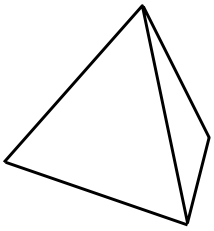
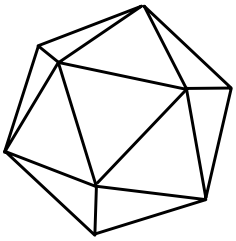
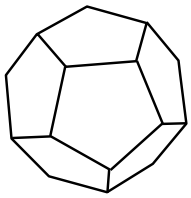


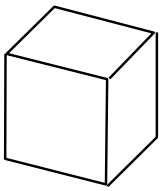


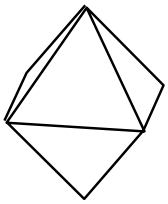
Matematiikkaa tiedekerhoihin

Vesa-Matti Sarenius

Versio 1.01







Sisältö

1 Caesarin salakirjoitus (1–3h) 2
1.1 Salauskiekon valmistaminen . . . 2
Materiaali . . . 2
Toteutus . . . 2
1.2 Salauskiekon käyttö . . . 3
Salaaminen . . . 3
Salauksen avaaminen . . . 3
1.3 Tehtäviä oppilaille . . . 4
1.4 Caesarin salauksen murtaminen . . . 5
1.5 Murtamistehtävä oppilaille . . . 5
Vastaukset . . . 5
1.6 Kysymyksiä oppilaille . . . 6
Vastaukset . . . 6

2 Tetraedri kolmella tavalla (1–3h) 7
2.1 Tetraedri kartongista taiteltuna . . . 8
Materiaali . . . 8
Toteutus . . . 8
2.2 Tertaedri pilleistä ja askartelupunoksesta . . . 9
Materiaali . . . 9
Toteutus . . . 9
2.3 Tetraedripalapeli massapalloista . . . 10
Materiaali . . . 10
Toteutus . . . 10
2.4 Kysymyksiä oppilaille . . . 11
Vastaukset . . . 11
2.5 VÄLIPALA-1 Missä päin maapalloa? . . . 12

3 Euroseteleitä (1h) 13
3.1 Eurosetelin tarkistusluvun laskeminen . . . 14
3.2 Tarkistuslukuja laskemaan . . . 14

Materiaali 14
Toteutus 14
Setelitehtävän vastaukset 15

4 Viivakoodi aukeaa (1h) 16
4.1 Tarkistusnumeron laskeminen 16
4.2 Toteutus kerhossa 17
Materiaali 17
Toteutus 17
4.3 VÄLIPALA-2 Henkilötunnuksen viimeinen merkki 19

5 Pelin matematiikkaa (2h) 20
5.1 Pelin tekeminen 20
Materiaali 20
Toteutus 20
5.2 Pelin pelaaminen 21
5.3 VÄLIPALA-3 Hiukset päässä, kyyhkyset lakassaan 22
Kyyhkyset lakassaan 22
Suomalaisten hiukset 22

6 Koordinaatisto (1–2h) 23
6.1 Koordinaatistobingo 23
Materiaali 23
Toteutus 23
6.2 Mikä kätkeytyy koordinaatistoon 24
Materiaali 24
Toteutus 24
6.3 Peilaaminen koordinaatistossa 24
Materiaali 24
Toteutus 24

7 Kirjallisuutta 25

A Monistepohjia 26

Johdatus matematiikan maailmaan

Koulussa ei ehditä tai tahdota opettaa juurikaan muuta matematiikkaa kuin artimetiikkaa – pelkkää laskemista. Kuitenkin matematiikka on jotain aivan muuta. Meistä jokainen käyttää matematiikkaa joka päivä, lähes joka hetki. Jokainen jäsentelee mielensä lokeroissa asioita loogisiksi kokonaisuuksiksi, ratkoo ongelmia. Sitähän matematiikka syvimmiltään on – loogista ongelmanratkaisua ja hahmottamista. Paljon enemmän, kuin numeroita ja lukuja, matematiikka on kuvia, hahmotusta ja loogisten ajatuspalasten yhdistelemistä.

Kaikki oppaan ohjelmat ovat kirjoittajan ja monen muun kerhonohjaajan todellisessa kerhotilanteessa testaamia ja toimiviksi havaitsemia. Ohjelmiin on kerätty ideoita eri lähteistä, joita on lueteltu oppaan lopusta löytyvässä lähdeluettelossa. Oppaassa oleva materiaali on kirjottajan toteuttamaa ja siihen on vapaat kopiointioikeudet. Ohjelmiin tarvittavat materiaalit on ilmoitettu yhtä oppilasta kohden. Lisäksi yleensä tarvitaan saksia, kyniä, liimapuikkoja ja viivainta.

Monet oppaan ohjelmista on laadittu niin, että jos ne käy kokonaisuudessaan läpi, aikaa saattaa hyvinkin mennä tunti tai kaksikin. Ajateltu toteutusaika on merkattu otsikkoon sulkuihin ja se on ajateltu nelosluokkalaisen tietotaidoille sopivaksi. Mikäli aikaa tuntuu olevan liikaa, opas sisältää kolme välipalatehtävää, jotka eivät tarvitse juurikaan materiaalia. Välipalatehtävät löytyvät sivuilta 12, 19 ja 22.

Opasta ei olisi syntynyt ilman seuraavien henkilöiden myötävaikutusta: Maria Hautamäki, Alli Huovinen, Eveliina Järvenpää, Kanerva Kokko, Ansa Lahtinen, Riikka Lokka, Emilia Manninen, Hanna Mansikka, Meeri Mustonen, Tiina Rintala, Anna-Maija Saastamoinen, Jarna Siljander, Virpi Sipola, Sari Vallineva ja Benjam Wondafrash. Näiden ja monien muidenkin henkilöiden kanssa minulla on ollut onni pitää kerhoja ja leirejä ja suunnitella ohjelmia, joista osan esittelen oppaassani. Lisäksi haluaisin lausua erityiskiitokset Oulun kaupungille, joka lähti ennakkoluulottomasti mukaan rahoittamaan matikkakerhotoimintaa Oulussa sekä Hintan koululle, jossa minulla on ollut ilo saada pitää matikkakerhoja nyt jo kolmatta vuotta.

Oppaan läpikäytyäsi huomaat, mitä kaikkea muuta matematiikka on kuin pelkkää laskemista. Toivottavasti saat välitettyä tämän tiedon myös kerhossasi oleville oppilaille!

Antoisia hetkiä matkalla matematiikan maailmaan!

Oulussa 19. lokakuuta 2004, Vesa-Matti Sarenius

1 Caesarin salakirjoitus (1–3h)

Caesarin salakirjoitus kantaa Julius Caesarin nimeä, koska tiedetään, että Caesar salasi armeijalleen lähettämänsä viestit, etteivät viholliset saisi niitä selville. Caesar-salakirjoitus ei ole kuitenkaan Julius Caesarin itsensä keksimä.

Salakirjoitukseen liittyy aina *avain*. Caesarin salauksessa suomenkielisellä aakkostolla avain on luku väliltä 1–29. Luku 1 on tosin huono avain, koska se ei muuta aakkostoa mitenkään.

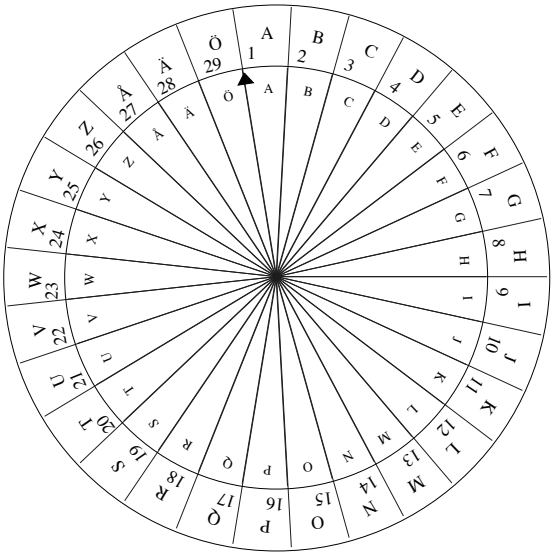
1.1 Salauskiekon valmistaminen

Materiaali

- kopio jommasta kummasta salauskiekosta (sivulta 27 tai 28)
- kartonkia kopion verran
- haaranasta

Toteutus

Salauskiekossa ympyrä on jaettu 29:ään yhtäsuureen sektoriin. Salauskiekon malli on tehty valmiiksi, aakkosellinen versio on tarkoitettu nuoremmille ja tyhjä versio vanhemmille oppilaille. Tyhjässä versiossa oppilaan tehtävä on kirjoittaa kirjaimet kumpaankin kiekkoon aakkosjärjestykseen myötäpäivään. Molemmissa versioissa oppilaat lisäävät pienempään kiekkoon A-kirjaimen vasemmalla puolella olevan säteen päähän nuolenkärjen ja lisäksi kirjoittavat isompaan kiekkoon kunkin kirjaimen vasemmalle puolelle, säteen viereen luvut 1–29. Luvut kirjoitetaan niin, että A:n vieressä on 1, B:n vieressä 2 ja lopulta Ö:n viereen tulee 29. Perusasennossa olevan salauskiekon kuva (Kuva 1.1) selventää asiaa. Tämän jälkeen kiekot liimataan kartongille ja leikataan mahdollisimman tarkkaan. Lopuksi kiekot kiinnitetään toisiinsa haaranastalla.



Kuva 1.1: Salakirjoituskiekko perusasennossa

1.2 Salauskiekon käyttö

Salauskiekkoa käytetään seuraavasti. Salattaessa viestiä kiekkoa luetaan **kehältä keskipisteeseen päin** ja purettaessa salausta **keskipisteestä kehälle päin**.

Salaaminen

1. Käännä kiekossa oleva nuoli osoittamaan avainluvun vasemmalla puolella olevaa sädettä.
2. Muunna salattava sana vaihtamalla kirjain kerrallaan siten, että alkuperäisessä sanassa oleva kirjain katsotaan ulommalta kehältä ja sitä vastaava salattu kirjain sisemmältä.

Salauksen avaaminen

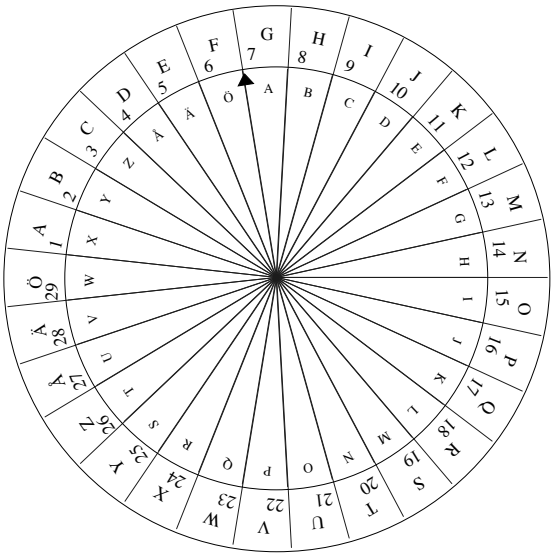
1. Käännä kiekossa oleva nuoli osoittamaan avainluvun vasemmalla puolella olevaa sädettä.
2. Muunna salattu sana vaihtamalla kirjain kerrallaan siten, että salatussa sanassa oleva kirjain katsotaan sisemmältä kehältä ja sitä vastaava salaamaton kirjain ulommalta.

Valitaan esimerkiksi avaimeksi luku 7 ja salataan sana KEISARI, kuvassa 1.2 oleva kiekko on käännetty asentoon avain=7. Sana muunnetaan siis kirjain

kerrallaan kehältä keskipisteeseen päin, kuten taulukossa 1.1 on tehty. Avataan samalla avaimella salattu sana LIIGX. Avaaminen tapahtuu muuntamalla kirjain kerrallaan keskipisteestä kehälle päin, kuten taulukossa 1.1 on tehty.

K	E	I	S	A	R	I	L	I	I	G	X
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
E	Ä	C	M	X	L	C	R	O	O	M	A

Taulukko 1.1: Sanan KEISARI salaaminen ja salatun sanan LIIGX avaaminen



Kuva 1.2: Salakirjoituskiekko asennossa avain=7

1.3 Tehtäviä oppilaille

Oppilaat tekevät nämä pareittain.

1. Valitkaa avain väliltä 2–29.
2. Salatkaa oma nimenne.
3. Salatkaa toisillenne yksittäisiä sanoja ja avatkaa parin salaamat sanat.
4. Salatkaa toisillenne jokin pidempi viesti ja avatkaa parin salaama viesti.

1.4 Caesarin salauksen murtaminen

Caesarin salaus on varsin huono menetelmä, koska se on helppo murtaa. Salaus murretaan kokeilemalla jokaista avainta erikseen. Salattua viestiä aletaan avata jokaisella avaimella vuorotellen, kunnes viesti tuntuu selväkieliseltä.

1.5 Murtamistehtävä oppilaille

Jokainen näistä viesteistä on salattu käyttäen eri avainlukua. Oppilaiden tehtävä on murtaa salatut viestit. Vinkiksi voi antaa sellaisen, että jokainen viesti on salattu edellistä suuremmalla avaimella.

RÖKÖJHQINHSTRJÖMSÖÖ

ALCÖLJWUYJUIÖEEÖDYS

ÅBFÅQFUBAÅUÅFYGGL

PGVMVSGÅSDÅÄGGV

Vastaukset

Salakirjoitus kantaa (avain=2)
Julius Caesarin nimeä (avain=9)
koska se on keksitty (avain=13)
hänen käskystään (avain=21)

1.6 Kysymyksiä oppilaille

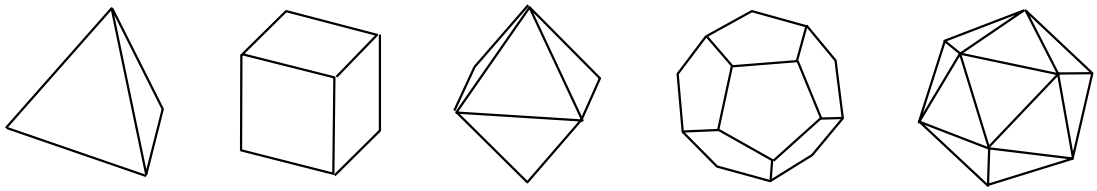
1) Miksi viestejä salataan?
2) Miksi Caesarin salaus on varsin huono menetelmä?
3) Miksi Caesarin salaus on varsin vaativa murtaa tietokoneella?
4) Kerro kolme paikkaa, missä voit törmätä salakirjoituksiin?

Vastaukset

1) Jotta ulkopuoliset eivät saisi niitä selville.
2) Koska se on helppo murtaa.
3) Koska tietokone tarvitsee suomenkielen sanalistan voidakseen murtaa salauksen.
4) Esimerkiksi pankkien rahansiirtoviestit, verkkopankki, sähköpostiviestit, kännykkäpuhelut ja tekstiviestit salataan.

2 Tetraedri kolmella tavalla (1–3h)

Säännölliset monitahokkaat eli Platonin kappaleet ovat kiehtova opetuskohde. Monitahokkaiden opettamisessa tärkeätä on opettaa ensin kappaleisiin liittyvät nimitykset; tahko, särmä, kärki ja vaippa. Säännöllisistä monitahokkaista ei löydy vaippaa, mutta vaipan demonstroimiseen voi käyttää vaikka palloa.



Kuva 2.1: Platonin kappaleet

Platonin kappaleet on kuvattu yllä kuvassa 2.1. Niiden nimet ja ominaisuudet on lueteltu allaolevissa taulukoissa. Platonin kappaleiden tahkot ovat aina säännöllisiä monikulmioita, eli niiden sivut ovat yhtä pitkiä ja kulmat yhtä suuria. Kappaleiden nimessä ennen edri-päätettä oleva sana on vastaava kreikkalainen lukusana. Esimerkiksi okta tarkoittaa kahdeksaa. Platonin kappaleita opettaessa voisi teettää oppilailla esimerkiksi taulukon 2.2 jakamalla luokkaan kappaleita tutkittavaksi. Tässä oppaassa käydään tarkemmin läpi tetraedri.

Kappaleen nimi	suomenkielinen nimi	tahkot ovat
tetraedri	säännöllinen nelitahokas tai kolmiopohjainen pyramidi	kolmioita
heksaedri	kuutio	neliöitä
oktaedri	säännöllinen kahdeksantahokas	kolmioita
dodekaedri	säännöllinen 12-tahokas	viisikulmioita
ikosaedri	säännöllinen 20-tahokas	kolmioita

Taulukko 2.1: Platonin kappaleiden ominaisuuksia

Kappale	tahkoja	särmiä	kärkiä
tetraedri	4	6	4
heksaedri	6	12	8
oktaedri	8	12	6
dodekaedri	12	30	20
ikosaedri	20	30	12

Taulukko 2.2: Lisää Platonin kappaleiden ominaisuuksia

2.1 Tetraedri kartongista taiteltuna

Materiaali

- Kopio sivun 26 kaavakuvasta. Kuvaa voi suurentaa tarpeen vaatiessa.
- Kartonkia kuvan verran.
- Mikäli kappale on tarkoitus päällystää, huopaa tai kangasta saman verran kuin kartonkia.
- Naru ripustamista varten ja helmi tai nappi, jolla narun saa pysymään tetraedrin sisässä.

Toteutus

Oppaan lopussa sivulla 26 on tetraedri levitettynä kaksiulotteiseksi. Kyseistä kaaviota voi käyttää suoraan leikkaamalla se irti, liimaamalla kartongille ja taittelemalla. Kaavio on tehty niin, että tetraedrin voi kasata ilman liimaa. Tällöin pienemmille lipareille täytyy tehdä veitsellä viillot.

Kartongista taittelemalla lähdetään liikkeelle siis kolmiosta, joka koostuu pienemmistä kolmioista. Tasossa olevat kolmiot ovat tetraedrin tahkot. Ne ovat tasasivuisia kolmioita, joten kaikki näkyvät kulmat ovat 60 asteen kulmia.

Lisää haastetta näin tekemiseen syntyy, kun tetraedri päällystetään huovalla tai kankaalla. Esimerkiksi teddykankaalla päällystetyt tetraedrit ovat erittäin hauskannäköisiä, kun niihin laittaa vielä langan, josta ne saa roikkumaan. Kangas on helpointa leikata hieman isommaksi, kuin aukilevitetty iso kolmio on.

Leikatessa ja taitellessa on syytä muistaa, että koska tetraedri on säännöllinen kappale, täytyisi kaikkien tahkojen olla täsmälleen samanlaisia, mikäli niihin tulee kovin paljon eroja, saattaa kokoaminen olla vaikeata.

2.2 Tertaedri pilleistä ja askartelupunoksesta

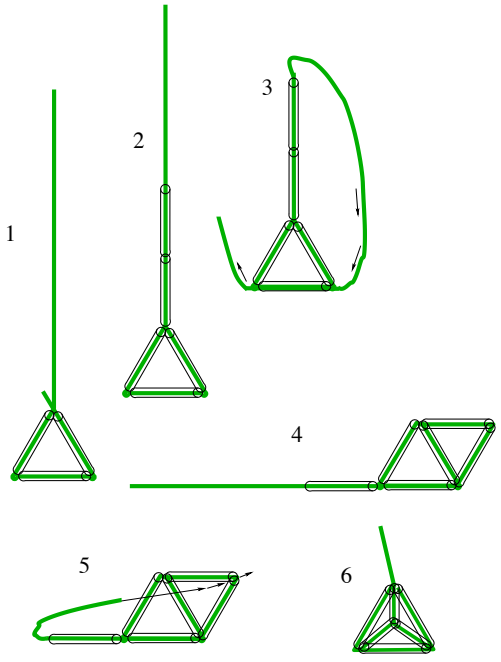
Materiaali

- Pari pilliä
- Pari askartelupunosta

Toteutus

Äskeisessä esimerkissä tetraedria kasattiin lähtien liikkeelle tahkoista. Kasattaessa tetraedri pilleistä ja askartelupunoksesta, lähdetään liikkeelle särmistä.

Oppilaiden tehtävänä on ensiksi keksiä, kuinka monta särmää tetraedrissa on ja sen jälkeen leikata niin monta yhtä pitkää pätkää pillistä ja askartelupunoksen avulla kasata niistä tetraedri kuvan 2.2 mukaisesti. Kasaamisohjetta ei kannata kertoa heti vaan kannattaa antaa oppilaiden yrittää itse ensin. Mikäli kasaaminen ei tahdo onnistua, voi ensiksi antaa vinkkinä, että askartelupunos pitää viedä yhdestä pillinpalasesta kahteen suuntaan läpi. Kun yksi tai muutama oppilas saa tehtyä tetraedrin, hän voi toimia apuopettajana ja kertoa muille, kuinka kappale kootaan. Pillitetraedreja voi käyttää vaikka kuusenkoristeena joulunaikaan, voipa niistä tehdä hauskan kaulakorunkin.



Kuva 2.2: Tetraedri pilleistä ja askartelupunoksesta, kokoamisohje

2.3 Tetraedripalapeli massapalloista

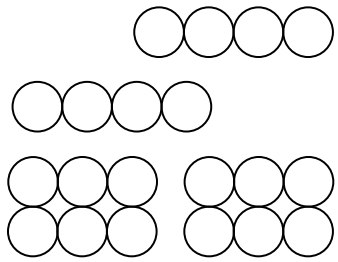
Kolmas tapa toteuttaa tetraedri on klassinen palloista koostuva palapeli. Pelissä on vain neljä palasta, mutta sen kasaaminen saattaa olla yllättävän vaikeata.

Materiaali

- 20 samankokoista paperimassapalloa
- paperiliimaa (ei liimapuikko)

Toteutus

Massapalloista tehdään neljä palaa palapeliin. Liimaa massapallot yhteen neljäksi palaksi. Palasten muodon näet kuvasta 2.3.



Kuva 2.3: Tetraedripalapelin osat

Palapelin kasaaminen vaatii hieman aivonystyröitä, mutta lopputuloksen voit nähdä kuvasta 2.4.

Kuva 2.4: Tetraedri massapalloista

2.4 Kysymyksiä oppilaille

Alla on viisi kuvailua kappaleista. Tehtävänäsi on keksiä, mitä kappaletta kuvaillaan.

1) Kappaleella on yksi kärki, yksi särmä, yksi tahko ja yksi vaippa.
2) Kappale on yksi Platonin kappaleista. Sen tahkot ovat säännöllisiä viisikulmioita.
3) Kappaleella on vain vaippa. Kappale näyttää joka puolelta katsottuna samanlaiselta.
4) Jos kaksi pyramidia laitetaan yhteen pohjistaan, saadaan tämä säännöllinen kappale.
5) Tämän Platonin kappaleen tahkot eivät ole kolmioita, eivätkä viisikulmioita.

Vastaukset

1) ympyräkartio
2) dodekaedri
3) pallo
4) oktaedri
5) kuutio eli heksaedri

2.5 VÄLIPALA-1 Missä päin maapalloa?

Seuraavalla ongelmalla on äärettömän monta ratkaisua, vaikka aluksi vaikuttaa siltä, että ratkaisuja on vain yksi.

> Missä päin maapalloa olet? Kun kävelet ensin tuhat kilometriä etelään, sitten tuhat kilometriä länteen ja lopuksi tuhat kilometriä pohjoiseen olet lähtöpisteessäsi.

Ratkaisu

Ilmeinen ratkaisu on pohjoisnapa, mutta kuten todettua, ratkaisuja on ääretön määrä. Nimittäin valitaan eteläiseltä pallonpuoliskolta sellainen kohta, josta tuhat kilometriä eteläänpäin oleva leveyspiiri on tasan tuhat kilometriä pitkä. Näin kun kuljetaan tuhat kilometriä etelään, sitten tuhat kilometriä länteen, ollaan samassa pisteessä, kuin kuljettaessa tuhat kilometriä etelään. Siitä sitten vain tuhat kilometriä pohjoiseen ja ollaan lähtöpisteessä. Nyt lähtöpaikka voidaan valita mistä tahansa lähtöleveyspiiriltä, joten ratkaisuja on ääretön määrä.

Mutta nuokaan eivät ole ainoita ratkaisuja, nimittäin lähtöleveyspiiri voidaan valita sitenkin, että kun on kuljettu tuhat kilometriä etelään, sijaitaan leveyspiirillä, joka on 500 kilometriä pitkä. Tällöin kuljettaessa tuhat kilometriä länteen päin, päädytään kiertämään ko. leveyspiiri kahdesti, mutta ollaan kuitenkin samassa pisteessä. Sitten vain taasen pohjoiseen ja ollaan lähtöpisteessä. Näin löydämme vielä lisää vastauksia, kun menemme aina leveyspiirille, joka on tuhannen tasaosan pituinen ($\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ ja niin edelleen).

Tehtävä opettaa sen, että ensimmäinen ratkaisu, vaikkakin oikea, ei aina ole ainut.

3 Euroseteleitä (1h)

Tämä ja seuraava ohjelma liittyvät matematiikan osa-alueeseen, jota kutsutaan koodausteoriaksi. Koodausteoria tutkii sitä, miten tietoa voidaan välittää mahdollisimman tehokkaasti, mutta kuitenkin niin, että mahdollisesti syntyvät virheet korjataan tai ainakin havaitaan.

Ennen itse asiaan siirtymistä on oppilaille muistutettava mitä eroa on sanoilla numero ja luku. Luku koostuu numeroista ja numerot voi luetella (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ja 0). Tämä on tärkeää siksi, että tarkistuslukuja laskiessa lukuja hajotetaan monesti numeroiksi ja esim. lukujen numeroita lasketaan yhteen.

Jokaisessa eurosetelissä on nurjalla puolella sarjanumero, joka koostuu alussa olevasta kirjaimesta ja yhdeksästä numerosta. Eräs tällainen on vaikkapa `P04560583852` (seteli kuvassa 3.1). Sarjanumeron kirjainosa kertoo, missä maassa seteli on laskettu liikkeelle. Tarkkaan ottaen siitä näkee oikeastaan ennen vuotta 2002 liikkeelle laskettujen setelien kotimaan. Lisäksi kirjainosaan liittyy jokin luku, jota käytetään tarkistusluvun laskemisessa. Setelin kotimaa ja kirjainosaan liittyvä luku löytyvät taulukosta 3.1. Kannattaa huomata, että osa kirjaimista ja luvuista puuttuu välistä, koska kirjaimia on varattu jo valmiiksi tuleville euromaille. Esimerkiksi, jos Ruotsi liittyy joskus Euroopan rahaliittoon, sen kirjainosaksi tulee `K`.

Kuva 3.1: Euroseteli

L	12	Suomi	T	20	Irlanti
M	13	Portugali	U	21	Ranska
N	14	Itävalta	V	22	Espanja
P	16	Alankomaat	X	24	Saksa
R	18	Luxemburg	Y	25	Kreikka
S	19	Italia	Z	26	Belgia

Taulukko 3.1: Eurosetelien kirjainosat

3.1 Eurosetelin tarkistusluvun laskeminen

Tarkistuslukua laskettaessa lasketaan ensin yhteen sarjanumeron alkukirjainta vastaava luku ja kaikki muut numerot, esimerkiksi setelin `P04560583852` tapauksessa laskutoimitus on $16+0+4+5+6+0+5+8+3+8+5+2=62$. Tästä saadun tuloksen numerot lasketaan yhteen (siis nyt $6+2=8$) ja mikäli saadaan kahdeksan, on seteli aito, muuten se on väärennetty. Eli kuvan 3.1 seteli on siis Alankomaista ja se on aito.

3.2 Tarkistuslukuja laskemaan

Materiaali

- Kopio sivu 29 kuvitteellisista euroseteleistä.

Toteutus

Sivulla 29 on kaksitoista kuvitteellista euroseteliä. Tunnin voisi toteuttaa seuraavasti, oppilaiden iästä riippuen kannattaa ottaa käsittelyyn 4–12 seteliä jokaiselle. Ykkösluokkalaiset pystyvät tekemään kahden oppitunnin aikana kohdat 1.–3. neljälle setelille, kakkoset kuudelle tai useammalle setelille. Kolmosesta ylöspäin voidaan tehdä tunnissa kaikki kohdat kuudelle tai useammalle setelille. Ykkösten ja kakkosten kanssa kannattaa myös laskea, kuinka paljon rahaa he ovat itselleen värittäneet.

1. Kopioi taulukko setelien maista ja kirjaimiin liittyvistä luvuista vihkoosi. (Opettaja kirjoittaa taululle)
2. Tee seteleistä aidon tai kuvitteellisen näköisiä värittämällä ne. Laita jokaiselle setelille myös jokin arvo. Muista, että esimerkiksi 30€:n seteliä ei ole olemassa. Väritä vain sarjanumeropuoli.

3. Liimaa setelit vihkoosi ja kirjoita kunkin viereen, mistä maasta se on.
4. Kirjoita tarkistusluvun laskemiseen tarvittava lauseke kunkin setelin viereen ja laske tarkistusluku.
5. Kirjoita setelin viereen, onko se aito vai väärennös.

Setelitehtävän vastaukset

Sarjanumero	oik/väär (luku)	maa
L000001111	väärä (16)	Suomi
L010000040	oikea (17)	Suomi
V139800001	oikea (44)	Espanja
M910200010	oikea (26)	Portugali
T019322151	oikea (44)	Irlanti
L110341241	väärä (29)	Suomi
X192143001	väärä (45)	Saksa
N156911610	oikea (44)	Itävalta
P222220011	väärä (28)	Alankomaat
L767611111	väärä (43)	Suomi
S211111830	väärä (37)	Italia
Y982131001	väärä (50)	Kreikka

4 Viivakoodi aukeaa (1h)

Lukuja on kaikkialla ympärillämme. Melkein jokaiseen myytävään tuotteeseen on painettu viivakoodi. Sen lisäksi, että viivakoodista näkee, mikä tuote on kyseessä ja esimerkiksi kuinka paljon sitä on, viivakoodi osaa ilmoittaa lukijalle, mikäli se on luettu väärin. Viivakoodi on niinsanottu *virheitä havaitseva koodi*. Jos kassa lukee koodin väärin, niin se piippaa ja pyytää lukemaan koodin uudelleen. Kuinka ihmeessä kassa tietää, onko koodi luettu väärin?

Viivakoodin viivaosa on tarkoitettu vain lukulaitteita varten. Viivaosan sisältämä informaatio on painettu aina myös normaaleina numeroina viivakoodin alle, kuten kuvassa 4.1.

Kuva 4.1: Viivakoodi

4.1 Tarkistusnumeron laskeminen

Viivakoodin tarkistusnumero lasketaan laskemalla kertomalla jokainen numero vasemmalta lähtien vuorotellen yhdellä ja kolmella, viimeistä lukua lukuunottamatta. Näin saadut luvut lasketaan lopuksi yhteen ja lasketaan etäisyys lähimpään seuraavaan tasakymmeneen. Mikäli koodi on luettu oikein, kyseinen etäisyys on viivakoodin viimeinen numero. Jos etäisyys on 0, niin viivakoodeissa on yleensä 0 tai `X`. Otetaan esimerkiksi kuvan 4.1 viivakoodi. Esimerkki on laskettu taulukossa 4.1.

Kannattaa kuitenkin huomata, että viivakoodien tarkastusmenetelmiä on useita erilaisia. Edellä esitetty on niinsanottu EAN-13-koodi, joka on käytössä monissa tuotteissa Suomessa. Kaikkia koodeja ei tarkasteta samaan tapaan. Mikäli käytät muualta löytyneitä viivakoodeja, tarkasta ne aina ensin.

6	4	2	0	6	1	4	6	4	0	2	5	$\boxed{8}$
×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	
1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	
=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	
6	12	2	0	6	3	4	18	4	0	2	15	

$6 + 12 + 2 + 0 + 6 + 3 + 4 + 18 + 4 + 0 + 2 + 15 = 72$

Etäisyys seuraavaan tasakymmeneen: $80 - 72 = \boxed{8}$

Taulukko 4.1: Viivakoodin tarkistusnumeron laskeminen

4.2 Toteutus kerhossa

Materiaali

- Kopio sivulta 30 löytyvistä keksityistä viivakoodeista. Huomaa, että lyhyet ovat sivulla kolmeen kertaan ja pitkät kahteen.

Toteutus

Sivulla 30 on 13 kappaletta lyhennettyjä viivakoodeja. Tarkistus toimii samoin, kuin aiemmin on esitetty. Samalla sivulla on myöskin normaalimittaisia viivakoodeja. Vastaukset molempiin löytyvät taulukosta 4.2.

Oppilaat toimivat esimerkiksi kassoina, jonne toinen oppilas tulee aina kunkin viivakoodin kanssa. Kassa piippaa, mikäli koodi luetaan väärin.

A.	9 9 9 9 9 4	väärin, po. 9
B.	1 9 3 0 9 0	oikein
C.	1 6 7 2 9 0	väärin, po. 9
D.	2 9 1 3 8 3	oikein
E.	3 2 3 0 9 9	oikein
F.	4 2 4 0 9 7	oikein
G.	5 3 5 2 9 5	väärin, po. 6
H.	6 1 6 0 9 6	oikein
I.	7 3 6 1 9 9	väärin, po. 6
J.	8 2 5 0 3 8	oikein
K.	9 1 4 0 9 5	oikein
L.	0 2 3 1 3 8	väärin, po. 5
M.	5 1 2 1 4 3	oikein

A.	9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 4	oikein
B.	1 9 3 0 9 1 9 2 9 4 9 2 5	väärin, po. 6
C.	1 6 7 2 9 1 1 2 9 3 9 4 0	oikein
D.	2 9 1 1 8 1 1 2 1 4 1 7 3	väärin, po. 4
E.	3 2 3 0 9 1 1 2 9 5 9 6 8	oikein
F.	4 2 4 0 9 1 3 2 9 6 9 2 3	oikein

Taulukko 4.2: Viivakooditehtävien oikeat vastaukset

4.3 VÄLIPALA-2 Henkilötunnuksen viimeinen merkki

Jokaisella suomalaisella on henkilötunnus (HETU). Tunnuksen alkuosan kuusi merkkiä ilmaisevat syntymäajan, seuraava merkki ilmaisee, millä vuosisadalla HETUn haltija on syntynyt (+: 1800-luvulla, -: 1900-luvulla ja A: 2000-luvulla). Seuraavat kolme numeroa ovat niinsanottuja yksilönumeroita, näistä kolmas on naisilla parillinen ja miehillä pariton. Viimeinen merkki on tarkastusmerkki, joka lasketaan seuraavasti. Jaetaan yhdeksän ensimmäisen numeron muodostama luku 31:llä, tämän laskutoimituksen jakojäännös on tarkastusmerkki. Mikäli jakojäännös on numero, se merkataan suoraan numerona, muut jakojäännökset muutetaan kirjaimiksi taulukon 4.3 mukaisesti.

10	A	21	N
11	B	22	P
12	C	23	R
13	D	24	S
14	E	25	T
15	F	26	U
16	H	27	V
17	J	28	W
18	K	29	X
19	L	30	Y
20	M		

Taulukko 4.3: Henkilötunnuksen viimeinen merkki

Siis esimerkiksi HETUn 020304A117 viimeinen merkki lasketaan näin: $020304117 = 654971 \cdot 31 + 16$, jakojäännös on siis 16 ja sitä vastaava merkki on H. Kyseisen 2000-luvulla syntyneen pojan koko henkilötunnus olisi siis 020304A117H.

5 Pelin matematiikkaa (2h)

Pelit ovat luonteeltaan hyvin matemaattisia. Eräs matematiikan osa-alueista on jopa nimeltään peliteoria. Vuonna 2001 tuli elokuvateattereihin elokuva Kaunis mieli (A Beautiful Mind), joka kertoo peliteorian isästä John Nashistä ja hänen sairastumisestaan skitsofreniaan. John Nash sai peliteoriastaan Nobelin taloustieteen palkinnon vuonna 1994 yhdessä Harsanyin ja Seltenin kanssa. Palkinto annettiin 40 vuotta sen jälkeen, kun Nash oli julkaissut ensimmäiset artikkelinsa peliteoriasta. Peliteorialla on käytännön sovelluksia erityisesti taloustieteessä. John Nashistä on Suomessa nähty myös dokumentti Neron kaunis mieli.

Tunnin ohjelmana on tehdä klassikkopeli nimeltään Mylly. Mylly-pelissä oppilaat pääsevät palauttamaan mieliin myöskin neliöön liittyviä asioita, kuten sen, kuinka sivujen puolittajat etsitään taittelemalla.

5.1 Pelin tekeminen

Materiaali

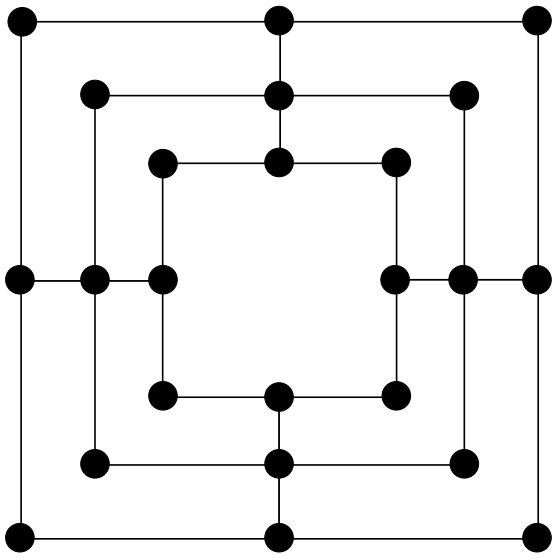
- Yksi neljäsosa normaalista kartonkiarkista (32×23 cm). Huom! On oleellista, että tämä kartonki on isompi kuin A4!
- Värilliselle paperille kopioidut sivun 38 neliöt, kullekin oppilaalle molemmat eri värisiä. Kopioita ei ole välttämätöntä tehdä, jos oppilaat osaavat piirtää itse oikean kokoiset neliöt (sivut 9.5 cm ja 15 cm).
- Kolmannen värinen tyhjä A4-paperiarkki.
- 9+9 kappaletta nappeja, kiviä, tasapohjaisia helmiä tai muita pelinappuloiksi soveltuvia pikkuesineitä. Tärkeintä on, että aina yhdeksän on samanvärisiä. Värjätyt kivet ovat esimerkiksi hyvä vaihtoehto. Kiviä voi värjätä itsekin esimerkiksi spraymaalilla.

Toteutus

Pelin kasaamiseksi tarvitaan kolme neliötä. Kaksi on valmiina (tai piirrettynä) ja kolmas taitetaan A4-arkista. Tämän jälkeen jokaisesta neliöstä etsitään sivu-

jen puolittajat taittamalla ne molemmista suunnista puoliksi. Taitoksessa syntyneitä viivoja hyväksikäyttäen neliöt liimataan keskittäen mahdollisimman keskelle kartonkia.

Tämän jälkeen piirretään peliviivat ja -pesät kuvan 5.1 osoittamiin kohtiin. Huomaa, että keskimmäiseen neliöön ei vedetä keskelle viivoja, eikä myöskään mihinkään neliöön kulmittain. Sivujen puolittajia yhdistävät viivat vedetään käyttäen hyväksi taittolinjoja.



Kuva 5.1: Valmis Mylly-pelin pelilauta

5.2 Pelin pelaaminen

Myllyn säännöt ovat seuraavanlaiset. Kummallakin pelaajalla on aluksi yhdeksän pelinappulaa, jotka he asettavat pelilaudan pesiin vuorotellen. Mikäli jompikumpi pelaajista saa muodostettua kolmen nappulan suoran eli myllyn pysty- tai vaakariveille, voi hän syödä yhden vastustajan nappulan. Kuitenkin niin että vastustajan valmiista myllystä saa syödä vain ellei muita mahdollisuuksia ole. Kun pelaajat ovat asettaneet kaikki nappulat laudalle, aloitetaan niiden siirtäminen. Nappulan saa siirtää vain viivaa pitkin viereiseen tyhjään pesään. Mikäli pelaajalla ei ole kuin kolme nappulaa hän voi hyppiä mihin tahansa laudalla. Pelin häviää se pelaaja, jolla ensimmäisenä on jäljellä vain kaksi nappulaa eli kun pelaaja ei voi enää muodostaa myllyä.

5.3 VÄLIPALA-3 Hiukset päässä, kyyhkyset lakassaan

Matemaattinen todistus tarkoittaa menettelyä, jossa jokin uusi asia osoitetaan oikeaksi käyttämällä perustotuuksia tai jo ennestään oikeaksi osoitettuja asioita. Osoitetaan seuraavassa, että Suomessa on vähintään 25 ihmistä, joilla on täsmälleen saman verran hiuksia päässään.

Kyyhkyset lakassaan

Kuvitellaan, että puistossa on 21 kyyhkystä. Yhtäkkiä kyyhkyt säikähtävät ja pakenevat läheiseen kyyhkyslakkaan, jossa on 20 koloa. Nyt välttämättä yhdessä kolossa on vähintään kaksi kyyhkystä. Tämän mitättömältä kuulostavan havainnon teki 1800-luvulla elänyt kuuluisa matemaatikko Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet.

Vaikka havainto onkin mitätön, sen avulla pystytään todistamaan monenlaisia asioita. Periaatetta kutsutaan nimellä Dirichlet'n laatikkoperiaate tai kyyhkyslakkaperiaate.

Suomalaisten hiukset

Miten suomalaisten hiukset sitten liittyvät Dirichlet'n periaatteeseen? No, Suomessa on reilut 5 miljoonaa asukasta. Jokaisella on päässään 0–200000 hiusta (200000 on tutkijoiden mukaan ehdoton maksimi). Tehdään "kyyhkyslakka", jossa jokainen kolo vastaa yhtä hiusmäärää, siis kyyhkyslakassa on 200001 koloa. Ensimmäinen kolo on kaljuille, toinen yhden hiuksen omaaville ja niin edelleen. Asetellaan kaikki suomalaiset nyt näihin koloihin. Jokaiseen koloon ei välttämättä tule yhtään ihmistä, mutta johonkin koloon tulee välttämättä vähintään $\frac{5000000}{200000} = 25$ ihmistä. Eli siis Suomessa on vähintään 25 ihmistä, joilla on täsmälleen saman verran hiuksia päässään.

6 Koordinaatisto (1–2h)

Koordinaatistoa käytetään lähes kaikissa matematiikan sovelluksissa. Koordinaatisto on hauska opetuskohde ja sen opettaminen onnistuu vaikka yksiköluokkalaisille. Tunnin aiheeseen kuuluu itse koordinaatiston opettamisen lisäksi koordinaatistossa peilaamisen opettaminen. Yksi tunti on liian lyhyt aika koko ohjelman läpikäymiseen, mutta aihe käsitellään perusteellisesti, koska osalle itse koordinaatisto voi olla tuttu.

6.1 Koordinaatistobingo

Materiaali

- Pieniä koordinaatistoja sivulta 32.
- Sivun 33 bingolaput irtileikattuna.

Toteutus

Koordinaatisto on helppo ja mekaaninen opettaa. Kertausta ja opetustakin varten koordinaatistobingo on mainio apuväline. Bingo toimii siten, että jokainen oppilas merkkaa omaan pikkukoordinaatistoonsa viisi pistettä aivan mihin kohtiin haluaa (kokonaislukukoordinaatteihin). Opettaja tarkistaa vielä, että pisteet on tehty oikeisiin kohtiin (risteyksiin). Myöskin x- ja y-akseleille saa laittaa pisteitä.

Seuraavaksi opettaja nostelee bingolappuja yksi kerrallaan ja sanoo lapussa olevan koordinaatin. Oppilaat merkkaavat, mikäli kohdalle sattuu omassa lapussa oleva koordinaatti. Tässä vaiheessa on myös ainakin aluksi tarkistettava, että koordinaattien järjestys on käsitetty oikein.

Mikäli jonkun lappuun osuu viideskin oikea koordinaatti, hän huutaa bingo ja saa mahdollisesti palkinnon tai ainakin mainetta ja kunniaa. Opettajan on syytä kuitenkin tarkastaa, että oppilas on merkannut oikein huudetut koordinaatit.

Bingoa ei kannata lopettaa tähän vaan kannattaa katsoa, kuinka monta lappua pitää nostaa, että kaikille tulee bingo.

Koordinaatistobingoa voi pelata aika ajoin muidenkin ohjelmien lomassa välipalana.

6.2 Mikä kätkeytyy koordinaatistoon

Materiaali

- Sivun 31 moniste.

Toteutus

Tehtävänä on piirtää annettujen kysymysten tai vihjeiden avulla koordinaatistossa majailevat kuviot. Tehtävä soveltuu erityisesti nuoremmille oppilaille, mutta vanhempien oppilaiden kanssa voi käydä lisäksi läpi tehtävissä olevien pisteiden koordinaatteja.

6.3 Peilaaminen koordinaatistossa

Materiaali

- Sivujen 34–37 monisteet.

Toteutus

Tehtävänä on peilata kaksoiskoordinaatistoissa oikealla oleva kuva vasemmalle puolelle. Peilaaminen onnistuu parhaiten niin, että etsii aina yhden kulman koordinaatin ja kopioi kulman samaan kohti toiseen koordinaatistoon. Sen jälkeen katsoo mihin kulmiin kulmasta menee jana ja piirtää nämä.

Kannattaa huomata, että kuvan pitää nimenomaan peilautua. Monet lapset oikovat ja ”piirtävät” kuvan samanlaisena toiselle puolelle. Tällainen kuva on erityisesti sivun 35 ylimmäinen kuvio.

Sivulla 37 on tyhjiä kaksoiskoordinaatistoja, joihin joko opettaja tai lapset voivat keksiä itse peilattavia kuvia.

Koordinaatistojen vasemmalla puolella ei ole tarkoituksella käytetty negatiivisia lukuja, joten peilaustehtävä soveltuu oppilaille aina ykkösluokkalaisista ylöspäin.

7 Kirjallisuutta

Björklund, Jenni, Lehto, Saara, Pasanen, Sampo ja Viljanen, Meeri. 2002. **Sukkia ja muuta matematiikkaa**. MFKA-Kustannus. Vantaa

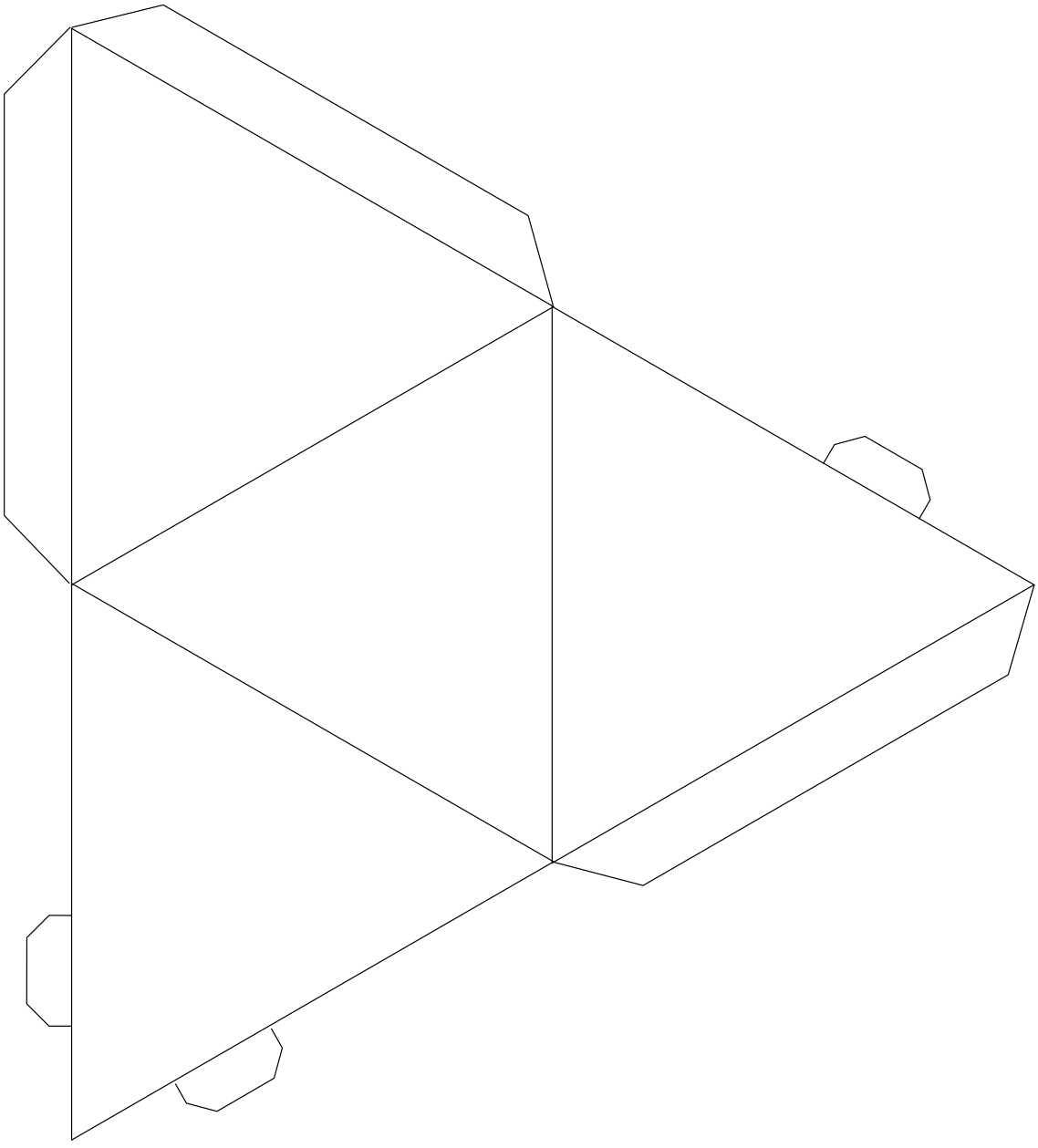
Boyer, Carl. 2000. **Tieteiden kuningatar, matematiikan historia, osat I ja II**. Bookwell. Juva

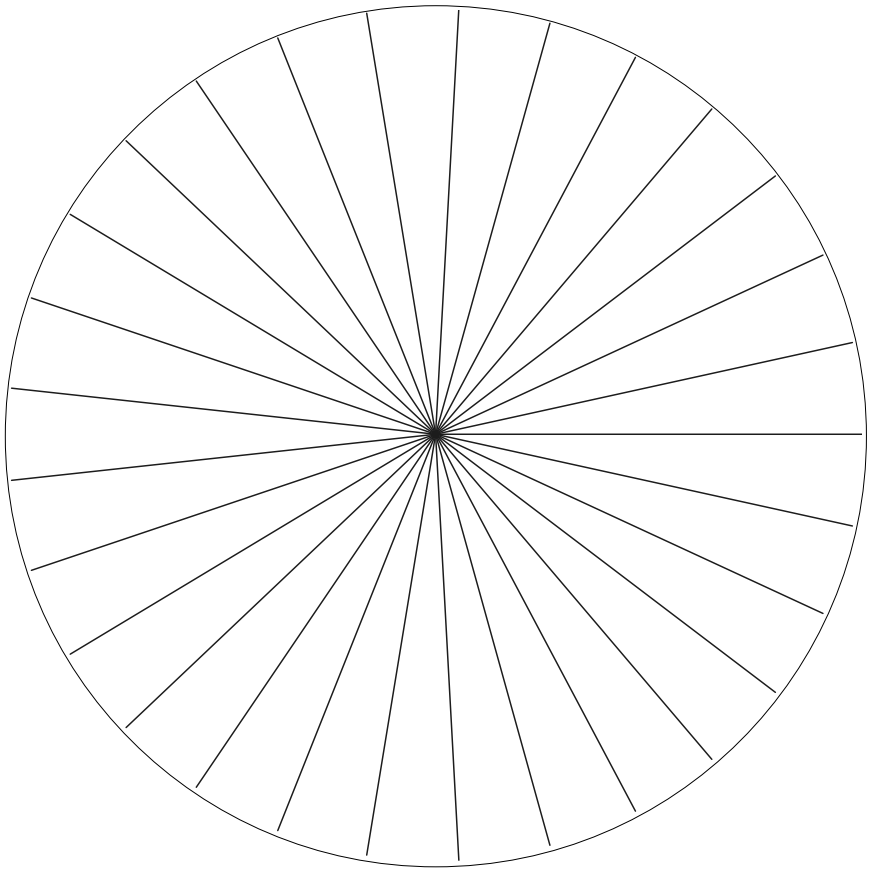
Flegg, Graham. 2002. **Lukujen historia**. Bookwell. Juva

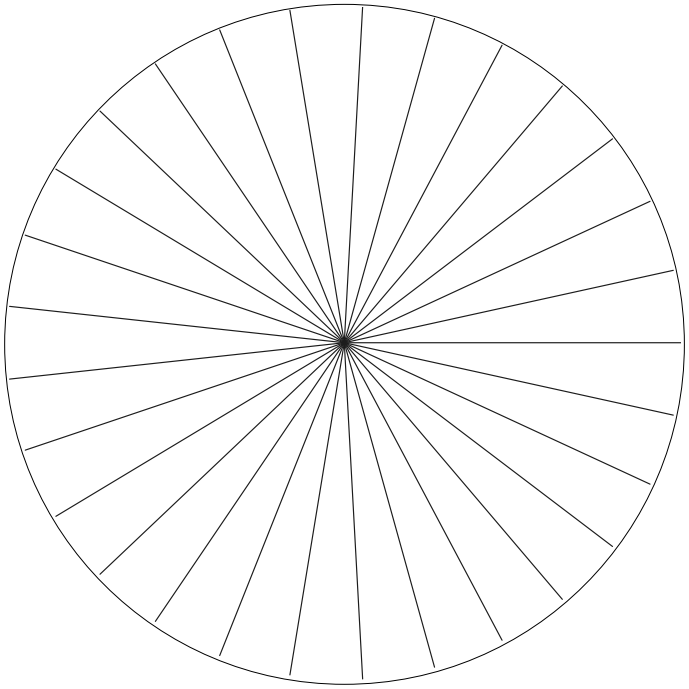
de Guzmán, Miguel. 1990. **Matemaattisia seikkailuja**. Finn Lectura. Loimaa

Vuori, Teppo. 2004. **Tarkastusmerkkien laskentamenetelmiä**. `http://koti.mbnet.fi/~thales/tarkmerk.htm`.

Liite A Monistepohjia







A
B
C
D
E
F
G
H
I
J
K
L
M
N
O
P
Q
R
S
T
U
V
W
X
Y
Z
Å
Ä
Ö

A
B
C
D
E
F
G
H
I
J
K
L
M
N
O
P
Q
R
S
T
U
V
W
X
Y
Z
Å
Ä
Ö

L000001111	L010000040
V139800001	M910200010
T019322151	L110341241
X192143001	N156911610
P222220011	L767611111
S211111830	Y982131001

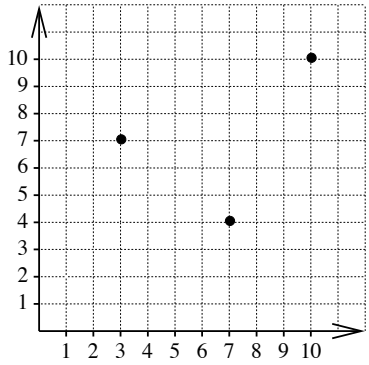
A.	999994
B.	193090
C.	167290
D.	291383
E.	323099
F.	424097
G.	535295
H.	616096
I.	736199
J.	825038
K.	914095
L.	023138
M.	512143

A.	999994
B.	193090
C.	167290
D.	291383
E.	323099
F.	424097
G.	535295
H.	616096
I.	736199
J.	825038
K.	914095
L.	023138
M.	512143

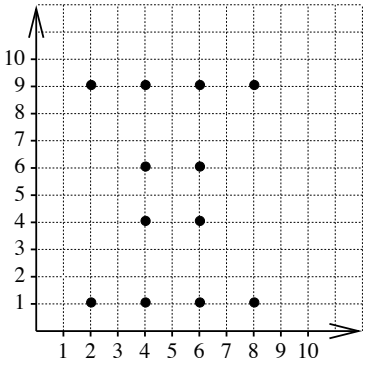
A.	999994
B.	193090
C.	167290
D.	291383
E.	323099
F.	424097
G.	535295
H.	616096
I.	736199
J.	825038
K.	914095
L.	023138
M.	512143

A.	999999999994
B.	193091929495
C.	167291129400
D.	291181121473
E.	323091129568
F.	424091329623

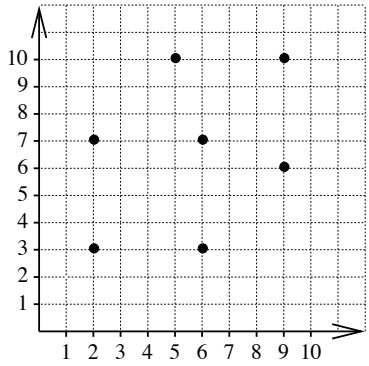
A.	999999999994
B.	193091929495
C.	167291129400
D.	291181121473
E.	323091129568
F.	424091329623



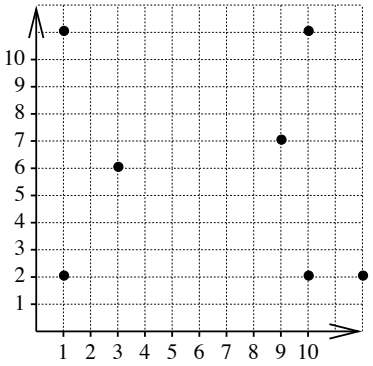
MIKÄ KUVIO TÄSSÄ ON?



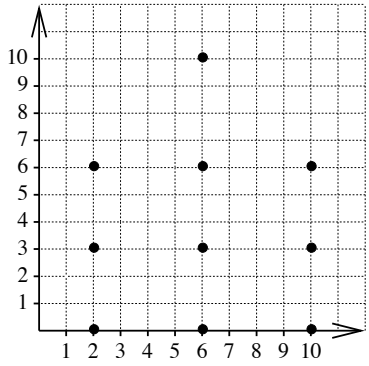
LÖYDÄTKÖ H–KIRJAIMEN?



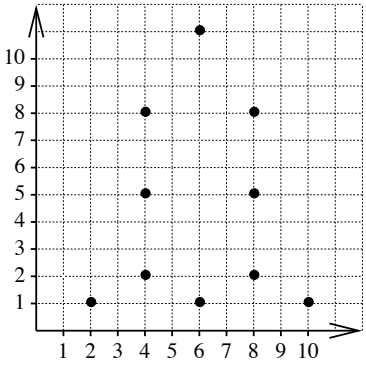
KUUTIO HUKASSA, ETSI SE!



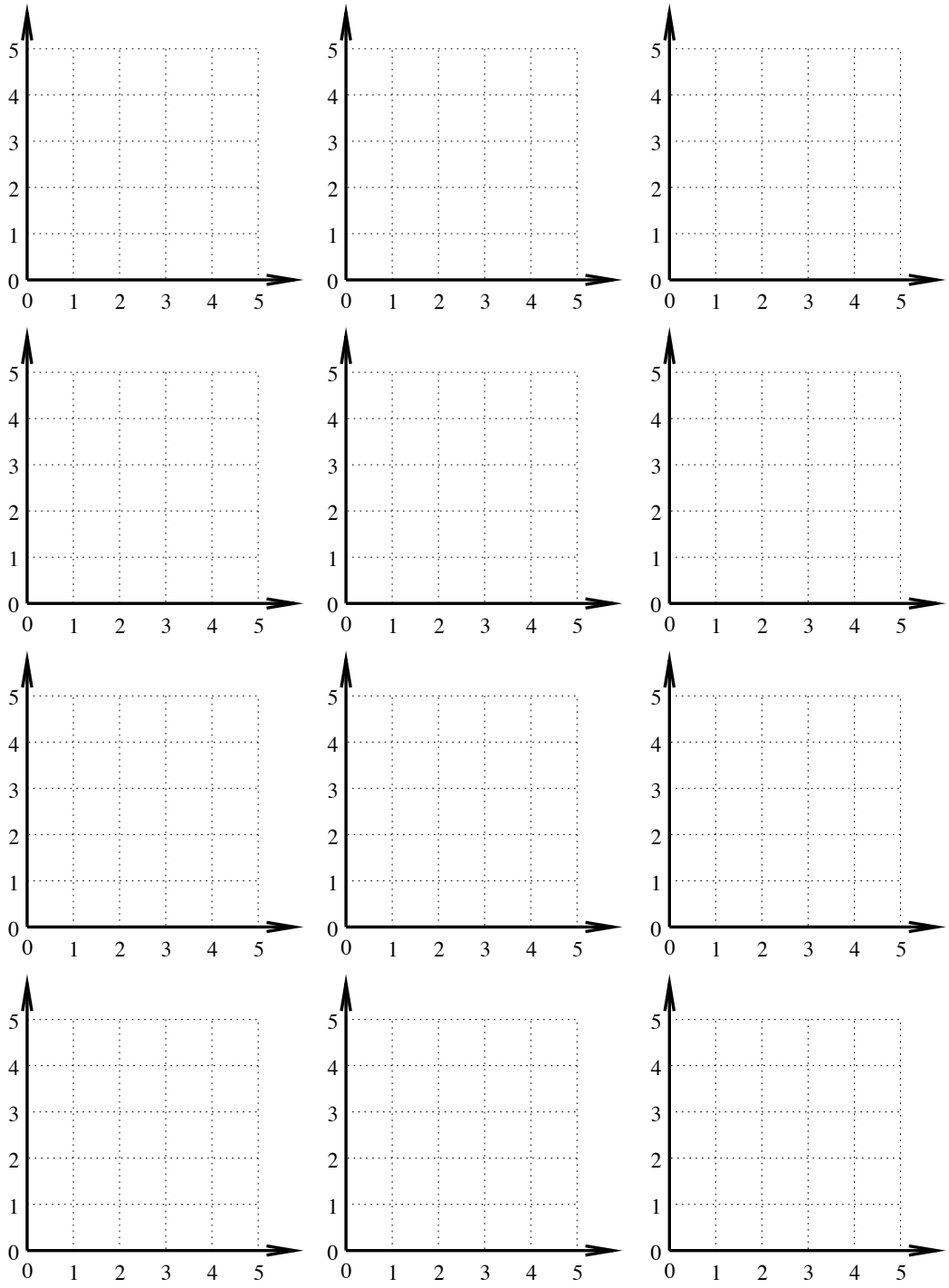
KUVASSA ON NELIÖ JA KOLMIO, ETSI!



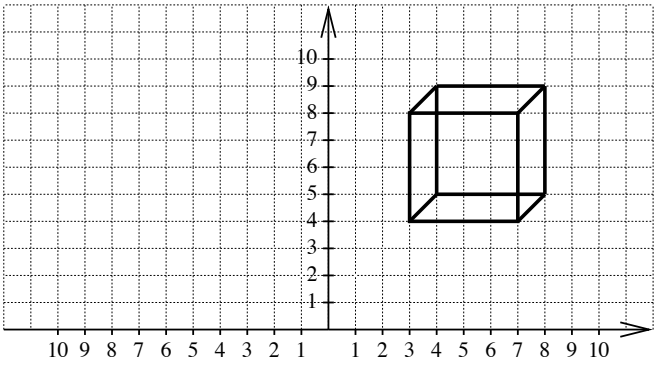
LIIKAA PISTEITÄ, MUTTA KIRJEKUORI PITÄISI LÖYTYÄ!

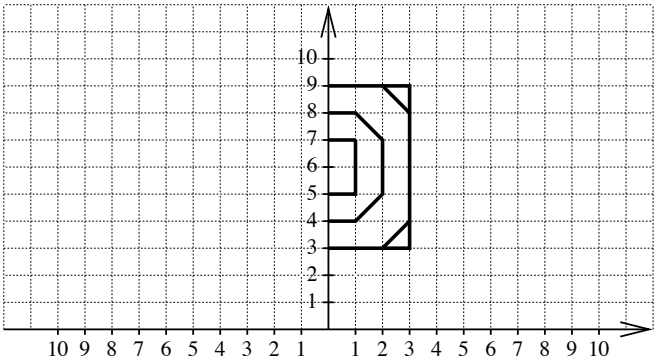


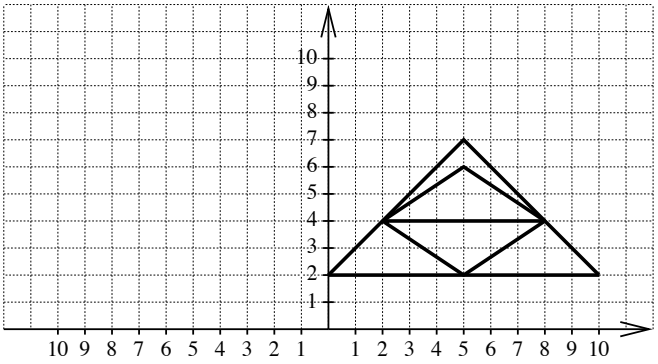
TÄLLÄ MATKATAAN KUUHUN!

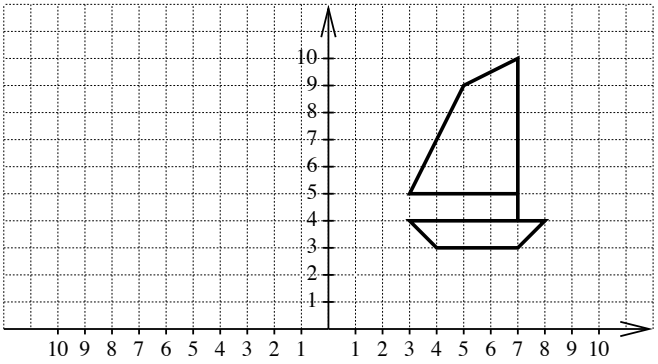

0 1 2 3 4 5
0 1 2 3 4 5

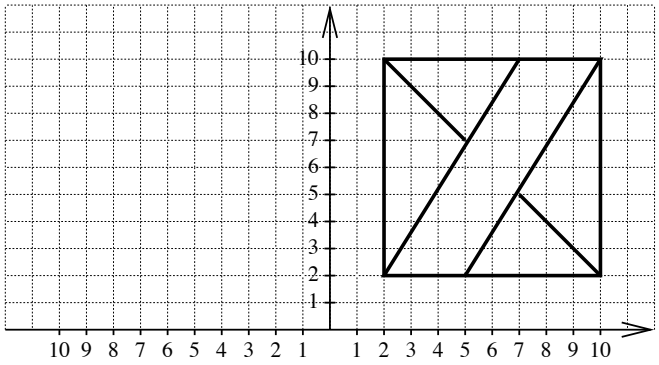
$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(0,3)$
$(0,4)$	$(0,5)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$
$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$
$(2,4)$	$(2,5)$	$(3,0)$	$(3,1)$
$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$	$(3,5)$
$(4,0)$	$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$
$(4,4)$	$(4,5)$	$(5,0)$	$(5,1)$
$(5,2)$	$(5,3)$	$(5,4)$	$(5,5)$

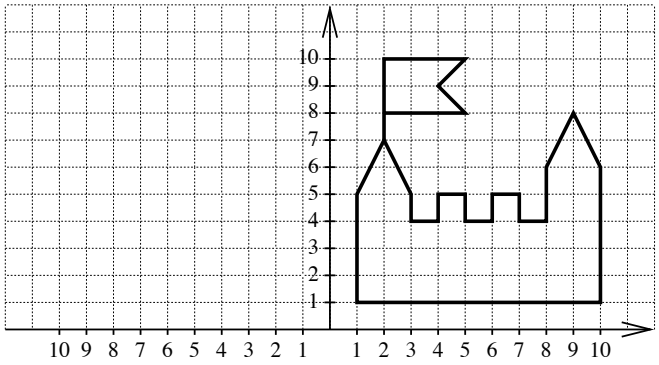

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

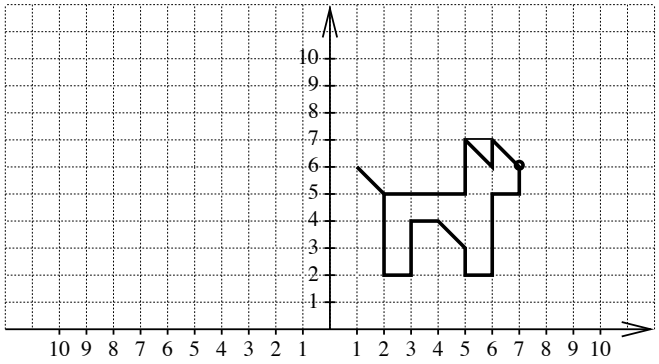

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

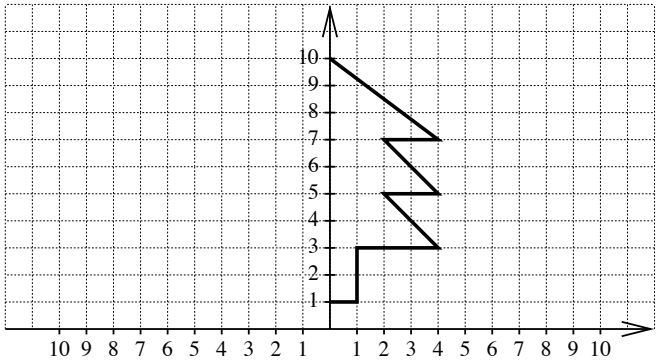

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

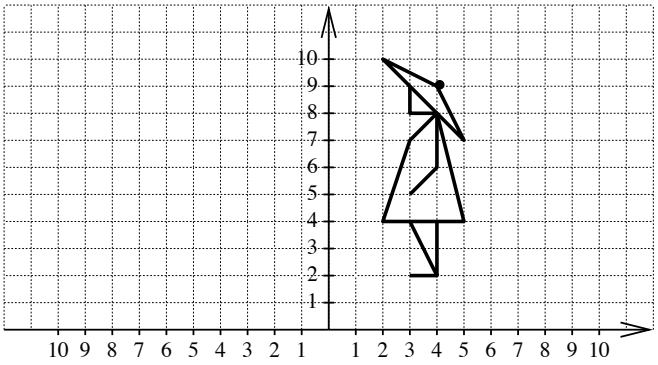

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

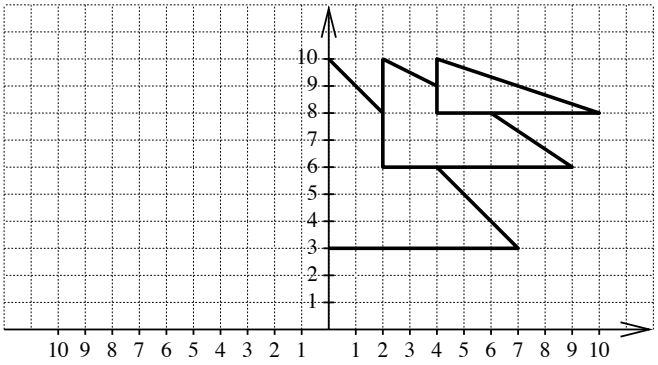

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

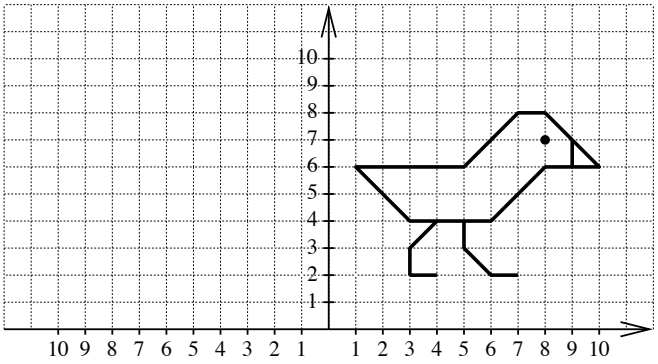

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

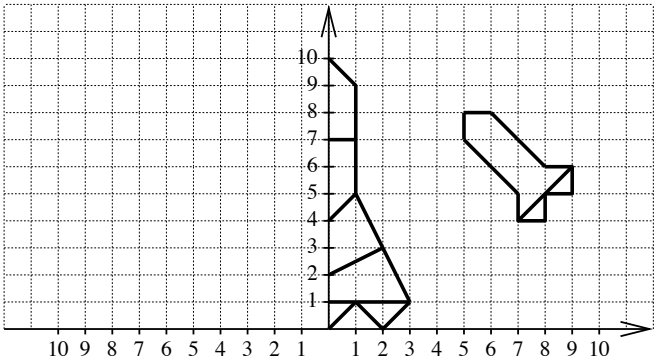

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

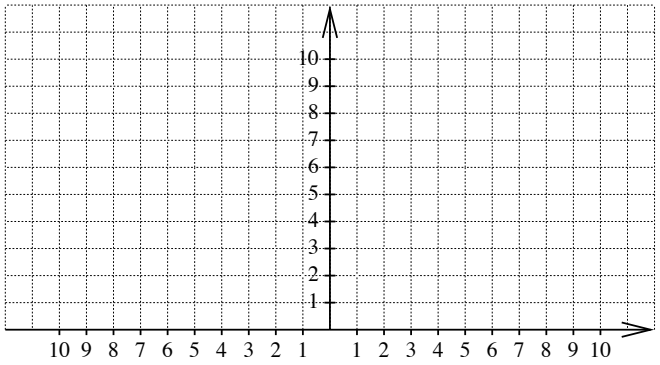

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

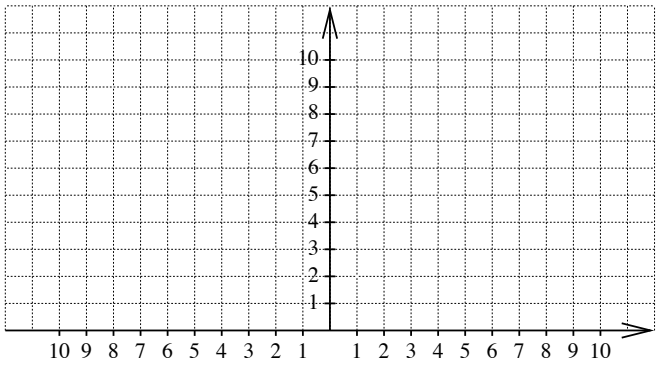

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

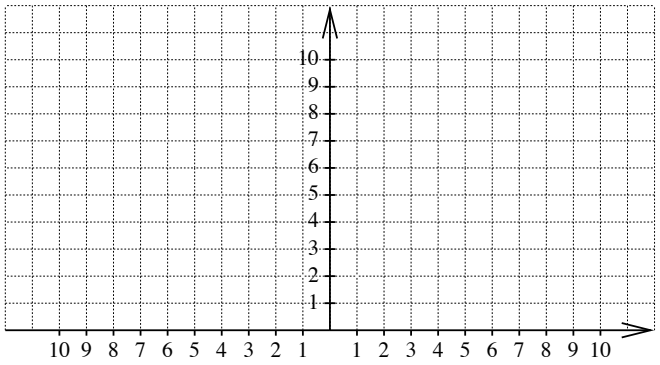

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

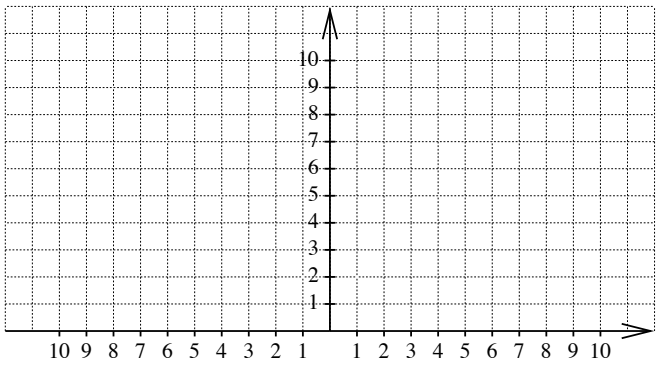

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10


10 9 8 7 6 5 4 3 2 1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10


10 9 8 7 6 5 4 3 2 1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10


10 9 8 7 6 5 4 3 2 1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10


10 9 8 7 6 5 4 3 2 1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10


10 9 8 7 6 5 4 3 2 1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10