

# Matematiken i musiken

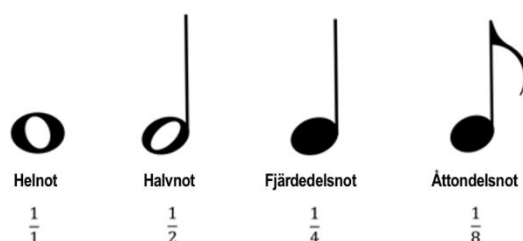
Text: Anssi Korhonen | Översättning: Niklas Ollila, Åbo Akademi

*Finns det en koppling mellan matematik och musik? Matematiken uppfattas ofta som ett rent naturvetenskapligt ämne, medan musiken anses vara en av de mest uttrycksfulla konstformerna. Dessa två har emellertid en starkt sammanflätad och lång historia. Med matematiken kan man beskriva många fenomen inom musiken, såsom strängvibrationer på bestämda våglängder. Dessutom motsvarar olika noters tidsvärden vid närmare eftertanke faktiskt bråktalet och taktarter är som addition med bråk. I det här avsnittet lär vi oss om den matematiska teorin i musiken och tar del av uppgiftsidéer för elever och studerande i olika åldrar.*

## Noter och deras tidsvärden

***I det här avsnittet är det fokus på de vanligaste noternas tidsvärden samt deras symboler och koppling till bråktalet. Innehållet lämpar sig speciellt för den grundläggande utbildningen.***

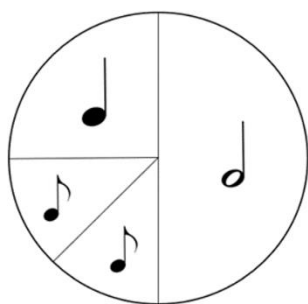
Det går rätt enkelt att samtidigt, integrerat, lära sig om både noter och bråktalet. Om bråktalet och olika räkneoperationer med dem redan är bekanta kan eleverna istället repetera bråktalet medan lär sig notbegrepp. De vanligaste noterna som används i musiken är helnot, halvnot, fjärdedelsnot och åttondelsnot. Symbolerna för dessa visas också på bild 1 nedan. Efter åttondelsnoten, när bråktalet som motsvarar noten halveras, lägger man bara till nya så kallade flaggor på notskaftet. (Wright, 2009, 18–19)



**Bild 1:** Symbolerna för och namnen på de vanligaste noterna och motsvarande bråktalet.



När man adderar noter gör man på samma sätt som när man adderar bråktalet. Ett bra sätt att åskådliggöra detta är att visa till exempel en bråkkaka som på bild 2, där hela kakan motsvarar en helnot, halva kakan en halvnot och så vidare. Kakmodellen kan också användas i ett slags pusseluppgift. Andra fungerande uppgifter, som eleverna kan göra för att lära sig bråktalet och noter, är så kallade *para ihop*-uppgifter, där eleverna får se notsymbolerna, deras namn och motsvarande bråktalet i uppgiftsbeskrivningen (som på bild 1) men i blandad ordningsföljd. Då har eleverna i uppgift att para ihop symbolerna med rätt namn och rätt bråktalet. (Marjanen, 2013, 24–28)



**Bild 2:** Kakmodellen med tidsvärden på noter och motsvarande delar av hela bråkkakan.

Med hjälp av notsymboler är det möjligt att enkelt bygga och åskådliggöra även andra matematiska beräkningar, som samtidigt lär eleverna om noter och stärker deras kunskaper om räkneoperationer med bråktalet (se bild 3) (Marjanen, 2013, 24–28). Du kan själv också försöka tänka ut ännu flera sätt att åskådliggöra olika noters tidsvärden med hjälp av bråktalet.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{O} & + & \text{•} & + & \text{•} & = & \text{O} \\
 \frac{1}{2} & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{1}
 \end{array}$$

**Bild 3:** Exempelberäkning med hjälp av noter.

## Taktarter och rytm

*Det här avsnittet innehåller teori om olika taktarter och deras koppling till matematik i form av räkneuppgifter, bråktal och bland annat delbarhet. Innehållet i avsnittet riktar sig speciellt till småbarnspedagogiken och den grundläggande utbildningen.*

När det placeras noter i ett notsystem är det taktarten som bestämmer hur många och vilken typ av noter som får plats i en takt. Taktarten anges av taktbeteckningen i början av musikstycket, som på bild 4 (Kontiolahti). De vanligaste taktarterna är 2/4, 3/4, 4/4 och 6/8. I en taktbeteckning anger täljaren hur många noter som får plats i en takt och nämnaren vilken typ av noter det är fråga om. I till exempel taktarten 2/4 är det två fjärdedelsnoter som får plats i en takt. Takten kan fyllas med andra noter också, bara längden på takten inte ändras. (Shah, 2010, 17–18.)



**Bild 4:** Taktarten 3/4 och två exempeltakter i enlighet med den.

Taktarter kan åskådliggöras med hjälp av konkreta kartongbitar som till sin bredd motsvarar olika noters tidvärden: en helnot är bredast, en halvnot hälften så bred och så vidare. Därefter kan man rita ett notsystem med taktarten 2/4 på tavlan så att exakt en kartongbit som motsvarar en halvnot får plats i en takt. Då kan man alltså inte placera helnoter i notsystemet med den här taktarten, men fyra åttondelsnoter får precis plats i en takt.

För att hjälpa eleverna förstå både taktarter och takter kan man använda sig av variationer av olika räkneuppgifter. Eleverna kan ta reda på taktarter till exempel så här: en takt har fyllts färdigt med olika typer av noter, och eleverna har i uppgift att addera noternas tidvärden (Kontiolahti). Även i den här uppgiften kan man använda ovannämnda kartongbitar som hjälpmedel. Bild 5 nedan visar ett exempel på en sådan uppgift.



**Bild 5:** Exempel på en uppgift där eleverna tar reda på taktarten.



När man undervisar om taktarter får man gärna också ta med rytmen till exempel genom att klappa den. Speciellt för de yngre barnen är det viktigt att ta med kroppen och att röra sig i takt med rytmen, så att de lättare får en uppfattning om rytm, dvs. taktart (musiikkimatka.fi, 2021).

Det enklaste sättet att börja med rytmövningar är att i början endast använda fjärdedels- och åttondelsnoter. Av dessa två är det fjärdedelsnoten som ger grundpulsen. I rytmen ska man vid fjärdedelsnoter säga "TA" och vid åttondelsnoter "TI". (Kontiolahti) Då blir rytmen i en takt med två fjärdedelsnoter, två åttondelsnoter och till sist ännu en fjärdedelsnot TA-TA-TI-TI-TA. Vilken taktart är det då fråga om?

När man övar rytmer kan man med klassen eller gruppen komma överens om att man vid fjärdedelsnoter klappar med händerna, att man vid åttondelsnoter slår med handen mot bröstet och vid halvnoter mot ena låret. Då är kroppen mångsidigare med i rytmräkningarna. (Fagerlund, 2020, 25) När man räknar rytmen högt får man dessutom effektivare grepp om rytmen i fråga, och samtidigt övar de yngsta barnen också siffror. Med hjälp av olika taktarter får man variation i räkneövningarna och förståelsen av temat fördjupas.

Rytmer, taktarter och rytmisinne kan man öva också med hjälp av härmövningar. Då klappar läraren först ensam en viss rytm, som eleverna upprepar, alltså härmar. När eleverna fått grepp om rytmerna under lärarens handledning kan de göra egna härmövningar i par. Den ena eleven i varje par skapar en rytm, som den andra upprepar. På så sätt får eleverna möjlighet att själva skapa egna rytmer. (musiikkimatka.fi, 2021) Möjligheten att skapa egna kompositioner och rytmer utvecklar dessutom, enligt forskningen, barnens problemlösningsförmåga. Efter att eleverna fått grepp om härmövningarna kan rytmerna kombineras med sångtexter och ramsor, som hjälper elevernas verbala utveckling och ger dem en uppfattning om stavelser som rytmiska enheter (Rajala, 2016). Utöver den egna kroppen kan man också använda sig av rytminstrument, som eleverna själva fått bygga, såsom rytmpinnar och äggskallror, vilket göra lärandet ännu mer tilltalande för eleverna (musiikkimatka.fi, 2021).

När eleverna ska tillägna sig begrepp som talföljder, minsta gemensamma nämnare och delbarhet kan man också använda sig av rytmövningar och alltså den egna kroppen. Ett bra exempel på en sådan övning presenterades av Saara Lehto på *Matematiikkaa tanssien* ('matematik genom dans')-webbinariet, som LUMA-centret i Österbotten ordnade 2021. I övningen delas klassen in i två grupper. Eleverna i grupp A ska klappa taktarten 34 så att de vid första slaget klappar med händerna mot låren, vid andra mot bröstkorgen och vid tredje händerna mot varandra. Eleverna i grupp B ska i sin tur klappa taktarten n 24 så att de vid första slaget klappar mot låren och vid andra händerna mot varandra. Då märker man att båda grupperna klappar samtidigt med händerna efter grupp B:s tredje takt och efter grupp A:s andra takt. Således kan man alltså lista ut



att den minsta gemensamma multipeln till talen två och tre är sex. Tillsammans med barnen kan man fundera över varför rytmerna sammanfaller just där och vad talen två och tre då har gemensamt. Övningen kan också göras i par eller i små grupper speciellt om undervisningsgruppen är stor. (LUMA-centret i Österbotten, 2021)

Försök gärna tänka ut flera olika uppgiftsmallar och sätt att åskådliggöra taktarter och rytmer.

---

## Strängvibrationer

*Temat för det här avsnittet är frekvenser, på ett mer teoretiskt plan, och också bland annat hur stränginstrument egentligen fungerar. Efter teoridelen följer några åskådliggörande uppgifter om hur man kan undersöka frekvenser. Teoridelen lämpar sig i första hand för gymnasiet, men den kan ge idéer för undervisningen också i den grundläggande utbildningen. I uppgifterna ingår också tips för småbarnspedagogiken och nybörjarundervisningen.*

Pythagoras lade på sin tid märke till att tonen från en sträng höjdes med en oktav om längden på strängen halverades. Den här upptäckten gav upphov till teorin om att en strängs frekvens är omvänt proportionell mot längden på strängen, dvs.  $f \propto 1/l$ . Nu kan förhållandet mellan frekvensen  $f$  och längden på strängen  $l$  uttryckas i form av ekvationen  $f = k/l$ , där  $k$  är en positiv konstant. Det här fenomenet är lättast att observera hos stränginstrument, som fiol, när violinisten trycker ner strängen mot greppbrädan och skapar då olika frekvenser genom att ändra på längden på strängen. (Wright, 2009, 50)

Vi kan formulera en formel för att kunna beräkna var på strängen den behöver tryckas ner mot greppbrädan, för att vi ska till exempel skapa en stor ters. Om längden på strängen då är  $l$ , ändras längden till  $ql$ , när vi trycker ner strängen och gör den kortare. Då är  $q$  en positiv koefficient. När vi då beräknar förhållandet mellan frekvenserna får vi:  $r = f_2/f_1 = k/ql / k/l = l/ql = 1/q$ , och då gäller  $q = 1/r = r - 1$ . (Wright, 2009, 50–51) Av tidigare resultat vet vi att förhållandet mellan en stor ters och den ursprungliga längden är  $r = 24/12 = 2/3$ , och då gäller  $q = (2/3) - 1 \approx 0,8$ . Om vi då vill spela en stor ters behöver fingret placeras på greppbrädan så att längden blir 45 av den ursprungliga längden.

Det här kan enkelt demonstreras för eleverna, och då skapas konkretion i undervisningen och räkneuppgifterna. Man kan gå till väga till exempel så att man mäter längden på till exempel E-



strängen på en gitarr och beräknar sedan önskad ny längd på strängen. På bild 6 nedan visas att längden på den tjocka E-strängen på gitarren är 66 centimeter. Om vi då vill spela en stor ters i förhållande till en fritt vibrerande E-sträng beräknar vi  $66\text{cm} \cdot 45 = 52,8\text{cm}$ . På bild 6 ser vi att 52,8 centimeter på greppbrädan är vid fjärde greppbandet. När vi då alltså trycker ner E-strängen mellan tredje och fjärde greppbandet vibrerar en 52,8 cm lång del av E-strängen och då kan vi spela ett G#-ackord. Med eleverna kan man jämföra tonerna genom att först lyssna på en fritt vibrerande E-sträng och sedan på den förkortade strängen, dvs. tonen G#. Tonhöjderna kan också kontrolleras genom att man spelar samma toner till exempel på ett piano eller något annat instrument.



**Bild 6.** Strängarna på en gitarr och längden på E-strängen.

Med de yngsta barnen kan man undersöka frekvenser och förhållandet mellan olika tonhöjder till exempel genom att tillsammans göra egna instrument med hjälp av dricksglas, vattenflaskor och vatten. Genom att hälla upp olika mängder vatten i likadana glas och genom att försiktigt slå en sked mot dem skapas olika frekvenser. Ju mer vatten det finns i glaset, desto lägre frekvens skapas, eftersom vattnet då vibrerar långsammare. Om man vill kan man också tillsätta lite färg i glaset, vilket gör det lättare för en del elever att uppfatta de olika vattenmängderna i glaset. Dessutom kan man testa att slå mot glaset med föremål av olika material, såsom metallskedar, plastskedar eller en träpinne. Barnen kan på det här sättet skapa egen musik och lära sig samtidigt grundläggande kunskaper om frekvenser, mätning och olika volymmått på ett skojigt sätt. (How to Make Science for Kids, 2021) En Youtube-video på kanalen Ellington NHS visar ett bra exempel på ett instrument som gjorts utav dricksglas. Titta på videon via den här länken: [How to make music with water glasses! - Ayushman Choudhury](#).

Ett annat motsvarande sätt att lätt skapa musik och samtidigt undersöka skillnader mellan olika tonfrekvenser är att ta fram flaskor eller provrör och blåsa i dem (OPIKE, 2012, 16). Då är det luftpelaren som uppstår i flaskan som skapar tonen. En tom flaska skapar en låg ton, medan tonfrekvensen kan höjas genom att tillsätta mer vatten i flaskan. (Science World, 2021) Eleverna kan få i uppgift att skapa flaskainstrument i grupper så, att det hålls vatten i ett antal flaskor i exakta proportioner: till exempel kan det hållas vatten i fem flaskor så att mängden vatten i dem följer proportionerna 15,25,35,45 och 55. På så sätt övar sig eleverna också i att mäta och räkna när de



skapar sina instrument. Samma fenomen kan illustreras också med en linjal som smattrar mot pulpeten: ju längre del av linjalen som får svänga fram och tillbaka utanför bordsytan och ju kortare del av linjalen som trycks mot bordsytan, desto lägre frekvens uppstår (OPIKE, 2012, 13). Äldre eller musikaliskt intresserade elever kan få göra övningarna självständigare så att de ombes antingen självständigt eller i små grupper skapa någon känd melodi, såsom *Blinka lilla stjärna*.

## Extra läsning: Artiklar och avhandlingar

Precis som rubriken antyder hittar du nedan nyttiga och intressanta artiklar och avhandlingar kring matematik och musik.

Peppiina Kaperis kandidatavhandling: "[Musiikin ja matematiikan integrointi lapsen ongelmratkaisutaitojen kehittämisessä kouluympäristössä](#)" (på finska).

Peppiina Kaperis pro gradu-avhandling: "[Enemmän kuin aaltoliikettä – musiikin ja matematiikan teoreettinen integrointimalli kouluympäristöön](#)" (på finska).

Samuli Siltanens inlägg på hans vetenskapsblogg: "[Ei musiikkia ilman matematiikkaa](#)" (på finska).

Curt Glendale Willis studie: "[Impact of Music Education on Mathematics Achievement Scores Among Middle School Students](#)".

Meri Kiemas lärdomsprov: "[Matematiikka musiikin oppimisen ja ymmärtämisen välineenä](#)" (på finska).

Annika Kallilas kandidatavhandling: "[Musiikin ja matematiikan integrointi alakoulussa](#)" (på finska).

Emma Ilmonens kandidatavhandling: "[Musiikin ja matematiikan integrointi lukiotason opetuksessa](#)" (på finska).



## Källor:

Marjanen, J. (2013): *"Ope, miks me lauletaan, vaikka meillä on matikan tunti?"*, *Musiikin ja matematiikan oppisisältöjen integrointi*. Pro gradu-avhandling, Jyväskylä universitet. Musiikkikasvatus.

Fagerlund, J. (2020): *Jyväskylän yliopisto. Musiikkikasvatus*.

Shah, S. (2010): *An Exploration of the Relationship between Mathematics and Music*. The University of Manchester. Manchester Institute for Mathematical Sciences. School of Mathematics.

Summamutikan materiaalipankki. (Hämtad: 4.12.2020). *Jaollisuushorisontit* .

Musiikkimatka. *Musiikkia kaikille ja kaikkialle!* (2021): Tillgänglig på adressen: <https://musiikkimatka.fi/>.

Rajala, J. (2016): *Musiikkikasvatus varhaiskasvatuksessa*. (Via länken öppnas presentation på prezi.com.)

How to Make Science Projects for Kids (2021): *How to Make a Water Xylophone* .

Oppimateriaalikeskus OPIKE (2012): *Päivänselvää akustiikkaa*.

Science World (2021): *Musical Bottles*.

Wright, D. (2009): *Mathematics and Music*. Washington University in St. Louis. Department of Mathematics.

