



Matematiikkaa helpolla kielellä osa 2: Yhtälöt, prosentit ja talousmatematiikka

Mäkäläinen Elisa Mäkäläinen, helpon kielen muokkaus Riikka Kuningas

Rahoittaja:

OPETUS- JA KULTTUURIMINISTERIÖ
UNDERSVINGS- OCH KULTURMINISTERIET

Sisällys

Osaamistavoitteet: yhtälöt ja prosentit	2
Yhtälöt.....	5
Prosentit.....	18
Talousmatematiikka	27
Lähdeluettelo	38

Osaamistavoitteet: yhtälöt ja prosentit

Tähti (*) tarkoittaa vaikeimpia sisältöjä ja tehtäviä.

Luku 5 Yhtälöt

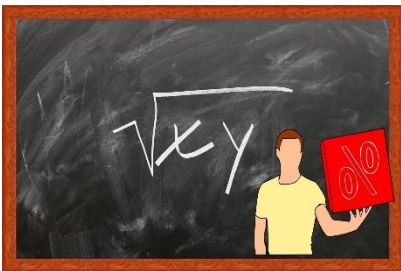
- Osaat sieventää yksinkertaisia kirjainlausekkeita.
- Osaat ratkaista ensimmäisen asteen yhtälön.
- Osaat ratkaista verrantoyhtälön.
- Osaat käyttää verrantoa (suoraan ja kääntäen verrannollisuus) sanallisissa tehtävissä.
- *Osaat ratkaista vaillinaisen toisen asteen yhtälön.
- *Osaat muodostaa yhtälön sanallisesta tehtävästä.

Luku 6 Prosentit

- Ymmärrät, että $1\% = 0,01$ ja osaat muuttaa prosenttilukuja desimaaliluvuiksi.
- Osaat laskea, kuinka paljon prosenttiosuus on kokonaisuudesta.
- Osaat laskea, kuinka monta prosenttia jokin luku on toisesta luvusta.
- Osaat laske muutosprosentin.
- Osaat muodostaa laskulausekkeen sanallisesta prosenttilaskusta.
- *Osaat laskea perusarvon eli mikä on sata prosenttia.
- *Osaat laskea, kuinka monta prosenttia enemmän tai vähemmän jokin luku on verrattuna toiseen lukuun.
- *Tiedät mitä eroa on prosentilla ja prosenttiyksiköllä.

Luku 7 Talousmatematiikka

- Osaat laskea arvonlisäveroja.
- Osaat laskea veroprocentin avulla nettopalkan.
- Osaat laskea yksinkertaisia korko- ja lainalaskuja.
- *Osaat käyttää valtion tuloverotaulukkoa



Sanasto

Tehtävä.

Kirjoita **lihavoidut** sanat omalla kielellä.

		Omalla kielellä
lauseke (laskulauseke)	Lauseke sisältää yhden tai useampia laskutoimituksia, joskus sulkuja ja joskus muuttujan kuten x . Lauseke voi olla esimerkiksi $1 + 2 \cdot (3 + 4)$ tai $2x + 3$.	
muuttuja	tuntematon asia, x	
termi	Lauseke muodostuu termeistä. <ul style="list-style-type: none">• Muuttujatermissä on x. Esimerkiksi $2x$ tai $4x^2$• Vakiotermissä ei ole muuttujaa. Esimerkiksi 10 tai -5. Samannuotoisilla termeillä on sama kirjainosa. Esimerkiksi $6x$ ja $-7x$.	
yhtälö $x + 5 = 12$	Yhtälössä selvitetään jokin tuntematon asia. Yhtälö on kahden lausekkeen merkitty yhtäsuuruus. Yleensä tuntematon asia merkitään symbolilla x . tuntematon asia = ei tiedetä Yhtälö ratkaistaan hakemalla tuntemattomalle sellainen arvo, jolla yhtälön puolet ovat yhtä suuria. Ensimmäisen asteen yhtälössä on x , mutta ei termejä, joissa olisi x^2 tai x^3 . Toisen asteen yhtälössä on x^2 . Muodosta yhtälö = Kirjoita sanallinen ongelma yhtälöksi. Kirjoita yhtälö.	

<p>verranto</p> $\frac{x}{15} = \frac{3}{45}$	<p>Verranto on yhtälö, jonka molemmilla puolilla on jakolasku eli murtoluku.</p> <p>Verrannon muotoinen yhtälö on helpoin ratkaista "kertomalla ristiin".</p>	
<p>tekijä</p>	<p>Kertolaskussa kertoja ja kerrottava ovat tulon tekijöitä. Esimerkiksi $6 \cdot 4$</p> <ul style="list-style-type: none"> • 6 on kertoja • 4 on kerrottava • 6 ja 4 ovat tulon tekijät 	
<p>sieventää</p>	<p>kirjoittaa yksinkertaisemmin / lyhyemmin</p> <p>Sievennä lauseke. = Kirjoita lauseke yksinkertaisemmin.</p>	

Yhtälöt

Lausekkeen sieventäminen



Katso video [Lausekkeen sieventäminen](#).

Vain samanmuotoiset termit voidaan yhdistää.

- Ensimmäisen asteen termejä ovat esimerkiksi x ja $-5x$
- Toisen asteen termejä ovat esimerkiksi x^2 ja $3x^2$
- Vakiotermejä ovat esimerkiksi 3 ja -5

Esimerkki. Sievennä lauseke.

a) $1x = x$

b) $-1x = -x$

c) $x + x = 2x$

d) $x \cdot x = x^2$

e) $3x - 5 + 4x + 6 = 7x + 1$

f) $3x^2 - 5x - 2x^2 + 6x + 1 = x^2 + x + 1$

Tehtävä 5.1 Sievennä lauseke.

a) $2x + 3x =$

b) $2x + 1 + 3x =$

c) $2x - 3x =$

d) $x \cdot x \cdot x =$

e) $2x + 1 - 4x - 6 =$

f) $x^2 + x + 2x^2 - x =$

Yhtälön ratkaiseminen

Yhtälössä on aina kaksi lauseketta, jotka merkitään yhtä suuriksi.

Tarkoitus on, että löydät tuntemattomalle muuttujalle (esim. x tai y) arvon, jolla yhtälö on tosi. Kun laitat tämän arvon muuttujan paikalle, yhtälön molemmat puolet ovat yhtä paljon.



Katso videot [Yhtälön alkeet](#) ja [Yhtälön ratkaiseminen](#).

Ensimmäisen asteen yhtälö

Summa ja erotus yhtälössä:

ESIM. 1 Ratkaise yhtälö $x + 2 = 10$.

$$\begin{aligned}x + 2 &= 10 \\x &= 10 - 2 \\x &= 8\end{aligned}$$

Huom!

Kirjoita vaiheet allekkain niin, että "="-merkit ovat samalla kohdalla.

Käytännössä edellä molemmilta puolilta vähennetään 2, eli

$$\begin{aligned}x + 2 &= 10 && | - 2 \\x + 2 - 2 &= 10 - 2 \\x &= 8\end{aligned}$$

ESIM. 2 Ratkaise yhtälö $x - 4 = 7$.

$$\begin{aligned}x - 4 &= 7 \\x &= 7 + 4 \\x &= 11\end{aligned}$$

Käytännössä edellä molemmille puolille lisätään 4, eli

$$\begin{aligned}x - 4 &= 7 && | + 4 \\x - 4 + 4 &= 7 + 4 \\x &= 11\end{aligned}$$

Tehtävä 5.2 Ratkaise

a) $x + 6 = 9$

b) $x + 7 = 11$

c) $x - 5 = 8$

d) $x - 4 = 2$

e) $2x = x + 2$

f) $3x + 5 = 2x + 6$

Yhtälön kertominen ja jakaminen puolittain jollain luvulla
= molemmat puolet kerrotaan tai jaetaan samalla luvulla.

ESIM. 3 Ratkaise yhtälö $\frac{x}{4} = 3$.

$$\frac{x}{4} = 3 \quad | \cdot 4$$

$$\frac{4x}{4} = 4 \cdot 3 \quad \text{Voi merkitä suoraan } x = 4 \cdot 3$$

$$x = 12$$

Tarkistus: $12/4 = 3$

ESIM. 4 Ratkaise yhtälö $2x = 10$.

$$2x = 10 \quad | : 2$$
$$\frac{2x}{2} = \frac{10}{2} \quad \text{Voi merkitä suoraan } x = \frac{10}{2}$$

$$x = 5$$

Tarkistus: $2 \cdot 5 = 10$

ESIM. 5 Ratkaise yhtälö $3x - 4 = x + 8$.

$$3x - 4 = x + 8$$

$$3x - x = 8 + 4$$

$$2x = 12 \quad | : 2$$

$$12$$

$$x = \frac{12}{2}$$

$$2$$

$$x = 6$$

Tarkistus:

$$3 \cdot 6 - 4 = 6 + 8$$

$$14 = 14$$

Jos lopussa päädyimme tilanteeseen, että muuttujan edessä on pelkästään miinusmerkki, voidaan se poistaa, kun jaamme tai kerromme yhtälön molemmat puolet luvulla -1 .

ESIM. 6 Ratkaise yhtälö $x - 2 = 2x$.

$$\begin{aligned}x - 2 &= 2x \\x - 2x &= 2 \\-x &= 2 && | \cdot (-1) \\x &= -2\end{aligned}$$

Tehtävä 5.3 Ratkaise

a) $6x = 12$

b) $4x = 20$

c) $-x = -3$

d) $5x - 1 = 9$

e) $3x - 8 = 1$

f) $2x = x - 3$

Tehtävä 5.4 Ratkaise yhtälöt.

a) $\frac{x}{2} = 4$

b) $\frac{x}{3} = 2$

c) $\frac{x}{5} = 3$

d) $\frac{x}{6} = 5$

Tehtävä 5.5 Ratkaise yhtälöt.

a) $\frac{x}{4} = 7$

b) $\frac{x}{2} = -9$

c) $\frac{x}{-5} = 2$

d) $\frac{x}{-8} = -2$

***Tehtävä 5.6** Ratkaise kaava $x:n$ suhteen.

Malli: $x - a = b$

$$x = b + a$$

a) $ax = b$

b) $ax = ac$

c) $\frac{x}{a} = b$



Katso video [Yhtälöt käytännössä.](#)

***Tehtävä 5.7** Kirjoita ongelmasta yhtälö ja ratkaise se.

a) Luokalla oli 24 oppilasta. Tyttöjä oli kolme kertaa niin paljon kuin poikia.
Kuinka monta tyttöä oli?

b) Mikko osti kaupasta viisi suklaapatukkaa ja kaksi pulloa limsaa (1,60 €/pullo).
Ostokset maksoivat yhteensä 7,20 €. Kuinka paljon suklaapatukka maksoi?



c) Kampaaja Leena leikkasi eräänä päivänä kaksi asiakasta enemmän kuin työkaverinsa Veera. Heillä kävi tuona päivänä 12 asiakasta.
Kuinka monta asiakasta Leenalla oli tuona päivänä?



- d) Pesuainetta oli kolmessa pakkauksessa yhteensä 1,75 litraa.
 Pakkauksessa A oli kolme kertaa niin paljon kuin pakkauksessa B.
 Pakkauksessa C oli 0,25 litraa enemmän kuin pakkauksessa B.
 Laske, kuinka paljon pesuainetta oli pakkauksessa B.



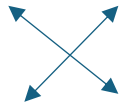
Verrantoyhtälö



Katso video [Verranto](#).

Esimerkki: Ratkaise yhtälö $\frac{x}{5} = \frac{12}{15}$.

$$\frac{x}{5} = \frac{12}{15}$$



Helpoin tapa ratkaista verranto on ristiin kertominen.

$$15 \cdot x = 5 \cdot 12$$

$$15x = 60 \quad | :15$$

$$x = 4$$

Tehtävä 5.8 Ratkaise yhtälöt.

a) $\frac{x}{5} = \frac{6}{15}$

d) $\frac{6}{x} = \frac{4}{6}$

b) $\frac{x}{2} = \frac{14}{4}$

e) $\frac{x}{6} = \frac{5}{3}$

c) $\frac{5}{16} = \frac{15}{x}$

f) $\frac{22}{6} = \frac{x}{3}$

Suoraan verrannollisuus



Katso video [Verrannollisuus](#).

Kun kaksi asiaa kasvavat samaan suuntaan, ne ovat suoraan verrannollisia.

Esimerkki 1: 0,75 kg nautoja maksaa 15 €. Kuinka paljon maksaa 0,2 kg nautoja?

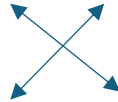
kg	€
0,75	15
0,2	x



Kun nautojen määrä **kasvaa**, myös hinta **kasvaa**. Nämä asiat ovat suoraan verrannollisia.

Kirjoita verrantoyhtälö ja kerro yhtälö ristiin!

$$\frac{0,75}{0,2} = \frac{15}{x}$$



$$0,75x = 0,2 \cdot 15 \quad |:0,75$$
$$x = 4$$

Vastaus: 0,2 kg nautoja maksaa 4 €

Esimerkki 2. Kartan mittakaava on 1:50 000. Kuinka pitkä matka on kartalla, jos se on luonnossa 1 km?



Kun kartalla matka **kasvaa**, myös luonnossa matka **kasvaa**. Asiat ovat suoraan verrannollisia.

Kartalla (cm)	Luonnossa (cm)
1	50 000
x	100 000

$$\frac{1}{x} = \frac{50\,000}{100\,000}$$

$$50\,000x = 1 \cdot 100\,000 \quad |:50\,000$$

$$x = 2$$

Vastaus: 2 cm

Tehtävä 5.9 Täydennä taulukot ja laske verrannolla.

- a) Sergei juoksi 24 minuutissa 4 kilometriä.
Kuinka kauan häneltä olisi mennyt juosta 5 km samalla nopeudella?



min	km

- b) 5 litraa polttoainetta maksaa 11 euroa. Kuinka paljon polttoainetta saa 100 eurolla?

litra	€



- c) Neljä tuumaa on 10,16 cm. Kuinka paljon on 50 tuumaa?

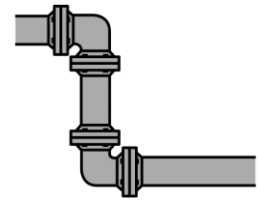
tuumaa	cm



- d) Kartan mittakaava on 1:20 000. Kuinka paljon matka on kartalla, jos se on luonnossa 500 m?

Kartalla (cm)	Luonnossa (cm)

- e) Piirustuksessa putken pituus on 80 mm.
Laske putken pituus luonnossa, kun mittakaava on 1:50.



- f) Pesuaine pitää laimentaa veteen suhteessa 1:20.
Laske kuinka paljon tarvitset vettä, kun käytät 1,5 dl pesuainetta?

pesuaine	vesi



Kääntäen verrannollisuus

Kun kaksi asiaa kasvavat eri suuntaan, ne ovat kääntäen verrannollisia.

Esimerkki. Matkaan kului aikaa 3 tuntia, kun keskinopeus oli 70 km/h.

Millä keskinopeudella pitää ajaa, että aikaa kuluu vain 2,5 tuntia?

h	km/h
3	70
2,5	x



Kun nopeus **kasvaa**, aika **pienenee**. Nämä asiat ovat kääntäen verrannollisia.

Kerro taulukon vierekkäiset luvut:

$$2,5x = 3 \cdot 70 \quad | :2,5$$

$$x = 84 \quad \text{Vastaus: } 84 \text{ km/h}$$

Tehtävä 5.10 Täydennä taulukot ja laske verrannolla. Asiat ovat kääntäen verrannollisia.

- a) Kallen mökkimatkaan meni aikaa 4,5 h, kun hän ajoi keskinopeudella 80 km/h.
Kuinka paljon aikaa olisi mennyt, jos keskinopeus olisi ollut 90 km/h?

Kun nopeus **kasvaa**, aika **pienenee**.



h	km/h

- b) Matkalle oli varattu ruokaa viikoksi 10 hengelle. Kuinka monelle päivälle ruokaa olisi riittänyt, jos matkalle olisi tullut mukaan vielä 2 henkilöä lisää?

Kun ihmisten määrä **kasvaa**, ruokaa riittää **vähemmän** aikaa.



ihmiset	päivät

Tehtävä 5.11 Mieti seuraavissa tehtävissä, onko kyseessä suoraan vai kääntäen verrannollisuus. Kasvavatko asia samaan suuntaan vai erisuuntaan?

Ratkaise tehtävät.

- a) Urakkaan kului aikaa 8 h viideltä työntekijältä.
Paljonko aikaa olisi kulunut samaan urakkaan neljältä työntekijältä?

Kun työntekijöiden määrä **vähenee**, työhön kuluva aika **kasvaa**.



- b) Ville sai palkkaa 7,5 tunnilta 76,50 euroa.
Kuinka paljon hän saa palkkaa 38 tunnista?

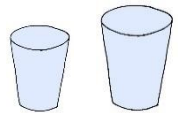
Kun työtunnit **kasvavat**, palkka **kasvaa**.

- c) Kun teet 2 litraa mehukeittoa, tarvitset perunajauhoja 60 ml.
Kuinka paljon perunajauhoja tarvitset,
kun teet 0,75 litraan mehukeittoa?



Kun mehukeiton määrä **kasvaa**, perunajauhojen määrä _____.

- d) Kannullisesta mehua tuli 8 lasillista mehua, kun lasin tilavuus oli 1,5 dl.
Kuinka monta lasillista mehua olisi saatu samasta kannusta,
kun lasin tilavuus on 2 dl?



Kun lasin tilavuus **kasvaa**, lasillisten määrä _____.

- e) Mikä on kartan mittakaava,
kun 5 cm kartalla on 100 m luonnossa?



- f) 30 litraa bensiiniä maksoi 73,50 €.
Kuinka paljon maksaa 57,5 litraa bensiiniä?



Vaillinaiset toisen asteen yhtälöt



Katso video [Toisen asteen yhtälöt.](#)

Esimerkkejä. Ratkaise x.

a) $x^2 = 4$ Ota yhtälön molemmista puolista neliöjuuri

$$x = \pm\sqrt{4}$$

$x = -2$ tai $x = 2$ Huomio! Yhtälöllä on kaksi ratkaisua, koska $2^2 = 4$ ja $(-2)^2 = 4$

*b) $2x^2 - 50 = 0$ Siirrä vakiotermi yhtälön oikealle puolelle, jolloin sen etumerkki vaihtuu.

$$2x^2 = 50 \quad |:2$$

$$x^2 = 25$$

$$x = \pm\sqrt{25}$$

$$x = -5 \text{ tai } x = 5$$

*c) $2x^2 - x = 0$ Ota yhteiseksi tekijäksi x.

$x(2x-1) = 0$ Jotta tulo on nolla, täytyy jommankumman tulon tekijöistä olla nolla.

$$x = 0 \text{ tai } 2x-1 = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } x = 1/2$$

Tehtävä 5.12 Ratkaise x.

a) $x^2 = 36$

b) $x^2 = 84$

***Tehtävä 5.13** Ratkaise x.

a) $2x^2 = 8$

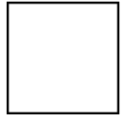
b) $3x^2 - 6x = 0$

c) $5x^2 - 500 = 0$

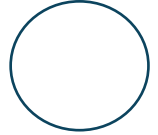
d) $4x^2 = 8x$

***Tehtävä 5.14** Kirjoita yhtälö ja ratkaise se.

a) Laske neliön sivun pituus a , kun neliön pinta-ala on 350 cm^2 .
Kaava: $A = a^2$, missä A on pinta-ala ja a on sivun pituus.



b) Laske ympyrän säde r , kun ympyrän pinta-ala on 350 cm^2 .
Kaava: $A = \pi \cdot r^2$.





c) Suorakulmion pituus on kolme kertaa niin pitkä kuin leveys.
Suorakulmion pinta-ala on 1200 cm^2 . Laske pituus ja leveys.



Sanasto

Tehtävä Kirjoita **lihavoidut** sanat omalla kielellä.

		Omalla kielellä
Prosentti %	<p>Prosentti tarkoittaa yhtä sadasosaa.</p> <p>Usein alennukset ja verot ilmoitetaan prosentteina eli suhteellisina osuuksina kokonaismäärästä.</p> <p>Alennus saattaa esimerkiksi olla 20 % eli 20 sadasosaa koko hinnasta.</p>	
kokonainen	<p>Kokonainen on yhteensä 100 % jostakin.</p> <p>100 % = yksi kokonainen. Esimerkiksi kokonainen pizza.</p> <p>Prosenttilaskuissa kokonainen on perusarvo.</p> 	
osuus	<p>Prosenttiluvun lukumäärä eli osuus jostakin.</p> <p>Esimerkiksi 25 prosenttia sadasta. 25 % = yksi neljäsosa alkuperäisestä arvosta.</p> 	

Prosentit

Prosenttilaskenta on tärkeää kaikilla ammattialoilla.
Prosenttien avulla kuvataan esimerkiksi osuuksia ja muutoksia.
Myös arkielämässä tarvitsee prosentteja mm. alennusmyynneissä.



Katso video [Prosentti](#).

Yksi prosentti on yksi sadasosa:

$$1\% = \frac{1}{100} = 0,01$$

Yksi promille on yksi tuhannesosa, ja se esitettyinä murtolukuna ja desimaalilukuna:

$$1\text{‰} = \frac{1}{1000} = 0,001$$

ESIM. 1 Muunna murtoluvut prosenteiksi:

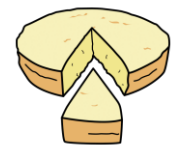
a) $\frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$

b) $\frac{1}{3} \approx 0,333 = 33,3\%$

Tehtävä 6.1 Kuinka moneen osaan kakku pitää leikata, että yksi viipale on kakusta

a) 10 prosenttia

b) 12,5 prosenttia?



Tehtävä 6.2 Muunna seuraavat murtoluvut prosenteiksi:

a) $\frac{1}{2} =$

b) $\frac{1}{5} =$

c) $\frac{3}{4} =$

d) $\frac{70}{100} =$

e) $\frac{2}{100} =$

f) $\frac{3}{1000} =$

Tehtävä 6.3 Muunna seuraavat desimaaliluvut prosenteiksi:

a) $0,5 =$

b) $0,05 =$

c) $0,005 =$

d) $0,0125 =$

e) $0,125 =$

f) $1,25 =$

Tehtävä 6.4 Muunna seuraavat prosentit desimaaliluvuiksi:

a) $8 \% =$

b) $80 \% =$

c) $0,8 \% =$

d) $1,45 \% =$

e) $45 \% =$

f) $145 \% =$

Prosenttiarvon laskeminen

1. Muuta prosenttiluku desimaaliluvuksi (prosenttikertoimeksi): $6 \% = 0,06$
2. Kerro perusarvo desimaaliluvulla.

ESIM. 1 Laske 6 prosenttia 1 250 eurosta.

$$0,06 \cdot 1\,250 \text{ €} = 75 \text{ €}$$

Perusarvo on aina kokonainen eli 100 %.

ESIM. 2 Laske 12 prosenttia 150 millilitrasta.

$$0,12 \cdot 150 \text{ ml} = 18 \text{ ml}$$

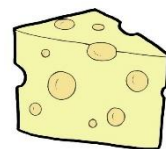
Tehtävä 6.5 Laske

a) 10% 120 kg:sta

b) $4,5 \%$ 800 €:sta

c) 34% 95 metristä

Tehtävä 6.6 Juuston rasvapitoisuus on 28 %.
Kuinka paljon 300 gramman juustopalassa on rasvaa?



Tehtävä 6.7 Työpaikan henkilöstöstä 12,5 % on naisia.

Kuinka paljon yrityksessä työskentelee naisia, kun koko henkilöstömäärä on 64?

Tehtävä 6.8 Saat alennusmyynnissä 45 %:n alennuksen paidasta, jonka normaalihinta on 59,00 €. Kuinka monta euroa on alennus?



***Tehtävä 6.9** Kuinka monta millilitraa henkilön veressä on alkoholia, jos veren alkoholipitoisuus on 0,5 ‰ ja verta on kehossa yhteensä 5,0 litraa.

Prosenttiluvun laskeminen

Kun haluat laskea ”kuinka paljon joku on jostakin”

tai ”kuinka monta prosenttia joku on jostakin”,

niin kirjoita se ensin jakolaskuna,

Sen jälkeen muutat lopputuloksen prosenteiksi.

Esim. 1 Kuinka paljon 50 grammaa on 850 grammasta

$$\frac{50}{850} \approx 0,059 = 5,9 \%$$

mikä?
mistä?

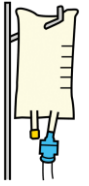
Esim. 2 Kuinka monta prosenttia 1 200 € on 3 500 eurosta?

$$\frac{1200}{3500} \approx 0,34 = 34 \%$$

Tehtävä 6.10 Laske kuinka monta prosenttia

- a) 315 € on 1 800 €:sta,
- b) 15 g on 300 g:sta,
- c) 20 ml on 50 ml:sta.

Tehtävä 6.11 Laske liuoksen suolapitoisuus, kun 15 desilitrassa suolaliuosta on 0,5 desilitraa suolaa. Kuinka monta prosenttia 0,5 dl on 15 desilitrasta?



Tehtävä 6.12 Laske alennusprosentti, kun sait 149 €:n tuotteesta alennusta 59,60 €. Kuinka monta prosenttia 59,60 € on 149 eurosta?

Muutosprosentti

Muutoksista puhutaan yrityksissä usein prosentteina.

Laske ensin määrällinen muutos ja vertaa sitä aina alkuperäiseen arvoon.

muutos
alkuperäinen

Esimerkki: Vuoden alussa yrityksen henkilöstömäärä oli 64 ja vuoden lopussa 75. Laske kuinka monta prosenttia yrityksen henkilöstömäärä on vuoden aikana kasvanut.

Määrällinen muutos on $75 - 64 = 11$. Verrataan sitä nyt alkuperäiseen arvoon, eli

$$\frac{11}{64} \approx 0,17 = 17\%$$

Yrityksen henkilöstömäärä on kasvanut 17 %.

Tehtävä 6.13 Yrityksen liikevaihto oli eräänä vuonna 245 000 €, kun se edellisenä vuonna oli 195 000 €. Laske liikevaihdon muutos prosentteina.

- Alussa: 195 000 €
- Lopussa: 245 000 €
- Muutos:
- Prosentteina:

Tehtävä 6.14 Vanha vuokra oli 452 € ja uusi vuokra korotuksen jälkeen 468 €. Laske vuokran nousu prosentteina.

- Alussa:
- Lopussa:
- Muutos:
- Prosentteina:

Tehtävä 6.15 Tuotteen hinta oli aluksi 145 €, mutta se laski 125 euroon.
Laske hinnan lasku prosentteina.

Tehtävä 6.16 Elokvateatterin kävijämäärä oli eräänä kuukautena 7 640 kävijää.
Seuraavana kuukautena kävijämäärä oli 6 250 kävijää.
Laske kävijämäärän muutos prosentteina.

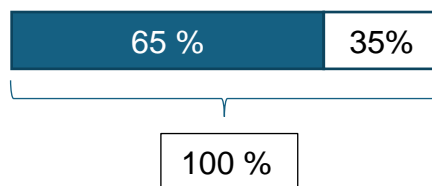
*Perusarvon laskeminen

Opetellaan seuraavaksi perusarvon eli kokonaisen laskeminen. Mikä on 100 %?



Katso video [Perusarvo](#).

Esimerkki: Kuinka paljon tuotteen alkuperäinen hinta on,
jos se maksaa 96 €, kun saat 35 % alennusta? Mistä luvusta 65 % on 96 €?



%	€
65	96
100	?

Tapa 1:

Koska tuotteesta on saanut 35 %:n alennuksen, on hinnasta maksettava osuus 65 %.
Voit laskea ensin yhden prosentin osuuden ja sen jälkeen kertoa saadun osuuden sadalla, eli

$$\frac{96 \text{ €}}{65} \cdot 100 \approx 147,69 \text{ €}$$

Tapa 2:

Tehtävän ratkaisussa voi myös käyttää apuna yhtälöä, eli $0,65 \cdot x = 96 \text{ €}$,
josta saadaan ratkaistua $x = \frac{96 \text{ €}}{0,65} \approx 147,69 \text{ €}$.

Tapa 3: Voit ratkaista tehtävän verrannolla.

***Tehtävä 6.17** Laske, mikä on 100 %.

%	€
100	x
40	20

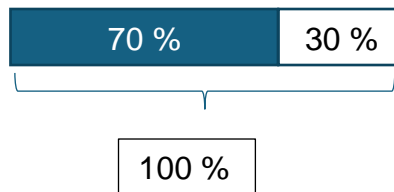
a) Mistä luvusta 40 % on 20 €?

b) Mistä luvusta 5 % on 300 €?

c) Mistä luvusta 90 % on 18 €?

***Tehtävä 6.18** Kanisterissa on öljyä 2,8 litraa, joka on koko sisällöstä 70 %. Laske kuinka paljon täydessä kanisterissa on öljyä.

%	litraa
100	?
70	2,8



***Tehtävä 6.19** Kuinka paljon on bruttopalkka, jos verojen jälkeen jää käteen 2 261 €. Veroprosentti on 28,6 %.

%	€
100	?
	2261



***Tehtävä 6.20** Maija ostaa television 15 prosentin alennuksella. Mikä on television lähtöhinta, jos alennus on 72 euroa?

*Prosenttiyksikkö

Kun vertaat prosenttilukuja keskenään, puhutaan prosenttiyksiköistä.

ESIM. Kunnan tuloveroprosentti nousi 19 %:sta 19,5 %:iin. Kuinka monta prosenttiyksikköä oli nousu?

Nousu oli

$$19,5\% - 19\% = +0,5\% \text{-yksikköä.}$$

*Vertailuprosentti



Katso video [Vertailu prosentteina ja prosenttiyksiköinä.](#)

- 1) Laske ero.
- 2) Laske ero prosentteina: $\frac{\text{ero}}{\text{kuin-sanan jälkeinen luku}}$

Esimerkki. Kuinka monta prosenttia suurempi on 56 kuin 47?

- 1) Ero: $56 - 47 = 9$.
- 2) $\frac{9}{47} \approx 0,19 = 19\%$

Tehtävä 6.21 Kuinka monta prosenttia

- a) luku 5 on pienempi kuin luku 8
- b) luku 8 on suurempi kuin luku 5?

***Tehtävä 6.22** Kuinka monta prosenttia




- a) painavampi on 85 kg kuin 68 kg
- b) kevyempi on 68 kg kuin 85 kg?


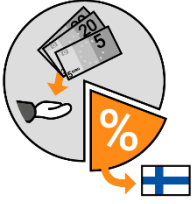
***Tehtävä 6.23** Erään puolueen kannatus nousi 20 prosentista 30 prosenttiin. Kuinka paljon kannatus nousi

- a) prosenttiyksiköinä
- b) prosentteina?

Sanasto

Tehtävä Kirjoita **lihavoidut** sanat omalla kielellä.

substantiivi	verbi	Omalla kielellä
<p>laina = rahasumma, joka on lainattu esimerkiksi pankista.</p> <p><i>Tarvitsen 85 000 € lainaa, koska ostan oman asunnon.</i></p>	<p>lainata</p> <p><i>Joskus ostos on niin kallis, että täytyy lainata rahaa. Isoon ostokseen voit ottaa pankkilainaa.</i></p> <p><i>Kirjastosta voi lainata kirjoja.</i></p>	
<p>lasku <i>Sähkölasku kertoo, kuinka paljon sinun pitää maksaa sähköstä, milloin on eräpäivä ja kenelle maksat rahan.</i></p> 	<p>laskuttaa</p> <p>= lähettää lasku maksajalle, pyytää maksua</p>	
<p>korko = rahan lainaamisesta maksettava korvaus</p>		
<p>säästö = raha, joka on tallessa.</p> <p><i>Laitan joka kuukausi 10 € rahaa säästöön.</i></p>	<p>säästää = käyttää rahaa niin, että sitä jää yli, panna talteen, ei tuhlat</p> 	
<p>viivästys = myöhästyminen</p>	<p>viivästyä = olla myöhässä, myöhästyä</p>	
<p>eräpäivä Laskun eräpäivä on se päivä, jolloin maksu on viimeistään maksettava.</p>	<p>erääntyä = saavuttaa viimeinen maksupäivä</p>	
<p>ennakonpidätys = arvioitu vero, joka maksetaan palkasta.</p>	<p>pidättää = ottaa raha johonkin käyttöön</p> <p><i>Työnantaja pidättää palkasta veron.</i></p>	

<p>vakuutus</p> <p>Kun hankit asunnon, sinun täytyy hankkia myös kotivakuutus. Jos kodissasi sattuu vahinko, kotivakuutus korvaa osan kuluista. Vahinko voi olla esimerkiksi vesivahinko.</p>		<p>vakuuttaa = ottaa vakuutus</p> <p><i>Suomessa on pakko vakuuttaa kaikki autot ja moottoripyörät. Polkupyörälle ei tarvitse ostaa vakuutusta.</i></p>	
<p>tulo = raha, jonka saat esimerkiksi työstä. Kaikki rahat, jotka tulevat sinulle kuukauden tai vuoden aikana.</p> <p>vuositulo = vuoden tulot yhteensä</p>		<p>tulla = saapua</p> <p><i>Sinulle tuli kirje. Ylitöistä tuli paljon rahaa.</i></p>	
<p>ansio, ansiotulo</p> <p>Ansiotuloja ovat esimerkiksi palkka, eläke, opintotuki, työttömyyspäiväraha</p>		<p>ansaita = saada palkkaa</p>	
<p>vero = pakollinen maksu yhteiskunnalle.</p> <p><i>Veroja ovat esimerkiksi arvonlisävero, tulovero ja pääomatulovero.</i></p> <p>tulovero = vero, jonka maksat palkasta</p>		<p>verottaa = kerätä veroa</p> 	

Talousmatematiikka

Laina- ja korkolaskuja

Korko tarkoittaa

- korvausta, jonka maksat pankille, jos sinä lainaat rahaa.
- viivästyskorkoa, jos maksat laskun myöhässä.
- voittoa, jonka sijoitukset tuottavat.

Korkoprosentti kertoo, kuinka paljon korkoa kertyy **vuodessa**.

Vuodessa on 365 korkopäivää.

Esim. 1 Otat asuntolainan, jonka korko on 2,5 %.

Kuinka paljon maksat korkoa 120 000 € lainasta a) vuodessa b) kuukaudessa?

- a) $0,025 \cdot 120\,000 \text{ €} = 3000 \text{ €}$. Vuodessa pitää maksaa korkoa 3000 €.
- b) Kuukaudessa pitää maksaa korkoa $3000 \text{ €} / 12 = 250 \text{ €}$.

Esim. 2 Saara unohtaa maksaa 520 € laskun ajoissa.

Eräpäivä oli 1.7., mutta Saara maksaa laskun vasta 30.7. Viivästyskorko on 7 %.

Kuinka paljon Saaran täytyy maksaa viivästyskorkoa?

- Korkopäivät: $30 - 1 = 29$ päivää.
- Korko vuodessa: $0,07 \cdot 520 \text{ €} = 36,40 \text{ €}$
- Korko 29 päivässä: $\frac{29}{365} \cdot 36,40 \text{ €} = 2,89 \text{ €}$

Kirjoita rahalaskuissa tulos aina kahden desimaalin tarkkuudella eli senttien tarkkuudella.

Tehtävä 7.1 Kuinka paljon lainan korot ovat vuodessa, kun asuntolainaa on 80 000 € ja korkoprosentti on

- a) 1,4 %
- b) 2,9 %

c) 5,6 %?

Tehtävä 7.2 Korkoprosentti on 4,2 %. Kuinka paljon 5000 € lainan korot ovat

- a) vuodessa
- b) puolella vuodessa
- c) kuukaudessa
- d) päivässä?

Tehtävä 7.3 Säästötillillä on rahaa 1130,00 euroa.

Kuinka paljon rahaa on vuoden kuluttua, kun korko on 1,55 %?

***Tehtävä 7.4** Kuinka suuresta lainasta täytyy maksaa vuodessa korkoa 4520 €, kun korkoprosentti on 1,30 %? Kirjoita yhtälö ja ratkaise se:

$$x \cdot 0,013 = 4520$$

***Tehtävä 7.5** Kuinka suuresta lainasta täytyy maksaa vuodessa korkoa 290 €, kun korkoprosentti on 5,30 %? Kirjoita yhtälö ja ratkaise se.

Tulovero

Kun olet töissä, työnantaja maksaa sinulle palkkaa. Palkasta vähennetään pois

- ennakonpidätys
- työeläkevakuutusmaksu (TyEL)
- työttömyysvakuutusmaksu

Palkka, josta ei ole vielä vähennetty näitä, on nimeltään **bruttopalkka**.
Se raha, jonka saat tilillesi, on **nettopalkka**.



Esim. Viktorian bruttopalkka on 1890 €. Mikä on hänen nettopalkkansa, kun

- ennakonpidätysprosentti on 19 %,
- työeläkemaksu 7,15 % ja
- työttömyysvakuutusmaksu on 0,52 %?

ennakonpidätys 19 %	$0,19 \cdot 1890 \text{ €} = 359,1 \text{ €}$
työeläkemaksu 7,15 %	$0,0715 \cdot 1890 \text{ €} = 135,14 \text{ €}$
työttömyysvakuutusmaksu 0,52 %	$0,0052 \cdot 1890 \text{ €} = 9,83 \text{ €}$
Yhteensä	504,07 €

Viktorian nettopalkka on $1890 \text{ €} - 504,07 \text{ €} = 1385,93 \text{ €}$

Tehtävä 7.6 Kuinka monta euroa on työeläkemaksu 8,65 %, kun palkka on 3522 €?

Tehtävä 7.7 Laske taulukon avulla nettopalkka, kun bruttopalkka on 2300,00 €.

ennakonpidätys 21 %	
työeläkemaksu 7,15 %	
työttömyysvakuutusmaksu 0,52 %	
Yhteensä	

Tehtävä 7.8 Bruttopalkka on 2500 €. Siitä maksetaan veroa 850 euroa. Mikä on veroprosentti? (Kuinka monta prosenttia 850 € on 2500 eurosta?)

Tehtävä 7.9 Palkka on aluksi 2100 €. Saat 4,0 % palkankorotuksen.

- a) Kuinka paljon palkka nousee?
- b) Mikä on uusi palkka?

Tehtävä 7.10 Kuukausipalkka on 2 665,35 €. Palkka nousee 2,10 %.

- a) Kuinka paljon palkka nousee?
- b) Mikä on uusi palkka?

Tehtävä 7.11 Palkka on aluksi 1850 €. Se nousee 120 €. Kuinka monta prosenttia palkka nousee?

Verovähennys

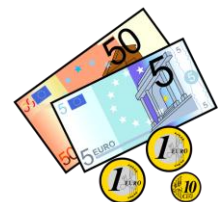
Voit tehdä vähennyksiä,
jotka pienentävät maksettavaa veroa.

Saat vähentää verotuksessa esimerkiksi
asunnon ja työpaikan väliset matkakulut.

Verotettava ansiotulo tarkoittaa palkkatuloja, joista pitää maksaa veroa.

Verotettava ansiotulo = bruttopalkka – verovähennykset

Verojen määrä lasketaan verotettavista ansiotuloista.



Tehtävä 7.12 Veronikan bruttopalkka vuodessa on 27 680 €. Hän saa vähentää verotuksessa työmatkakuluja 690 €. Kuinka paljon on Veronikan verotettava ansiotulo?



Kunnallisvero

Veroprosentti vaihtelee eri kunnissa. Savonlinnan veroprosentti vuonna 2023 on 9,36 %.

Esim. Jaakon verotettava ansiotulo kunnallisverotuksessa oli 34 000 €. Kuinka paljon hän maksaa vuodessa kunnallisveroa, jos kunnallisvero on 8,36 %?

$$0,0836 \cdot 34\,000 \text{ €} = 2842,4 \text{ €}$$

Vastaus: Jaakko maksaa kunnallisveroa 2842,40 €.



Tehtävä 7.13 Martin verotettava ansiotulo on 42 000 euroa vuodessa. Kuinka paljon hän maksaa kunnallisveroa, jos kunnallisvero on

a) 7,61 %

b) 9,42 %?

Tehtävä 7.14

Täydennä taulukko.

bruttotulot	56 500 €
verovähennykset	1 292 €
verotettava ansiotulo	
kunnallisveroprosentti	9,36 %
kunnallisvero	

***Valtion tulovero** lasketaan vuosituloista.

Valtion tuloveroasteikko (2021):

Verotettava ansiotulo	Vero alarajan kohdalla	Vero alarajan ylittävästä tulon osasta
18 600 € – 27 900 €	8,00 €	6,00 %
27 900 € – 45 900 €	566,00 €	17,25 %
45 900 € – 80 500 €	3 671,00 €	21,25 %
80 500 € –	11 023,50 €	31,25 %

Esim. Emilian verotettava ansiotulo valtion verotuksessa oli 35 700 €. Kuinka paljon hän maksaa veroa valtiolle?

1. Katso yllä olevaa taulukkoa. Mille riville 35 700 kuuluu?
2. Laske, kuinka paljon tulot ylittävät alarajan 27 900 €.

$$35\,700\text{ €} - 27\,900\text{ €} = 7\,800\text{ €}$$

3. Tästä osasta maksetaan taulukon mukaan veroa 17,25 % eli

$$0,1725 \cdot 7800\text{ €} = 1\,345,50\text{ €}$$

4. Lisäksi maksetaan taulukon mukaan veroa 566 € eli lopullinen veron määrä on

$$1\,345,50\text{ €} + 566\text{ €} = 1911,50\text{ €}$$

***Tehtävä 7.15** Laske valtion veron määrä, kun verotettava ansiotulo valtion verotuksessa on

a) 72 400 €

b) 27 700 €

Arvonlisävero

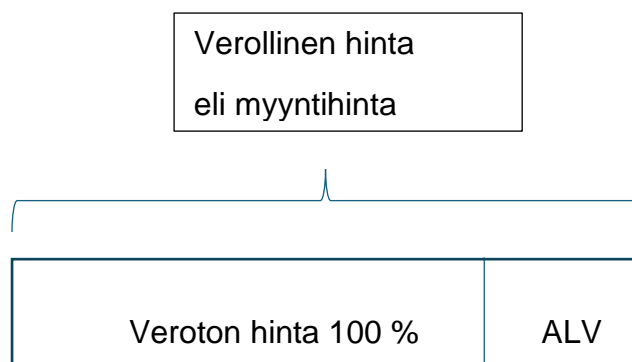
Kaikkien tuotteiden ja palveluiden hintoihin sisältyy arvonlisävero (ALV).
Se on osa tuotteen tai palvelun myyntihintaa.
Myydyistä tuotteista tai palveluista saadut verot yritys maksaa valtiolle.

Arvonlisäverokannat 2024

25,5 %	yleinen arvonlisäverokanta, useimmat tavarat ja palvelut
14 %	<ul style="list-style-type: none">• elintarvikkeet• ravintolapalvelut
10 %	<ul style="list-style-type: none">• kirjat• lääkkeet• henkilökuljetukset (juna, bussi, taksi ja niin edelleen)• pääsyliput (konsertit, elokuvat ja niin edelleen)• majoituspalvelut
0 %	<ul style="list-style-type: none">• terveydenhoitopalvelut• koulutus

- veroton = ilman veroa
- verollinen = sisältää veron

VEROTON HINTA + ARVONLISÄVERO = VEROLLINEN HINTA



Esim.1 Kirjan veroton hinta on 25,40 €. Arvonlisävero on 10 %. Laske verollinen hinta.

Veroton hinta 25,40 € 100 %	ALV 10 %
--------------------------------	-------------

Arvonlisävero on 10 % verottomasta hinnasta:

$$25,40 \cdot 0,1 = 2,54 \text{ €} \quad \text{TAI} \quad 25,40 / 100 \cdot 10 = 2,54 \text{ €}$$

Verollinen hinta on $25,40 + 2,54 = 27,94 \text{ €}$

***Esim. 2** Takin verollinen hinta (myyntihinta) on 129,99 €. Mikä on veroton hinta?

Verollinen hinta 125,5 % 129,99 €	
Veroton hinta 100 %	ALV 25,5 %

Kertaa perusarvon laskeminen. Mistä luvusta 129,99 € on 125,5 %? Mikä on 100 %?

$$129,99 / 125,5 \cdot 100 = 103,5776892 \text{ €}$$

Vastaus: Takin veroton hinta on 103,58 €.

Tehtävä 7.16 Täydennä taulukot:

1. Farkkujen veroton hinta on 46,70 €.

Arvonlisäveron määrä on $46,70 / 100 \cdot 25,5 = 11,91 \text{ €}$.

	%	€
veroton hinta	100	
vero	25,5	
verollinen hinta = myyntihinta		

2. Leivän veroton hinta on 1,50 €. ALV 14 %.

	%	€
veroton hinta	100	
vero		
verollinen hinta		

3. Ruohonleikkurin veroton hinta on 289,00 €. ALV 25,5 %.

	%	€
veroton hinta		
vero		
verollinen hinta		

4. Kauppa myy tietokoneita hintaan 477,40 € (= verollinen hinta). Tämä hinta sisältää arvonlisäveroa 97,00 €. ALV 25,5 %. Täydennä taulukko:

	%	€
veroton hinta	100	
vero	25,5	
verollinen hinta = myyntihinta		

5. Ravintolalasku on asiakkaalle 35,60 € (= verollinen hinta). Tämä hinta sisältää arvonlisäveroa 14 %. Veron määrä on $35,60 / 114 \cdot 14 = 4,37$ €.

	%	€
veroton hinta	100	
vero	14	
verollinen hinta = myyntihinta		

6. Junalippu maksaa 24,00 €. Tämä hinta sisältää arvonlisäveroa 10 %.
Veroton hinta on $24 / 110 \cdot 100 = 21,82$ €.

	%	€
veroton hinta	100	
vero		
verollinen hinta = myyntihinta		

- ***Tehtävä 7.17** Juhlakenkien myyntihinta eli verollinen hinta on 72,00 €, ALV 25,5 %.
Täydennä taulukko:

	%	€
veroton hinta	100	
vero	25,5	
verollinen hinta = myyntihinta		

- ***Tehtävä 7.18** Oppikirjan verollinen hinta on 22,00 €, ALV 10 %. Täydennä taulukko:

	%	€
veroton hinta	100	
vero		
verollinen hinta = myyntihinta		

- ***Tehtävä 7.19** Ruokaostokset sisältävät veroa 24,70 €, ALV 14 %. Täydennä taulukko:

	%	€
veroton hinta	100	
vero		
verollinen hinta = myyntihinta		

Kertaus

1. Kirjoita prosentteina

a. $0,5 =$

b. $\frac{1}{4} =$

2. Kuinka paljon on

a. 75% luvusta 200?

b. 12% luvusta 60?

3. Kuinka monta prosenttia on

a. 4 luvusta 40?

b. 80 luvusta 87?

4. Julian ennakkoveroprosentti on 19% . Kuinka paljon hän maksaa ennakkoveroja, kun palkka on 2400 €?

5. Ratkaise yhtälöt:

a) $\frac{x}{20} = \frac{15}{100}$

b) $42 = 5 \cdot x$

6. Ratkaise verrannon avulla. Talon seinän pituus piirustuksessa on 18 cm. Kuinka pitkä seinä on luonnossa? Piirustuksen mittakaava on 1:50.

Lähdeluettelo

Härkönen, T. & Toivola, M., Avoin matematiikka. CC BY 3.0

Lounela, J., 2022, Matematiikka ja matematiikan soveltaminen -kurssi, Ammattiopisto Samiedu.

Matikkakertauksen sanasto. Polkuja-hanke, OPH. CC BY-NC-SA 4.0 [urn:nbn:fi:oerfi-202209_00025320_1](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:fi:oerfi-202209_00025320_1)

Rajaniemi, M., Matematiikka ja matematiikan soveltaminen 4 osp, pakollinen. Keski-Pohjanmaan ammattiopisto CC BY 4.0 [urn:nbn:fi:oerfi-202301_00026068_2](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:fi:oerfi-202301_00026068_2)

Videot: Pia Kyllönen

Kuvat: Papunetin kuvapankki, papunet.net, Elina Vanninen, Sergio Palao / ARASAAC, kuvako, Annakaisa Ojanen, Aino Ojala, Paxtoncrafts Charitable Trust

Tämä materiaali on tuotettu VIERKO-hankkeessa vuonna 2024.

VIERKO on toteutettu Opetus- ja kulttuuriministeriön vuonna 2023 myöntämällä ammatillisen koulutuksen strategiarahoituksella. VIERKO on kuudenkymmenen- kahden (62) koulutuksen järjestäjän yhteisponnistus. Työtä on koordinoanut Keski-Uudenmaan koulutus- kuntayhtymä Keuda.

Hankkeessa on kehitetty vieraskielisen koulutuksen laatua ja kotimaisten kielten opetuksen tarjontaa ammatillisessa koulutuksessa.

Lisätietoa:

<https://www.keuda.fi/keuda/hankkeet/vierko/>



<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Oppimateriaalit:



[CC BY-SA 4.0 Deed](#) | [Nimeä-JaaSamoin 4.0 Kansainvälinen](#) | [Creative Commons](#)