

Matematikens mångahanda världar

Text: Saara Lehto

När ett barn eller en ungdom ska lära sig ny matematik står hen inför samma situation som en matematikforskare: man måste ta reda på något alldeles nytt. Hur kommer ny matematik då till? Matematiker samarbetar mycket när de löser problem, hittar på nya teorem och bevisar påståenden. När matematiker träffas för att diskutera sina pågående undersökningar hamnar de ofta framför skrivtavlan. På tavlan ritas symboler och figurer som avbildar tankar, och allas händer gestikulerar vilt. I diskussionen hör man bekanta matematiska termer men också smeknamn på nya idéer och kreativa beskrivningar av dessa. Nu undersöks nya begrepp och fenomen som ännu söker sina former eller som matematikerna ännu inte riktigt förstår.

Ofta tänker man att det matematiska språket är abstrakt. Det är det också, men enbart abstrakta märken på ett papper är inte ännu matematik. I matematik behöver man också en förståelse av vad de abstrakta märkena betyder. När matematiker ännu undersöker en ny idé har det ännu inte utvecklats några formella märken och inga regler har bevisats – då förs diskussionen i idéernas, fantasins och intuitionens värld. Alla som lär sig matematik kikar in i matematikens värld på samma sätt.



David Tall, som är professor i matematiskt tänkande, delar matematiken i tre världar. [1,2] Den **visuell-spatiala** världen innehåller allt konkret och kroppsligt, sådant som vi kan röra, flytta på eller se: vi kan till exempel iaktta addition genom att flytta på kottar eller lägga räknestickor efter varandra. I den **proceptuell-symboliska** världen behandlar vi symboler och ändrar dem enligt givna regler: vi kan lära oss additionsregler och räkna också stora tal utan problem. Den **formella** världen består å andra sidan av abstrakta matematiska teorem: i den här



världen kan vi konstatera att additionens resultat inte beror på räkneordningen eller till exempel bestämma vad vi menar med addition i någon abstrakt algebra.

David Talls idé är att alla dessa tre till synes olika världar är viktiga i lärandet och förståelsen av matematik. Om man bara koncentrerar sig på en av världarna fungerar det inte. Men när alla tre världar istället möts och länkas till varandra, uppstår en djupare förståelse.



Vad betyder detta då i praktiken? Låt oss fundera på vad vi kan lära oss om en triangel med hjälp av Talls tre världar:

1. I den visuellt-spatiala världen kan vi rita olika trianglar och mäta deras vinklar, sidor och höjder och praktiskt konstatera deras likheter. Vi kan bekanta oss med spets- och trubbvinkligna trianglar genom att rita dem, jämföra olika bilder eller till och med forma dem med våra egna kroppar. Vi kan rita upp triangelns sidor mot en kvadrat för att gestalta Pythagoras sats.
2. I den proceptuell-symboliska världen kan vi lära oss att beräkna sidornas längd och vinklarnas storlek med trigonometriska funktioner. Vi kan lära oss regeln om de tre vinklarnas summa och Pythagoras sats om sidornas längd, och med hjälp av dessa lösa olika problem genom att manipulera satser och ekvationer.
3. I den formella världen förstår vi triangeln som ett abstrakt begrepp som inte behöver ha någon fysisk manifestation. Vi kan bevisa påståenden med trigonometriska funktioner. Vi kan definiera triangeln som ett plangeometriskt objekt som kopplas ihop av tre punkter eller se på den som en månghörning med tre hörn.

Elevers eller studerandens lärandemål när det gäller förståelsen av en triangel beror förstås på nivån. Man lär sig förstå triangeln bättre från årskurs till årskurs. Då vi på alla nivåer bär med oss alla Talls tre världar så fördjupas förståelsen av begreppet i sakta mak.



Vi rör oss mycket i matematikens första visuellt-spatiala värld. Den är ett viktigt hjälpmedel på alla nivåer då man ska bekanta sig med något nytt och lösa problem. Det är viktigt att ta med den också i begreppsformuleringar, såväl för professionella matematiker som för dem som lär sig ny matematik.

I programmets andra [material](#) presenteras det matematiska tänkandets uttryck med hjälp av modellen för fyra språk. Dessa fyra språk är symbolspråk, naturligt språk (talspråk), bildspråk och taktilt språk. Också i den här mallen är taktilt språk en viktig faktor för att uttrycka matematiskt tänkande. Vår kropp är ett uttrycksfullt hjälpmedel som vi alltid har med oss. Med hjälp av den kan vi få bilder att röra på sig och ord att flyga.



Bild: Medlemmar i LUMATIKA+ -teamet formar trianglar med sina kroppar i matematikens manifesta värld. Samtidigt kanske de inser något om trianglarnas formella väsen. Fotograf Aleksi Takala

Källor och vidare läsning:

[1] Tall, D. (2004): *Thinking through three worlds of mathematics*, Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen, Norge, 4, 281–288.

[2] Hannula, J. (2019): *Kehittämistutkimus: Matematiikan aineenopettajaopiskelijoiden matemaattisen ja pedagogisen sisältötiedon edistäminen ongelmalähtöisessä oppimisessa*, Helsingfors: Helsingfors universitet, doktorsavhandling. (s. 52–54)

