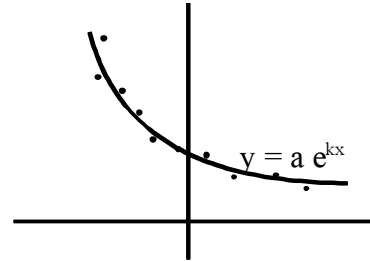
$$b = \frac{(\sum y_i)(\sum x_i^2) - (\sum x_i)(\sum x_i y_i)}{n \cdot \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}.$$

Nämä kaavat löytyvät kaavastosta. Myös useissa laskimissa on ohjelmoituna menetelmä, jolla kertoimien k ja b arvot voidaan laskea, kun (x_i, y_i) -parit

näppäillään laskimen muistiin. Menetelmän englanninkielinen nimi on *linear regression*.

2. Regressiosuora on vain yksi esimerkki **pienimmän neliösumman** -menetelmän käyttämisestä. Samantapaisesti voidaan laskea johonkin pistejoukkoon mahdollisimman hyvin liittyvä *paraabeli*, *hyperbeli* tms., tai myös esim. avaruuspisteisiin liittyvä *taso*.

3. Eräs sovellus on annettuihin pisteisiin (x_i, y_i) ($i = 1, 2, \dots, n$) mahdollisimman hyvin liittyvän **eksponenttifunktion** määrittäminen. Tämä tehtävä muuttuu regressiosuoran määrittämiseksi seuraavalla tavalla:



Etsittävä yhtälö on muotoa

$$y = a \cdot e^{kx} \quad (a, k = ?).$$

Otetaan kummastakin puolesta logaritmi:

$$\ln y = \ln a + \ln e^{kx}$$

$$\ln y = \ln a + kx \ln e$$

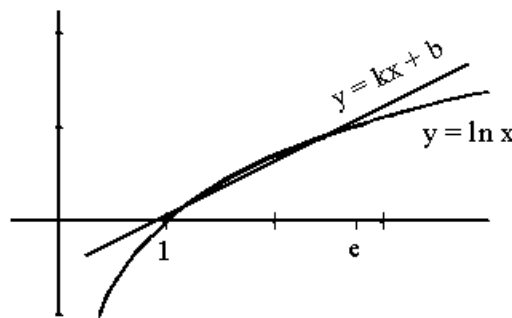
$$\underbrace{\ln y}_Y = kx + \underbrace{\ln a}_b \quad | \quad \text{merk. } \ln y = Y, \ln a = b$$

$$Y = kx + b.$$

Koska (x_i, y_i) -parit tunnetaan, niin (x_i, Y_i) -parit eli $(x_i, \ln y_i)$ -parit voidaan laskea (ja näppäillä suoraan esim. laskimen muistiin).

Tehtävä palautuu siis $(x_i, \ln y_i)$ -pareihin liittyvän regressiosuoran määrittämiseen. Näin saadaan ensin kertoimet k ja b ja sitten a , sillä $\ln a = b \therefore a = e^b$.

4. Joskus on tarpeen linearisoida jokin käyrä jollakin välillä eli määrittää tämän käyränosan äärettömän moneen pisteeseen mahdollisimman hyvin liittyvä suora $y = kx + b$. Tehtävä on muuten lähes samanlainen kuin regressiosuoran kertoimien johtaminen paitsi että summien tilalle tulevat integraalit.



***Esim. 3** Määritä käyränosaan $y = \ln x$, $1 \leq x \leq e$ mahdollisimman hyvin liittyvä suora $y = kx + b$ (edellinen kuva).

Kohdassa x käyrän ja suoran välinen pystypoikkeama on

$$\ln x - (kx + b).$$

Poikkeamien neliöiden "summa" on

$$f(k, b) = \int_1^e [\ln x - kx - b]^2 dx,$$

mikä pitäisi minimoida. Derivoidaan f "termi termiltä" k :n ja b :n suhteen ja merkitään derivaatat 0:ksi:

$$\begin{cases} f_k = \int_1^e 2 \cdot [\ln x - kx - b] \cdot (-x) dx = 0 \quad | :2 \\ f_b = \int_1^e 2 \cdot [\ln x - kx - b] \cdot (-1) dx = 0 \quad | :2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\int_1^e x \ln x dx + k \int_1^e x^2 dx + b \int_1^e x dx = 0 \\ -\int_1^e \ln x dx + k \int_1^e x dx + b \int_1^e dx = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6,362k + 3,195b = 2,097 \quad | \cdot 1,718 \\ 3,195k + 1,718b = 1 \quad \quad | \cdot (-3,195) \end{cases}$$

$$k \approx 0,565, \quad b \approx -0,468.$$

HARJOITUKSIA

A, B

- 7.1** Määritä funktion $z = x^2 + y^3 - 12y + 5$ ääriarvopisteet.
- 7.2** Määritä funktion $z = x^2 + y^2 + xy - 6x - 4y + 5$ ääriarvokohta, ääriarvo ja sen laatu.
- 7.3** Pisteestä $A(3,0)$ piirretään paraabelille $y = x^2$ normaali. Määritä normaalin kantapiste P . Ohje: $P(x, y) = P(x, x^2)$ on sellainen paraabelin piste, että sen etäisyys A :sta (tai etäisyyden neliö) on

pienimmillään. Saat 3. asteen yhtälön, jonka ratkaisu löytyy helposti kokeilemalla.

- 7.4** Kuten edellinen, mutta $A = (5,5,0)$ ja paraabelin tilalla perusparaboloidi.
- 7.5** Suorakulmaisen särmiön muotoisen kannellisen astian pohja ja kumpikin pääty on vahvistettu kaksinkertaisiksi. Mikä on aine-
menekiltään edullisin astian muoto.
- 7.6** Kaurahiutalepakkauksen kansi ja pohja ovat kaksinkertaiset. Määritä
pahvimäärältään edullisin muoto.
- 7.7** Määritä pisteisiin $(0,1)$, $(1,3)$, $(2,2)$, $(3,4)$, $(4,5)$ liittyvä regressio-
suora a) edellä johdetuilla laskukaavoilla (laske ensin paperilla
summien $\sum x$, $\sum x^2$, $\sum y$ ja $\sum xy$ arvot), b) käyttämällä apuna
laskimen tilastollisia ominaisuuksia.
- 7.8** Määritä pisteisiin $(-2,5)$, $(0,3)$, $(2,2)$, $(4,1)$ parhaiten liittyvä
eksponenttifunktio $y = ae^{kx}$.
- 7.9** Laske pienimmän neliösumman menetelmällä pisteisiin $(1,4)$, $(2,2)$,
 $(3,2)$, $(4,1)$ parhaiten liittyvä hyperbeli $y = \frac{k}{x}$.
- 7.10** Kuten edellinen, mutta hyperbelinä $y = \frac{k}{x} + b$. Huomaa: tämä tehtävä
voidaan palauttaa regressiosuoran määrittämiseksi (mutta edellistä
ei).
- 7.11** *Määritä käyrään $y = x^3$ välillä $0 \dots 3$ mahdollisimman hyvin liittyvä
suora $y = kx + b$.

C

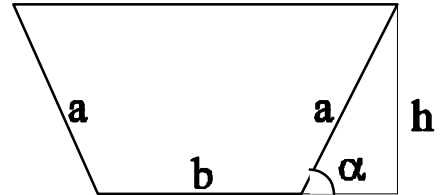
- 7.12.** Mikä pinnan $z = xy - 1$ piste on lähinnä origoa?

7.13. Laske ristikkäisten suorien

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2t \\ z = t + 3 \end{cases} \quad ja \quad \begin{cases} x = 3s \\ y = 2 + s \\ z = -1 + 2s \end{cases}$$

välinen lyhin etäisyys.

7.14 Vesikourun poikkileikkaus on tasakylkinen puolisuunnikas, jonka ala on A . (A määrää kourun vedenkuljetuskapasiteetin.) Laske ääriarvottehtävänä, minkä muotoinen



kourun tulisi olla, jotta siihen tarvittava peltimäärä olisi mahdollisimman pieni. (Ohje: esitä leikkausviivan pituus $2a + b$ muuttujien a ja h avulla ja minimoi tämä funktio. Lopputulos on aika itsestään selvä: poikkileikkaus on puolet säännöllisestä 6-kulmiosta, ts. $a = b$ ja $\alpha = 60^\circ$.)

7.15 Määritä käyrään $y = e^x$ välillä $-1 \dots 1$ mahdollisimman hyvin liittyvä suora $y = kx + b$.

7.16 a) Määritä yhtälöpari, josta saadaan laskettua pisteisiin $(1,1)$, $(2,2)$ ja $(2,3)$ parhaiten liittyvä käyrä $y = ax^3 + b$.

b) Ratkaise tämä yhtälöpari, jolloin saat a :n ja b :n arvon.

c) Miten saat a :n ja b :n laskettua helpommin?

7.17 a) Johda yhtälöryhmä, josta saadaan tarvittaessa laskettua pisteisiin (x_i, y_i) parhaiten liittyvän paraabelin $y = ax^2 + bx + c$ kertoimet. (Tehtävä on samanlainen kuin regressiosuoran johto, mutta yhtälöitä tulee nyt 3 kpl.)

b) Sovella tulos pisteisiin $(0,0)$, $(-1,-1)$, $(1,1)$, $(2,1)$ ja ratkaise yhtälöryhmä.

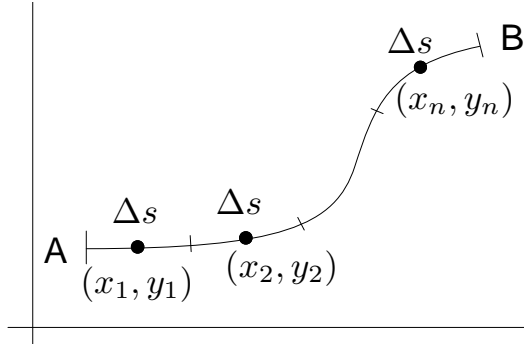
8 Integraalilaskentaa

8.1 Viivaintegraali

Oletetaan, että on annettu

1. funktio $f(x, y)$
2. xy -tason käyrä \widehat{AB} .

Jaetaan \widehat{AB} n :ään osaan, joiden pituudet ovat Δs , ja keskipisteet (x_i, y_i) .



Muodostetaan summa

$$f(x_1, y_1) \cdot \Delta s + \dots + f(x_n, y_n) \cdot \Delta s.$$

Kun $n \rightarrow \infty$, saadaan ns. **viivaintegraali** A :sta B :hen pitkin käyrää \widehat{AB} :

$$\int_A^B f(x, y) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \cdot \Delta s.$$

Osavälien Δs ei tarvitsisi olla yhtä pitkiä ja pisteiden (x_i, y_i) välien keskipisteitä. Viivaintegraali lasketaan tavallisesti palauttamalla se määrättyksi integraaliksi seuraavien esimerkkien 1 ... 4 mukaisesti.

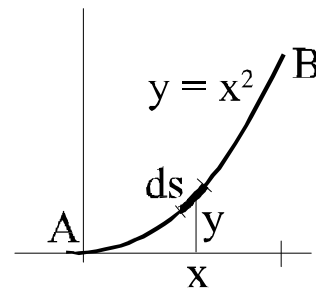
Esim. 1 Laske paraabelinkaaren $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$ neliömomentti x -akselin suhteen.

Kohdassa x olevan kaarialkion ds neliömomentti x -akselin suhteen on

$$dI_x = y^2 ds$$

ja koko kaaren \widehat{AB} neliömomentti on "summa"

$$\begin{aligned} I_x &= \int_A^B y^2 ds \quad \left| \begin{array}{l} ds = \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \sqrt{1 + (2x)^2} dx \\ y = x^2 \end{array} \right. \\ &= \int_0^1 x^4 \sqrt{1 + 4x^2} dx \approx 0,390. \end{aligned}$$



Tässä esimerkissä integroitava funktio $f(x, y)$ ei sisältänyt ollenkaan x :ää, vaan se oli pelkästään y :n funktio: $f(x, y) = y^2$.

Palauttaminen "tavalliseksi" integraaliksi tapahtui siten, että y ja ds esitettiin x :n lausekkeina.

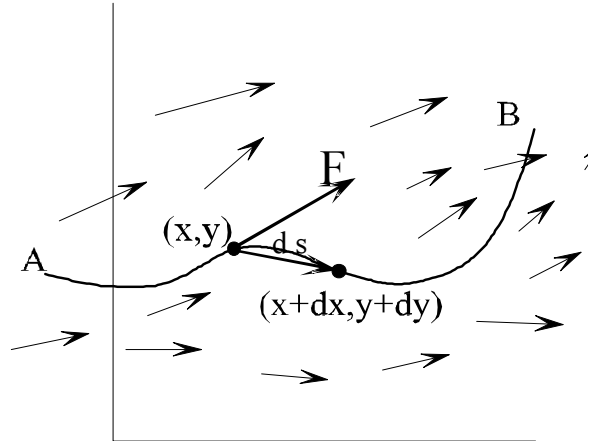
8.2 Työ voimakentässä

Esim. 2 Kappale liikkuu voimakentässä

$$(1) \quad \vec{F} = u(x, y) \vec{i} + v(x, y) \vec{j}$$

viivan \widehat{AB} osoittaman tien. Laske kentän tekemä työ.

Se, että xy -tasossa vaikuttaa tällainen voimakenttä, merkitsee, että tason jokaisessa pisteessä voimalla on tietty suuruutensa ja suuntansa, jotka määräytyvät funktioiden $u(x, y)$ ja $v(x, y)$ mukaisesti.



Jos pisteestä (x, y) siirrytään käyrää pitkin "äärettömän lyhyt" matka pisteeseen $(x + dx, y + dy)$, niin voimalla on koko tällä matkalla $d\vec{s} = dx \vec{i} + dy \vec{j}$ sama arvo (1). Vastaava työ saadaan voima- ja matkavektorien *pistetulona*:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = u(x, y) dx + v(x, y) dy.$$

Koko työ on osatöiden "summa" eli

$$(2) \quad W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B [u(x, y) dx + v(x, y) dy].$$

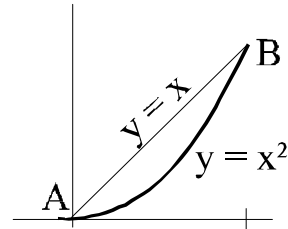
Kyseessä on vektorifunktion $\vec{F}(x, y)$ viivaintegraali, joka muuttui differentiaalilausekkeen $u(x, y) dx + v(x, y) dy$ viivaintegraaliksi.

Jos käyrän \widehat{AB} yhtälö $y = f(x)$ tunnetaan, niin vm. viivaintegraali palautuu tavalliseksi integraaliksi esim. siten, että y :n ja dy :n tilalle sijoitetaan niiden lausekkeet $f(x)$ ja $f'(x) dx$. Seuraava esimerkki havainnollistaa tätä menettelyä.

Esim. 3 Laske voimakentän $\vec{F} = (xy+1)\vec{i} + (x+y)\vec{j}$ tekemä työ, kun tienä on paraabelinkaari $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

$$\begin{aligned} W &= \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad \left| \begin{array}{l} \vec{F} = (xy+1)\vec{i} + (x+y)\vec{j} \\ d\vec{s} = dx\vec{i} + dy\vec{j} \end{array} \right. \\ &= \int_A^B [(xy+1)dx + (x+y)dy] \quad \left| \quad y = x^2, \quad dy = 2x dx \right. \\ &= \int_0^1 [(x \cdot x^2 + 1)dx + (x + x^2) \cdot 2x dx] \\ &= \int_0^1 (3x^3 + 2x^2 + 1) dx = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} + 1 = 2\frac{5}{12}. \end{aligned}$$

Esim. 4 Jos voimakenttä on sama kuin edellä, siis $\vec{F} = (xy+1)\vec{i} + (x+y)\vec{j}$, mutta kappale liikkuu pisteestä $A(0,0)$ pisteeseen $B(1,1)$ suoraa $y = x$ eikä paraabelinkaarta pitkin, niin työlle saadaan eri arvo:



$$\begin{aligned} W &= \int_A^B [(xy+1)dx + (x+y)dy] \quad \left| \quad y = x, \quad dy = dx \right. \\ &= \int_0^1 [(x^2 + 1)dx + 2x dx] = \frac{1}{3} + 1^2 + 1 = 2\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Esimerkkien 3 ja 4 voimakenttä on siis sellainen, että työ pisteestä $A(0,0)$ pisteeseen $B(1,1)$ riippuu käytetystä tiestä.

Yleisesti voidaan todistaa, että kun kappale liikkuu voimakentässä $\vec{F} = u(x,y)\vec{i} + v(x,y)\vec{j}$ annetusta pisteestä A toiseen annettuun pisteeseen B , niin kyseinen työ on riippumaton käytetystä tiestä, jos ja vain jos

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}}.$$



Tällaista voimakenttää sanotaan **potentiaalientäksi** tai myös **konservatiiviseksi kentäksi** (työn säilyttäväksi).

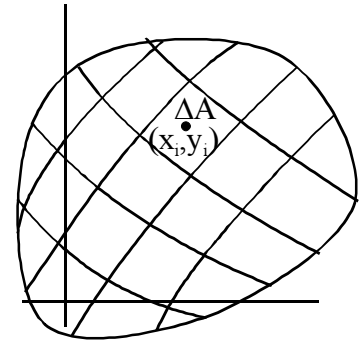
Jos integroimistie on **suljettu viiva** C , ts. alku- ja loppupisteet yhtyvät, niin viivaintegraalista käytetään merkintää $\oint_C f(x,y) ds$.

8.3 Pintaintegraali

Olkoon annettu

1. funktio $f(x, y)$,
2. xy -tason alue T .

Jaetaan T osa-alueisiin, joiden pinta-alat ovat $\Delta_1 A$, $\Delta_2 A, \dots, \Delta_n A$. Valitaan jokaisesta osa-alueesta yksi piste (x_i, y_i) .

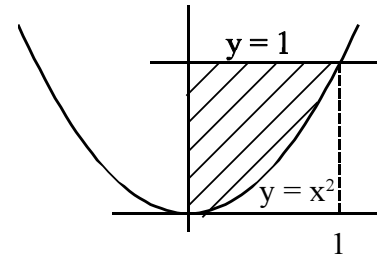


Määritelmä. Funktion f **pintaintegraali** yli alueen T on raja-arvo

$$\iint_T f(x, y) dA = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta_i A \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta_i A.$$

Pintaintegraalin laskeminen tapahtuu yleensä kaksinkertaisena integrointina sillä tavoin kuin jo monisteen I osassa on esitetty. Jos erityisesti $f(x, y) \geq 0$ koko alueessa T , niin pintaintegraali antaa pinnan $z = f(x, y)$ ja xy -tason alueen T välisen kappaleen tilavuuden V , sillä $f(x, y) dA =$ sellaisen pilarin tilavuus, jonka pohjan ala on dA ja korkeus on $f(x, y)$.

Esim. 5 Kappaletta rajoittaa pinta $z = xy$ ja xy -tason alue T , jonka rajoina ovat paraabeli $y = x^2$ sekä suorat $x = 0$ ja $y = 1$. Laske tilavuus V .



Alueessa T x muuttuu 0 :sta 1 :een ja

kiinteällä x :n arvolla y muuttuu arvosta x^2 arvoon 1 . Siten

$$T: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq 1 \end{cases}.$$

Koska lisäksi $xy \geq 0$ kaikissa T :n pisteissä ja $dA = dy \cdot dx$, niin

$$\begin{aligned} V &= \iint_T xy dA = \int_0^1 \left[\int_{x^2}^1 xy dy \right] dx = \int_0^1 \left[x \left| \frac{y^2}{2} \right|_{x^2}^1 \right] dx \\ &= \int_0^1 \frac{x}{2} (1 - x^4) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x - x^5) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

HARJOITUKSIA

A

- 8.1** Laske voiman $\vec{F} = y\vec{i} - 2x\vec{j}$ tekemä työ pitkin paraabelinkaarta $y = 3x^2, 0 \leq x \leq 1$.
- 8.2** a) Osoita, että voimakenttä $\vec{F} = (3x - xy^2)\vec{i} - x^2y\vec{j}$ on konservatiivinen (työn säilyttävä). b) Laske työ tässä kentässä pisteestä $(0,2)$ pisteeseen $(2,-2)$.
- 8.3** Kappaletta rajoittavat pinta $z = x^2 + y^2$ ja xy-tason kolmio, jonka kärjet ovat $(0,0)$, $(1,0)$ ja $(1,2)$. Laske tilavuus.

B

- 8.4** Laske $\oint [xdy - ydx]$ pitkin ellipsiä $\begin{cases} x = 5 \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases}$.
- 8.5** Osoita, että viivaintegraalin $\int_{(0,0)}^{(2,1)} [xy^2 dx + x^2y dy]$ arvo ei riipu tiestä ja laske tämä arvo.
- 8.6** Laske $\int_A^B [y^2 dx + (x^2 - 2x) dy]$, missä $A = (0,0)$ ja $b = (1,1)$ pitkin a) janaa AB , b) murtoviivaa AEB , missä $E = (1,0)$, c) E -keskistä ympyränkaarta $x^2 + y^2 = 2x$.
- 8.7** Laske pinnan $z = \frac{y+1}{x^2}$ ja kolmion $(1,0)$ $(4,0)$ $(4,6)$ välisen kappaleen tilavuus.
- 8.8** Laske pinnan $z = x^2y^2$ ja xy-tason kolmion $(0,0)$ $(2,-2)$ $(2,4)$ välisen kappaleen tilavuus.
- 8.9** Voima $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$ kuljettaa massapistettä origosta positiiviselle y-akselille pitkin spiraalinkaarta $r = 2\varphi$. Laske työ. Ohje: esitä spiraali parametrimuodossa.

C

8.10 *Avaruusintegraali* $\iiint_K f(x,y,z) dV$ määritellään vastaavasti kuin pintaintegraali. Jos erityisesti $f(x,y,z) = 1$, saadaan kappaleen K tilavuus.

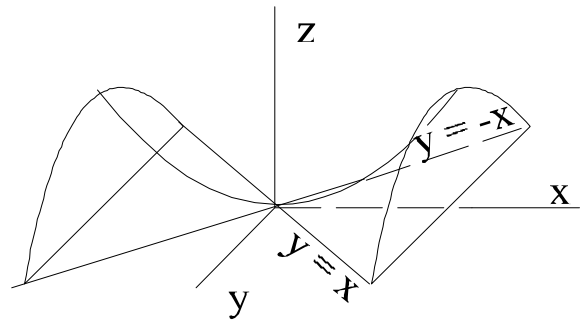
a) Laske sovelluksena pinnan $z = x^2 + y^2$ ja xy -tason kolmion $(0,0)$ $(1,0)$ $(1,2)$ välisen kappaleen tilavuus. (Ohje: Kappaleessa K x muuttuu ..., kullakin kiinteällä x :n arvolla y muuttuu ... ja kullakin kiinteällä (x,y) -arvoparilla z muuttuu ...)

b) Kappaletta K rajoittavat tasot $z = 0$ ja $x = 1$ sekä satulapinta $z = x^2 - y^2$. Laske K :n neliömomentti xy -tason suhteen eli integraali

$$\iiint_K z^2 dV.$$

Ohje: satulapinta leikkaa xy -tason pitkin viivaa $x^2 - y^2 = 0$ eli suorita $y = \pm x$. Siten K :ssa

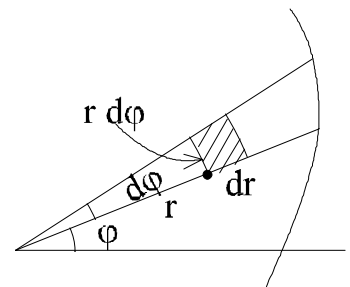
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ -x \leq y \leq x \\ 0 \leq z \leq x^2 - y^2 \end{cases}$$



8.11 Jos pintaintegraaliin tehdään sijoitus $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$ eli xy -koordinaattien sijaan otetaan käyttöön napakoordinaatit, niin pinta-alkio saa muodon

$$dA = r d\varphi dr.$$

Laske sovelluksena $\iint_T \frac{1}{x^2 + y^2} dA$, kun T :nä on origokeskisten 1- ja 2-säteisten ympyröiden välinen alue.



9 Laplace-muunnos

9.1 Laplace-muunnos eli L -muunnos

Derivoinnissa on oikeastaan kyse ns. *derivaattaoperaattorista* D , joka muuntaa funktion $f(t)$ uudeksi funktioksi $f'(t)$:

$$D[f(t)] = f'(t)$$

(sovelluksissa muuttujana on usein aika t). D -operaattori on luonteeltaan ns. *lineaarinen operaattori*, ts. se täyttää seuraavat kaksi ehtoa:

$$\begin{aligned} D[a \cdot f(t)] &= a \cdot D[f(t)] & (a = \text{vakio}), \\ D[f(t) + g(t)] &= D[f(t)] + D[g(t)]. \end{aligned}$$

Tämän käänteisoperaattori on *integraalioperaattori* I :

$$I[f(t)] = \int_a^x f(t) dt \quad (a = \text{vakio}).$$

Se muuntaa $f(t)$:n uudeksi funktioksi $F(x) - F(a)$, missä F on f :n integraalifunktio. Myös I -operaattori on lineaarinen.

Myös *Laplace-operaattori* L on eräs integraalioperaattori:

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = F(s).$$

L -operaattori kertoo siis funktion $f(t)$ "vaimennustekijällä" e^{-st} ja integroi tulon t :n suhteen 0:sta ∞ :ään, jolloin lopputulos on eräs parametrin s funktio $F(s)$. Lyhyesti sanottuna L -operaattori muuntaa funktion $f(t)$ erääksi uudeksi funktioksi $F(s)$. Siksi puhutaan myös *L -muunnoksesta*.

Tällä integraalilla ei yleensä ole äärellistä arvoa eli integraali ei suppene s :n negatiivisilla arvoilla, mutta suppenee, kun s on positiivinen (tai kun $s > a$). L -operaattorilla on käyttöä mm. säätötekniikassa ja differentiaaliyhtälöiden ratkaisemisessa (virtapiirit, lujuusoppi yms.).

Esim. 1 a) Laske funktion $f(t) = a$ ($a = \text{vakio}$) L -muunnos $F(s)$.

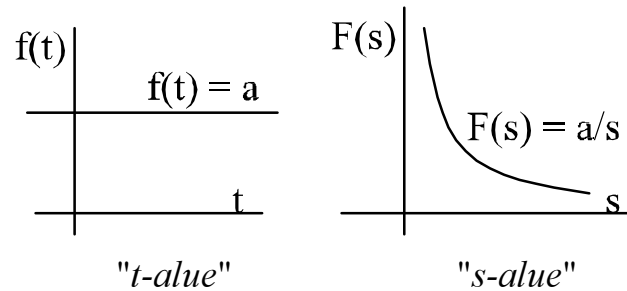
Kun $s > 0$, niin

$$L[a] = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot a dt = a \cdot \left|_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{-s} = -\frac{a}{s} \cdot \left|_0^{\infty} \frac{1}{e^{st}} = -\frac{a}{s} (0 - 1) = \frac{a}{s} \right.$$

Siis $L[a] = \frac{a}{s}$ ($s > 0$) eli

$$f(t) = a \Rightarrow F(s) = \frac{a}{s}.$$

Voidaan myös sanoa, että L -muunnos tai L -operaattori muuntaa vakiofunktion a hyperbeliksi $\frac{a}{s}$.



b) Funktion $f(t) = t$ L -muunnos saadaan vastaavaan tapaan, mutta osittaisintegroinnilla (harj.):

$$L[t] = \frac{1}{s^2} \quad \text{eli} \quad \boxed{f(t) = t \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s^2}}.$$

c) Yleinen potenssifunktiota koskeva tulos on

$$L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (s > 0, n = 0, 1, 2, \dots).$$

*Se voitaisiin todistaa tekemällä integraaliin sijoitus $-st = u$ ja käyttämällä kaavaa $\int x^n e^x dx = \dots$.

d) Lasketaan nyt funktion $f(t) = e^{at}$ L -muunnos:

$$\begin{aligned} L[e^{at}] &= \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot e^{at} dt = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt \quad | \text{oletetaan, että } s > a \\ &= \left| \frac{e^{(a-s)t}}{a-s} = \frac{1}{a-s} \right|_0^{\infty} \frac{1}{e^{(s-a)t}} = \frac{1}{a-s} (0-1) = \frac{1}{s-a}. \end{aligned}$$

Siis $\boxed{f(t) = e^{at} \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s-a}}$ (kun $s > a$).

Täten esim. $L[e^{-2t}] = \frac{1}{s-(-2)} = \frac{1}{s+2}$ (kun $s > -2$) ja $L[t^2] = \frac{2!}{s^3} = \frac{2}{s^3}$.

Koska integroinnissa vakio a voidaan siirtää integraalimerkin eteen ja summa voidaan integroida termi termiltä, niin **L -operaattori on lineaarinen**, ts.

$$\boxed{\begin{aligned} L[a \cdot f(t)] &= a \cdot L[f(t)] \\ L[f(t) + g(t)] &= L[f(t)] + L[g(t)] \end{aligned}}$$

Esim. 2 a) $L[3e^t + 5t^2 - 2] = 3 \cdot \frac{1}{s-1} + 5 \cdot \frac{2!}{s^3} - \frac{2}{s}$.

b) $L[\sinh at] = L\left[\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right)$
 $= \frac{s+a - (s-a)}{2(s^2 - a^2)} = \frac{a}{s^2 - a^2} \quad (s > a).$

9.2 Käänteismuunnos

Laplace-operaattori L muuntaa funktion $f(t)$ uudeksi (s -avaruuden) funktioksi $F(s)$. Operaattorin L **käänteisoperaattori** L^{-1} muuntaa $F(s)$:n takaisin $f(t)$:ksi, ts.

$$L^{-1}[F(s)] = f(t).$$

Koska L -operaattori on lineaarinen, samoin on L^{-1} .

Esim. 3 a) $L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 1 \quad (s > 0), \quad L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = t, \quad L^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right] = e^{3t} \quad (s > 3).$

b) $L^{-1}\left[\frac{2+3s}{s^2}\right] = L^{-1}\left[2 \cdot \frac{1}{s^2} + 3 \cdot \frac{1}{s}\right] = 2t + 3.$

c) $L^{-1}\left[\frac{2}{s(s+2)}\right] \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{suoritetaan osamurtoihinjako} \\ \frac{2}{s(s+2)} \equiv \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} \text{ jne., kertaa!} \end{array} \right.$
 $= L^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right] = 1 - e^{-2t}.$

*Osamurtokehitelmä löytyy myös seuraavasti:

$$\frac{2}{s(s+2)} = \frac{(s+2) - s}{s(s+2)} = \frac{(s+2)}{s(s+2)} - \frac{s}{s(s+2)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}.$$

Huom. Joissakin tehtävissä voit tarvita tietoa, että ns. *Diracin delta-funktion* $\delta(t)$ L -muunnos on $= 1$, ts.

$$L[\delta(t)] = 1 \quad \therefore L^{-1}[1] = \delta(t).$$

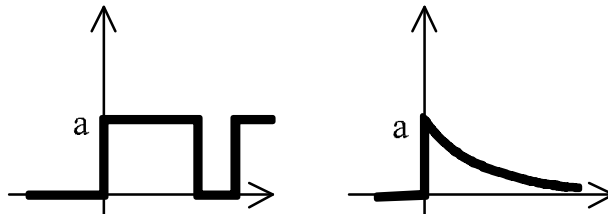
Tätä funktiota käsitellään tarkemmin myöhemmin.

9.3 Derivaatan ja integraalin L -muunnos

Lause 1 Jos $f(t)$:n L -muunnos on $F(s)$, niin

$$\begin{aligned} L[f'(t)] &= s \cdot F(s) - f(0+) \\ L[f''(t)] &= s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0+) - f'(0+) \end{aligned}$$

missä esim. $f(0+) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t)$ (vrt. seuraavat kuvat).



Kummassakin kuvassa $f(0-) = 0$, $f(0+) = a$. Jos funktiolla $f(t)$ ei ole hyppäystä kohdassa $t = 0$, vaan $f(t)$ on jatkuva kohdassa $t = 0$, niin kumpikin näistä toispuoleisista raja-arvoista on $= f(0)$.

*Tod. 1) $L[f'(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt$ $\left(\begin{array}{l} u = e^{-st} \quad v' = f'(t) \\ u' = -se^{-st} \quad v = f(t) \end{array} \right)$

$$\begin{aligned} &= \left|_0^{\infty} e^{-st} f(t) + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \right. \\ &= 0 - f(0+) + sL[f(t)] = sF(s) - f(0+). \end{aligned}$$

2) Sovelletaan kohtaa 1) funktioon $f'(t)$. Sen mukaan tämän funktion derivaatan eli $f''(t)$:n L -muunnos on

$$\begin{aligned} L[f''(t)] &= s \cdot L[f'(t)] - f'(0+) \\ &= s \cdot \{ s \cdot F(s) - f(0+) \} - f'(0+) \\ &= s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0+) - f'(0+). \end{aligned}$$

Esim. 4 Oletetaan tunnetuksi funktion $\sin at$ L -muunnos $\frac{a}{s^2 + a^2}$. Laske funktion $\cos at$ L -muunnos. Koska $\sin at$:n derivaatta on $a \cos at$, niin Lauseen 1 mukaan

$$L[a \cos at] = s \cdot \frac{a}{s^2 + a^2} - \sin(0+) = \frac{as}{s^2 + a^2} \quad | \text{ lineaarisuus}$$

$$a \cdot L[\cos at] = \frac{as}{s^2 + a^2} \quad | :a \quad \therefore L[\cos at] = \frac{s}{s^2 + a^2}.$$

Seuraavassa taulukossa on eräitä tavallisimpia L -muunnoksia, myös *integraalin L -muunnos*. Laajempi taulukko löytyy kaavastosta.

$f(t)$	$F(s)$ eli $L\{f(t)\}$
a	$\frac{a}{s}, \quad s > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0, \quad n = 1, 2, \dots$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0+)$
$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0+) - f'(0+)$
$\int_0^t f(t) dt$	$\frac{F(s)}{s}$
$\delta(t)$	1
$f(t-a)$ (viive a)	$e^{-as}F(s)$
$t \sin at$	$\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$
$t \cos at$	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$

Huomaa:

Kun *derivaatan L -muunnosta* laskettaessa $F(s)$ *kerrotaan s :llä* ja tuloksesta vähennetään $f(0+)$, joka on usein = 0, niin *integraalin L -muunnosta* laskettaessa taas $F(s)$ *jaetaan s :llä* (kuten voidaan todistaa).

9.4 L -muunnoksen käyttäminen diff.yhtälöiden ratkaisemiseen

L -muunnos sopii hyvin lineaaristen diff.yhtälöiden ja diff.yhtälöryhmien ratkaisemiseen. Perusajatus on, että *ottamalla diff.yhtälön kummastakin puolesta L -muunnos, funktion $y(t)$ diff.yhtälö muuttuu funktion $Y(s)$ tavalliseksi lineaariseksi yhtälöksi*. Huomaa seuraavassa myös alkuehtojen käsittely ja osamurtoihin jako.

Esim. 5 Ratkaise diff.yhtälö $y' + 3y = 0$, alkuehtona $y(0) = 2$.

Otetaan DY:n kummastakin puolesta L -muunnos, käytetään muunnoksen lineaarisuutta, derivaatan L -muunnoksen lauseketta ja tietoa, että $L[0] = \frac{0}{s} = 0$:

$$\begin{aligned}
 y' + 3y = 0 & \quad | \quad L\text{-muunnos} \\
 sY(s) - \underbrace{y(0+)}_{=2} + 3Y(s) = 0 \\
 (s+3)Y(s) = 2 \\
 Y(s) = \frac{2}{s+3} & \quad | \quad L^{-1} \\
 y(t) = L^{-1}\left[\frac{2}{s+3}\right] = 2 \cdot L^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right] = 2 \cdot e^{-3t}.
 \end{aligned}$$

Esim. 6 Ratkaise seuraava DY, alkuehtoina $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$.

$$\begin{aligned}
 y'' + 2y' + y = 1 & \quad | \quad L\text{-muunnos} \\
 s^2 \cdot Y(s) - s \cdot \underbrace{y(0+)}_{=2} - \underbrace{y'(0+)}_{=-2} + 2 \cdot (s \cdot Y(s) - \underbrace{y(0+)}_{=2}) + Y(s) = \frac{1}{s} \\
 (s^2 + 2s + 1)Y(s) = 2s + 2 + \frac{1}{s} = \frac{2s^2 + 2s + 1}{s} \\
 Y(s) = \frac{2s^2 + 2s + 1}{s(s^2 + 2s + 1)} = \frac{2s^2 + 2s + 1}{s(s+1)^2} & \quad | \quad \text{osamurtoihin jako } ^1) \\
 Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} & \quad \left| \quad L^{-1}, \quad L[te^{-t}] = \frac{1!}{(s+1)^2} \right. \\
 y(t) = 1 + e^{-t} - te^{-t}.
 \end{aligned}$$

1) Osamurtokehiteelmä on seuraavaa muotoa, koska nimittäjässä on 2-kertainen

lineaarinen tekijä: $\frac{2s^2 + 2s + 1}{s(s+1)^2} \equiv \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2}$.

***Esim. 7** Ratkaise seuraava DY, alkuehtoina $y(0) = 1$, $y(\pi/2) = -1$:

$$y'' + 9y = \cos 2t \quad | \quad L\text{-muunnos}$$

$$s^2 Y(s) - \underbrace{sy(0+)}_{=1} - \underbrace{y'(0+)}_a + 9Y(s) = \frac{s}{s^2 + 4} \quad | \quad \text{merk. } y'(0) = a$$

$$(s^2 + 9)Y(s) = s + a + \frac{s}{s^2 + 4}$$

$$Y(s) = \frac{s}{s^2 + 9} + \frac{a}{s^2 + 9} + \frac{s}{(s^2 + 4)(s^2 + 9)}$$

Jaetaan viimeinen termi osamurtoihin. Kehitelmä on muotoa

$$\frac{s}{(s^2 + 4)(s^2 + 9)} \equiv \frac{As + B}{s^2 + 4} + \frac{Cs + D}{s^2 + 9}$$

ja sen kertoimiksi saadaan $A = \frac{1}{5}$, $C = -\frac{1}{5}$, $B = D = 0$. Siten

$$Y(s) = \frac{s}{s^2 + 9} + \frac{a}{s^2 + 9} + \frac{s}{5(s^2 + 4)} - \frac{s}{5(s^2 + 9)} \quad | \quad L^{-1}$$

$$y(t) = \cos 3t + a \cdot \frac{1}{3} \cdot \sin 3t + \frac{1}{5} \cos 2t - \frac{1}{5} \cos 3t.$$

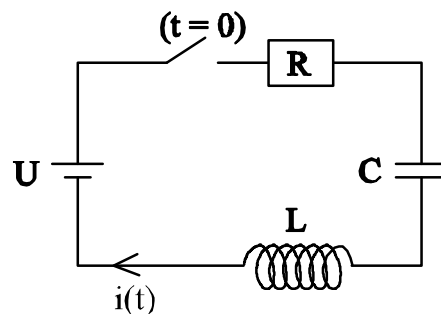
Sijoitetaan tähän alkuehto $y(\pi/2) = -1$, jolloin saadaan a :lle arvo $a = 12/5$. Lopputulos on

$$y(t) = \frac{4}{5} \sin 3t + \frac{4}{5} \cos 3t + \frac{1}{5} \cos 2t.$$

9.5 Virtapiirin vastinpiiri L -muunnoksessa

Kun oheinen RCL -piiri suljetaan hetkellä $t = 0$, kondensaattori alkaa varautua ja pienellä aikavälillä $t \dots t + dt$ se saa varauksen $dq = i(t) \cdot dt$. Hetkeen t mennessä varaus on kasvanut arvoon

$$q(t) = \int_0^t i(t) dt \quad (\text{osavarausten "summa"}).$$



Virtapiirin jännitehäviöt ovat

$$u_R = R \cdot i(t), \quad u_L = L \cdot \frac{di}{dt}, \quad u_C = \frac{1}{C} q(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt.$$

Virranvoimakkuudelle $i(t)$ saadaan jännitehäviöiden summasta diff.-int. yhtälö (Kirchhoff)

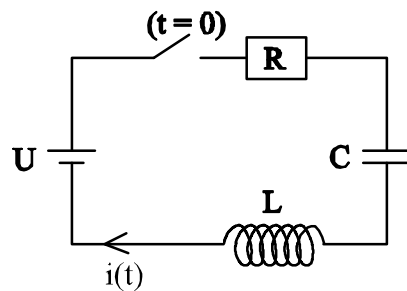
$$(1) \quad L \frac{di}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt = U.$$

Tästä yhtälöstä saadaan L -muunnetuksi yhtälöksi (koska $i(0) = 0$)

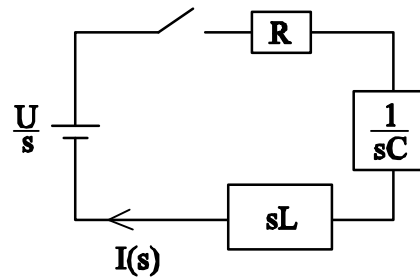
$$sL \cdot I(s) + R \cdot I(s) + \frac{1}{C} \cdot \frac{I(s)}{s} = \frac{U}{s} \quad \text{eli}$$

$$(1') \quad sL \cdot I(s) + R \cdot I(s) + \frac{1}{Cs} \cdot I(s) = \frac{U}{s}$$

Voidaan ajatella, että alkuperäinen t -alueen *virtapiiri*, jossa on jännite U ja keskenään erityyppiset R -, L - ja C -komponentit, on korvautunut s -alueessa *vastinpiirillä*, jossa jännitteen U tilalla on $\frac{U}{s}$, virran $i(t)$ tilalla on $I(s)$ ja piirissä on kolme ohmisen vastuksen tavoin käyttäytyvää komponenttia R , sL ja $\frac{1}{Cs}$.



virtapiiri



vastinpiiri

Virtapiirien tilalle voidaan siis ajatella vastinpiirit, jolloin ei ole tarpeen kirjoittaa ollenkaan virtapiirien diff.yhtälöitä tai diff.yhtälöryhmiä, vaan niiden sijaan voidaan kirjoittaa suoraan vastinpiireistä saatavat lineaariset yhtälöt tai yhtälöryhmät. Korvautumissäännöt ovat edellisen mukaan

Vars.piiri	R	L	C	$u(t)$	$i(t)$
Vastinpiiri	R	sL	$\frac{1}{sC}$	$L[u(t)]$	$I(s)$

Tasavirtapiirissä $u(t) = U$ ja $L[u(t)] = L[U] = \frac{U}{s}$. Vaihtovirtapiirissä

taas $u(t) = \hat{u} \sin \omega t$ ja siten $L[u(t)] = \frac{\hat{u} \omega}{s^2 + \omega^2}$.

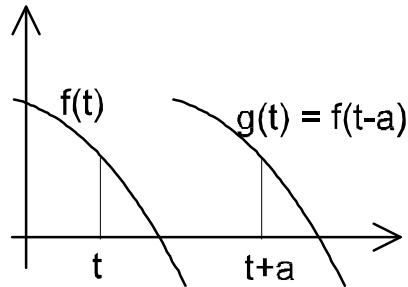
*Virtapiiritehtävissä ei aina ole tarpeen laskea virran $i(t)$ lauseketta, vaan käytännössä riittää, jos pystytään laskemaan, mitä arvoa $i(t)$ lähenee, kun $t \rightarrow \infty$. Tämä virran loppuarvo saadaan usein suoraan $I(s)$:n lausekkeesta seuraavalla *loppuarvolauseella*:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot I(s).$$

9.6 Viive, yksikköaskel ja yksikköimpulssi

Jos $g(t) = f(t - a)$, niin sen arvon, jonka funktio $f(t)$ saa hetkellä t , funktio $g(t)$ saa vasta hetkellä $t + a$, sillä

$$g(t + a) = f(t + a - a) = f(t).$$



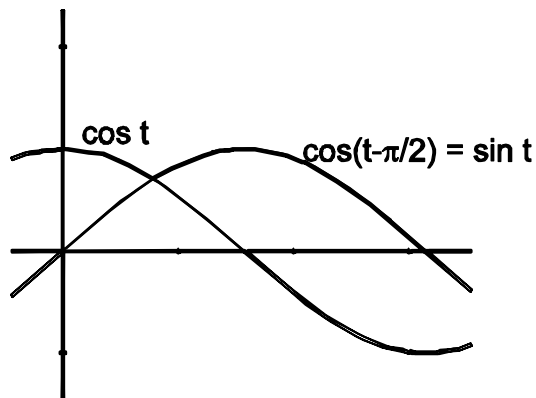
Tämä tulos voidaan esittää seuraavassa muodossa: g -funktiossa eli $f(t - a)$ -funktiossa on a :n suuruinen *viive* funktioon $f(t)$ verrattuna.

Esim. 8 Funktiossa $\cos(t - \frac{\pi}{2})$ on $\frac{\pi}{2}$:n suuruinen viive funktioon $\cos t$ verrattuna. Mutta trigonometrian mukaan

$$\cos(t - \frac{\pi}{2}) = \sin t,$$

joten $\sin t$ -funktiossa on $\frac{\pi}{2}$:n suuruinen viive $\cos t$ -

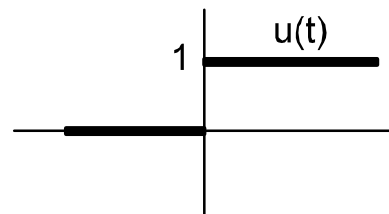
funktioon verrattuna. Geometrisesti tämä merkitsee, että sini-funktion kuvaaja on $\frac{\pi}{2}$:n verran kosinifunktion kuvaajasta oikealle.



Määritelmä. *Yksikköaskel-funktio (unit step function)*

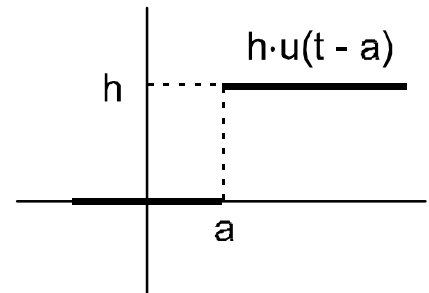
$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{kun } t > 0 \\ 0, & \text{kun } t < 0 \end{cases}$$

Täten esim. $u(0+) = 1$. Arvo $u(0)$ voi vaihdella sovelluksesta riipuen.



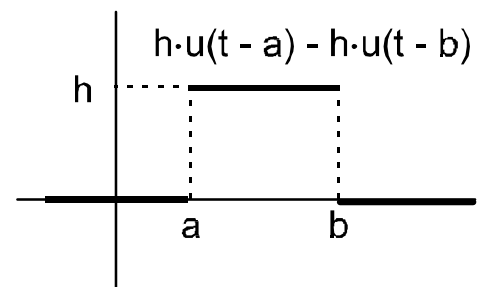
Yksikköaskeleen avulla voidaan esittää muitakin "askelfunktioita". Esimerkiksi funktio, jossa on h :n korkuinen askel kohdassa a , on

$$f(t) = h \cdot u(t - a),$$



ts. tässä funktiossa on a :n suuruinen viive funktion $h \cdot u(t)$ verrattuna.

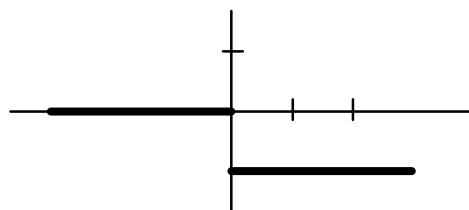
Kun edellisen kuvan mukaisesta askelfunktiosta $f(t) = h \cdot u(t - a)$ vähennetään kohdasta b alkava h :n suuruinen askel, saadaan viereisen kuvan esittämä funktio.



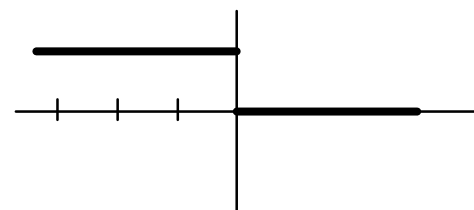
Tällaista funktiota voidaan käyttää monissa sovelluksissa, esim. seuraavissa:

- systeemiin syötetään vakiovirtaa tai jännitettä hetkestä a hetkeen b (jännite- tai virtapulssi)
- systeemissä vaikuttaa vakiovoima aikavälillä $a \dots b$,
- palkin osalla $a \dots b$ kuormituksella on vakioarvo (tällöin t :n tilalla on x).

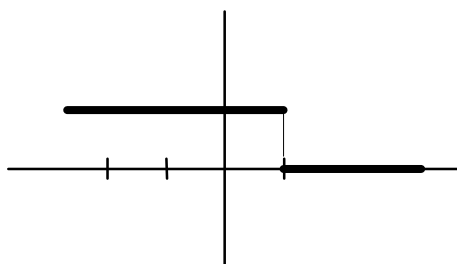
Esim. 9 Seuraavassa on neljän muun funktion esitys $u(t)$:n avulla.



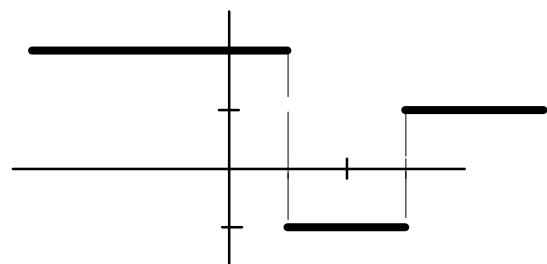
$$f(t) = -u(t)$$



$$f(t) = u(-t)$$



$$f(t) = u(-t + 1)$$



$$f(t) = 2u(-t + 1) - u(t - 1) + 2u(t - 3)$$

Koska $u(t) = \text{vakio } 1$, kun $t > 0$, niin $u(t)$:n L -muunnos on $\frac{1}{s}$. Siis

$$L[u(t)] = \frac{1}{s}.$$

Yleisemmin

$$L[u(t-a)] = e^{-as} \cdot \frac{1}{s}.$$

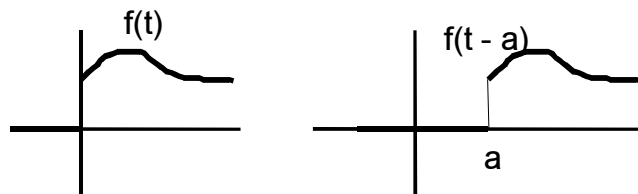
*Tod. $L[u(t-a)] = \int_0^{\infty} e^{-st} u(t-a) dt \quad \left| \quad u(t-a) = \begin{cases} 1, & \text{kun } t > a \\ 0, & \text{kun } t < a \end{cases} \right.$

$$= \int_a^{\infty} e^{-st} \cdot 1 dt \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{tehdään sij. } t-a = \tau \therefore t = a + \tau \\ \therefore dt = d\tau, t: a \dots \infty \therefore \tau: 0 \dots \infty \end{array} \right.$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-s(a+\tau)} d\tau = \int_0^{\infty} e^{-as} \cdot e^{-s\tau} d\tau$$

$$= e^{-as} \cdot L[1] = e^{-as} \cdot \frac{1}{s}.$$

*Samalla periaatteella voidaan todistaa, että jos $f(t)$ on funktio, jonka arvot ovat $= 0$, kun $t < 0$, niin

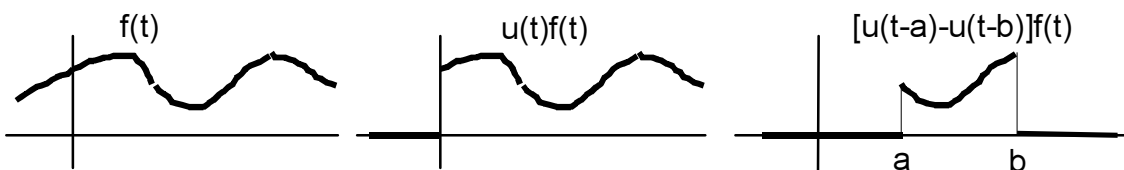


(1)

$$L[f(t-a)] = e^{-as} \cdot F(s).$$

Jos siis esim. jokin signaali ei ala hetkellä $t = 0$, vaan siinä on viive a , tämä viive aiheuttaa s -alueella lisätekijän e^{-as} . Vastakkaisuuntainen, samantapainen tulos on $L[e^{at} \cdot f(t)] = F(s-a)$.

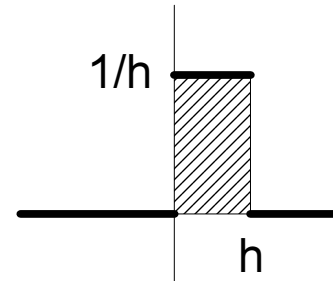
*Huomaa myös, että jos jokin funktio kerrotaan $u(t)$:llä, niin t :n negatiivisia arvoja vastaava osa funktiosta nollautuu, koska $u(t) = 0$, kun $t < 0$.



*Vastaavasti funktiolla $u(t - a) - u(t - b)$ kertominen nolaa välin $a...b$ ulkopuoliset funktion arvot (vrt. edellinen kuva). Sovellus: esim. signaalista $f(t)$ otettu näyte.

Viereisen kuvan mukaisen funktion esitys yksikkö-
askeleen $u(t)$ avulla on

$$f(t) = \frac{1}{h}u(t) - \frac{1}{h}u(t-h) = \frac{u(t) - u(t-h)}{h}.$$



Tämän funktion kuvaajan ja t -akselin välisen alueen pinta-ala on $\frac{1}{h} \cdot h = 1$, ts. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1$. Kun annetaan h :n lähestyä 0:aa sillä tavoin, että pinta-ala (eli edellinen integraali) on koko ajan $=1$, saadaan **Diracin deltafunktio** eli **yksikköimpulssi**

$$\delta(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t) - u(t-h)}{h}.$$

Pinta-alalle asetettu ehto merkitsee, että

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Lisäksi $\delta(t) = 0$, kun $t \neq 0$ (ja $\delta(t) = \infty$, kun $t = 0$).

Vaikka $\delta(t)$ ei täytä tavallisia funktioille asetettuja vaatimuksia, sillä on käyttöä mm. hetkellisen (kestoajaltaan "äärettömän lyhyen") mekaanisen tai sähköisen pulssin tai pistekuorman käsittelyssä. Todellisilla **impulsseilla** eli hetkellisillä pulsseilla on aina jokin lyhyt kesto aika ja $\delta(t)$ on siten vain likiarvo (approksimaatio) todelliselle tilanteelle.

*Jos jokin funktio $f(t)$ kerrotaan $\delta(t)$:llä, merkitsee se, että $f(t)$:n muut arvot paitsi $f(0)$ nolataan ja vastaava pinta-ala tulee $f(0)$ -kertaiseksi eli

$$(3) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t) dt = f(0).$$

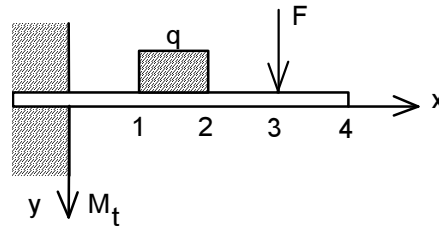
*Vastaavasti viiveellisellä funktiolla $\delta(t - a)$ kertominen antaa tuloksen

$$(4) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - a)f(t) dt = f(a).$$

Diracin δ -funktioita käytetään mm. seuraavasti:

- Virtapiirissä $\delta(t)U$ merkitsee hetkellä $t = 0$ piiriin syötettyä U :n suuruista jänniteimpulssia.
- Funktio $\delta(t-a) \cdot f(t)$ antaa signaalista $f(t)$ hetkellä a otetun näytteen.
- Palkin taivutusmomenttia tai taipumaviivaa määritettäessä tulo $\delta(x-a)F_1$ merkitsee F_1 :n suuruista pistekuormaa kohdassa $x = a$.

***Esim. 10** Viereisen ulokepalkin kuormituskorkeuden $q(x)$ lauseke voidaan esittää yksikköaskeleen $u(x)$ ja $\delta(x)$ -funktion avulla seuraavasti:



$$q(x) = u(x-1) \cdot q - u(x-2) \cdot q + \delta(x-3) \cdot F$$

Tästä saadaan taivutusmomentille $M_t(x)$ ja taipumaviivalle $y(x)$ diff.yhtälöt, koska

$$M_t'' = -q(x) \quad \text{ja} \quad y'' = -\frac{M_t}{EI}.$$

Funktion $\delta(t)$ Laplace-muunnos on $\boxed{L[\delta(t)] = 1}$ ja yleisemmin (1):n nojalla $L[\delta(t-a)] = e^{-as}$.

$$\begin{aligned} *Tod. L[\delta(t)] &= \lim_{h \rightarrow 0} L\left[\frac{u(t) - u(t-h)}{h}\right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{s} - e^{-hs} \cdot \frac{1}{s}}{h} \quad (\text{lineaarisuus}) \\ &= \frac{1}{s} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-hs}}{h} = \frac{1}{s} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s \cdot e^{-hs}}{1} \quad (\text{Hospital}) \\ &= 1. \end{aligned}$$

HARJOITUKSIA

A

9.1 Laske esimerkissä 1 mainittujen tulosten avulla

a) $L[e^{-3t}]$, b) $L[0]$, c) $F(s)$, kun $f(t) = e^{5t}$, d) $L[t^3]$

9.2 Laske L -muunnoksen määritelmän nojalla $L[5 \cdot e^{-2t}]$.

9.3 Määritä L -muunnoksen lineaarisuutta ja kaavastoa (tai kohdan 9.3 taulukkoa) käyttäen seuraavien funktioiden L -muunnokset:

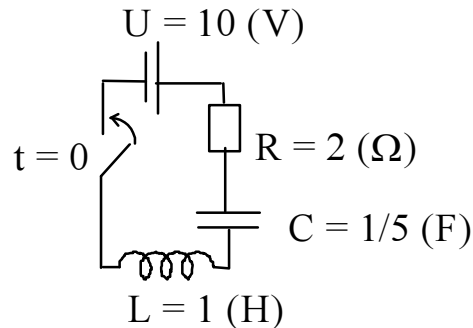
- a) $f(t) = 1 - 2t + \cos 3t$, b) $y(t) = 2e^{3t} - \sin 2t + 1$.
- 9.4 Määritä a) $L^{-1}\left[\frac{1-s}{2s^2}\right]$, b) $L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)(s-1)}\right]$, c) $L^{-1}\left[\frac{s+3}{s-2} - \frac{s+2}{s-1}\right]$
 d) Funktion $Y(s) = \frac{3s-2}{s(s+2)}$ käänteismuunnos $y(t)$.
- 9.5 Laske $L[f'(t)]$ ja $L[f''(t)]$, kun $f(0) = 2$, $f'(0) = -1$ ja $f(t)$:n L -muunnos on $F(s) = \frac{2s^2 - 5s + 6}{s^2(s-2)}$.
- 9.6 Ratkaise seuraavat DY:t L -muunnosten avulla ja tarkista saamasi tulokset (derivoimalla):
 a) $y' + y = e^{-t}$, $y(0) = 1$, b) $y' + 3y = 5$, $y(0+) = 2$.
- 9.7 Ratkaise DY $y'' + y = 0$, kun alkuehdot ovat a) $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$,
 b) $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Tarkista saamasi tulokset.
- 9.8 Ratkaise *integraaliyhtälö* $y(t) + 2\int_0^t y(t) dt = e^{-t}$.
- 9.9 Piirrä funktion $f(t) = 3u(t-1) - 2u(t-2) - 4u(t-4)$ kuvaaja.

B

- 9.10 Todista Laplace-muunnoksen määritelmästä lähtien osittais-integroinnin avulla, että $L[t] = \frac{1}{s^2}$ ($s > 0$). Piirrä vastaavien funktioiden $f(t)$ ja $F(s)$ kuvaajat, jotta näet havainnollisesti, miten funktio muuttuu siirryttäessä t -alueesta s -alueeseen.
- 9.11 Määritä kaavastosta löytyvien kaavojen avulla $L^{-1}\left[\frac{4s-1}{(s^2+9)^2}\right]$.
- 9.12 Todista, että $L[y'''(t)] = s^3Y(s) - s^2y(0+) - sy'(0+) - y''(0+)$.
- 9.13 Ratkaise L -muunnoksilla $y'' + y = t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$ ja tarkista lopputulos derivoimalla.
- 9.14 Ratkaise L -muunnoksilla diff.int.-yhtälö

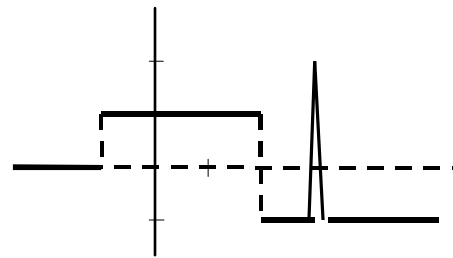
$$y' + 3y + 2 \int_0^t y(\tau) d\tau = 2t, \quad y(0) = 0.$$

- 9.15** Laske oheiselle piirille virran $i(t)$ L -muunnettu lauseke $I(s)$ ja päättele siitä virran loppuarvo i_∞ . Kondensaattori on alussa varaamaton.



- 9.16** Määritä RL -tasavirtapiirille funktio $i(t)$. Päättele tästä, mitä arvoa $i(t)$ lähenee, kun $t \rightarrow \infty$. Totea, että saman tuloksen saat, kun lasket raja-arvon $\lim_{s \rightarrow 0} sI(s)$.

- 9.17** Esitä $u(t)$ - ja $\delta(t)$ -funktioiden avulla viereisen kuvan mukainen funktio.



C

- 9.18** Ratkaise diff.yhtälöryhmä
- $$\begin{cases} x'(t) - y(t) = t \\ x(t) - y'(t) = 1 \end{cases}, \quad x(0) = 2, \quad y(0) = 1.$$

- 9.19** Esitä askel- ja δ -funktion avulla funktio $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < -1 \\ 3, & \text{kun } -1 \leq x < 2 \\ 5, & \text{kun } x = 2 \\ 3, & \text{kun } 2 < x < 4 \\ -2, & \text{kun } x \geq 4 \end{cases}.$

- 9.20** RL -piiriin syötetään impulssi U hetkellä $t = 0$, jolloin DY on

$$Ri(t) + Li'(t) = \delta(t)U.$$

Ratkaise tämä DY.

- 9.21** Muodosta esimerkin 10 mukaiselle ulokepalkille diff.yhtälö $M_t''(x) = \dots$ ja ota siitä L -muunnos, ts. laske $M_t(s)$:n lauseke. Ulokepalkilla on $y(0) = y'(0) = 0$.

10 Sarjoista

10.1 Lukujono ja sarja

Lukujonossa

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$$

u_n on *n:s jäsen*. Esimerkkejä:

$$1, 2, \dots, n, \dots$$

$$1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots \quad (u_n = 2n-1 \rightarrow \infty, \text{ kun } n \rightarrow \infty)$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \quad (u_n \rightarrow 0, \text{ kun } n \rightarrow \infty)$$

Sarjassa

(1)

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k.$$

u_n on *n:s termi*. Sarjan *n:s osasumma* on

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

Sarjan käyttäytymisestä saadaan kuva, kun tutkitaan osasummien muodostamaa jonoa (eli lasketaan sarjasta yhä pidempi ja pidempi pätkä):

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \quad S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \quad S_4 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4, \dots$$

Jos jonolla $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ on äärellinen raja-arvo S , sanotaan, että sarja (1) *suppenee* (konvergoi) ja S on sarjan *summa*. Muulloin sarja *hajaantuu* (divergoi).

Esim. 1 Sarja $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$ suppenee ja sen summa on 1, sillä

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \quad \left| \quad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \text{ (osamurtokehit.)} \right. \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{n} \quad \text{(termit kumoutuvat parittain)} \end{aligned}$$

$$\rightarrow 1, \text{ kun } n \rightarrow \infty.$$

Esim. 2 Seuraavat sarjat hajaantuvat:

$$1 + 2 + 3 + \dots \quad (S_n \rightarrow \infty, \text{ kun } n \rightarrow \infty).$$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ Todistuksen ajatus: Toinen termi = $1/2$, kahden seuraavan summa on $> 1/2$, neljän sitä seuraavan summa on $> 1/2$, kahdeksan seuraavan $> 1/2$ jne. Täten summa on $> 1 + 1/2 + 1/2 + \dots$

$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ Tämä sarja hajaantuu siksi, että jokainen parillinen osasumma $S_{2k} = 0$ ja jokainen pariton osasumma $S_{2k+1} = 1$, joten S_n ei lähene n :n kasvaessa mitään äärellistä arvoa (vaan on vuorotellen 1 ja 0).

10.2 Aritmeettinen ja geometrinen sarja

Aritmeettisessä sarjassa muutos d (*difference*) termistä seuraavaan siirtäessä on aina saman suuruinen, ts. sarja on muotoa

$$(2) \quad \boxed{a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + \dots}$$

Koska toisessa termissä on $1 \cdot d$, kolmannessa $2 \cdot d$ jne., niin yleinen eli n :s termi on

$$u_n = a + (n - 1)d$$

Päättymätön aritmeettinen sarja hajaantuu aina, koska osasummien jono $\rightarrow \infty$ tai $-\infty$ sen mukaan, onko $d > 0$ vai < 0 . Niinpä sarjasta (2) esiintyy käytännössä vain n :s osasumma. Sen arvo on

$$\boxed{S_n = n \cdot \frac{a + u_n}{2}} \quad (\text{"n kertaa ensimmäisen ja viimeisen termin keskiarvo"})$$

*Tod. Lasketaan S_n kahdella tavalla ("etu- ja takaperin"):

$$\begin{aligned} &+ \begin{cases} S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + u_n \\ S_n = u_n + (u_n - d) + (u_n - 2d) + \dots + a \end{cases} \\ \hline &2S_n = (a + u_n) + (a + u_n) + \dots + (a + u_n) = n(a + u_n) \\ \therefore &S_n = n \cdot \frac{a + u_n}{2} \end{aligned}$$

Esim. 3 $1 + 2 + 3 + \dots + 100 = 100 \cdot \frac{1 + 100}{2} = 50 \cdot 101.$

Geometrisessa sarjassa jokainen termi saadaan edeltävästä termistä samalla luvulla q kertomalla, ts. sarja on muotoa

$$(3) \quad \boxed{a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1}} \quad (a \neq 0).$$

1) Jos geometrisen sarjan "suhdeluku" (*quotient*) $q=1$, sarja on vakio-terminen $a+a+a+\dots$ ja se hajaantuu (+ tai - ääretöntä kohti sen mukaan, onko $a > 0$ vai < 0).

Jos taas $q \neq 1$, niin n :s osasumma $S_n = a + aq + \dots + aq^{n-1}$ on

$$S_n = a(1 + q + \dots + q^{n-1}) = a \cdot \frac{(1-q)(1+q+\dots+q^{n-1})}{(1-q)} = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Tämän avulla voidaan tutkia geometrisen sarjan suppenemista jäljellä olevissa tapauksissa:

2) Jos $|q| < 1$, niin $S_n \rightarrow a \cdot \frac{1}{1-q}$, kun $n \rightarrow \infty$, ts. sarja suppenee ja sen

summa on $\frac{a}{1-q}$.

3) Jos $|q| > 1$, niin sarja hajaantuu, koska $|q|^n \rightarrow \infty$, kun $n \rightarrow \infty$.

4) Jos $q = -1$, sarja on $a - a + a - a + \dots$ ja siis hajaantuu (S_n saa vuorotellen arvon a ja 0 eli ei lähene mitään arvoa, kun $n \rightarrow \infty$).

Tulos: *Geometrisen sarjan (3) osasumma*

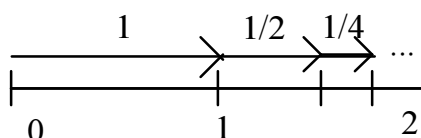
$$\boxed{S_n = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}}.$$

Sarja suppenee vain, kun $|q| < 1$. Tällöin sarjan summa on

$$\boxed{S = \frac{a}{1-q}}.$$

Esim. 4 Sarja $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$ on geometrinen, suhdelukuna $q = \frac{1}{2}$. Sarja siis suppenee ja sen

summa on $S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.



Geometrisessa sarjassa prosentuaalinen muutos termistä seuraavaan on aina yhtä suuri. Jos nimittäin esim. $q=1,23$, niin jokainen termi on edeltäjänsä nähden 1,23-kertainen eli sitä 23 % suurempi. Jos taas $q=0,92$, niin jokainen termi on edellistä termiään 8 % pienempi.

Tämä ominaisuus tekee **geometrisen jonon** q, aq, aq^2, \dots käyttökelpoiseksi, kun valitaan välikokoja pyörötangoille, putkille, hammaspyörille, pulteille yms.

Esim. 5 Kahden putken halkaisijat ovat 20 mm ja 200 mm. Näiden välille tehdään neljä välikokoa. Mitoituksessa käytetään a) aritmeettista, b) geometrista porrastusta. Laske halkaisijat.

a) Halkaisijat ovat muotoa

$$20, 20 + d, 20 + 2d, 20 + 3d, 20 + 4d, 20 + 5d = 200$$

Täten $20 + 5d = 200 \therefore d = 36$ ja halkaisijoiden mm-koot ovat

$$20, 56, 92, 128, 164, 200.$$

Ensimmäisestä koosta toiseen siirryttäessä halkaisija kasvaa lähes 3-kertaiseksi, tarkemmin sanoen n. 180 %. Kahden viimeisen koon välillä kasvu on vain n. 22 %.

b) Halkaisijat ovat muotoa

$$20, 20q, 20q^2, 20q^3, 20q^4, 20q^5 = 200 \therefore q = 10^{1/5} \approx 1,5848$$

Tästä saadaan halkaisijoille suunnilleen seuraavat koot mm:issä:

$$20 \quad 31,7 \quad 50,2 \quad 79,6 \quad 126,2 \quad 200.$$

Koosta seuraavaan siirryttäessä putken halkaisija kasvaa n. 1,585-kertaiseksi eli 58,5 %.

10.3 Potenssisarja

Muotoa

$$\boxed{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k} \quad (a_k \in \mathbf{R})$$

olevaa sarjaa sanotaan x :n *potenssien mukaan eteneväksi potenssisarjaksi* tai myös *Maclaurinin sarjaksi*. Sen suppenemisarja on jokin origokeskinen väli $-r \dots r$. Jos erityisesti potenssisarjan jokainen kerroin on yhtä suuri, kyseessä on geometrinen sarja, suhdelukuna x :

$$a + ax + ax^2 + \dots$$

Sen suppenemisarja on origokeskinen väli $-1 < x < 1$.

Yleisemmän, $(x - x_0)$:n potenssien mukaan etenevän potenssisarjan

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

suppenemisarja on jokin x_0 -keskinen väli. Tällaista sarjaa sanotaan *Taylorin sarjaksi*. Jos $x_0 = 0$, niin Taylorin sarja on Maclaurinin sarja.

Esim. 6 Sarja $1 + (x - 1) + (x - 1)^2 + \dots$ on geometrinen, jonka suhdelukuna on $q = x - 1$. Sarja suppenee niillä x :n arvoilla, jotka toteuttavat ehdon $-1 < x - 1 < 1$ eli ehdon $0 < x < 2$. Näillä x :n arvoilla sarjan summa on $\frac{1}{1 - (x - 1)} = \frac{1}{2 - x}$. Siis

$$\frac{1}{2 - x} = 1 + (x - 1) + (x - 1)^2 + \dots, \text{ kun } 0 < x < 2.$$

Tällä tavoin funktiolle $\frac{1}{2 - x}$ on saatu $(x - 1)$:n potenssien mukaan etenevä sarjakehitelmä eli *Taylorin sarjakehitelmä* pisteen $x = 1$ ympäristössä. Tätä kehitelmää voidaan käyttää funktion $\frac{1}{2 - x}$ sijasta, mutta vain välillä $0 < x < 2$.

10.4 Potenssisarjan muodostamistapoja

Useat sarjojen sovellukset perustuvat siihen, että *annettu funktio esitetään potenssisarjana eli kehitetään potenssisarjaksi*. Seuraavassa on tarkoituksena esitellä tärkeimpiä sarjakehitelmiä ja niiden muodostamistapoja.

*1) Geometrisen sarjan summafunktioiden kehitelmät

Esim. 7 Kehitä funktio $\frac{3}{2 - x}$ Maclaurinin sarjaksi ja määritä kehitelmän voimassaoloalue.

$$\frac{3}{2-x} = \frac{\overbrace{3/2}^a}{1-\underbrace{x/2}_q} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \frac{a}{1-q} \text{ on supp. geom. sarjan} \\ a+ax+ax^2+\dots \text{ summa} \end{array} \right.$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{3x}{2 \cdot 2} + \frac{3}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \dots, \text{ kun } \left|\frac{x}{2}\right| < 1$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{3}{2^2}x + \frac{3}{2^3}x^2 + \dots + \frac{3}{2^n}x^{n-1} + \dots, \text{ kun } -2 < x < 2$$

2) Sarjakehitelmän muodostaminen derivaattojen avulla

Pyritään löytämään funktiolle f potenssisarjakehitelmä

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

(eli $f(x)$:ää esittävä *Maclaurinin* sarja). Kertoimien a_k määrittämiseksi sarja derivoidaan termi termiltä (potenssisarjalla tämä on luvallista, kuten voidaan todistaa):

$$\begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + \dots \\ f''(x) &= 2a_2 + 2 \cdot 3a_3x + 3 \cdot 4a_4x^2 + 4 \cdot 5a_5x^3 + \dots \\ f'''(x) &= \overbrace{1 \cdot 2 \cdot 3}^{3!}a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4x + 3 \cdot 4 \cdot 5a_5x^2 + \dots \\ f^{(4)}(x) &= 4!a_4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5a_5x + \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Kun näihin sijoitetaan x :lle arvo 0, saadaan

$$f(0) = a_0, \quad f'(0) = a_1, \quad f''(0) = 2a_2 = 2!a_2, \quad f'''(0) = 3!a_3, \quad f^{(4)}(0) = 4!a_4, \dots$$

$$\therefore a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \text{ missä } k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \text{ ja } 0! = 1.$$

Täten

$$(4) \quad \boxed{f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots}$$

Vastaavasti voidaan johtaa f :n *Taylorin* sarjakehitelmä pisteen x_0 ympäristössä:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

Esim. 8 Määritä funktioiden a) $f(x) = e^x$, b) $f(x) = \sin x$ Maclaurinin kehitelmät.

a) Koska $f^{(k)}(x) = e^x$ ja $f^{(k)}(0) = 1$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), niin (4):n mukaan

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\left. \begin{array}{ll} \text{b) } f(x) = \sin x & f(0) = 0 \\ f'(x) = \cos x & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\sin x & f''(0) = 0 \\ f'''(0) = -\cos x & f'''(0) = -1 \\ f^{(4)}(x) = \sin x & f^{(4)}(0) = 0 \end{array} \right\} \text{ jakso}$$

$$\therefore \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Voidaan todistaa, että *eksponenttifunktion ja sinin sarjakehitelmät ovat voimassa kaikilla x :n arvoilla.*

Jos funktion $f(x)$ Maclaurinin sarja katkaistaan x^n -termin edestä, saadaan f :n *Maclaurinin polynomi*. Sitä käytetään sovelluksissa funktion f likiarvona. Sarjan loppupäätä sanotaan *jäännöstermiksi* $R_n(x)$ ja sille voidaan johtaa mm. lauseke

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} x^n,$$

missä c on jokin välillä $0 \dots x$ oleva luku. Jäännöstermin avulla voidaan arvioida katkaisuvirhettä seuraavan esimerkin osoittamalla tavalla.

Esim. 9 Kun $x = 1$, e^x :n kehitelmä antaa e :lle esim. seuraavan likiarvon:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \approx 2,67$$

*Katkaisuvirheen itseisarvolle saadaan tässä tapauksessa yläraja

$$R_n(1) = \frac{e^c}{4!} 1^4 < \frac{e^1}{4!} < \frac{3}{4!} < 0,13$$

Jos sarja on **vuorotteleva**, ts. joka toinen (nollasta eroava) termi on positiivinen ja joka toinen negatiivinen, niin katkaisuvirheen arviointiin voidaan käyttää seuraavaa tulosta:

Jos sarja on vuorotteleva ja sen termit lähenevät monotonisesti 0:aa, niin katkaisuvirheen itseisarvo on pienempi kuin ensimmäinen poisjätetty termi. Poisjätetty osa on samanmerkkinen kuin ensimmäinen poisjätetty termi.

Esim. 10 $\sin 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \dots \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} = 0,84166\dots$

Tässä $|\text{katkaisuvirhe}| < 1/7! < 0,0002$. Koska ensimmäinen poisjätetty termi on negatiivinen, samoin on koko loppuosaa. Siten oikea arvo on likiarvoa pienempi.

3) Tunnettujen sarjakehitelmien käyttäminen

Tunnetuista sarjakehitelmistä voidaan saada uusia mm. *derivoimalla* tai *integroimalla* tai *sijoittamalla* $x:n$ paikalle jokin $x:n$ lauseke. Sarjakehitelmiä voidaan myös laskea yhteen, vähentää toisistaan ja kertoa tai jakaa keskenään samaan tapaan kuin polynomeja kerrotaan tai jaetaan.

Esim. 11 a) *Sijoitetaan* e^x :n sarjaan jokaisen $x:n$ paikalle $-2x$:

$$e^{-2x} = 1 - 2x + \frac{(-2x)^2}{2!} + \frac{(-2x)^3}{3!} + \dots = 1 - 2x + \frac{4x^2}{2!} - \frac{8x^3}{3!} + \dots$$

b) Derivoidaan $\sin x$:n sarja. Näin saadaan $\cos x$:n sarja:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

*c) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots \quad (-1 < x < 1) \quad | \quad \text{integroidaan}$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + C$$

Kun tässä x :lle annetaan arvo 0, nähdään, että $C = 0$. Saatu kehitelmä on voimassa myös, kun $x = 1$. (Integroitaessa voi voimassaoloalueeseen tulla mukaan välin päätepisteet, derivoitaessa ne taas voivat kadota.). Miten saat tästä $\ln(1-x)$:n

kehittelmän ja sitten funktion $\ln \frac{1-x}{1+x}$:n kehitelmän?

d) Jakamalla $\sin x$:n sarjaa jakokulmassa $\cos x$:n sarjalla saat $\tan x$:n sarjan alkupään termejä. Kokeile!

4) Binomisarja

Laskemalla funktion $f(x) = (a+x)^n$ derivaattoja x :n arvolla 0 saadaan tälle funktiolle sarjakehitelmä

$$(5) \quad (a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3 + \dots$$

Jos erityisesti $a = 1$, saadaan ns. *binomisarja*

$$\boxed{(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots}$$

jonka voimassaoloalue on ainakin $-1 < x < 1$ (joillakin n :n arvoilla voivat välin päätepisteet tulla mukaan). Tässä n voi olla mikä reaaliluku tahansa. Jos erityisesti $n = \frac{1}{2}$, saadaan sarja

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^3}{6} - + \dots$$

(Laske itse välivaiheet. Mikä on seuraava termi?)

Jos sarjassa (5) n on luonnollinen luku ja $x = b$, saadaan seuraava *Newtonin binomikaava*:

$$(6) \quad (a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \dots + nab^{n-1} + b^n.$$

Esimerkiksi

$$\begin{aligned} (a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + \frac{4 \cdot 3}{2!}a^2b^2 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!}ab^3 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4!}b^4 \\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \end{aligned}$$

Kertoimet ovat *Pascalin kolmion* mukaiset. Yhtälön (6) kertoimia sanotaan *binomikertoimiksi* ja niiden yleinen merkintä on $\binom{n}{k}$ (" n yli k : n ") ($n = 0, 1, \dots, n$). Binomikertoimien lauseke voidaan esittää kahdessa käyttökelpoisessa muodossa:

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

Itse binomikaava (6) voidaan esittää lyhyesti muodossa

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Jos termit kirjoitetaan lopusta alkuun päin, saadaan esitys

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

10.5 Sarjojen sovelluksia

Tavallisin sarjojen soveltamistapa on sarjan katkaiseminen ja alkuosan käyttäminen funktion tilalla.

***Esim. 12** Käytetään seuraavan integraalin laskemiseen binomisarjan yhteydessä esitettyä sarjaa

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \dots$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{8+x^3} dx &= \sqrt{8} \cdot \int_0^1 \sqrt{1+\frac{x^3}{8}} dx \quad \left| \text{ sij. em. sarjaan } x:n \text{ tilalle } \frac{x^3}{8} \right. \\ &= \sqrt{8} \cdot \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{8} - \frac{1}{8} \cdot \frac{x^6}{64} + \dots \right) dx \\ &= \sqrt{8} \cdot \left[x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{8 \cdot 4} - \frac{1}{8} \cdot \frac{x^7}{64 \cdot 7} + \dots \right]_0^1 \\ &= \sqrt{8} \cdot \left(1 + \frac{1}{64} - \frac{1}{56 \cdot 64} + \dots \right) \approx \sqrt{8} \cdot \left(1 + \frac{1}{64} \right) \approx 2,8726. \\ |virhe| &< \sqrt{8} \cdot \frac{1}{56 \cdot 64} < 0,0008 \end{aligned}$$

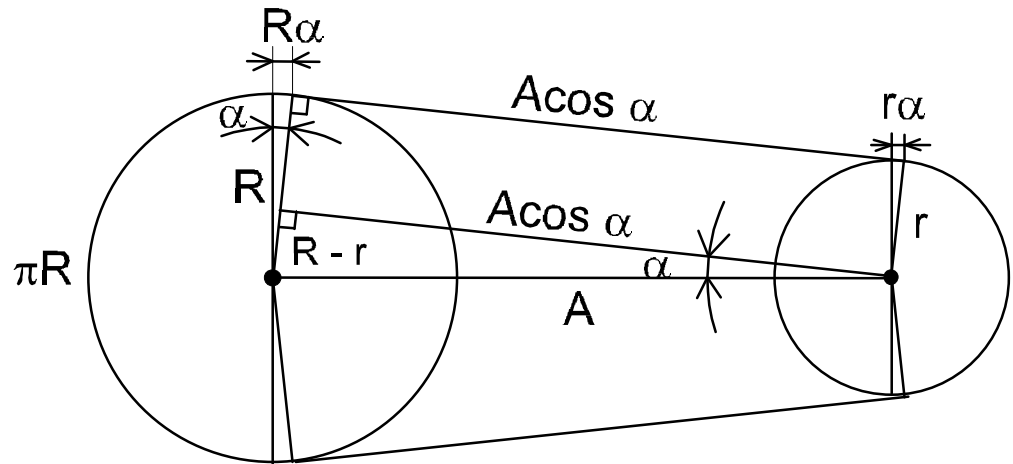
Esim. 13 Kun tavallisimpia sarjoja katkaistaan 1. tai 2. termin jäljestä, saadaan seuraavia likiarvokaavoja:

Jos $|x|$ on pieni, niin

$$\sin x \approx x, \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!}, \quad \tan x \approx x, \quad \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{x}{2}, \quad \ln(1+x) \approx x, \quad \text{tarkemmin sanoen } \approx x - \frac{x^2}{2}$$

***Esim. 14** Johda hihnan pituudelle L likiarvo, kun hihnapyörien välimatka A on suuri pyörien säteiden erotukseen $R - r$ verrattuna.



$$\begin{aligned}
 L &= \pi R + 2R\alpha + 2A\cos\alpha + (\pi r - 2r\alpha) \\
 &= \pi(R+r) + 2(R-r)\alpha + 2A\cos\alpha \quad \left| \quad \alpha \approx \sin\alpha = \frac{R-r}{A} \right. \\
 &\approx \pi(R+r) + \frac{2(R-r)^2}{A} + 2A - \frac{(R-r)^2}{A} \quad \left| \quad \cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2} \approx 1 - \frac{(R-r)^2}{2A^2} \right. \\
 \therefore L &\approx 2A + \pi(R+r) + \frac{(R-r)^2}{A}, \text{ jos } R-r \ll A.
 \end{aligned}$$

Merkki \ll tarkoittaa: "paljon pienempi kuin". Tätä likiarvokaavaa käytetään A :n laskemiseen, kun L , R ja r tunnetaan (sillä esim. kiilahihnoja on tiettyjä pituuksia ja hihnapyöriä tietyn kokoisia). Alkuperäisestä L :n yhtälöstä A olisi mahdoton ratkaista, koska α on A :n funktio. Huomaa, että johtamisessa käytettiin aluksi likiarvokaavaa $\alpha \approx \sin\alpha$ näin päin.

***Esim. 15**

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1+x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots - 1 - x}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2!} + \frac{x}{3!} + \dots \right) = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

HARJOITUKSIA

A

- 10.1** a) Mikä on n :n ensimmäisen positiivisen kokonaisluvun summa? Entä n :n ensimmäisen b) parillisen, c) parittoman, d) kolmella jaollisen positiivisen kokonaisluvun summa?
- 10.2** Aritmeettisen sarjan 1. termi on 10 ja 9. termi 7. Laske d , u_{16} ja S_{16} .
- 10.3** Laske sarjan $3 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - + \dots$ summa.
- 10.4** Geometrisen sarjan 3. termi on 10 ja 7. termi 100. Laske 4., 5. ja 6. termi. Käytä laskemisessa samaa ajattelutapaa kuin esimerkeissä 5. b).
- 10.5** Hammaspyörien hammasmäärät ovat 55 ja 22. Näiden välille tehdään kaksi välikokoa (geom. porrastus). Laske välikokojen hammasmäärät.
- 10.6** a) Kehitä x :n potenssisarjaksi (myös n :s termi ja voimassaoloalue) funktio a) $\frac{2}{2-x}$, b) $\frac{3}{2+x}$.
- 10.7** Muodosta funktion $\sinh x$ Maclaurinin sarja a) laskemalla derivaattoja, b) eksponenttifunktion avulla.
- 10.8** Muodosta funktion $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ Maclaurinin sarja. Neljä ensimmäistä termiä näkyviin.
- 10.9** Laske Gaussin virheintegraali $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ kolmella desimaalilla.
- 10.10** Laske $\int_1^2 \frac{\sin(x/2)}{x} dx$ niin tarkasti, että vielä tuhannesosatkin ovat oikein. Montako termiä sarjasta täytyy ottaa mukaan?
- 10.11** Laske $\int_0^1 e^{-x^2/4} dx$ niin tarkasti, että vielä tuhannesosatkin ovat oikein. Montako termiä sarjasta täytyy ottaa mukaan?

B

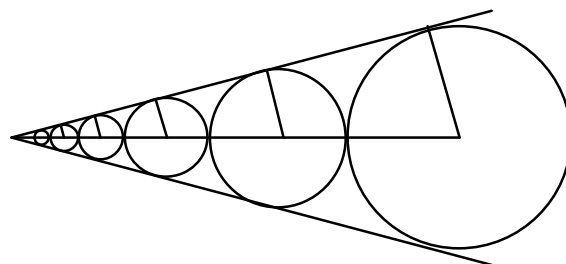
- 10.12** Geometrisen sarjan 2. termi on 2 ja 4. termi 6. Laske S_8 (tarkka arvo).
- 10.13** Millä x :n arvoilla sarja a) $2 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + \dots$, b) $1 + \frac{x-1}{x} + \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 + \dots$ suppenee?
- 10.14** Kahdelle hihnapyörälle A (\varnothing 300 mm) ja D (\varnothing 100 mm) tehdään välikoot B ja C (geom. porrastus). A pyörittää toista hihnapyörää E . Pyörä A korvataan C :llä. Miten muuttuu E :n pyörimisnopeus (esim. prosenteissa ilmaistuna)?
- 10.15** Tankojen halkaisijat muodostavat geometrisen jonon, suhdelukuna $q = 1,75$. Millaisen jonon muodostavat tankojen a) poikkipinta-alat, b) taivutusvastukset $W = \pi d^3 / 32$?
- 10.16** Minkä säännön (aritm. tai geom. jonon, geom. sarjan tms.) mukaan pääoma kasvaa seuraavissa tapauksissa ja mikä on kasvaneen pääoman lauseke kussakin tapauksessa:
- a) Kertatallennus a euroa kasvaa ns. *yksinkertaista korkoa*, jolloin korko maksetaan koko ajan vain alkupääomalle a euroa. Kuinka suureksi tallennus on kasvanut t . vuoden loppuun mennessä, kun vuotuinen korkoprosentti on p ?
- b) Kuten edellinen, mutta tallennus kasvaa *korkoa korolle*, jolloin korko liitetään pääomaan kerran vuodessa, vuoden lopussa.
- c) Kuten b), mutta kertatallennuksen a euroa sijasta tallennetaan joka vuoden alussa a euroa. (Eräs laskutapa: kuinka suureksi ensimmäinen a euroa kasvaa, entä toinen jne.)
- 10.17** 3600 euron velka maksetaan takaisin *tasalyhenteisenä* (lyhennyserät ovat yhtä suuret) 3 vuoden aikana. Vuotuinen korko velkapääomalle on 10 %.
- a) Paljonko korkoa menee yhteensä kun velkaa lyhennetään vuoden välein (1. lyhennys vuoden kuluttua, siis lyhennys on 1200 eur)?
- b) Paljonko korkoa menee yhteensä jos velkaa lyhennetään kuukausittain?

- *10.18 *Tasaerälaina*: 20 000 euron laina maksetaan takaisin 4 erässä, vuoden välein, vuoden lopussa ja *tasaerin*, ts. joka maksukerralla maksuerä (korko + lyhennys) on yhtä suuri. Kuinka suuri on yksi maksuerä a , jos korkoprosentti on 10. (Ohje: 1. lyhennyksen jälkeen jäljellä on $1,10 \cdot 20000 - a = 22000 - a$, 2. lyhennyksen jälkeen jäljellä on $1,10 \cdot (22000 - a) - a = \dots$ jne. Kun merkitset viimeisen lyhennyksen jälkeinen määrä 0:ksi, saat $a:n$.)
- *10.19 Lainan 40 000 eur korko on 5 % ja korkokausi vuosi. a) Kuinka suureksi laina kasvaisi 5 vuodessa, jos sitä ei lyhennettäisi? b) Laina lyhennetään kolmessa vuodessa 30 000 euroksi tasaerin, ts. joka kerta maksuerät (korko + kuoletus) ovat yhtä suuret. Kuinka suuri on yksi maksuerä a ? (Ohje: ks. edellinen tehtävä.)
- *10.20 10 000 euron laina maksetaan takaisin neljässä erässä a eur, a eur, $2a$ eur ja $2a$ eur vuoden väliajoin (kukin erä sisältää lyhennyksen ja koron). Laske a , kun korko % on 5. (vrt. edelliset tehtävät).
- *10.21 Tallennetaan 3 vuotena *neljännesvuosittain* 500 eur (1. erä vuoden alussa). Kuinka suuri tallennus on 3. vuoden lopussa, jos korko 3% liitetään pääomaan *kerran vuodessa*, jokaisen vuoden lopussa?
- *10.22 Muodosta funktion $\frac{x}{1+x^2}$ sarja a) geom. sarjan summan avulla, b) derivoimalla funktion $\ln(1+x^2)$ sarja.
- *10.23 Muodosta funktion $\sin^2 x$ Maclaurinin sarjan kolme (nollasta eroavaa) termiä a) kertomalla $\sin x$:n sarja itsellään, b) laskemalla peräkkäisiä derivaattoja, c) integroimalla $\sin 2x$:n sarja.

*10.24 Laske $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \ln(1+x) - \frac{1}{2}x^2}{x^3}$.

C

- 10.25 Perustelee, miksi ympyröiden säteet muodostavat seuraavassa kuvassa geometrisen jonon.



10.26 Esitä seuraavat jaksolliset desimaaliluvut murtolukuina:

a) 0,232323..., b) 0,321212121...

10.27 Todista, että tasaerälainan kertamaksu on

$$a = \frac{pk}{n \cdot 100} + \frac{(\alpha - 1)k}{\alpha^{nt} - 1},$$

missä k = lainamäärä, t = laina-aika vuosissa, n = lyhennyskertojen

määrä vuodessa ja $\alpha = \frac{P}{n \cdot 100}$ (= yhden kerran korkotekijä).

10.28 Määritä funktioiden $\arcsin x$ ja $\arctan x$ Maclaurinin sarjat. Kirjoita edellisestä neljä ensimmäistä termiä ja jälkimmäisestä myös yleinen termi näkyviin. (Vastaukset kaavastossa.)

10.29 Viereisen kuvan mukaisella peilimittauslaitteella voidaan määrittää, kuinka suuren kulman φ peili muodostaa x -akselin suuntaan nähden. Kuvan mukaan

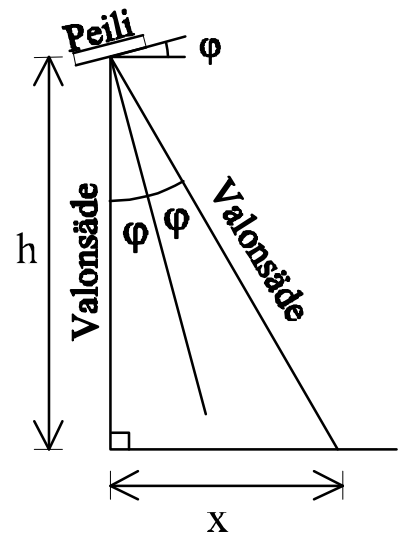
$$\tan 2\varphi = \frac{x}{h} \therefore \varphi = \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{h}.$$

Johda tämän ja $\arctan x$:n sarjan avulla φ :lle likiarvokaavat

$$\text{a) } \varphi \approx \frac{90^\circ}{\pi} \frac{x}{h}, \quad \text{b) } \varphi \approx \frac{90^\circ}{\pi} \left[\frac{x}{h} - \frac{1}{3} \left(\frac{x}{h} \right)^3 \right],$$

jos $x \ll h$. c) Osoita, että jos $h = 7,5 \text{ m}$ ja $x \leq 1 \text{ m}$, niin nämä likiarvokaavat antavat φ :n arvon niin tarkasti, että

$$\text{a) } |\text{virhe}| < 0,6 \%, \quad \text{b) } |\text{virhe}| < 0,007 \%.$$



11 Fourier'n sarja

11.1 F-sarjaan liittyviä käsitteitä

Jos $f(x)$ on **jaksollinen funktio**, jaksona 2π , se voidaan esittää trigonometrisenä sarjana, ns. **Fourier'n sarjana** (lue: [Furjé:])

$$(1) \quad f(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots$$

Sarjan termejä sanotaan *komponenteiksi*. Kertoimet a_k ja b_k ovat kosini- ja sinikomponenttien *amplitudit* (laajuudet). Näille johdetaan myöhemmin laskukaavat. Termi $\frac{1}{2}a_0$ on nimeltään **tasakomponentti** ja termit $a_1 \cos x$ ja $b_1 \sin x$ ovat **harmoniset komponentit**. Seuraavat kaksi termiä $a_2 \cos 2x$ ja $b_2 \sin 2x$ ovat **ensimmäiset yliharmoniset komponentit** jne.

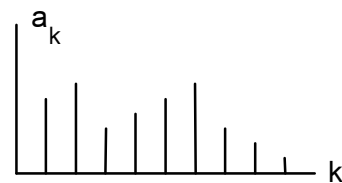
Harmonisilla komponenteilla $a_1 \cos x$ ja $b_1 \sin x$ on sama jakso (2π) kuin $f(x)$:llä. Ensimmäisten yliharmonisten komponenttien $a_2 \cos 2x$ ja $b_2 \sin 2x$ jaksot ovat $2\pi/2 = \pi$, seuraavien jaksot ovat $2\pi/3$ jne. Fourier'n sarjan komponenttien jaksot ovat siis f :n jakson tasaosia ($2\pi, 2\pi/2, 2\pi/3, 2\pi/4, \dots$).

Fourier-analyysiä eli harmonista analyysiä käytetään jonkin jaksollisen funktion tutkimiseen. Tällainen funktio voi kuvata esim. jonkin akselin, putkiston, koneen alustan tai seinän värähtelyä tai jotain sähköistä värähtelyä, jolloin yleensä x :n tilalla on aika t . Joskus värähtely on luonteeltaan jonkinlaista "haittavärähtelyä" (esim. koneen alustan värähtely, kampiakselivärähtely, vesijohtoputkien "ulvonta" tms.).

Kun tällaiselle värähtelylle tehdään F-analyysi, kyseinen funktio kehitetään Fourier'n sarjaksi, ts. funktiolle lasketaan tai sopivien mittalaitteiden avulla mitataan komponenttiaaltojen kertoimet a_k ja b_k (amplitudit).

Kertoimista voidaan päätellä, kuinka "voimakkaina" eri pituiset aallot ovat vaikuttamassa tässä värähtelyssä. Jokin suuriamplitudinen komponentti voi olla jokin haittavärähtely. Kun F-analyysin perusteella haittavärähtelystä on saatu selville paitsi sen voimakkuus, myös sen jakso, on mahdollista pyrkiä eliminoimaan se sopivilla toimenpiteillä (esim. seinämän tai putken kiinnityskohtien muuttamisella, kampiakselin vastapainoilla tms.)

F-sarjan komponentit muodostavat kyseisen jaksollisen funktion (värähtelyn) **spektrin**. Näiden komponenttien kertoimien (amplitudien) muodostamaa jonoa taas sanotaan **viivaspektriksi** (kuva).



11.2 F-sarjan kertoimien määrittäminen

Sarjan

$$(1) \quad f(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots$$

kertoimille saadaan johdettua laskukaavat seuraavalla periaatteella. Määritetään esimerkkinä termin $a_2 \cos 2x$ kerroin a_2 . Kerrotaan yhtälön (1) kumpikin puoli $\cos 2x$:llä ja integroidaan jakson yli, esim. 0 :sta 2π :hin tai yhtä hyvin esim. $-\pi$:stä π :hin, siis

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) \cos 2x \, dx &= \frac{1}{2}a_0 \overbrace{\int_0^{2\pi} \cos 2x \, dx}^{=0} + a_1 \overbrace{\int_0^{2\pi} \cos x \cos 2x \, dx}^{=0} \\ &+ b_1 \overbrace{\int_0^{2\pi} \sin x \cos 2x \, dx}^{=0} + a_2 \overbrace{\int_0^{2\pi} \cos 2x \cos 2x \, dx}^{=\pi} \\ &+ b_2 \overbrace{\int_0^{2\pi} \sin 2x \cos 2x \, dx}^{=0} + a_3 \overbrace{\int_0^{2\pi} \cos 3x \cos 2x \, dx}^{=0} + \dots \end{aligned}$$

"Tulot summiksi"-kaavoilla voidaan todistaa (vrt. harj.), että edellisistä integraaleista kaikki muut ovat $= 0$ paitsi a_2 :n kerroin, jonka arvoksi tulee π . Täten edellinen yhtälö sievenee muotoon

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos 2x \, dx = a_2 \cdot \pi \quad \therefore a_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos 2x \, dx.$$

Samalla tavoin saadaan laskettua yleisesti a_k -kerroin, kun yhtälö (1) kerrotaan $\cos 2x$:n sijasta $\cos kx$:llä. Vastaavasti, kertomalla yhtälö (1) $\sin kx$:llä ja integroimalla, saadaan laskettua b_k -kertoimet. Tulos on

Lause 1 *Jaksollisen funktion, jonka jaksona on 2π , Fourier-sarjan*

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

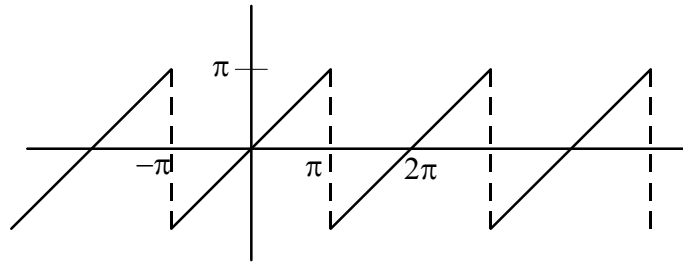
kertoimet saadaan laskettua integraaleista

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{(\text{jakso})} f(x) \cos kx \, dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{(\text{jakso})} f(x) \sin kx \, dx \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Seuraavassa käytetään käsitteitä *parillinen ja pariton funktio*. Kertaa!

Esim. 1 Määritä seuraavan kuvan mukaisen "saha-aallon" F-sarja.



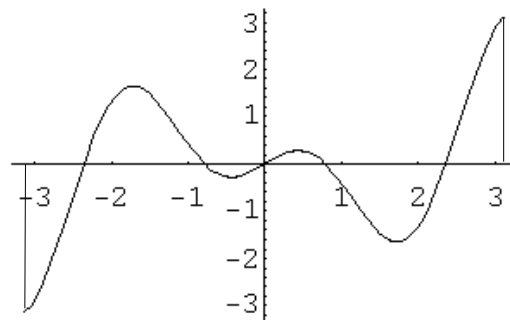
Jaksoväliksi kannattaa valita väli $-\pi \dots \pi$, koska koko tällä välillä $f(x)$:llä on sama lauseke $f(x) = x$. Lasketaan ensin sinitermien kertoimet:

$$\begin{aligned}
 b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx \, dx \quad \left(\begin{array}{l} u = x \quad v' = \sin kx \\ u' = 1 \quad v = -\frac{\cos kx}{k} \end{array} \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[-x \frac{\cos kx}{k} + \frac{1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx \right] \\
 &= -\frac{1}{k\pi} [\pi \cos k\pi + \underbrace{\pi \cos(-k\pi)}_{=\cos k\pi}] + \frac{1}{k\pi} \underbrace{\left[\frac{\sin kx}{k} \right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} = -\frac{2}{k} \cos k\pi \\
 &= \begin{cases} -\frac{2}{k}, & \text{kun } k \text{ on parillinen } (2, 4, \dots) \\ \frac{2}{k}, & \text{kun } k \text{ on pariton } (1, 3, \dots) \end{cases} .
 \end{aligned}$$

Kosinitermien kertoimet ovat kaikki = 0:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos kx \, dx = 0,$$

sillä funktio $x \cdot \cos kx$ on pariton funktio (parittoman funktion x ja parillisen funktion $\cos kx$ tulona) ja integroimisväli on symmetrinen. Esim. viereisessä kuvassa on funktion $x \cos 2x$ kuvaaja.

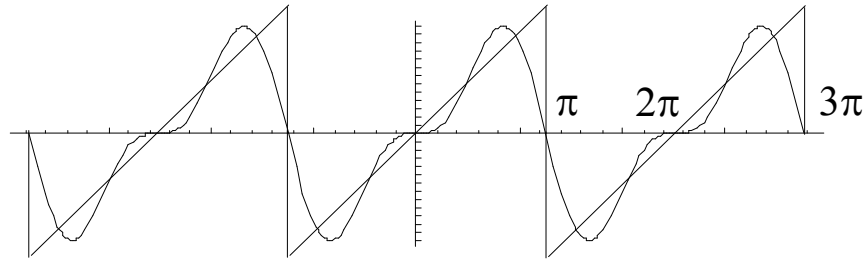


Täten saha-aallon F-sarjaksi jää

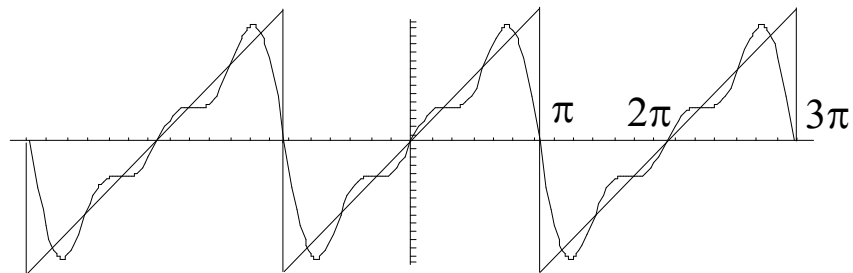
$$f(x) = \frac{2}{1} \sin x - \frac{2}{2} \sin 2x + \frac{2}{3} \sin 3x - \frac{2}{4} \sin 4x + \dots$$

Saha-aaltoa esittävä funktio on pariton funktio. Siksi sen F-sarjassa on vain parittomia eli sinikomponentteja.

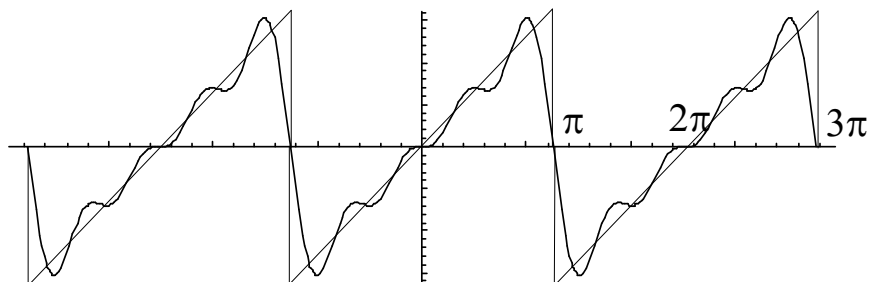
Mitä useampi komponentti sarjan alusta otetaan, sitä tarkemmin niiden summa antaa saha-aallon, kuten seuraavista kuvista näkyy.



Kuva 1. $f(x) \approx \frac{2}{1} \sin x - \frac{2}{2} \sin 2x$



Kuva 2. $f(x) \approx \frac{2}{1} \sin x - \frac{2}{2} \sin 2x + \frac{2}{3} \sin 3x$



Kuva 3. $f(x) \approx \frac{2}{1} \sin x - \frac{2}{2} \sin 2x + \frac{2}{3} \sin 3x - \frac{2}{4} \sin 4x$

11.3 Jaksollisen funktion, jonka jakso on T , Fourier'n sarja

F-sarjojen sovelluksissa on usein muuttujana aika t ja jaksollisen funktion jaksona on 2π :n sijasta T , jolloin **kulmataajuus** $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Esim. funktion $y = a \sin bt$ jakso $T = 2\pi / b$ (sillä $y = 0 \Leftrightarrow bt = n \cdot \pi \Leftrightarrow t = n \cdot \pi / b$). Täten tämän funktion kulmataajuus $\omega = \frac{2\pi}{2\pi / b} = b$. Siis **käyrällä** $\sin bt$ **ja samoin käyrällä** $\cos bt$ **kerroin** $b = \text{kulmataajuus}$.

Oletetaan nyt, että $f(t)$ on jaksollinen funktio, jonka kulmataajuus on ω . Tällöin $f(t)$:n Fourier-sarja on muotoa

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t + a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots$$

Tässä F-sarjassa harmonisilla komponenteilla on sama kulmataajuus ω ja siten sama jakso $T = \frac{2\pi}{\omega}$ kuin $f(t)$:llä. Ensimmäisten yliharmonisten komponenttien kulmataajuudet ovat 2ω ja jaksot siten $\frac{2\pi}{2\omega} = \frac{2\pi}{\omega \cdot 2} = \frac{T}{2}$. Toisten yliharmonisten komponenttien kulmataajuudet ovat 3ω ja jaksot siten $\frac{T}{3}$, jne.

Sarjan kertoimille saadaan seuraavassa lauseessa esitetyt integraalilausekkeet.

Lause 2 *Fourier'n sarjoja käyttäen jaksollinen funktio $f(t)$, jonka jaksona on T , voidaan esittää sellaisten aaltojen sarjana ("diskreettinä summana"), joiden kulmataajuudet ovat f :n kulmataajuuden ω monikertoja ($\omega, 2\omega, 3\omega, \dots$) ja jaksot f :n jakson T tasaosia ($T, T/2, T/3, \dots$). Sarjan muoto on*

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t),$$

missä

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{(\text{jakso})} f(t) \cos k\omega t \, dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{(\text{jakso})} f(t) \sin k\omega t \, dt.$$

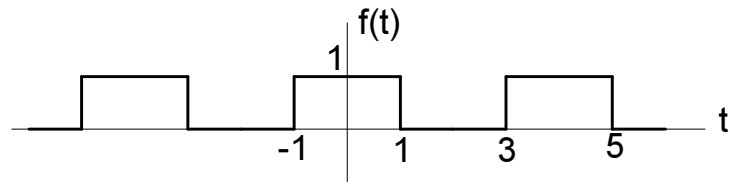
Huom. Jos $f(t)$ on *parillinen/pariton* funktio, sarjassa on vain parillisia/parittomia komponentteja (kosini/sini-komponentteja). Niiden kertoimet a_k/b_k voidaan tässä tapauksessa laskea kaavalla

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos k\omega t \, dt \quad (\text{parillinen funktio})$$

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin k\omega t \, dt \quad (\text{pariton funktio}),$$

sillä kummassakin tapauksessa integroitava funktio on parillinen funktio, joten "integraali jakson yli = 2·integraali puolen jakson yli".

Esim. 2 Määritä seuraavan kuvan mukaisen "sakara-aallon" F-sarja.



Funktio $f(t)$ on parillinen funktio. Sen jakso on $T = 4$ ja kulmataajuus $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Parillisuuden vuoksi sarjassa on vain parillisia komponentteja (kosinikomponentteja). Niiden kertoimet ovat

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos k\omega t \, dt \\ &= \frac{4}{4} \int_0^2 f(t) \cos \frac{k\pi}{2} t \, dt \quad \left| \quad f(t) = \begin{cases} 1 & \text{välillä } 0 \dots 1 \\ 0 & \text{välillä } 1 \dots 2 \end{cases} \right. \\ &= \int_0^1 \cos \frac{k\pi}{2} t \, dt = \left| \frac{2}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{2} t \right|_0^1 \\ &= \frac{2}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{2} \quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Tästä saadaan a_k -kertoimille seuraavat arvot:

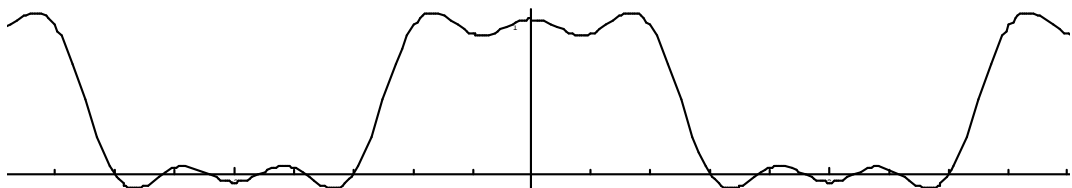
$$a_1 = \frac{2}{\pi}, a_2 = 0, a_3 = -\frac{2}{3\pi}, a_4 = 0, a_5 = \frac{2}{5\pi}, a_6 = 0, a_7 = -\frac{2}{7\pi}, \dots$$

Vakiokomponentti $\frac{1}{2}a_0$ pitää laskea erikseen seuraavasti:

$$a_0 = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos 0\omega t \, dt = \int_0^2 f(t) \, dt = \int_0^1 dt = 1 \therefore \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2}.$$

Täten F-sarja on

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \frac{2}{3\pi} \cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right) + \frac{2}{5\pi} \cos\left(\frac{5\pi}{2}t\right) - + \dots$$



Jos $f(t)$ -käyrä tunnetaan piirturin piirtämänä tai data-arvoina, joudutaan F-sarjan kertoimet laskemaan numeerisella integroinnilla, jakamalla jaksoväli

T n:ään osaan ja käyttämällä esim. suorakulmio- tai puolisuunnikasmenetelmää tai Simpsonin sääntöä. Ei ole aina itsestään selvää, että Simpsonin sääntö antaisi parhaan likiarvon, vrt. Matematiikka II, Esim. 5 sivulla 86.

Esim. 3 Seuraavassa taulukossa on erään jaksollisen funktion $f(t)$ arvoja yhden jakson väliltä. Taulukon jäljessä on tämän funktion kuva "piirturin piirtämänä käyränä". Laske kerroin a_2 .

$$T = 9,973 - 0 = 9,973 \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 0,6300 \quad \frac{2}{T} = 0,20054.$$

$$a_2 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(2\omega t) dt = 0,20054 \int_0^{9,973} \underbrace{f(t) \cos(1,2600t)}_{g(t)} dt.$$

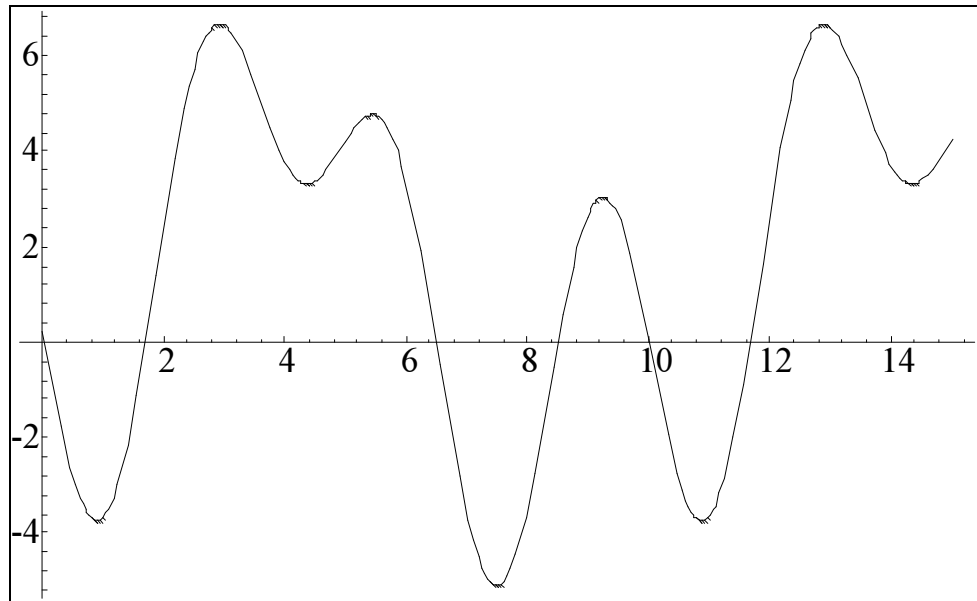
Taulukossa on integroimisväli jaettuna 10 yhtä suureen osaan (jakopisteitä on 11 kpl). Yhden osavälin pituus on $h = 0,9973$. Laske itse $g(t_i)$ -arvot ($i = 0, 1, \dots, 10$). Integraalin arvo voidaan sitten laskea esim. puolisuunnikasmenetelmällä:

$$a_2 \approx 0,20054 \cdot h \cdot \left(\frac{g(t_0)}{2} + g(t_1) + g(t_2) + \dots + g(t_9) + \frac{g(t_{10})}{2} \right) \approx \dots$$

Kokeile, millä em. kolmesta integroimismenetelmästä saat parhaan likiarvon ja kuinka lähellä se on "oikeaa arvoa" $a_2 = 0,95$. Taulukkoarvot on nimittäin laskettu seuraavalle funktiolle (F-kehitykselle) ja kuvaaja on piirretty samalle funktiolle:

t_i	$f(t_i)$	$g(t_i)$
0	0.23	0.23
0.9973	-3.68733	1,1395...
1.9946	2.38718	
2.9919	6.64524	
3.9892	3.79742	
4.9865	4.16968	
5.9838	3.48467	
6.9811	-3.45725	
7.9784	-3.64996	
8.9757	2.57973	
9.973	0.231988	

$$f(t) = 1.25 - 2.42 \cos[0.63t] + 2.37 \sin[0.63t] + 0.95 \cos[2 \cdot 0.63t] - 1.73 \sin[2 \cdot 0.63t] + 0.45 \cos[3 \cdot 0.63t] - 3.03 \sin[3 \cdot 0.63t].$$



HARJOITUKSIA

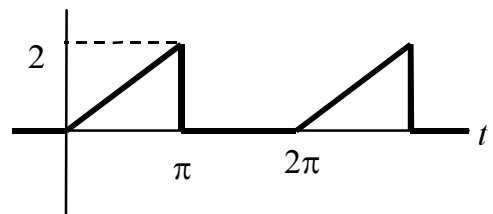
A, B

11.1 Määritä seuraavien funktioiden $f(t)$ amplitudi (laajuus), jakso T , kulmataajuus ω ja frekvenssi (taajuus) f sekä piirrä kuvaajat:

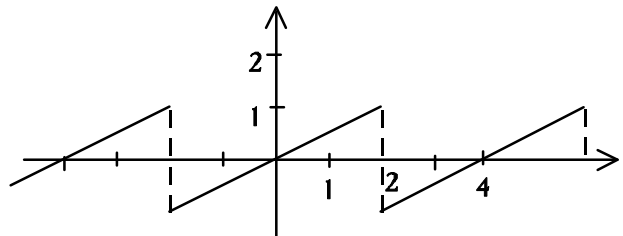
a) $f(t) = 2,75 \sin(1,35t)$ b) $f(t) = a \sin(\omega_1 t)$, c) $f(t) = a \sin(2\omega_1 t)$.

11.2 Määritä viereisen jaksollisen funktion $f(t)$ Fourier'n sarjan kolme ensimmäistä (nollasta eroavaa) a)

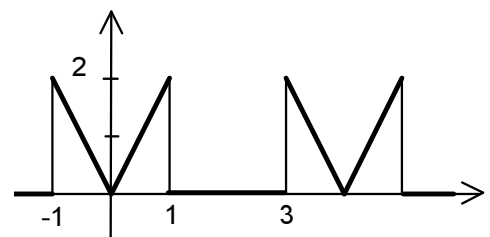
paritonta, b) parillista komponenttia. Ohje: integroimisväliksi tulee $0 \dots \pi$, sillä $f(t) = 0$ välillä $\pi \dots 2\pi$.



11.3 Laske Fourier'n sarjan a) harmoninen, b) ensimmäinen yliharmoninen komponentti, kun funktio $f(t)$ on viereisen kuvan mukainen.



11.4 Määritä oheisen jaksollisen funktion $f(t)$ harmoninen ja ensimmäinen yliharmoninen komponentti.



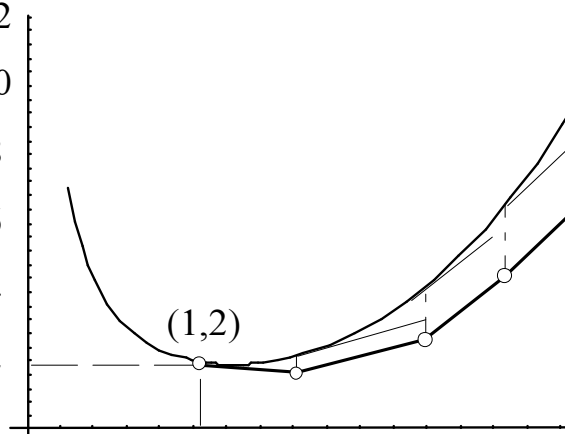
12 Diff.yhtälön numeerinen ratkaiseminen

12.1 Eulerin menetelmä

Esim. 1 Diff.yhtälö $xy' + y = x^3$, alkuehtona $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ pystyttäisiin ratkaisemaan tarkastikin. Yleinen ratkaisu (käyräparvi) on $y = C\frac{1}{x} + \frac{1}{4}x$ ja alkuehdon täyttävä yksityisratkaisu eli pisteen $(1, 2)$ kautta kulkeva käyrä on $y = \frac{7}{4x} + \frac{1}{4}x$. Kaikille diff.yhtälöille ei pystytä määrittämään tällaista tarkkaa ratkaisua, vaan joudutaan tyytymään ratkaisukäyrän pisteiden likiarvoihin (x_i, y_i) . Ajatus on seuraavanlainen.

Vaikka ratkaisukäyrää ei tunneta, sen tangentin kulmakerroin k saadaan, kun ratkaistaan diff.yhtälöstä y' :n lauseke. Tässä esimerkissä $y' = x^2 - \frac{y}{x}$, joten ratkaisukäyrän tangentin kulmakerroin "lähtöpisteessä" $(x_0, y_0) = (1, 2)$ on $k_0 = 1^2 - \frac{2}{1} = -1$.

Siirrytään
lähtöpisteestä $(1,2)$
tangenttia pitkin pieni
matka, jolloin saadaan
uusi piste (x_1, y_1) .
Tämä ei ole enää aivan
ratkaisukäyrällä.
Lasketaan uusi
tangentin kulmakerroin
samasta y' :n
lausekkeesta, mutta nyt
arvoilla x_1 ja y_1 . Siirrytään sitten pisteestä (x_1, y_1) pieni matka
uuden tangentin suuntaan. Näin saadaan uusi piste (x_2, y_2) , jne.



Yleisesti: Ratkaistaan diff. yhtälöstä y' :n lauseke:

$$y' = u(x, y).$$

Tämä antaa ratkaisukäyrän tangentin kulmakertoimen k käyrän pisteessä (x, y) . Lähtöpisteessä $P_0(x_0, y_0)$ tangentin kulmakerroin on $k_0 = u(x_0, y_0)$.

Siirrytään tangenttia pitkin sellainen matka, että x -koordinaatti muuttuu määrän $\Delta x = h$. Silloin y -koordinaatin muutos $\Delta y = k \cdot \Delta x = k \cdot h$, ts. uusi piste on

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + h \\ y_1 = y_0 + k \cdot h = y_0 + u(x_0, y_0) \cdot h \end{cases}$$

Samalla tavoin yleisesti

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \\ y_{i+1} = y_i + u(x_i, y_i) \cdot h \end{cases} \quad (i = 0, 1, \dots).$$

Seuraavassa ovat esimerkkiin 1 liittyvät laskut MathCad-ohjelmalla lasketuina:

Diff.yhtälö $xy' + y = x^3$, alkuehtona $y(1) = 2$.

$$u(x, y) := x^2 - \frac{y}{x}$$

$x_0 := 1$ $y_0 := 2$ $h := 0.5$ $n := 6$ *Alkuehto, askelpituus h ja kaikkiaan n askelta*

$i := 0..n$

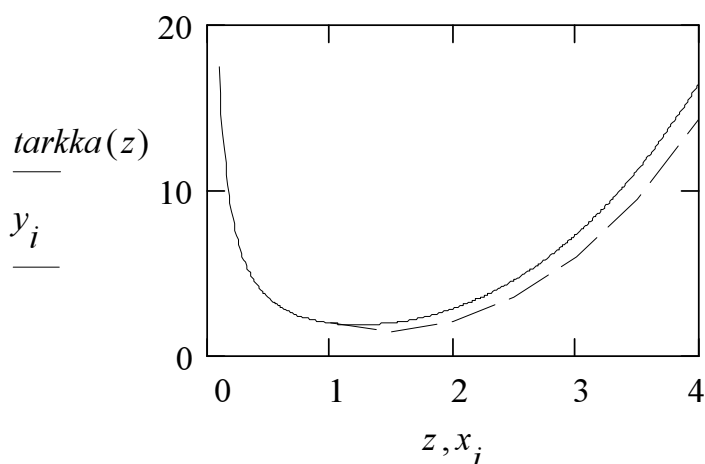
$$x_{i+1} := x_i + h \quad y_{i+1} := y_i + u(x_i, y_i) \cdot h$$

Ratkaisukäyrän pisteiden likiarvoja:

x_i y_i

1	2
1.5	1.5
2	2.125
2.5	3.594
3	6
3.5	9.5
4	14.268

$$\text{tarkka}(z) := \frac{7}{4 \cdot z} + \frac{z^3}{4} \quad z := 0.1, 0.11 \dots x_n$$



Jos käytettäisiin lyhempää askelta h , likiarvot poikkeaisivat vähemmän tarkasta ratkaisukäyrästä.

12.2 Runge-Kutta-menetelmä

Esim. 2 Sama diff. yhtälö kuin edellä.

$$u(x,y) := x^2 - \frac{y}{x} \quad x_0 := 1 \quad y_0 := 2 \quad n := 6 \quad h := 0.5$$

painotettu keskiarvo:

$$k1(x,y) := u(x,y) \quad k2(x,y) := u\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} \cdot k1(x,y)\right)$$

$$k3(x,y) := u\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} \cdot k2(x,y)\right)$$

$$k4(x,y) := u(x + h, y + h \cdot k3(x,y))$$

$$k(x,y) := \frac{k1(x,y) + 2 \cdot k2(x,y) + 2 \cdot k3(x,y) + k4(x,y)}{6}$$

$$i := 0..n \quad x_{i+1} := x_i + h \quad y_{i+1} := y_i + h \cdot k(x_i, y_i)$$

x_i	y_i
1	2
1.5	2.01
2	2.875
2.5	4.606
3	7.333
3.5	11.219
4	16.438

Menetelmä on tarkkuudeltaan aivan eri luokkaa kuin Eulerin menetelmä. Eulerin menetelmässä tarkan arvon ja likiarvon ero kohdassa $x = 4$ oli n. 2,17. Nyt ero on seuraava:

$$\text{tarkka}(z) := \frac{7}{4 \cdot z} + \frac{z^3}{4}$$

$$\text{tarkka}(x_n) - y_n = 0.0000000000000000$$

HARJOITUS

12.1 $y' + \frac{2}{x}y = 6$, $y(1) = 3$. Laske $y(2)$ a) Eulerin, b) Runge-Kutta-menetelmällä, käyttäen 5 askelta ($h = 0,2$).

Vastaus: a) 4,16667, b) 4,25. Laskemiseen voit käyttää laskinta, Exceliä, Mathcadiä tms.

Vastauksia

1.1 $(23/7, 6/7, 4/7)$ **1.2** $4/5, -3/5, 0$ **1.3** $9/7, \frac{9}{49}[6, -3, -2]$ **1.4**
 $1:(-7):(-10)$ **1.5** $10:7:(-1)$ **1.6** $-60, [61, 64, -26]$ **1.7** $(2/3, 1/3, 2/3)$ **1.8**
 $5\sqrt{2}/3$ **1.9** $3\sqrt{14}/14$ **1.10** $X=(2, 0, -4)$ ja $Y=(2, 2, -2)$ (Esim. $\overrightarrow{AX} =$
 $\overrightarrow{AD} - \sqrt{2}\overrightarrow{AD}^o$) **1.12** $t=1/2, u=-3/4, z=-1/4$ **2.1a)** $3:(-4):(-3)$, b) $[3, -$
 $4, -3]$, c) $3x-4y-3z-14=0$ **2.2** $x+2y-z+1=0$ **2.4** $x+y+z-5=0$
2.5 $3/\sqrt{14}$ **2.6** $\bar{n}=[7, 3, 22]$ **2.7** $x+2y-4z-4=0$ ja $x+2y-4z+17=0$
2.8 $4\pm 3\sqrt{2}$ **2.9** $3/5$ **2.11** $3x+2y-6z=6$ **2.12** $x=0, 2y+2z-14=0$
2.13 Yhtälöryhmällä on ratkaisu $t=4, u=-3$ **2.14** samalla **2.15** Etäisyys
 pienenee **2.16** b) Poispäin, koska P ja Q ovat samalla puolella tasoa. **2.17** k
 $=1/2, 4x+3y-3z+5=0$ **2.18** $21x-7y+2z+3=0$ **2.19** $3x+4y-5=0$
 ja $15x-12y+16z-25=0$. **3.1** a) $0:1:1$, b) Monta tapaa: 1) sama suunta ja
 esim. piste $x=1/3, y=0, z=5/3$ toteuttaa edellisenkin yhtälöparin, 2)
 Valitse jälkimmäisen suoran kaksi pistettä ja osoita, että ne toteuttavat
 edellisen suoran yhtälöt, 3) Kun kerrot ensimmäisen parin yhtälöitä sopivilla
 luvuilla ja lasket yhteen, saat ekvivalentiksi yhtälöpariksi jälkimmäisen
 parin. **3.2** $2:(-1):(-1)$, esim. $(0, 3, 5)$ ja $(6, 0, 2)$ **3.3** a)

$$\bar{r} = [2, -7, 9] + t[3, 4, -1], \text{ b) } \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -7 + 4t \\ z = 9 - t \end{cases}, \text{ c) esim. } \begin{cases} x + 3z = 29 \\ y + 4z = 29 \end{cases} \quad \mathbf{3.4} \quad (8, 1, 7)$$

3.5 Eivät leikkaa (sillä tällä neljän yhtälön ryhmällä ei ole ratkaisua, koska
 piste $(-3, -7, -5)$ ei toteuta 1. yhtälöä) **3.6** $(-1, 1, 2)$, b) $(-4, 3, 1)$ **3.7** $D =$
 $(3, 1, 1)$, $Q = (5, 2, 0)$ **3.8** a) $x-2y-z=1$, b) $Q = (2, -1, 3)$ c) $\sqrt{11}$, d)
 $R = (3, -2, 6)$ **3.9** $\sqrt{5}/3$ **3.10** n. $49,1^\circ$ **3.11** a) $\bar{r} = [2, 5, 0] + t[1, -2, 2]$
 $(t=0, 1, 2, 3, 4)$ b) $(3, 3, -2)$ jne. **3.12** b) $x-y+z-6=0$ **3.13** a) $(1, -1, 2)$, b)
 n. $80,4^\circ$ (huom. suorien yhtälöt eivät ole aivan normaalimuodossa) c)
 $\bar{r} = [1, -1, 2] + t[1, -1, 2] + y[2, 1, -1]$ d) $x-5y-3z=0$ **3.14** $(12, 4, 13)$ (joka
 saadaan, kun $t=-2, u=-5, v=5$) **3.15** a) Yhtälö on lineaarinen ja pisteet
 $(5, 0, 0)$ jne toteuttavat sen b) $(180/361, 300/361, 450/361)$ **3.16** n. $4,1$ **4.1**
 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z = 0$ **4.2** $2x - y - 4z - 18 = 0$ **4.3** a)
 Pyöräysellipsoidi, kp. origossa, pyöräysakseli z , puoliakselit $2, 2$ ja 1 . Piirrä
 kuva! b) ei mikään pinta (ns. imaginaarinen pallo) **4.4** a) 1-vaippainen
 pyöräyshyperboloidi, akselina y , kp origossa, akselia vastaan kohtisuora
 leikkaus keskellä on 1-ympyrä. Akselileikkaus on tasasivuinen hyperbeli
 (asymptootit 45° kulmassa), b) 2-vaippainen pyöräyshyperboloidi, akselina
 x , huiput kohdissa ± 1 , akselileikkaus tasasivuinen hyperbeli, c)

pyöräyskartio (kaksoiskartio), akselina x ja akselikulma eli akselin ja sivuviivan välinen kulma on 45° . **4.5** a) ympyrälieriö, akselina y ja säteenä 1, b) hyperbolinen lieriö, akselina z ja "pohjakäyränä" tasasivuinen hyperbeli, c) negatiivisen z -akselin suuntaan aukeava pyöräysparaboloidi (muuten samanlainen kuin perusparaboloidi), d) z -akselin suuntainen taso (tavallaan lieriöpinta, mutta "pohjakäyränä" on suora viiva). **4.6**

$(2+2\sqrt{2}, -1-\sqrt{2}, 0)$ **4.7** $x^2 + y^2 + z^2 + x + 10y - 7z = 0$. **4.8** a) 2-

vaippainen pyöräyshyperboloidi, akseli z -akselin suuntainen, keskipiste $(1, 0, -2)$. Kuvan piirtämistä varten käytä leikkausta $x = 1$ b) elliptinen paraboloidi, akselina z . Kuvan piirtämiseksi käytä xz - ja yz -leikkauksia ja esim. leikkausta $z = 2$. **4.9** a) Kartio, akseli z -akselin suuntainen, keskipiste $(1, 0, -2)$. Kuvan piirtämistä varten käytä esim. leikkausta $z = 0$. b) 1-vaippainen hyperboloidi, kp = $(0, 2, 0)$, akseli $\parallel z$ -aks. Kuvan piirtämiseksi käytä leikkauksia $x = 0$ (hyperbeli, $a = b = 2$) ja $z = 0$ (ellipsi, $a = 1, b = 2$).

4.10 $\sqrt{30}/3, (2/3, 1/3, 1/3)$. **4.11** a) elliptinen kartio, kärki = $(0, 2, 0)$, akseli $\parallel z$ -aks. Kuvan piirtämiseksi käytä leikkausta $z = 2$. b) elliptinen paraboloidi, akselina y , huippu $(0, 1, 0)$. Leikkaus kohdassa $y = 2$ on ellipsi ($a = 1, b = 2$) **4.12** $a = 2$, kp. = $(0, 0, 1)$, aks. $\parallel y$ -aks., leikkaus $y = 1$ on ellipsi (puoliakselit 1 ja 2). **4.13** a) Pisteestä $P(x, y, z)$ etäisyyden x -akselista eli

pisteestä $(x, 0, 0)$ pitää olla = $|f(x)|$, b) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0$, c)

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ **4.15** $(y+1)^2 + z^2 = 3(x-2)^2$ **5.1** a) $\begin{bmatrix} -24 \\ 3 \end{bmatrix}$, b) mahdoton

5.2 $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ **5.3** $B = (4, 70; -1, 71), C = (5, 21; 5, 55)$ **5.4** $D = (4, 70; 1, 71),$

$E = (0, 42; 7, 60)$ **5.5** a) $(3\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -3)$ b) Laske AA^T **5.6** a) $(-\sqrt{2}, 3, 3\sqrt{2})$

b) $3\pi/4 = 135^\circ$ **5.7** a) 1:(-1):1 b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$ c) n. $(-2, 1; 4, 9; 0, 14)$

5.8 3π **5.9** $r = \sqrt{14}, \psi \approx 206,6^\circ, \theta \approx 36,7^\circ, \varphi \approx 53,3^\circ$ **5.10** a) Kartio, akselina negatiivinen z -akseli, akselin ja sivuviivan välinen kulma 30° b) perusparaboloidi c) spiraali (1-lieriön pinnalla) **5.12** $(2, 3, 4)$ **6.1** a) $2x^3/y, -x^4/(2y^2)$ b) $6x^2 \sin 2y, 4x^3 \cos 2y$ c) $3x^2(2x+y)^3 + 6x^3(2x+y)^2,$

$3x^3(2x+y)^2$ **6.2** $e^x \ln y, e^x/y - z^2 \sin y, 2z \cos y$ **6.3**

$dz = e^x(\sin 2y)dx + 2e^x(\cos 2y)dy$ **6.4** a) $\frac{dz}{dt} = -6x^2 \ln \cdot y \sin 2t +$

- $+\frac{x^3}{y}(2t+t^2)e^t$ b) $\frac{\partial z}{\partial r} = 6x \sin 2\varphi - 10y \cos(2\varphi - \pi)$, $\frac{\partial z}{\partial \varphi} = 12xr \cos 2\varphi + 20yr \sin(2\varphi - \pi)$ **6.5** $x - y = 0$ **6.6** a) $2x - z = 0$, b) esim. $x + 2z = 0, y = 3$ **6.7** a) $\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{-x}{x^2 + y^2}$, b) $\frac{\pi}{\sqrt{lg}}, -\frac{\pi}{g}\sqrt{\frac{l}{g}}$, c) $-\frac{v_o P_o}{p^2}(1 + \alpha t), \frac{v_o P_o}{p}\alpha$ **6.12** $0,083 \pm 0,009$ **6.15.** $2x + 6y + z - 8 = 0$ **6.16**
- (1,1,2) 6.20** $-6, -6, 2$ **6.21** $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$ **7.1** $(0, 2, -11)$ on minimipiste **7.2**
- $(8/3, 2/3), -4\frac{1}{3}, \text{min.}$ **7.3** $(1,1)$ **7.4** $(1,1,2)$ **7.6** $1:1:2$ **7.7** $y = \frac{9}{10}x + \frac{6}{5}$
- 7.8** $y = 3,04 \cdot e^{-0,262x}$ **7.9** $y = \frac{4,16}{x}$ **7.10** $y = \frac{3,63}{x} + 0,358$ **7.12** $(0,0,-1)$ **7.13** $\frac{5}{7}\sqrt{35}$ $(t=1, s=\frac{5}{7})$ **7.15** $k = \frac{3}{e}, b = \frac{1}{2}(e - \frac{1}{e})$ **7.17** b) $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{19}{20}x + \frac{3}{20}$
- 8.1** -3 **8.2** -2 **8.3** $7/6$ **8.4** 30π **8.5** 2 **8.6** $-\frac{1}{3}, -1, \frac{1}{3}$ **8.7** $6 - 4\ln 2$ **8.8** 32 **8.9** $-\pi^3/6$ **8.10** a) $7/6$ b) $4/105$ **8.11** $2\pi \ln 2$ **9.1** a) $\frac{1}{s+3}$, b) 0 , c) $\frac{1}{s-5}, \frac{6}{s^4}$ **9.2** $\frac{5}{s+2}$ **9.3** a) $F(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s^2} + \frac{s}{s^2+9}$, b) $Y(s) = \frac{2}{s-3} - \frac{2}{s^2+4} + \frac{1}{s}$ **9.4** a) $\frac{1}{2}(t-1)$, b) $\frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$ eli $\sinh t$, c) $5e^{2t} - 3e^t$, d) $y(t) = -1 + 4e^{-2t}$ **9.5** $\frac{6-s}{s(s-2)}$ **9.6** a) $y = (t+1)e^{-t}$, b) $y(t) = \frac{1}{3}(e^{-3t} + 5)$ **9.7** a) $y = \cos t$, b) $y = \sin t$ **9.8** $y(t) = 2e^{-2t} - e^{-t}$ **9.11** $\frac{2}{3}t \sin 3t - \frac{1}{54}(\sin 3t - 3t \cos 3t)$ **9.12** vrt. Lauseen 1 kohdan 2) todistus **9.13** $y(t) = t - 3 \sin t + \cos t$ **9.14** $y(t) = t - 2e^{-t} + e^{-2t}$ **9.15** $I(s) = \frac{10}{s^2 + 2s + 5}, i_\infty = 0$ **9.16** $i_\infty = \frac{U}{R}, i(t) = \frac{U}{R}(1 - e^{-Rt/L})$ **9.18** $x = \frac{3}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t}, y = \frac{3}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} - t$ (Vain esim. $X(s)$:lle tarvitaan käänteismuunnos. Sen jälkeen $y(t)$ saadaan 1. yhtälöstä.)
- 9.20** $i(t) = \frac{U}{L}e^{-\frac{R}{L}t}$ **10.1** a) $\frac{n(n+1)}{2}$, b) $n(n+1)$, c) n^2 , d) $\frac{3}{2}n(n+1)$
- 10.2** $-\frac{3}{8}, 4\frac{3}{8}, 115$ **10.3** $2\frac{1}{4}$ **10.4** $10^4\sqrt[4]{10}, 10^4\sqrt[4]{100}, 10^4\sqrt[4]{1000}$ **10.5** 41 (tai 40) ja 30 **10.6** a) $1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \dots + \frac{x^{n-1}}{2^{n-1}} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2^k}, -2 < x < 2$ b) $3/2 - 3x/4 + 3x^2/8 - \dots + (-1)^{n-1} \cdot 3x^{n-1}/2^n + \dots, -2 < x < 2.$ **10.8** ks. kaavasto (binomisarja, $n = -1/2$) **10.9** $0,747$ **10.10** $0,453$, kolme termiä

10.11 0,923, kolme termiä (neljäs on $-0,00037$ ja se ei tässä vaikuta pyöristämistä) **10.12** $\frac{80(3 \pm \sqrt{3})}{3}$ **10.13** a) $-2 < x < 2$ b) $x > \frac{1}{2}$ **10.14**

muuttuu n. 0,48-kertaiseksi eli pienenee n. 52 % **10.15** geometrisen jonon, suhdelukuina a) $1,75^2$, b) $1,75^3$ **10.16** a) kasvu on aritm. jonon mukaista:

$K = a + t \cdot \frac{p}{100} a$, b) kasvu on geom. jonon mukaista: $K = a\alpha^t$, missä

$\alpha = 1 + \frac{p}{100}$ on ns. *korkotekijä*, c) kasvu on geom. sarjan mukaista:

$K = a\alpha \frac{\alpha^t - 1}{\alpha - 1}$ **10.17** a) 720 eur, b) 555 eur **10.18** 6309,42 eur **10.19** a)

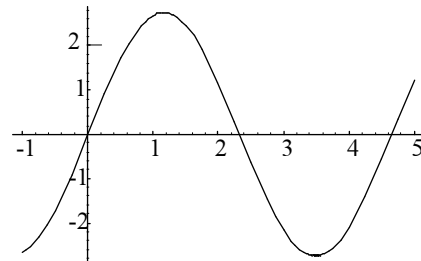
51051,26 eur, b) 5172,09 eur **10.20** 1911,14 eur **10.21** 6297,71 eur **10.22**

$x - x^3 + x^5 - \dots + (-1)^{n+1} x^{2n-1} + \dots$ **10.23** $x^2 - x^4 / 3 + 2x^6 / 45 - \dots$

10.24 $-1/2$ **10.25** Kuviot, joista poistetaan ympyrä kerrallaan, ovat yhdenmuotoisia. Siksi $r_1 / r_2 = r_2 / r_3 = \dots (= 1/q)$ **10.26** a) 23/99, b) 53/165

11.1 a) amplitudi = 2,75, $T = \frac{2\pi}{1,35} \approx 4,65$,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 1,35, f = \frac{1}{T} \approx 0,215$$



11.2 a) $\frac{2}{\pi} \sin x, -\frac{1}{\pi} \sin 2x, \frac{2}{3\pi} \sin 3x$

b) $\frac{1}{2}, -\frac{4}{\pi^2} \cos x, -\frac{4}{9\pi^2} \cos 3x$ ($\cos 2x$:n kerroin on = 0)

11.3 a) $\frac{2}{\pi} \sin(\frac{\pi}{2}t)$ b) $-\frac{1}{\pi} \sin \pi t$ **11.4** ja $-\frac{4}{\pi^2} \cos(\pi t)$