

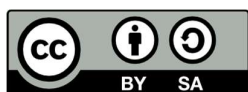
# SSS

## MATEMATISKA FÄRDIGHETER

# Innehåll

<b>1 Inledning</b> .....	<b>1</b>
<b>2 Utgångspunkter för SSS-matematiken</b> .....	<b>4</b>
2.1 Grunderna för innehåll i SSS-matematiken .....	4
2.2 Talbegrepp och utmaningar med matematiska beteckningar.....	6
2.3 Utmaningar med begreppet förhållande, proportionalitet samt problemlösning.....	7
2.4 Praktiska metoder för undervisning i SSS-matematik.....	10
2.5 Hur ser en SSS-lektion i matematiska färdigheter ut? – ett exempel .....	11
<b>3 Skolmatematikens knutpunkter</b> .....	<b>13</b>
<b>4 Kartläggning av utgångsnivån för matematiska färdigheter</b> .....	<b>26</b>
4.1 Gallringar, tester och kartläggningar.....	26
4.1.1 Kartläggningar och tester av utgångsnivån för grundläggande matematiska färdigheter ...	29
4.1.2 Avgiftsbelagda kartläggningar av utgångsnivån för grundläggande färdigheter i matematik .....	30
4.2 Fortsatta åtgärder utgående från kartläggningar.....	31
4.2.1 Exempel på fortsatta åtgärder utgående från kartläggning av grundläggande matematiska färdigheter .....	31
4.2.2 Två exempel på stöd för att korrigera matematiska färdigheter .....	32
4.2.3 Mot en individuell studieväg – Yrkesbollarna .....	32
4.2.4 Perspektiv och material för att stödja knutpunkter i de grundläggande matematiska färdigheterna .....	33
<b>5 Matematikbildens betydelse - känslor med i spelet</b> .....	<b>35</b>
5.1 Matematikbilden och matematiska färdigheter byggs upp stegvis .....	36
5.2 Bakgrund och utgångspunkter för matematikbilden i yrkesstudierna .....	36
5.3 Metoder för att stödja de studerandes matematikbild .....	36
<b>6 Verbalisering som verktyg för lärande av matematik</b> .....	<b>40</b>
6.1 Definition av matematiskt kunnande, verbalisering och matematiskt tänkande.....	41
6.2 Perspektiv på verbalisering i läromaterial för matematik - uppgiftsexempel .....	42
6.2.1 Modeller för skriftlig verbalisering.....	42
6.2.2 Exempel på verbaliserade uppgifter.....	42
6.3 Språk i matematiklärandet.....	46
6.4 Verbalisering som verktyg för läraren .....	51
<b>Källor:</b> .....	<b>53</b>

## SSS – Matematiska färdigheter



Detta verk är licensierat av en Creative Commons Erkännande-Dela Lika 4.0 Internationell licens. Licensen finns på adressen <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.fi>.

# 1 Inledning

Utvecklingen av matematiska färdigheter börjar redan i tidig barndom. Det är viktigt att barn i sin uppväxtmiljö spontant fäster uppmärksamhet vid antal och hur man beräknar dem. Förmågan att uppfatta antal är baserad på en medfödd perceptuell mekanism som leder barnet till att känna igen antal i sin omgivning. Till en början är denna mekanism inexakt av sin natur och uppfattningen som baserar sig på den omfattar främst att känna igen skillnader i storlek och förändringar av antal. Grunden för hantering av antal utgörs av observation av antal i uppväxtmiljön och nivån på den perceptuella mekanismen. För att ett abstrakt matematiskt tänkande ska utvecklas bör barnet medvetet fästa uppmärksamhet vid antal i sin omgivning. Utvecklingen av en konceptuell, mer abstrakt förståelse av antal kräver en uppväxtmiljö där barnet vägleds till att känna igen antal med hjälp av en miljö där man är medveten om antal. Att identifiera och uttrycka antal med symboler samt att förstå relationerna mellan antal tar flera år under barnets utveckling. Ur inlärningssynvinkel är det viktigt att barnets uppväxtmiljö är medveten om antal, vilket får barnet att intressera sig för antal och utnyttja dem i aktiviteter som inbegriper växelverkan mellan vuxna och barn. Det verbala begreppet för begreppen siffror och tal är på ett väsentligt sätt kopplade till vår kultur och de lärs in genom kulturell interaktion. För att förstå betydelsen och användningen av siffror och tal behöver barnet växelverkan med vuxna som agerar inom den proximala utvecklingszonen. SFON-tendensen (spontant fokus på antal) som uppmäts före skolåldern korrelerar med matematiska färdigheter vid 12 års ålder (jfr. [1]). Ju tidigare förståelsen av tal och grundläggande räknefärdigheter utvecklas, desto bättre går vanligtvis lärandet av matematik i framtiden. Vid skolstarten finns det skillnader i barnens matematiska färdigheter. En påverkande faktor är förmågan att fästa uppmärksamhet vid antal under de tidiga åren. De barn som inte spontant har uppmärksammat antal under de tidiga åren ligger oftast efter i matematiska färdigheter. Skillnaderna mellan barns matematiska färdigheter ökar ofta ytterligare under skolgången.

Att tidigt uppfatta talsystemet är en viktig del av att senare utveckla räknefärdigheter och att behärska färdigheterna. Även om olika människor har olika styrkor inom olika matematiska områden, borde man komma ihåg att matematiska helheter bygger på varandra. Senare kombineras dessa inlärd helheter så att flera färdigheter används samtidigt. Om man inte har grunderna för något under kontroll, kan studierna i något annat senare visa sig bli svåra - om inte till och med omöjliga.

Ur undervisningens synvinkel är det viktigt att hitta lämpliga metoder och material som underlättar de studerandes uppfattning och förståelse av matematiska begrepp. Ett positivt förhållningssätt gentemot matematik och att fortsättningsvis använda sig av tidigare inlärd färdigheter hjälper också till att utveckla nya färdigheter. Både ur perspektivet för att behärska grundläggande kunskaper och färdigheter och ur ett gestaltningssperspektiv är det centralt att den studerande förstår vad saker beror på, i stället för att enbart memorera dem. Något man memorerat kan lätt glömmas bort och senare skapa problem på något annat matematiskt delområde. När grunderna i matematiken är under kontroll och man har fått rutin i att räkna, blir det lättare att tillämpa tidigare inlärd saker i yrkesstudierna. I början av yrkesstudierna är det bra att kartlägga de studerandes matematiska färdigheter, så att de får tillräckligt med stöd genast i början av sina studier. Ett rätt inriktat stöd stöder den studerandes egen förmåga och studiemotivation och förbättrar på så sätt studiernas framskridande.

Med hjälp av en kartläggning av utgångsnivån i matematik som görs i början av studierna, fås information om nivån på de studerandes matematiska färdigheter. Baserat på kartläggningen av utgångsnivån kan individanpassat stöd erbjudas den studerande. Det är viktigt att betona för de studerande att kartläggningen främst ger den studerande själv information om vilka saker hen behöver repetera/studera för att kunna framskrida i sina studier. SSS-matematikstudierna är avsedda att stärka den studerandes matematiska färdigheter med stöd från SSS-läraren. SSS-studierna är inte en del av särskilt stöd, utan hör till allmänt stöd. Det innebär att de studerande som deltar i dessa studier inte har några egentliga inlärningssvårigheter. De deltar i SSS-stödet för att repetera och/eller lära sig matematiska färdigheter som de inte har lärt sig i skolan, till exempel på grund av att de endast har gått i skolan några år.

Resultatet från kartläggningen av utgångsnivån fungerar som grund för hur man planerar att erbjuda stöd under studietiden. Baserat på kartläggningens resultat kan tre studerandegrupper urskiljas. En del av de studerande har goda färdigheter och de klarar av studierna. I den andra gruppen (SSS-matematikgruppen) finns det vissa brister i färdigheterna, men de klarar av studierna om de får handledning och stöd. Den tredje gruppen (uppdelas i både SSS-matematikgruppen och/eller de som är i behov av särskilt stöd) utgörs av de studerande som har tydliga brister i grundläggande matematiska färdigheter. För studieframgångens skull är det viktigt att identifiera dessa studerandegrupper och påbörja stödåtgärderna så tidigt som möjligt.

Matematik är ett läroämne där känslor är inblandade, vilket påverkar matematikstudierna. I allmänhet endera gillar eller avskyr man matematik. En del studerande har dåliga erfarenheter av matematikstudier. De har ångest och dåligt självförtroende då det kommer till matematiskt kunnande. Ångesten för matematikstudier kan minskas genom att använda sådana uppgifter som ligger på den studerandes kunskapsnivå. Då den studerande får uppleva att hen kan, får hen säkerhet, ångesten minskar och tilliten till det matematiska kunnandet växer. På så sätt kommer man framåt i matematikstudierna. En lärare som möter och uppmuntrar de studerande skapar en god och trygg lärandeatmosfär, där den studerande vågar ta fram sitt eget kunnande.

Verbalisering erbjuder en mångsidig metod som utgångspunkt för lärande av matematik. Joutsenlahti [2] har delat in verbaliseringen i fyra delområden: kroppsligt/taktil, skisser/bilder, naturligt språk (den studerandes eget modersmål) och matematikens symboliska språk. Betydelsen av de tre första delområdena är viktig, för med hjälp av dem strävar den studerande efter att strukturera sitt tänkande och bygga upp sin förståelse av matematiska begrepp och uppgifter. Verbalisering fungerar som en tolk mellan den studerandes och lärarens tänkande. Då färdigheterna i det svenska språket är svaga och/eller det finns brister i matematiska kunskaper, ger de multimodala uttryckssätten som hör till verbalisering en möjlighet att föra fram sin förståelse på ett mångsidigt sätt, ibland till och med utan ord, med hjälp av aktivitetsmaterial eller kroppsliga uttryck.

Förståelsen som skapats genom allmän verbalisering av de olika delområdena ger verktyg för att uttrycka saker på matematikens språk. Att tolka matematikens symbolspråk med hjälp av de tre förstnämnda språken fördjupar å andra sidan förståelsen och det matematiska tänkandet. Att verbalisera matematiken ger väggkost för en språkmedveten undervisning. I ett språkmedvetet tillvägagångssätt betonas både det naturliga språkets (den studerandes eget modersmål) och undervisningsspråkets roll (här avses förklaringar och exempel på matematiska begrepp/termer på svenska, samt diskussioner mellan lärare och studerande samt studerande emellan) i undervisningen. Med hjälp av verbalisering stöds den språkmedvetna undervisningen genom att förstärka det matematiska ordförrådet, förståelsen av begrepp på djupet, problemlösningsförmågan samt diskussion och samarbete. Verbalisering hjälper en att förstå de studerandes språkliga och kulturella bakgrund. Som bäst hjälper verbalisering de studerande att koppla ihop begrepp med sina egna erfarenheter. Att koppla sina egna erfarenheter till matematiklärandet ger förståelse av hur matematiken kan tillämpas till exempel i egna kulturella sammanhang eller inom olika yrkesområden. Dessa frågor har vi strävat att förklara inom

temat för färdigheter inom SSS-matematiken. Sammanfattningsvis kan man konstatera att verbalisering som ett tillvägagångssätt för lärande kan göra matematiken mer tillgänglig och betydelsefull för de studerande. Som bäst erbjuder verbalisering upplevelser av att lyckas både för läraren och de studerande.

När man granskar SSS-matematiken är det viktigt att vara medveten om att det inte handlar om GEM-matematik. Vad innebär då SSS-matematik? Inom SSS-matematiken strävar man efter att stärka den studerandes grundläggande matematiska färdigheter så att hen

1. får bättre förutsättningar för att klara av SSS-matematiken, eller
2. klarar de praktiska matematiska utmaningarna som krävs för yrket, då den studerande endast genomför en del av examen.
3. får verktyg för att hantera sin ekonomi ur ett livshanteringsperspektiv.

Med hjälp av SSS-matematiken strävar man efter att erbjuda de studerande möjlighet att utveckla sina matematikkunskaper i lugn och ro, enligt deras egna styrkor och behov för den egna yrkesidentiteten. Inom SSS-studierna finns det goda möjligheter att upptäcka eventuella problem i matematiken eller inlärningssvårigheter. Behovet av särskilt stöd kan ha kommit fram redan innan SSS-studierna. Svaga kunskaper i svenska (eller språkkunskaper som utvecklas) eller rutinerade studiefärdigheter för med sig egna utmaningar då det kommer till att upptäcka behov av särskilt stöd. Vi rekommenderar att det i läroanstalterna skulle finnas ett SSS-team för att planera och genomföra SSS-stöd, som inte ska uppfattas som en del av specialundervisningen. Det vore bra att inkludera en matematiklärare, speciallärare, utbildningsplanerare och en SSS-lärare i SSS-teamet. Teamets uppgift skulle vara att planera SSS-studier baserade på kartläggningar av utgångsnivån samt att bedöma om en del av de studerande behöver ytterligare testning för att bekräfta inlärningssvårigheter i matematik. Sådana studerande som visar sig ha inlärningssvårigheter i matematik hör till särskilt stöd, där det görs upp en egen plan för hur de går vidare. SSS-teamet planerar den individuella studievägen tillsammans med den studerande och handleder studerande som behöver repetition samt komplettering av matematikinnehåll till SSS-studier. Detta material är avsett som ett grundmaterial för att introducera SSS-lärare i färdigheter i SSS-matematik och som grund för planeringen av SSS-studier, samt som utbildningsmaterial.

## 2 Utgångspunkter för SSS-matematiken

I bildserien, som länkas till rubriken i kapitel 2, presenteras kompetensmålen för matematik i yrkesutbildningen, skillnaderna i de matematiska färdigheterna hos de studerande som kommer till yrkesutbildningen samt utmaningar i undervisningen. SSS-studierna är avsedda att repetera och säkerställa den studerandes grundläggande kunskaper och färdigheter. Frågor som hör till kartläggningen av de studerandes färdigheter behandlas mer ingående i kapitel 4.

Man kommer till yrkesutbildningen från väldigt olika utgångspunkter. En studerande som kommer till SSS-studierna kan vara ung eller vuxen, ha invandrarbakgrund eller höra till majoritetsbefolkningen, vara en studerande som återvänder från ett studieavbrott eller en som påbörjar sina studier. En del av de studerande i alla dessa grupper kan behöva repetera de grundläggande kunskaperna i matematik eller ha utmaningar med att lära sig matematik. Den studerande kan också ha utmaningar med att förstå det svenska språket, i så fall kommer hen till SSS-studierna för att studera matematikens akademiska terminologi. En studerande som har gått i en finländsk grundskola antas redan ha de färdigheter som krävs för att studera GEM-matematik. Det är viktigt att notera, att de som gått ut grundskolan har en gemensam kulturell utgångspunkt med det innehåll som lärs ut, med andra ord är de bekanta med matematiska uttryck och skrivtecken, även om det finns utmaningar med de matematiska kunskaperna. För många studerande med invandrarbakgrund innebär matematiska uttryck och beteckningar på svenska utmaningar, även om de skulle ha matematiskt kunnande vad gäller räkneuppgifter.

### 2.1 Grunderna för innehåll i SSS-matematiken

I diskussioner med lärare i matematikämnen vid yrkesläroanstalter har som innehåll i SSS-matematiken, både ur stödbehovets och kunskapsutmaningarnas perspektiv, framkommit bland annat följande innehåll och begrepp:

#### **Utmaningar med begreppet siffra, tal samt talområden**

- *Skillnaderna i betydelsen mellan begreppen siffra och tal förstås inte* (siffra = nummertecken, tal = ett begrepp som uttrycker mängd eller ordning)
- *Ordningstal och uppfattandet av dem*, bl.a. i uppgiften (ofta läggs ordningstal till i räkneoperationen)
- *Begreppen dubbel, tredubbel är utmanande...*, också varannan, var tredje är svåra.
- *Tusentalsavgränsare* - orsakar förvirring i beteckningar för firsiffriga och flersiffriga tal
  - *Tal och siffror*: Enligt språkbyråns riktlinjer för gruppering av tal och siffror [3] delas tal med fyra eller fler siffror in i grupper om tre siffror, börjande med entalen, med mellanslag, för att underlätta förståelsen, till exempel på följande sätt:  
3652500 invånare skrivs som 3 652 500 invånare. I vissa länder används punkt som tusentalsavgränsare i stället för mellanslag, och detta orsakar förvirring med decimalkommat.
- *Decimalkommat och multiplikationstecknen blandas ihop* (i många länder betecknas multiplikationstecknet med ett kryss,  $\times$ )
- *Negativa tal på tallinjen är utmanande* (här kan det redan finnas grundläggande utmaningar med att förstå naturliga tal)
- *Bråktalen är utmanande*

- bråknotationen är utmanande: bråknotation kan tolkas som en subtraktion (läsriktning uppifrån och ner)
- *Att förstå talområden är svårt:* Till exempel, naturliga vs. reella tal (Övergångarna från ett talområde till ett annat är utmanande) – utvidgningen av talområdet är en av utmaningarna med att lära sig.)

### **Utmaningar med räkneoperationer och procedurer**

- *Förmågan att bedöma riktigheten* av svaren är svag, kan  $5 \cdot 10$  vara 5 515?
- *Räkneoperationer med bråk* är svåra
  - att omvandla ett bråk till en division är svårt (ofta betecknas täljaren som nämnare, anledningen är förmodligen *miniteori*: ett större tal delas alltid med ett mindre tal (jfr. division i det naturliga talområdet)
- *Att lösa ekvationer*
  - Att lösa ekvationer, hyfsning (Problem med att kunna ett främmande språk eller utmaningen med att begrepp saknas?)
- *Proportionalitet*
  - Det går att använda proportionaliteter i vardagen med hjälp av slutledning, men att beräkna proportionaliteter på matematikens språk är svårt (många studerande använder proportionaliteter i vardagliga situationer, men som en matematisk operation är det främmande för dem)
- *Procentberäkningar*
  - Procentuell ökning och minskning / hur många procent sjunker priset (rabatt) – priset på televisionen stiger med 2 %
  - Vid ovan nämnda procentberäkningar kan följande pilmarkeringar i samband med procenträkningen göra det lättare att förstå: pil uppåt (representerar ökning); prissänkning/rabatt (pil nedåt)
- *Verbala uppgifter:*
  - Att förstå verbala uppgifter; vs. kulturell förståelse (t.ex. att förstå skatteprocenten, även om man skulle kunna beräkna procentsatser är den finska progressiva beskattningen främmande)
- *Problemlösningsförmåga* (märks i tillämpande uppgifter)
  - Matematik vs. lösande av vardagsproblem (den studerande har förmåga att lösa praktiska problem i vardagen, men att utföra matematiska uppgifter är svårt)
  - Strategier för att lösa matematiska problem
- *Att förlita sig på mobiltelefonen eller datorn / kalkylatorn, när räknekunskaperna är svaga*
  - När matematiken känns utmanande (t.ex. räknekunskaperna är svaga) kan de studerande förlita sig på telefonen/datorn vs. en kalkylator i stället för att räkna med penna och papper (när kunskaperna är svaga, förlitar man sig på hjälpmedel "som tänker för den studerande" gäller för alla studerande, inte bara för S2-studerande)

Ovan listade ämnesområden som via praktiken kommit fram är sådana, att de kan fungera som ämnesområden för kartläggning av utgångsnivån och även som stöd för planering av individuella vägar för SSS-studier i matematik.

## 2.2 Talbegrepp och utmaningar med matematiska beteckningar

### Talbegrepp

De utmaningar som lärarna presenterat i kapitel 2.1 verkar huvudsakligen vara relaterade till talbegreppet och de färdigheter som är kopplade till utvidgningen av det (jfr. Knutpunkter kapitel 3), för till detta hör följande saker av det ovanstående

- Begrepp: siffra och tal
- Ordningstal och uppfattandet av dem, bl.a. i uppgiftsutdelningen (läggs till i räkneoperationen)
- Tusentalsavgränsare,
- Decimalkomma och multiplikationstecken blandas ihop
- Negativa tal på tallinjen
- Bråknotation: Bråknotation kan tolkas som subtraktion (läsriktning uppifrån och ner)
- Bråkräkning: Att till exempel omvandla ett bråk till en division är svårt (ofta betecknas täljaren som nämnare, anledningen är förmodligen miniteori: ett större tal delas alltid med ett mindre tal (jfr. division i det naturliga talområdet))
- Naturliga tal vs. Reella tal (utvidgning av talområden)

Grundbegreppen siffra och tal anknyter ur skolmatematikens synvinkel till nybörjarundervisningen och förskoleundervisningen. Förståelsen av dessa begrepp är förknippad med både frågor som rör utvecklingen av matematiskt tänkande (grunden byggs redan i småbarnsfostran) och även språkliga utmaningar. I det använda talsystemet, tiosystemet, har vi 10 st. siffror 0,1, 2, ...,9. Dessa tecken används för att forma tal. Talen har både en ordningsbetydelse (ordinal betydelse som svarar på frågan: "Vilken i ordningen?") och en storleks- / mängdrelaterad betydelse (kardinalbetydelse, som svarar på frågan "Hur många?"). Med de enskilda siffrorna 0,1, 2, ...,9 kan man uttrycka mått / storlek eller antal. Ett tal har alltid en betydelse förknippad med antingen antal eller mått. Det skulle vara viktigt att inse skillnaden mellan ordinal- och kardinaltal, eftersom det är en grundläggande färdighet för att förstå talbegreppen. Den ordinala betydelsen för ett tal kan man få reda på genom att svara på frågan "Vilken i ordningen"? Till exempel så här: "Maja kom tredje (3.) i hundrametersloppet." Det är bra att notera att "tredje" endast betyder en placering och att det ska vara en punkt i slutet av ordningsnumret (3.), som beskriver ordningen. Ett kardinaltal (grundtal) betyder antal / storlek och svarar på frågan "Hur många?". Kardinaltal har en kvantitativ betydelse. Förståelsen av tal har att göra med frågor som berör tidig matematisk utveckling, eftersom grundläggande kunskaper och färdigheter gällande talbegrepp utvecklas under de tidiga åren (före skolåldern). Vid skolstarten borde barnet förstå motsvarigheten mellan tal och antal.

Förståelsen av tal har att göra med en utvecklingsmässig grund och dessutom med aspekter angående olika språk. Det engelska språket använder orden "digit" och "number", vilket är utmanande. "Digit" betyder en siffra (tecknen 0, 1, ... ,9) och "number" igen är relaterat till storlek / antal.

Det bör noteras, att siffra är knutet till tecknen 0, 1, ..., 9, och dessutom till olika längre serier av siffror listade efter varandra, som inte kräver motsvarighet mellan tal och antal / storlek. I dessa beteckningar har man listat siffror efter varandra, och de har ingen kvantitativ eller storleksrelaterad betydelse. Sådana beteckningar är till exempel telefonnummer, socialskyddssignum eller en sifferkod.

När vi granskar skolmatematikens början, så lär vi oss där att konstruera tal med hjälp av tiosystemets grundläggande tecken (0, ... ,9) och vi lär oss att förstå hur talen grundar sig på tiosystemet.

Det betyder att man gradvis utvecklar förståelse av sambanden mellan sifferplatser (ental, tiotal, hundratal, etc.). En väl fungerande förmåga att behandla tal (byggd på basis av tidiga matematiska färdigheter i förskola och nybörjarundervisning) stöder förståelsen av tiosystemet. Att förstå tiosystemet är utmanande för många människor. När man går från naturliga tal först till talområdet för rationella tal och sedan till talområdet för reella tal, är det utmanande att uttrycka tal som är mindre än ett helt. Att förflytta sig från ett talområde till ett annat är utmanande, eftersom till exempel beräkningsmetoderna som man lärt sig inom området för naturliga tal inte längre är giltiga på samma sätt i andra talområden. Det här är förvirrande. De ovan nämnda frågorna anknäver till matematikens knäpunkter, särskilt förståelsen av talbegreppet. Det är särskilt utmanande att förstå utvidgningen av talområdet och talsystemet (i vårt fall tiosystemet). Att behärska talföljder obehindrat vid skolstarten förutsäger en gynnsam utveckling av matematiska färdigheter senare i livet. Det kan vara utmanande att förbättra dessa färdigheter, till exempel i början av studierna på andra stadiet.

### **Matematiska beteckningar**

Förutom talbegreppet är de matematiska beteckningarna också utmanande och förvirrande. De matematiska beteckningarna skiljer sig något från varandra i olika delar av världen. Till exempel kan beteckningarna för räkneoperationer variera något i olika länder: till exempel betecknas division med  $/$ ,  $\div$ , eller multiplikation med symbolerna (punkt)  $\cdot$ , (kryss)  $\times$  osv. Det bör noteras, att vi undervisar på det sätt som räkneoperationer betecknas i Finland, det vill säga vid multiplikation används inte beteckningen  $\times$  för att framställa uttrycket gånger på matematikens språk. I undervisningen är det också värt att notera, att bl.a. multiplikationstecknet  $\cdot$ , som vi använder, betyder noll på arabiska, vilket kan orsaka en utmaning att förstå nationella matematiska beteckningar. Filen, till vilken följande rubrik har en länk, innehåller matematiska beteckningar och skillnaderna mellan dem i Latinamerika och USA. Dessa beteckningar används i större utsträckning också i andra delar av världen än enbart på den amerikanska kontinenten.

Lopez, N. R. Todos: [Mathematics for all. Mathematical notation comparison between U. S. and Latin American Countries](#). Harris County Department of Education, Houston.

Dessa beteckningar används i större utsträckning också i andra delar av världen än enbart på den amerikanska kontinenten.

## **2.3 Utmaningar med begreppet förhållande, proportionalitet samt problemlösning**

### **Utmaningar med begreppet förhållande**

Begreppet förhållande berörs till en viss del i slutskedet av de lägre klasserna. Egentligen kommer begreppet förhållande in i de högre klasserna och i och med detta kommer även begreppet proportionalitet in. Begreppet förhållande är huvudsakligen relaterat till bråk, eftersom beteckningen av ett

bråk också kan förstås som ett förhållande mellan två tal. Alltså skulle det vara bra att behandla begreppet förhållande även i samband med bråk. Till exempel beteckningen  $\frac{2}{3}$  kan förstås som förhållandet mellan talen två och tre dvs.  $2 : 3$ : *Hur många röda och gröna pärlor tar du, när förhållandet mellan antalet röda och gröna pärlor är  $2 : 3$*  (se bild 1)? När man behandlar begreppet förhållande är blandningsförhållandena för juicekoncentrat och vatten bra och konkreta exempel.

Begreppet förhållande är utmanande för de studerande och det är bra att öva på det med helt konkreta redskap, till exempel brickor, som visas på bild ett. Begreppet förhållande berörs i de lägre klasserna i samband med skalan samt förstoringar och förminskningar.

Bild 1

*Förhållandet mellan röda och gröna pärlor,  $2 : 3$  alltså är totalantalet pärlor  $\frac{2}{5}$  röda och  $\frac{3}{5}$  är gröna*



Undervisning om begreppet förhållande har inte lyfts upp separat i grundskolans läroplan. Detta innebär att läraren särskilt bör komma ihåg att ta upp begreppet förhållande i undervisningen. En svag förståelse av begreppet förhållande orsakar en utmaning för eleverna, till exempel i samband med proportionalitet i de högre klasserna och senare i yrkesstudierna.

### **Direkt och omvänd proportionalitet**

Proportionaliteten bygger på begreppet förhållande. Proportionalitet kan tillämpas för att lösa många olika problem. Direkt proportionalitet är ofta lättare att förstå, eftersom den beskriver en direkt proportionell förändring. Om den ena storheten växer, så växer den andra också i samma takt. Direkt proportionalitet kan till exempel förklaras med följande vardagsexempel: att köpa äpplen. Om priset på äpplen är 2 euro per kilo, och du köper 3 kilo äpplen, betalar du 6 euro för de äpplen du köper. Med andra ord, direkt proportionalitet beskriver ökning i samma förhållande, det vill säga enligt föregående exempel, ju mer du köper, desto mer betalar du.

Omvänd proportionalitet kan vara svårare att förstå, eftersom den beskriver ett omvänt förhållande mellan storheter. Om den ena storheten ökar, minskar den andra. Detta kunde konkretiseras med sambandet mellan hastighet och tid, som till exempel en bils medelhastighet och den tid det tar att åka en sträcka: Om du reser från Åbo till Helsingfors med en medelhastighet på 60 km/h tar det en viss tid, men om medelhastigheten är 80 km/h tar det kortare tid för samma sträcka. Att förstå direkt och omvänd proportionalitet kräver personliga erfarenheter och därför är det viktigt, att exemplen anslutna till dessa begrepp är kopplade till den studerandes erfarenheter. En studerande kan mycket väl ha förståelse av direkt och omvänd proportionalitet i vardagen, men hen vet inte hur hen ska uttrycka dessa på matematikens språk. Gällande detta finns ett bra exempel på hur en kvinna med invandrabakgrund genom praktisk erfarenhet förstår direkt proportionalitet. Denna studerande använde direkt proportionalitet för att omvandla matrecept för att passa en familj på tio personer. Nu behövde man bara synliggöra den praktiska kunskapen för hen via matematiken. Ur den studerandes egen förståelsesynvinkel är det verkligen värdefullt att hen via det praktiska kan dra slutsatser och berätta för andra om de olika stegen i slutledningsprocessen. Oavsett hur väl man vet hur man vrider på en proportionalitetskvation, kommer det inte att göra någon nytta, om den egna förståelsen saknas. Av den här anledningen är det bra att betona, att den studerande kan / lär sig motivera sin lösning och kan berätta hur hen tillämpar den i praktiken.

### **Problemlösning /vardagsproblem**

När det gäller problemlösning är det viktigt att den studerande har förståelse av de begrepp och procedurer som är förknippade med problemlösningssuppgiften. När de grundläggande begreppen och procedurerna är under kontroll, kan de studerande tillämpa det de har lärt sig. Ur SSS-matematikens synvinkel är det väsentligt, att den studerande kan tillämpa det hen lärt sig på praktiska problem och sedan, allt eftersom studierna fortskrider, på problem inom sitt yrkesområde.

Att definiera ett problem är utmanande, men generellt sett kan en problemuppgift förstås som en uppgift som den studerande inte har en omedelbar lösning på, men hen har ändå förmågan att lösa uppgiften med hjälp av tankearbete och studier [4]. Det betyder, att problemlösning kräver uthållighet och en god känsla för självförmågan. Det finns stora skillnader i den matematiska kunskapen hos studerande som söker till yrkesutbildning. Ofta kan de, som repeterar sina matematikkunskaper i SSS-studier, ha utmaningar med självförmågan, vilket gör att de inte litar på att de kan lösa matematiska problem. Förståelsen av problemuppgifter utmanas också av problem som har att göra med läsförståelsen. Dessutom utmanas och begränsas problemlösningen av ett svagt ordförråd. Enligt Kajamies, Vauras, Kinnunen och Iiskala [4] är det i synnerhet när det gäller verbala problemuppgifter som det i bakgrunden finns en otillräcklig uppbyggnad av en lägesmodell för problemet och att hitta en lösning som motsvarar denna modell (bl.a. Verschaffel, Greer & De Corte, 2000). Att bygga upp lägesmodeller (till exempel genom att samla in det som är känt och det som inte är känt om uppgiften och rita en bild av uppgiftens struktur) kan vara främmande för den studerande. Å andra sidan påverkar också läsförståelsen förståelsen och lösandet av verbala uppgifter även bland studerande som har gått ut grundskolan. Dessutom kan studerande med invandrarbakgrund ha dålig förståelse av det svenska språket och därför kan det vara svårt att framför allt förstå verbala uppgifter, utan hjälp av översättningsmaskiner. Även kontexten i uppgifterna kan vara mycket främmande för en studerande med invandrarbakgrund. Kulturskillnader syns i uppgifternas innehåll och en uppgift som är förlagd till det finländska samhället öppnar sig inte för den studerande. Det vore bra för läraren att konsekvent använda ett lättförståeligt språk i samband med verbala uppgifter. Man bör i synnerhet beakta att man använder likadana språkliga uttryck konsekvent i liknande situationer.

Leppäaho [5] har fört fram LeBlancs (1977) problemlösningstrategier, som i undersökningen är uppdelade (se tabell 1) i allmänna och stödjande strategier. Tabell 1 bjuder på bra medel för att lösa både matematiska och vardagliga problem.

Tabell 1

*LeBlanc (1977) uppdelning av problemlösningstrategier enligt Leppäaho [5]*

Yleiset strategiat	Auttavat strategiat
1. Yritys ja erehdys 2. Järjestelmällinen lista eri mahdollisuuksista 3. Ongelman yksinkertaistaminen 4. Kaavan etsiminen ongelmasta 5. Kokeilu 6. Päätely 7. Yleistys 8. Takaperin työskentely	Diagrammit Taulukot Piirrokset Luettelot Yhtälöt – Ovat välivaiheita yleisten strategioiden toteuttamisessa. – Soveltuvat kaikkiin yleisiin ongelmanratkaisustrategioihin.

Ovanstående tabell ger goda fingervisningar om strukturen för problemlösningssuppgifter och om vilken typ av lösningsmodeller det skulle vara bra att lära sig.

## 2.4 Praktiska metoder för undervisning i SSS-matematik

Lärare i matematiska ämnen vid yrkesläroanstalter har under diskussioner lyft fram följande frågor som stöder förståelsen av matematik i undervisningen i SSS-matematik, särskilt ur invandrarstuderandes synvinkel:

### **Långsamt tal och lätt språk i undervisningen** (se kapitel 6.3)

- *Kulturell sensitivitet* bör beaktas (varken svinkött, alkohol eller liknande uttryck bör användas)
- *Dela upp uppgifterna i mindre uppgifter för invandrare (alla studerande har nytta av detta)* (lätt språk, se kapitel 6.3)
- *Ordlistor gör det lättare att förstå språket* (tips: ordlistor kan också göras tillsammans med de studerande för utmanande områden i matematiken).
- Utbildningsstyrelsen har producerat ordlistor för olika språk. Du kan använda följande länkar för att studera ordlistor:

<https://sanapaja.edu.fi/words/search>

<https://jorpela.fi/kielenopas/4.11.html>

<http://www.lukimat.fi/matematiikka/monimat/matematiikan-sanasto/matematiikan-sanasto>

Att undervisa S2-studerande är på många sätt utmanande för läraren. Utmaningarna kan vara kopplade till svaga kunskaper i det svenska språket samt utmaningar med att förstå matematikens akademiska terminologi och problem relaterade till de matematiska färdigheterna. I vissa situationer kan svaga språkkunskaper i svenska dölja utmaningar kopplade till inlärningssvårigheter i matematik. Vilka saker borde läraren uppmärksamma vid planeringen av SSS-undervisningen i matematik för S2-studerande? En erfaren lärare för S2-studerandegrupper förklarade sina tankar och sin planering i början av en S2 SSS-matematik kurs genom att sammanfatta helheten i fyra kärnfrågor:

### **1. Hurdan grupp har jag och hur mycket undervisning har de under kursen?**

- De studerande kommer från olika länder och är i huvudsak unga vuxna, det finns några som är lite äldre.
- De studerande har som mål att bli närvårdare.
- Syftet med SSS-matematik kursen är att säkerställa att de studerande kan klara GEM-matematiken och de medicinska beräkningarna. SSS-kursen i matematiska färdigheter räcker 30 timmar, det vill säga 15 träffar (1 h 45 min) med gruppen och allt detta under fyra veckor.

### **2. Hur inleder jag kursen?**

- I början av kursen tar jag reda på utgångsnivån för de studerandes kunskaper (matematiska kunskaper och frågeställningar kopplade till den matematiska bilden) genom diskussion och uppgifter. Jag vet av erfarenhet att i gruppen kan kunskaperna för de studerande variera från nästan obefintliga till rätt mångsidiga kunskaper.
- På det första mötet övar man sig på att läsa talen högt på svenska och även att skriva de uttalade talen efter förmåga. Första gången börjar man också öva grundläggande räkneoperationer och repetition, med hänsyn till de studerandes kunskapsnivå.

- Eftersom det bara finns S2-studerande i gruppen, är det troligt att alla kommer att ha nytta av att studera den matematiska terminologin och öva på de matematiska beteckningarna som används i Finland.
- Alla har också nytta av att utföra verbala uppgifter, eftersom uppgifterna hjälper de studerande att strukturera matematiken på svenska.
- När kursen fortskrider är det bra att dela upp gruppen enligt matematiska kunskaper så att alla har något meningsfullt att göra.

### **3. Hur agerar jag under lektionen?**

- I början av lektionen kommer vi överens om gemensamma mål.
- Jag presenterar lugnt en sak i taget och uppmärksammar ett lätt språk.
- Jag ger de studerande tid att svara och utföra uppgifter.
- När jag utformar verbala uppgifter tar jag hänsyn till kulturella synvinklar. Det är bra att relatera de verbala uppgifterna till vårdarbetet /yrkesområdet, eftersom det är ett neutralt ämne.
- Jag ger mina studerande positiv respons alltid när det finns anledning till det.
- Jag uppmuntrar mina studerande att försöka och att sätta upp mål för sitt lärande.

### **4. Vilka utmaningar kan uppstå för denna grupp?**

- De studerande är ganska unga och många är i 19–20-årsåldern. Har de tillräckligt med motivation?
- Det finns 18 studerande i gruppen. Kan jag ge alla studerande tillräckligt med uppmärksamhet och se vem som har mera svårigheter och är i större behov av stöd än andra?
- Finns det studerande i gruppen som har något särskilt problem med lärandet eller med livshandlingen?

Den ovan beskrivna strukturen för planering kan tillämpas på SSS-matematikgrupper inom olika yrkesområden. Tankarna kring utformningen av SSS-matematikkursen anknyter till innehållet i SSS-matematiklektionen i nästa kapitel. Beskrivningen av SSS-matematiklektionen är länkad till rubriken för kapitel 2.5. Språkmedveten undervisning, som passar såväl studerande med invandrarbakgrund som svenskspråkiga studerande, granskas ännu i kapitel 6.3 "Språket i matematiklärandet".

## **2.5 Hur ser en SSS-lektion i matematiska färdigheter ut? – ett exempel**

I beskrivningen av en SSS-matematiklektion, som länkas till rubriken, är det viktigt att notera att lektionen, som beskrivits i bildserien, är inriktad på att öva helt grundläggande färdigheter och främst de grundläggande färdigheter som hör till matematiken i de lägre klasserna. Det framgår mycket tydligt av lektionen att läraren uppmuntrade de studerande att delta med tillräckligt lätta uppgifter, med hjälp av vilka hen också utvärderar de studerandes färdigheter. Samtidigt uppmuntrade läraren de studerande att delta i den matematiska diskussionen. De studerande gav positiv respons särskilt om att börja med tillräckligt lätta uppgifter. Det är viktigt, att de studerande involveras i gemensamma diskussioner under matematiklektionen. Att dela sina egna tankar med andra stöder ens egen och andra deltagares lärande. Läraren har också nytta av detta, eftersom hen hör hur de studerande tänker och kan använda det hen hör som ett redskap för att planera undervisningen.

## Sammanfattning kapitel 2

### **Planering, genomförande och innehåll gällande SSS-matematiken**

- Genomförandet av SSS-matematiken bygger på noggrann planering tillsammans med medlemmar av ett mångprofessionellt team (teammedlemmar: SSS-lärare, matematiklärare, speciallärare och representant för förvaltningen (t.ex. utbildningsplanerare)
- SSS-matematiken ska ses som en styrka för läroanstalterna och bör erbjudas åt de studerande
- SSS-matematiken är inte GEM-matematik, utan dess uppgift är att repetera och säkerställa de grundläggande begreppen och räkneoperationerna i grundskolmatematiken.
  - Målet med SSS-matematiken är att säkerställa den studerandes färdigheter till en sådan nivå att hen klarar av matematikstudierna i en yrkesläroanstalt
- Innehållen i SSS-matematiken är inriktade på innehåll i matematiken i de lägre klasserna i grundskolan (bl.a. grundkunskaperna för talbegreppet, tiosystemet och måttenheterna, de grundläggande räkneoperationerna (särskilt begreppet division är utmanande))
- Utmaningarna med de matematiska färdigheterna i yrkesstudierna, som lärarna har lyft fram, ger en bra kartläggning av utgångsnivån och innehåll för planering av individuella inlärningsvägar
  - Undervisningen i SSS-matematik ska betona långsamt tal och lätt språk

### **För reflektion**

- Vilka / vem gör upp planer för SSS-studierna i er läroanstalt?
- Har er läroanstalt ett mångprofessionellt team, som gör upp planer för SSS-studierna och matematikstudierna?
- Erbjuds det studier i SSS-matematik som en möjlighet för de studerande att gå vidare i sina studier? Hur har ni gett de studerande stöd i dessa utmaningar?
- Använder er läroanstalt någon särskild kartläggning av utgångsnivån eller planerar ni att göra en sådan?
- På vilket slags innehåll i matematiken fokuserar SSS-undervisningen i er läroanstalt?

### 3 Skolmatematikens knutpunkter

I kapitel 2 behandlades utmaningar med de studerandes färdigheter i matematik som framkommit genom lärarnas erfarenheter. Skolmatematikens knutpunkter innehåller de utmaningar som lyfts upp av matematiklärare och bakgrundsbegreppen till dessa utmaningar. Av knutpunkterna, som utgör innehållet i bildserien, som länkas till rubriken för kapitel 3, framgår matematikens kumulativa karaktär tydligt. Utmaningarna i nybörjarundervisningen upprepas när man går vidare till de följande klasserna. Detta betyder att skillnaderna i matematikkunskaper mellan lågpresterande och högpresterande ökar. Knutpunkter är de centrala begreppen och innehållen i skolmatematiken, som är särskilt förknippade med utmaningar i lärandet, och bristande kunskaper i dem orsakar utmaningar i matematikstudierna.

#### Stöd för att förstå tiosystemet och måttenheter

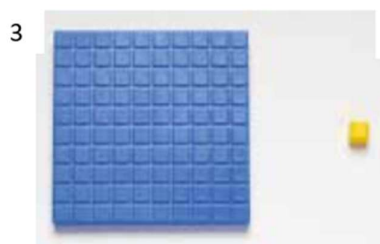
För dem som har kommit direkt från grundutbildningen till yrkesutbildningen visar sig utmaningarna med matematiken redan när det gäller att behärska grundläggande räkneoperationer (se föregående kapitel 2) (Obs! De grundläggande räkneoperationerna tas upp redan i nybörjarundervisningen). Svårigheter med att till exempel förstå multiplikation eller multiplikation/division med tiotal är redan ett tecken på att det kommer att uppstå utmaningar med procenträkning. Svårigheterna med att förstå kan ses både i att förstå tiosystemets struktur och i enhetsomvandlingar. Ifall en studerande inom byggbranschen inte kan omvandla centimeter till meter, kommer hen förmodligen att ha svårt med beräkningar gällande att beräkna olika mängder material och ytor inom sin bransch. Vid utmaningar med enhetsomvandlingar lönar det sig att säkerställa att det inte finns några brister i hanteringen av tiosystemet, till exempel vid förflyttning från en sifferplats till en annan. I de följande bilderna 2–4 konkretiseras tiofaldigheten med hjälp av tiobasmaterial genom tiofaldighet och multipler samt att bygga upp tal med hjälp av tiobasmaterial.

Bilder 2,3,4

Illustration av tiosystemet först med hjälp av begreppet tiofaldig och sedan med hjälp av multipler [\[6\]](#)



- Otetaan kymmensauva ja ykköskuutio.
  - Kuinka monta ykköskuutiota tarvitaan kymmensauvaan? (10)
  - Siis kymmensauva on kymmenkertainen ykköskuutioon verrattuna.
  - Se merkitään kymmenen on yhtä suuri kuin kymmenen kertaa yksi.
- $10 = 10 \cdot 1$



- Otetaan satalevy ja ykköskuutio.
- Kuinka monta ykköskuutiota tarvitaan satalevyyn? (100)
- Siis satalevy on satakertainen ykköskuutioon verrattuna.
- Se merkitään sata on yhtä suuri kuin sata kertaa yksi.

$100 = 100 \cdot 1$



- Otetaan tuhatkuutio ja ykköskuutio.
- Kuinka monta ykköskuutiota tarvitaan tuhatkuutioon? (1000)
- Siis tuhatkuutio on tuhatkertainen ykköskuutioon verrattuna.
- Se merkitään tuhat on yhtä suuri kuin tuhat kertaa yksi.

$1000 = 1000 \cdot 1$

På bild 5 konkretiseras talet 1234 med hjälp av tiobasmaterial. Att illustrera talet 1234 först med enhetskuber och sedan gradvis ta med materialet som beskriver nästa talenhet tills det sista steget inkluderar de fyra talenheterna av talet 1234 hjälper den studerande att strukturera relationerna mellan talenheterna. Dessutom är det viktigt att talet läses högt vid varje steg och även skrivs ner med siffror.

Bild 5

Konkretisering av talet 1234 med hjälp av tiobasmaterial [6]

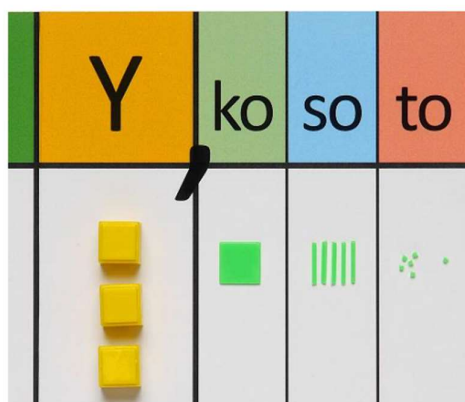
Luku 1234 välineillä	Luku 1234 laskuna (taululle) ja puhuen	
	Laskuna taululle	$1234 = 1234 \cdot 1$
	Puhuen	Tuhatkaksisataa kolmekymmentäneljä ykköskuutiota
	Laskuna taululle	$1234 = 123 \cdot 10 + 4 \cdot 1$
	Puhuen	Ykköskuutiot vaihdetaan kymmensauvoiksi ja ykköskuutioksi. Nyt meillä on satakaksikymmentäkolme kymmensauvaa ja neljä ykköskuutiota.
	Laskuna taululle	$1234 = 12 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 1$
	Puhuen	Sauvat vaihdetaan satalevyiksi ja kymmensauvoiksi. Nyt meillä on kaksitoista satalevyä ja kolme kymmensauvaa ja neljä ykköskuutiota.
	Laskuna taululle	$1234 = 1 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 1$
	Puhuen	Satalevyt vaihdetaan tuhatkuutioksi ja satalevyiksi. Nyt meillä on yksi tuhatkuutio ja kaksi satalevyä ja kolme kymmensauvaa ja neljä ykköskuutiota

På bild 6 presenteras decimaltalet 3,156 med hjälp av tiobasmaterial. Genom att konkretisera decimaltal med hjälp av tiobasmaterial och läsa dem högt enligt tiosystemet kan man börja förstå hur decimaltalen är uppbyggda. Talet 3,156 bör läsas på matematiklektionen enligt tiosystemet på följande sätt: "Tre hela etthundrafemtiosex tusendelar".

Bild 6

Konkretisering av ett decimaltal med hjälp av tiobasmaterial [6]

Desimaaliluku **3,156** konkreettisesti esitettyinä:  
 $3,156 = 3 + 0,1 + 0,05 + 0,006$ .  
 Se luetaan 3 kokonaista 156 tuhannesosaa.  
 Se on myös kolme ykköstä, yksi kymmenesosa, viisi sadasosaa ja kuusi tuhannesosaa.



På bild 7 illustreras sambandet mellan tiosystemet och de dekadiska måttenheterna. I tabellen på den översta raden finns förkortningarna för tiosystemets talenheter för att illustrera tiosystemet och under dem förkortningarna för enheterna längd, massa och litervolym. Förhållandet mellan dessa enheter är 10. [6] I samband med måttenheterna måste man lära sig de så kallade mellanmåten, som förekommer i vardagen (t.ex. dam, hm), eftersom sambandet mellan måttenheterna och det tiofaldiga annars kan bli oklart.

Bild 7

*Kopplingen mellan tiosystemet och de dekadiska enheterna [6]*

Kymmenjärjestelmä	T	S	K	Y	ko	so	to
Pituus	km	hm	dam	m	dm	cm	mm
Massa	kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
Litratilavuus	kl	hl	dal	l	dl	cl	ml

Det är bra att konkretisera och bekräfta måttenheterna med egna mätningar. I undervisningen i SSS-matematik borde man konkretisera måtten genom att tillsammans med de studerande mäta upp stödpunkter för måttenheterna, till exempel ur den studerandes yrkesområdes synvinkel. Stödpunkterna gör det lättare att komma ihåg måttenheter och uppskatta storleken. Stödpunkter kan skapas först genom bedömning och sedan genom att kontrollera genom att mäta vad som kan vara en meter långt och vad som skulle vara en millimeter långt. De egna mätningarna fotograferas och under bilderna anges den måttenhet som finns på bilden. På så sätt kan de studerande bygga upp sina egna måttenhetskort. Måttenhetskort finns även i kommersiella versioner. På följande bild 8 visas måttenhetskort med stödpunkter.

Bild 8

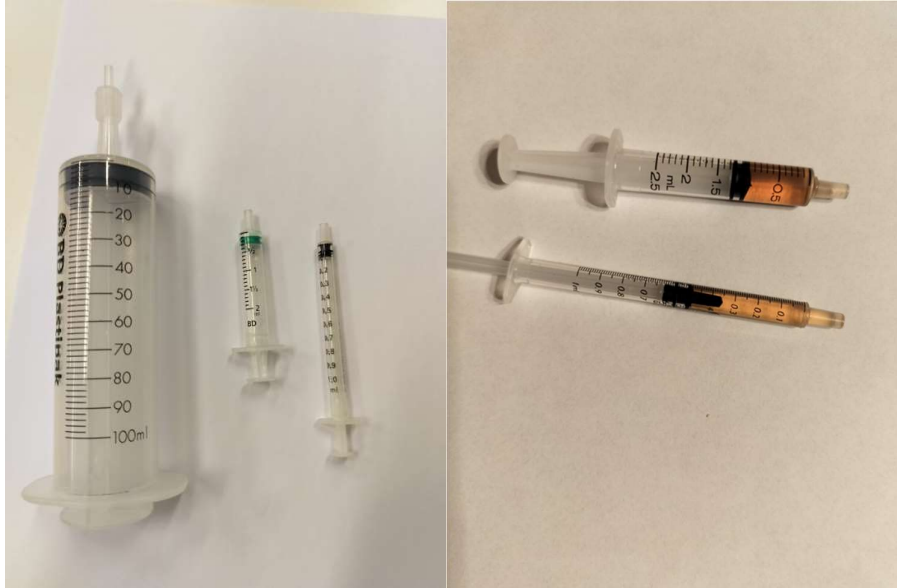
*Måttenhetskort med stödpunkter [6]*



Måttenhetskort finns tillgängliga för såväl dekadiska måttenheter som för yt- och volymmått. Utöver måttenheter och stödpunkter för måttenheter bör man också öva sig på att mäta och läsa mätskalor i SSS-matematiken med hjälp av mätinstrument för sitt yrkesområde. De följande bilderna 9–11 visar exempel på mätinstrument med anknytning till några yrkesområden, med vilka mätning och avläsning av mätskalor borde övas i enlighet med den studerandes yrkesinriktning. På bild 9 visas typiska redskap för social- och hälsovården, medicinsprutor, för vilka användningen och förmågan att avläsa mätskalor bör övas.

Bild 9

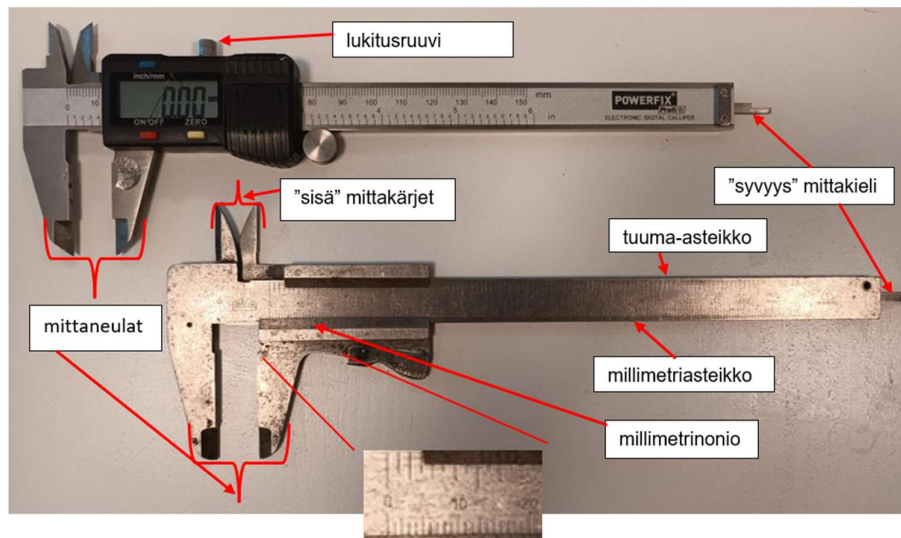
*Olika medicinsprutor (social- och hälsovårdsbranschen)*



På bild 10 visas bilder på skjutmått (i vardagsspråk kallas skjutmått bl.a. "mauser"), som hör till de grundläggande verktygen inom teknikbranschen. Ett teknikproffs måste behärska korrekt användning av skjutmättet och därför är det bra att öva på att använda skjutmått redan under SSS-studierna. Hundratal olika modeller av skjutmått har tillverkats för olika ändamål.

Bild 10

*Det digitala skjutmättet och det traditionella skjutmättet och benämningar på dess delar*



På bild 11 visas en tryckmätare, som kan användas inom fordons- och transportteknik för att mäta däcktrycket.

Bild 11

*Däcktrycksmätare*



Däcktrycksmätarens värden anges i bar, som ofta används för att ange tryck i en vätska eller en gas. Däcktrycket kan också anges i psi (pund per kvadrattum), som är den enhet för tryck som används i angloamerikanska länder. Ett psi är 6,894 76 kPa (kilopascal) alltså 0,068 947 6 bar. En bar motsvarar 1000 pascal alltså en kilopascal Bar är inte en enhet enligt SI-systemet, men av den kan man skapa multipler enligt tiosystemet. Till exempel är en millibar 0,001 bar eller 100 pascal. Det är också bra att öva på måttenheter för tryck och hur man avläser dem i SSS-matematiken.

### **Tallinjen som stöd för grundläggande räkneoperationer**

För studerande som kommer till yrkesstudier märks ofta utmaningar med matematikens basinnehåll (bl.a. talbegrepp, grundläggande räkneoperationer) eller/och med verbala uppgifter. Om personer med invandrarbakgrund har stora brister i skolmatematikens basinnehåll (har till exempel gått i skola bara två år i hemlandet), uppstår det ofta utmaningar med addition och subtraktion, särskilt när man går över till negativa tal. Om det finns utmaningar med talbegreppet redan inom det naturliga talområdet, så orsakar utvidgningen av talområden utmaningar. Till exempel följande räkneuppgift

$2-5 = -3$  har varit utmanande för just de studerande vars skolbakgrund varit knapp och/eller det har funnits utmaningar med de grundläggande räkneoperationerna för naturliga tal. I handledningen av en sådan uppgift har förståelsen fått stöd av att uppgiften konkretiserats med hjälp av en tallinje. Tallinjen har man till en början närmast sig med hjälp av en traditionell utetermometer, vilket konkretiserar en lodrät tallinje på ett bra sätt (se bild 12). Utetermometern kan också vara bekant för en invandrarstuderande. Att granska termometern hjälper till att förstå de negativa talen under noll.

Bild 12

*Med hjälp av en traditionell utetermometer kan tallinjen och de negativa talen konkretiseras*

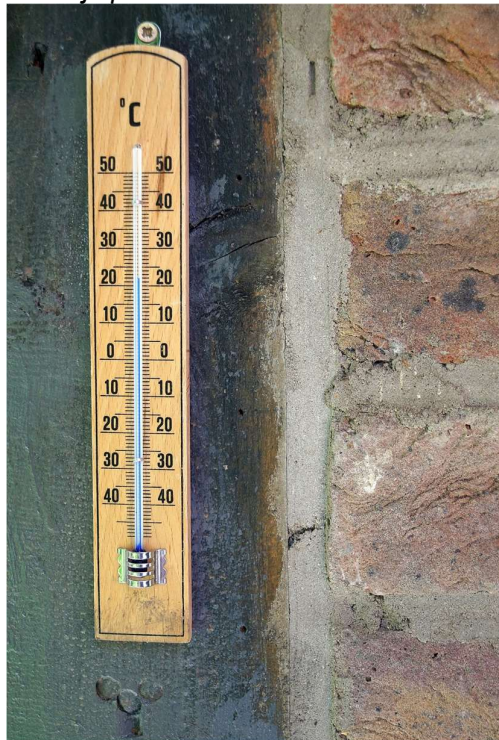


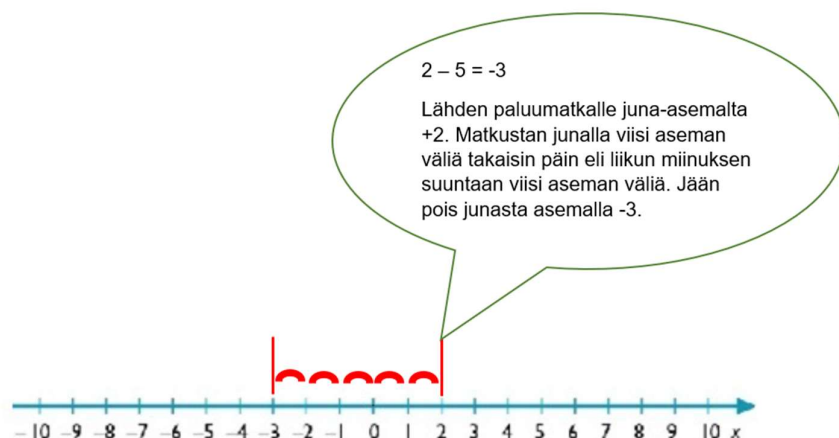
Bild Pixabay MIH83

Att undersöka utetermometern har gjort det lättare att gå vidare till att illustrera negativa och positiva tal med hjälp av en vågrät tallinje. Lösningen på uppgiften  $2-5 = -3$  presenteras med hjälp av tallinjen på bild 13. Framskridandet i att lösa uppgiften kan tänkas på följande sätt: Först undersöker vi tallinjen genom att rita en tallinje, på vilken både positiva och negativa heltal antecknas. Tillsammans med den studerande granskas de heltal som antecknats på tallinjen och noteras att förtecknet visar på vilken sida om noll talet är. Talet (talets egenvärde) visar avståndet från noll. Efter att tallinjen granskats, löses uppgiften  $2-5 = -3$  på tallinjen tillsammans med den studerande, till exempel genom en beskrivande berättelse. För en tågresa markeras avgångsstationen minskande,  $+2$ , som markeras med en symbol (den lodräta röda linjen på bild 13). Konstateras att avgångsstationen är vid punkten  $+2$ . Beräkningsuttrycket granskas, och man kan se att talet 5 ska subtraheras från talet  $+2$ . Eftersom det är

en subtraktion måste vi gå fem steg bakåt från station +2, alltså tåget går i minusriktning fem stationer (eftersom 5 subtraheras från talet 2). Slutligen kontrollerar vi på vilken station vi hamnade. (Se bild 13)

Bild 13

Talet  $2 - 5 = -3$  konkretiseras med hjälp av tallinjen



Även om uppgifter som exemplet på bild 13 har övats i både SSS-matematiken och i den obligatoriska matematikundervisningen, kan liknande uppgifter som exemplet på bild 13 vara utmanande. Sådana här grundläggande beräkningar med heltal är svåra att lära ut från början, om det inte tidigare har skapats någon utbildningsmässig bakgrund för dem. Av den här anledningen skulle det vara bra att först repetera de grundläggande färdigheterna såsom talföljdskunskaper samt addition och subtraktion inom det naturliga talområdet och att säkerställa de studerandes färdigheter inom det naturliga talområdet. Efter repetitionen kan man gå vidare till området för hela tal för att undersöka både talföljder och addition och subtraktion. För att uppnå smidighet i de grundläggande räkneoperationerna, ska man öva sig att räkna i talföljder så att man kan hantera tal smidigt. Här är ett litet exempel på att öva kunskaperna i talföljder.

### Exempel

a) Förläng följande talföljder med tre termer.

a) 1, 3, 5, \_\_, \_\_, \_\_

b) 3, 6, 9, \_\_, \_\_, \_\_

c) 5, 10, 15, \_\_, \_\_, \_\_

d) 15, 13, 12, \_\_, \_\_, \_\_

e) 10, 8, 6, \_\_, \_\_, \_\_

f) 18, 15, 12, \_\_, \_\_, \_\_

b) Ringa in det större talet. a) 5      8    b) 15      8

c) Skriv in intilliggande tal.    a) \_\_, 7, \_\_    b) \_\_, 15, \_\_

Det är också bra att utföra övningar som i exemplet ovan med större naturliga tal och decimaltal (decimantal, med enbart tiondelar). Flera av ovan nämnda övningar finns i Ikäheimos [7] materialbok (Materiaalikirja). Materialboken innehåller bra övningar för att öva talföljdskunskaper och beräkningsstrategier för addition och subtraktion med hjälp av analogier för att det ska gå smidigt med såväl

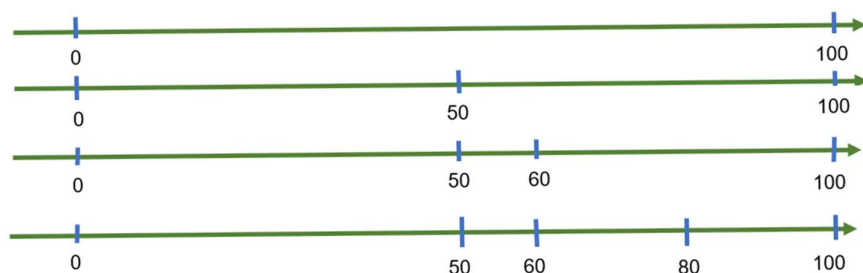
naturliga tal som med decimaltal. Det skulle vara bra att använda tallinjen som stöd vid talföljdsövningar. På så sätt vore det naturligt för de studerande att övergå till att öva addition och subtraktion konkret som övergångar gjorda på tallinjen i enlighet med räkneoperationerna (se föreg. bild 13). Samtidigt skulle användningen av tallinjen också bli bekant och det skulle vara lättare att använda den när talområdet utvidgas till de rationella och reella talen.

### **Att studera tal med hjälp av en blankotallinje**

Talbehandlingskunskaper (bl.a. talföljds-kunskaper, kunskaper i att jämföra tal) ska behärskas smidigt i det naturliga talområdet innan man kan gå vidare till att studera tal i andra talområden. Tallinjen är ett bra redskap för att studera tal och jämföra storleken på dem. En blankotallinje, vars idé förklaras på bild 14, är särskilt lämplig för att jämföra tal. Vi börjar jämföra talen genom att rita en blankotallinje enligt följande bild 14. Idén med blankotallinjen är att det bara finns några tal färdigt på den. I exemplet på bild 14 är uppgiften att hitta platser för de siffror som ska jämföras på tallinjen och därmed komma fram till vilket tal, 60 eller 80, som är större. Uppgiften påbörjas med att rita en tallinje, på vilken endast talen 0 och 100 är markerade, eftersom talen som ska jämföras hamnar mellan dessa. Därefter söker vi efter talet 50 på blankotallinjen, eftersom det är halvvägs mellan talen 0 och 100. Vi fortsätter med att bestämma platsen för talet 60 genom att överväga vilka jämna tiotal som ligger mellan talen 50 och 100 och hur dessa jämna tiotal placeras på tallinjen. Därefter söker vi efter en plats för talet 80 på blanko-tallinjen. Vi antecknar talen på tallinjen och jämför talen 60 och 80 med varandra. Vilket av dessa tal är större, alltså vilket av talen är närmare talet 100? Av bild 14 kan ses, att talet 80 är närmare talet 100. Talet 60 är igen närmare talet 50 än talet 100, så talet 80 är större än talet 60.

Bild 14

*Fortsatt jämförelse av talen 60 och 80 med hjälp av en blankotallinje. Vi lägger märke till att talet 80 är större än talet 60*



Samma idé kan också tillämpas utmärkt på större tal och decimaltal. Det kan vara en utmaning för de studerande att jämföra decimaltal, särskilt om det finns utmaningar med att förstå tiosystemet. Till exempel följande uppgift kan orsaka utmaningar: Vilket tal är större 0,235 eller 0,36? Den studerande kan inledningsvis ledas till jämförelsen mellan dessa tal med hjälp av en vanlig linjal. Linjalen undersöks tillsammans med den studerande och vi konstaterar att linjalen är uppdelad i centimetrar och centimetrarna vidare i millimetrar. Uppmärksamhet fästs vid hur många millimetrar det går per centimeter. Vi observerar att en centimeter är uppdelad i 10 mindre delar och storleken på en del motsvarar en millimeter. Därefter kan en blankotallinje ritas markerad med siffrorna 0 och 1. Mellanrummet, som är markerat på tallinjen, delas upp i tio lika stora delar genom att först söka en plats för talet 0,5 på tallinjen. Sedan placeras de övriga decimaltalen markerade med tiondels noggrannhet på tallinjen. Det kan ännu konstateras, att mellanrummet mellan siffrorna 0 och 1 är uppdelat i tio lika stora delar och att längden på en del är 0,1. Samtidigt betonas också vikten av att läsa decimaltalen högt enligt tiosystemet. Talet 0,1 läses enligt tiosystemet "Noll hela, en tiondel". Så får tiondelen en betydelse. En tiondel innehåller

inga hela och tiondelarna anges strax till höger om decimalkommat. Hundradelarna undersöks på samma sätt. Vi ritar en tallinje, där talen 0 och 0,1 är markerade enligt bild 14. Mellanrummet mellan 0 och 0,1 delas upp med samma princip i tio lika stora delar. På så sätt får hundradelarna en betydelse. Vi observerar att hundradelarna är mindre än tiondelarna och en tiondel innehåller tio hundradelar. Vi observerar att hundradelarna är placerade bredvid tiondelarna, andra till höger från decimalkommat. Undersökandet av tusendelar fortsätter på samma sätt. Allt eftersom arbetet fortskrider börjar platserna för decimaltalen bli konkreta för den studerande. Att arbeta med blankotallinjen hjälper den studerande att jämföra storleken på decimaltal sinsemellan och öppnar upp decimaltalssystemet för den studerande. Så småningom börjar den studerande inse att tallinjen är full av tal.

### **De språkliga utmaningarna påverkar kunskaperna i skolmatematikens knutpunkter**

De språkliga utmaningarna märks i den obligatoriska matematiken, särskilt i procenträkning och grunderna för ekonomisk och statistisk matematik eftersom dessa avsnitt har mest verbala uppgifter. I samband med dessa uppgifter bör uppmärksamhet fästas vid ett lättförståeligt språk för uppgifterna och användningen av lätt språk i undervisningen. Ett lättförståeligt språk stöder förståelsen av innehållet i uppgifterna, även om den studerande använder översättningsprogram för att stöda förståelsen av innehållet i uppgiften (se förklaringarna för användning av lätt språk i avsnittet Verbalisering i kapitel 6). Att använda Google-översättare eller en ordlista på matematiklektionerna hjälper som regel med utmaningarna i att förstå det svenska språket. En metod, som visat sig vara bra i provet i ekonomisk och statistisk matematik har varit en ordlista över de viktigaste orden utarbetad tillsammans med den studerande i vilken de studerande översätter de viktigaste begreppen inom ekonomisk och statistisk matematik till sitt språk. Att översätta begrepp till ett annat språk med hjälp av översättningsprogram kan ibland vara problematiskt eftersom Google-översättningen till exempel inte känner igen alla uttryck på svenska. En term, som har visat sig vara en sådan, är "årlig räntesats", vars betydelse är svår att förstå för många studerande. Till exempel i en undervisningssituation förstod en studerande som talar ryska som sitt modersmål räntesatsen men inte termen årlig. Google-översättningen var inte till någon hjälp i den här situationen. Översättningen kände inte till ordet årlig och kunde inte översätta ordet årlig från svenska till ryska. Till slut förstod den studerande hela frasen med hjälp av lärarens muntliga förklaring, och skrev den på sitt språk i ordlistan, som han fick använda som hjälp i provet.

### **Stödmaterial som stöd för knutpunkterna i skolmatematiken**

I handboken, som Ikäheimo [6] publicerat, får SSS-läraren ett bra stöd för konkret undervisning i matematik och förklaring av knutpunkterna i grundskolans matematik. I handboken presenteras grundläggande begrepp ur skolmatematikens synvinkel. Boken ger goda perspektiv på användningen av inlärningsverktyg i matematikundervisningen. Boken baserar sig på följande idé: "*Vägen till att lära sig matematik är att förstå.*" [6]. Vi rekommenderar denna bok som handbok för SSS-lärare och lärare som undervisar i matematik på andra stadiet. I de två följande videorna förklarar Ikäheimo grunderna för boken "*Matematiikan osaaminen vahvaksi*".

Ikäheimo, H. (2022). [Lukukäsite matematiikan oppimisen perustana](#). Inledande föreläsning 1/2 för användande av boken *Matematiikan osaaminen vahvaksi*. *ELLI*.

Ikäheimo, H. (2022). [Peruslaskujen käsitteet vahvoiksi](#). Inledande föreläsning 2/2 för användande av boken *Matematiikan osaaminen vahvaksi*. *ELLI*.

Som redan tidigare nämnts, har '*Materiaalikirja*' [7] färdigställt som ett kompletterande material till Ikäheimos [6] handbok. Materialboken innehåller goda detaljerade kartläggningar och övningar för talbegreppet, strategier för grundläggande räkneoperationer, huvudräkningar, tiosystemet och för behärskande av måttenheter. Målet med kartläggningarna och övningarna i materialboken är att göra begreppen bakom grundläggande räkneoperationer och de grundläggande räkneoperationerna smidiga. Dessa kartläggningar och detta knogande passar utmärkt som SSS-övningar särskilt för dem, som har utmaningar med grundläggande räkneoperationer och begrepp kopplade till dem. Materialbokens knogande och kartläggningar har förklarats både i ovan nämnda handbok av Ikäheimo och i den inledande föreläsningen del 2/2 "*Peruslaskujen käsittöet vahvoiksi*". Både boken '*Matematiikan osaaminen vahvaksi*' och '*Materiaalikirja*' passar utmärkt för SSS-undervisning och som ett verktyg för att göra övningarna i matematikens grundläggande färdigheter smidiga. Tilläggsinformation om Ikäheimos böcker kan i skriftlig form fås på Opperis sidor, som är länkade till nästa rubrik.

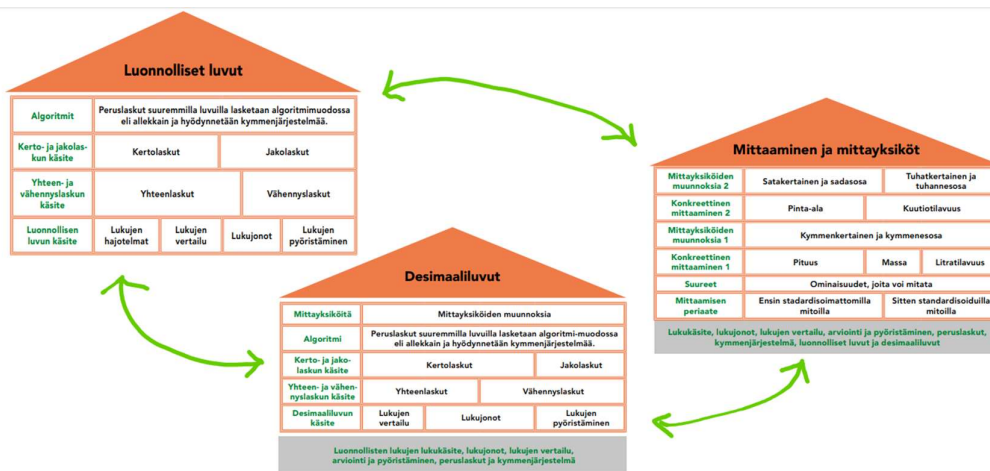
Ikäheimo, H. (2022). [Böckerna Matematiikan osaaminen vahvaksi](#). Opperi.

I de YouTube-videor som länkas till Opperis sidor förklarar Ikäheimo bl.a. skolmatematikens knutpunkter med hjälp av inlärningsverktyg och konkret matematikundervisning i samband med dessa. Det finns totalt 26 videor och innehållet i dem handlar om centrala begrepp kopplade till grundläggande räkneoperationer och knutpunkter i skolmatematiken.

Ikäheimo, H. & Voipio, P. (2022). [Opperis YouTube –videor gällande matematikundervisningen](#) .

De matematiska tegelhusen som beskrivs av Ikäheimo [6] hör väsentligt ihop med knutpunkterna i skolmatematiken och belyser väl den kumulativa uppbyggnaden av de matematiska färdigheterna. I matematiken byggs nya kunskaper på basen av tidigare kunskaper och den studerande bör därför kunna koppla ihop nya saker till den tidigare kunskapsstrukturen. Här kan man tala om konstruktivt och även socialt kunskapsbyggande, eftersom den studerande ska få fundera över matematiska begrepp tillsammans med läraren och andra studerande (jfr. principerna för verbalisering). I följande bild nr. 15 presenteras Ikäheimos [6] matematiska tegelhus. Efter bilden finns en länk till tegelhusen i form av en PDF-fil, som gör dem mera lättlästa.

Bild 15  
 Matematiska tegelhus som Ikäheimo [6] presenterat



Luonnollisen luvun käsite luo pohjan peruslaskuille ja kymmenjärjestelmälle. Desimaaliluvun käsite luo pohjan myös mittayksiköiden muunnoksille. Mittaamista kotona ja koulussa ennen mittayksiköiden muunnoksia.

Ote Hannele Ikäheimon käsikirjasta Matematiikan osaaminen vahvaksi. Iloa opettamiseen ja oppimiseen. Kustantaja: ELLI

Ikäheimo, H. (2022). [Matematiikan tiilitalot](#). *Opperi*.

I många läroanstalter har övningspaket för att öva grundläggande matematikfärdigheter utarbetats. Ett sådant har tagits fram i Polkuja-projektet finansierat av Utbildningsstyrelsen. Detta material finns tillgängligt via länken till följande rubrik:

Kankainen, J. & Malila, A. (2022). [MATIKKAKERTAUS. Matematiikan preppaus laskennan perusteiden harjoitteluun](#). (licens CC BY-NC-SA 4.0) Koulutuskeskus Salpaus -kuntayhtymä.

Matikkakertaus (Matikrepetition) är avsedd för att öva grunderna i matematik för dem som studerar på andra stadiet. Den första delen av verket fokuserar på att säkerställa de grundläggande räknekunskaperna, i den andra delen övas kunskaperna i procenträkning och i den tredje delen repeteras grunderna i geometri. Matikkakertaus lämpar sig väl för att öva SSS-matematik-kunskaper.

## Sammanfattning kapitel 3

### *Knutpunkter*

- Skolmatematikens knutpunkter framträder i utmaningarna med den studerandes matematikkunskaper - utmaningarna med matematikfärdigheterna finns ofta redan i grundbegreppen i de lägre klasserna (Jfr. Bild 11 Matematiikan tiilitalot [\[6\]](#) )
- I SSS-undervisningen poängteras de grundläggande begreppen för de matematiska färdigheterna
- Den studerande borde uppnå minst en god nivå på sina grundläggande räknefärdigheter.
- I undervisningen är det viktigt att konkretisera undervisningen antingen med matematiska inlärningsverktyg eller med andra lämpliga redskap och skisser
- Ur lärandesynvinkel är det viktigt att de studerande motiverar sina lösningar
- Undervisningen borde ske på lätt språk
- Knutpunkterna är ett bra stöd när man utarbetar kartläggningen av utgångsnivån

### *För reflektion*

- Hurdana utmaningar med färdigheterna i matematik har de studerande i er läroanstalt?
- På vilka sätt påverkas planeringen och genomförandet av färdigheterna i SSS-matematik av de studerandes utmaningar med lärandet?
- På vilka sätt handleder ni de studerande i färdigheterna i SSS-matematik? Hurdana arbetssätt använder ni?

## 4 Kartläggning av utgångsnivån för matematiska färdigheter

I början av yrkesstudierna bör de studerandes grundläggande matematiska färdigheter kartläggas för att fastställa nivån på grundfärdigheterna i matematik. Matematiska färdigheter kartläggs också om läraren oroar sig för att den studerande antingen har inlärningssvårigheter i matematik eller har brister i grundläggande matematikkunskaper som försvårar matematikinläringen. Att kartlägga de studerandes utgångsnivå är viktigt eftersom det finns många viktiga grundläggande färdigheter och kunskaper inom matematik som det är bra att behärska för att uppnå smidig matematikfärdighet. Sådana saker inkluderar t.ex. förståelse av tal och de underliggande grundfärdigheterna (som t.ex. talserier, förhållandet mellan tal och mängd) samt utvidgningen av förståelsen för tal till olika talområden, beräkningsstrategier (vilket innebär smidighet i att hantera tal samt behärskning av beräkningsregler), snabba huvudräkningar (som också är relaterade till smidig hantering av tal), grundläggande räkneoperationer, behärskning av tiotalssystemet samt enheter och deras omvandlingar och grundläggande geometriska begrepp. När det finns en stark grund för de grundläggande begreppen är det lättare för den studerande att tillämpa det inlärd på verbala uppgifter och problemlösning. I följande PDF-kompendium lyfter Ikäheimo fram innehållet i Ikäheimos [7] *Materiaalikirja*, som redan refererats till, (precisionskartläggningar och -övningar), kartläggning av matematikkunskaper samt betydelsen av korrekt undervisning.

Ikäheimo, H. (2021). [Ota selvää, mitä oppilaat osaavat ja suunnittele korjaava opetus](#). *Opperi*.

I Ikäheimos text framgår det tydligt hur matematiskt kunnande byggs upp på grundläggande kunskaper och färdigheter. Om det finns luckor i de grundläggande kunskaperna och färdigheterna är det svårt att bygga upp en hållbar grund för att lära sig matematik.

### 4.1 Gallringar, tester och kartläggningar

#### **Gallringar och tester**

Ett sätt att klassificera bedömningsverktyg för matematik är att avgöra om de är baserade på kriterier eller normer. Med kriterier avses en utomstående grund för bedömningsverktyget, såsom teorier och undersökningar, eller en grund som kommer från läroplanen. Provet är mätinstrument som baserar sig på läroplanen. Mätinstrument som baserar sig på utvecklingspsykologi och forskning är gallringar eller screeningar och tester. Både screeningar och tester kan vara antingen normbaserade eller kriteriebaserade. Ett kriterium är en utomstående grund för mätinstrumentet, såsom kriterierna för vitsordet 8 i läroplanen som har ett krav på innehåll liksom alla målen för matematik i sjätte klass. Ett kriterium som baserar sig på kunnande kan till exempel vara förmågan att använda en tallinje för att beräkna skillnaden mellan två tal och, för de som avslutar den grundläggande utbildningen, förmågan att lösa första gradens ekvationer på matematikens språk (symboliskt). En norm baserar sig däremot på en undersökning där det har samlats in ett stort eller representativt prov eller urval på finländska barn för hur de klarar av att lösa vissa uppgifter. Genom att använda procentandelen av lösningar och totalpoängen för uppgifterna i studien kan fördelningar fastställas för ålder, kön, hemspråk eller andra faktorer. Med

hjälp av nyckeltalen i fördelningen (såsom medelvärde, standardavvikelse) kan man beräkna en plats för alla värden i fördelningen. Mestadels är utvecklingsmålet och resultatet av mätinstrumenten ett material som följer normalfördelningen. Normalfördelningen hjälper användaren av mätinstrumentet att tolka hur ett barns prestation i testet jämförs med andra barn i samma åldersgrupp. [8] I följande tabell (2) presenteras en tabell sammanställd av Aunio, Hautamäki och Mononen [8] med mätinstrument baserade på kunskap i utvecklingspsykologi i alfabetisk ordning.

Tabell 2

*Mätinstrument baserade på utvecklingspsykologisk kunskap och forskning i alfabetisk ordning enligt Aunio, Hautamäki och Mononen [8]*

Mittari	Ikä /kohderyhmä	Keskeiset mitattavat taidot	Tarkempi kuvaus mitattavista taidoista	Normit
Banuca	1.– 3. lk	Lukukäsite ja peruslaskutaito (Vertailu, määrä; Laskeminen, yhteenlasku; Vastaavuus, määrä ja luku; Laskeminen, vähennyslasku; Lukujono; Lukujen vertailu; Vastaavuus, sanottu ja luku; Laskeminen, laskut; Aritmeettinen päättely)	Vertailu, määrä: suurimman lukumäärän (4 vaihtoehtoa) valitseminen; Laskeminen, yhteenlasku: yksinkertaisia yhteenlaskuja symboleilla (lukualue 1-20) (aikaa 3 min). Vastaavuus, määrä ja luku: pisteiden lukumäärän ja sitä kuvaavaan symbolin (4 vaihtoehtoa) yhdistäminen; Laskeminen, vähennyslasku: yksinkertaisia vähennyslaskuja symboleilla (lukualue 1-20) (aikaa 3 min); Lukujono: annetun lukujonon täydentäminen (3 lukua annetaan symboleilla ja yksi puuttuu välistä); Lukujen vertailu: suurimman luvun valitseminen (4 lukua annetaan symboleilla, 0-15 000); Vastaavuus, sanottu ja luku: sanotun luvun tunnistaminen (4 vaihtoehtoa); Laskeminen, laskut: yhteen- ja vähennyslaskuja symboleilla, osasta puuttuu vastaus, osasta joku muu tekijä; Aritmeettinen päättely: annetun lukusarjan jatkaminen (4 vaihtoehtoa)	Kyllä
KTLT	7.-9. lk	Laskutaito	Sanallisia ongelmanratkaisutehtäviä (yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolasku); Yhteen-, vähennys-, kerto-, ja jakolasku symboleilla; Mittayksikkömuunnoksia; Geometria ja mittaminen; Algebra; Lukujen pyöristäminen	Kyllä
LukiMat-seulät	esiopetus	Matemaattiset perustaidot (lukumääräisyyden taju, matemaattisten suhteiden hallinta, laskemisen taidot, aritmeettiset perustaidot)	Lukumääräisyyden taju: suuruusluokan vertailu; Matemaattisloogiset taidot: vertailu, sarjoittaminen; Laskemisen taidot: lukujonon luettelutaidot; Numerosymbolien hallinta: Lukusana-määrä-numero-vastaavuus; Lukumäärän määrittäminen laskemalla: osan laskeminen kokonaisuudesta; Yhteenlasku: sanallisen yhteenlaskun ratkaiseminen; Vähennyslasku: sanallisen vähennyslaskun ratkaiseminen	Kyllä
LukiMat-seulät	1.lk	Matemaattiset perustaidot (lukumääräisyyden taju, matemaattisten suhteiden hallinta, laskemisen taidot, aritmeettiset perustaidot, lukujärjestelmätiedon soveltaminen laskemisessa)	Lukumääräisyyden taju: suuruusluokan vertailu; Matemaattisloogiset taidot: vertailu, sarjoittaminen; Laskemisen taidot: lukujonon luettelutaidot; Numerosymbolien hallinta: yksi- ja kaksi enemmän/ vähemmän; Lukumäärän määrittäminen laskemalla: osan laskeminen kokonaisuudesta; Yhteenlasku: sanalliset ja symboleilla esitetyt yhteenlaskut; Vähennyslasku: sanalliset ja symboleilla esitetyt vähennyslaskut; Lukujärjestelmätiedon soveltaminen laskemisessa: rahayksiköiden yhteenlaskeminen	Kyllä
LukiMat-seulät	2.lk	Matemaattiset perustaidot (lukumääräisyyden taju, matemaattisten suhteiden hallinta, laskemisen taidot, aritmeettiset perustaidot, lukujärjestelmätiedon soveltaminen laskemisessa)	Lukumääräisyyden taju: suuruusluokka, vertailu/järjestäminen; Matemaattisloogiset taidot: sarjoittaminen; Numerosymbolien hallinta: lukujen kirjoittaminen; Yhteenlaskun sujuvuus, päässä- ja allekkainlasku; Vähennyslaskun sujuvuus, päässä- ja allekkainlasku; Lukujärjestelmätiedon soveltaminen laskemisessa: rahojen laskeminen, yhteen- ja vähennyslaskun täydentäminen	Kyllä
Lukukäsitte	4 v 6 kk – 7 v 6 kk	Matemaattiset suhdetaidot (vertailu, luokittelu, vastaavuus, järjestäminen); Lukujonotaidot (lukusanojen luuttelemisen, samanaikainen laskeminen, tuloksen laskeminen, lukukäsitteen soveltaminen)	Vertailu: vertailukäsitteiden hallinta (eniten, vähiten, korkeampi, matalampi); Luokittelu: esineiden erottaminen toisistaan ja niiden ryhmittely samankaltaisuuden tai erilaisuuden perusteella; Vastaavuus: yksi-yhteen suhteen hallinta; Järjestäminen: esineiden järjestäminen annetun kriteerin perusteella (esim. enemmästä vähempään); Lukusanojen luuttelemisen: lukujonon luuttelemisen eteen- ja taaksepäin; Samanaikainen ja lyhentyneet laskeminen: konkreettien lukumäärien laskemisen siten, että lapsi voi esim. koskettaa laskettavia esineitä; Tuloksen laskeminen: lukumäärän laskeminen niin, että esineitä ei voi enää koskettaa ja niiden järjestys ei ole selkeä; Lukukäsitteen soveltaminen: laskemisen taidon hyväksi käyttäminen yksinkertaisissa ongelmanratkaisutehtävissä.	Kyllä
Matte	3.– 5. lk	Matematiikan sanallisten tehtävien ratkaisutaito ja laskutaito	Matematiikan sanallisten tehtävien ratkaisutaidot (yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskut, kokonaisluvut 0-999, myös desimaaliluvut), laskutaito päässä-laskutaidot (yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskut, lukualue 0-999) matematiikka-asetteiden arvioiminen	Kyllä
RMAT	1.- 6. lk	Laskutaito	Yhteen- ja vähennyslaskut: ei allekkain, lukualue 0-60; Yhteen- ja kyllä vähennyslasku allekkain, lukualue 1-13 500; Kertolaskut ei allekkain ja allekkain, lukualue 0-500; Jakolaskut: ei jakokulmassa ja jakokulmassa; Mittayksiköt (eurot, sentit, litra, desilitra, minuutit, sekunti); Desimaaliluvuilla kertominen ja yhteenlasku; Murtoluvun muuttaminen desimaaliluvuksi; Yhteenlasku murtoluvuilla; Algebra: yhtälön ratkaiseminen	Kyllä

I bedömningen av inlärningssvårigheter i matematik används ofta screeningar och tester som mätinstrument. Screeningarna är känsliga till sin natur eftersom man med hjälp av dem strävar till att först identifiera alla i undervisningsgruppen som möjligen har svårigheter eller problem i matematik. Ett test å sin sida är ett mer exakt verktyg, eftersom dess uppgift är att skilja ut de personer som har verkliga inlärningssvårigheter i matematik från gruppen som identifierats genom screeningen. Förutom den teoretiska grunden för screeningar och tester fungerar också forskningsmaterial som jämförelsematerial, till exempel resultatet från en viss åldersgrupp som resultaten jämförs med. På så sätt kan man se om elevens färdigheter i genomsnitt ligger på samma nivå som andra elever i samma ålder och om det eventuellt finns behov av särskilt stöd. (jfr. [8])

### **Kartläggningar**

Kartläggningar är individuella bedömningar av matematiska färdigheter som ger en utgångspunkt för planeringen av undervisningen. Kartläggningarna baserar sig på utvecklingspsykologiska utgångspunkter och/eller exempelvis de centrala målen i läroplanen. Poänggränserna för kartläggningarna baseras mestadels antingen på utformarnas gedigna erfarenhet eller på kriterier grundade på utvecklingspsykologi. Kartläggningarna har ändå inte normerats baserat på forskningsmaterial, vilket gör det svårt att identifiera egentliga inlärningssvårigheter utgående från dem. På grund av sin natur torde kartläggningar vara lämpliga just för att kartlägga matematiska färdigheter i egenskap av utgångsnivåtest i yrkesstudier. Syftet med kartläggningarna är att ta reda på vilka områden som behärskas och vilka som inte behärskas. Kartläggningen av de studerandes matematiska färdigheter är viktig eftersom man genom kartläggningarna får reda på vilka områden som behöver stöd och repetition. Med rätt riktat stöd sparas tid och den studerandes studier framskrider. När de områden som behöver stöd har identifierats blir det lättare att planera individuellt riktat SSS-stöd. På så sätt erbjuder de en grund för att definiera behovet av SSS-stöd, eftersom SSS-stödet är allmänt stöd som inriktas på att stärka den studerandes matematiska färdigheter och repetera matematikens innehåll. Färdiga kartläggningar är bl.a. ALVA (*Arvioidaan, Lasketaan ja VAhvistetaan taitoja*) -kartläggningen av grundläggande matematikfärdigheter [9] eller MaKeKo-digiproven [10]. Dessa presenteras närmare i följande kapitel 5. En fördel med kartläggningarna är också att de mestadels innehåller konkreta material för att öva de studerandes färdigheter. I Polkuja-projektet har en sammanfattning av tester och/eller kartläggningar av grundläggande färdigheter producerats. Via följande länk kan du granska den här sammanfattningen.

Polkuja-projektet (2022). [Yhteenveto perustaitoja mittaavista testeistä tai kartoituksista. Careeria.](#)

Screeningar och tester betonar en specialundervisningssynvinkel och ska användas då det finns anledning att misstänka inlärningssvårigheter i matematik.

### 4.1.1 Kartläggningar och tester av utgångsnivån för grundläggande matematiska färdigheter

I det här kapitlet presenteras sådana utgångsnivåtester som på grund av sin natur kan betraktas som kartläggningar och som lämpar sig väl som kriterier för handledning till SSS-studier.

#### **Ett utgångsnivåtestpaket för GEM-ämnen som har producerats inom Polkuja-projektet.**

I *Polkuja-projektet* som finansierats av Utbildningsstyrelsen har det färdigställts ett uppgiftspaket för kartläggning av utgångsnivån, 'Yhteisten tutkinnon osien lähtötasotestit', vid Koulutuskeskus Salpaus, med tillhörande anvisningar som kan hittas i biblioteket för öppna lärresurser. Via följande länk kan du på biblioteket för öppna lärresurser läsa anvisningarna för det ovan nämnda paketet för kartläggning av utgångsnivån:

Polkuja-projektet (2022). [Ohje yhteisten tutkinnon osien lähtötasotestien käytänteisiin](#). Koulukeskus Salpaus-kuntayhtymä.

Du kan ta del av utgångsnivåtesterna för gemensamma examensdelar som producerats inom det ovan nämnda projektet via följande länk:

Polkuja-projektet (2022). [Yhteisten tutkinnon osien lähtötasotestit](#). Koulutuskeskus Salpaus -kuntayhtymä

I kompendiet med utgångsnivåtesterna för de gemensamma examensdelarna finns också svaren till uppgifterna i utgångsnivåtesterna.

#### [Origo-testet](#)

Som en del av TASE-projektet har det vid Åbo universitet utvecklats ett utgångsnivåtest för matematiska färdigheter i början av studier på andra stadiet, *Origo-testet* på Ville-lärplattformen. I utvecklingsarbetet har matematiklärare från högstadieskolor och gymnasier, speciallärare och matematiklärare från yrkesskolor samt universitetsforskare i Åbo stad deltagit. Grunden för *Origo-testet* är det centrala läroinnehållet i den grundläggande matematikundervisningen i nionde klass. Testet är fritt tillgängligt för alla lärare. För att använda sig av det krävs användarnamn för Ville-lärplattformen.

Rubriken är länkad till en bildserie där Origo-testet och dess användning samt en del av yrkesläroanstalten KPedu:s resultat i Origo-testet från år 2022 har förklarats. I den yrkesläroanstalt som granskas används *Origo-testet* på Ville-lärplattformen för att kartlägga de studerandes matematiska färdigheter. Alla nya studerande gör Origo-testet innan matematikundervisningen börjar. Resultaten omvandlas till Excel-tabeller och speciallärarna använder resultaten bland annat för att utforma särskilt stöd. Om testresultatet är under 13 poäng, det vill säga under bronsnivån, finns det vanligtvis behov av en plan för särskilt stöd. Testresultaten jämförs också med den studerandes uppgifter när man utarbetar en plan för särskilt stöd.

Innehållet i *Origo-testet* är omfattande och täcker fler ämnesområden än vad det obligatoriska matematikinnehållet i yrkesutbildningen gör. Bland annat har polynom upplevts vara svåra, åtminstone enligt KPedu:s testresultat från 2022. Dessa svåra delar kan göra studerande som redan kämpar med grundläggande räknefärdigheter modfärdiga. Till exempel fanns det år 2022 en studerande inom livsmedelsgruppen som klarade av att utföra fem av testets nio delar. Hen lämnade fyra delar tomma eftersom frågorna var för svåra för hen. Personens koncentration under provsituationen stördes också

av att andra studerande gjorde testet samtidigt. Enligt den studerande verkade de andra studerandena klara av att svara på frågorna bättre. Testresultatet för den studerande i fråga var 11 poäng. För sådana studerande kan det vara värt att överväga om något annat utgångsnivåtest skulle vara bättre för att mäta deras färdigheter. Dessutom skulle det vara befogat att beakta inställningen till matematik, eftersom den tidigare nämnda studeranden tydligt var rädd för att misslyckas (hen jämförde sig med andra och nedvärderade sina egna färdigheter), vilket störde hens prestation i testet. Vid resultat under 13 poäng kan det också finnas behov av SSS-undervisning i matematik. I fallet med den tidigare nämnda studeranden stannade man dock för att hen skulle få stödundervisning av specialläraren.

De lägsta poängen (hela gruppens genomsnitt var under 20 poäng) var inom livsmedelsbranschen (1 grupp), byggbranschen (1 grupp) och maskin- och metallbranschen (1 grupp). Av dessa tre grupper erbjöds maskin- och metallgruppen SSS-undervisning i matematik. I maskin- och metallbranschgrupperna har det även under tidigare årskurser funnits svaga studerande, så hösten 2022 erbjöds det sex timmar SSS-undervisning i matematik åt alla första årets studerande inom maskin- och metallbranschen. Från livsmedels- och byggbranschgrupperna deltog de studerande i SSS-undervisning som hade störst utmaningar antingen i matematik eller med kunskaperna i finska.

#### 4.1.2 Avgiftsbelagda kartläggningar av utgångsnivån för grundläggande färdigheter i matematik

Exempel på avgiftsbelagda kartläggningar som lämpar sig för yrkesläroanstalter är MaKeKo-digiproven [10] och ALVA (*Arvioidaan, Lasketaan ja VAhvistetaan taitoja*) -kartläggningen av grundläggande matematiska färdigheter (ursprunglig kartläggning Ikäheimo, 2010; förnyad kartläggning [9]). ALVA-paketet innehåller också övningar och material för att stödja matematiska färdigheter både i högstadiet och på andra stadiet.

Även om MaKeKo-digiproven främst berör grundskolan så tjänar deras innehåll också kartläggningar av matematiska färdigheter som görs i början av studierna på andra stadiet. MaKeKo grundar sig på bedömningen av centrala innehåll som nämns i läroplanen för varje årskurs i grundskolan. MaKeKo kan ses som ett summativt bedömningsverktyg som ger läraren information om hur väl eleven har uppnått de mål som anges i läroplanen. MaKeKo kan också betraktas som en screening eftersom det där framkommer en procentandel av rätt lösta uppgifter som bildar gränsvärdet för oro. Detta grundar sig på att behärskan av de saker som nämns i läroplanen för matematik är relaterad till elevernas åldersmässiga utveckling och tidtabellen för undervisning av innehållet. Av den anledningen har det i MaKeKo definierats en tidpunkt för mätningen, med vilken man strävar till att standardisera prestationen. Bedömningsverktyget har inte normerats utgående från forskningsmaterial, vilket begränsar dess användning som grund för att identifiera inlärningssvårigheter. (jfr. [8]) I bildserien som länkas till rubriken nedan om kartläggning av utgångsnivån för matematiska färdigheter i början av studierna, förklaras MaKeKo 1–9-digiproven. I slutet av presentationen ges en kort översikt av ALVA-kartläggningen.

[Matematiikan taitojen lähtötason kartoittamisesta opintojen alussa – MaKeKo 1–9 –digikokeet.](#)

Det är möjligt att skaffa en läroanstaltspecifik licens för MaKeKo 1–9-digiproven hos SanomaPro. Via följande länk om MaKeKo kan du få läsa en beskrivning på SanomaPro:s sidor:

Ikäheimo, H., Putkonen, H., & Voutilainen, E. (2018). [MaKeKo –digikokeet](#). SanomaPro.

ALVA [9] - kartläggningen av grundläggande matematiska färdigheter med övningar för högstadiet och andra stadiet används varierande i yrkesläroanstalterna. Kartläggningen innehåller omfattande övningar relaterade till grundläggande matematiska färdigheter, tiotalssystemet och omvandling av enheter. ALVA publiceras av OPIKKO (<https://www.opikko.fi/alva/>), där man kan skaffa en licens för att använda sig av kartläggningen.

Ikäheimo, H. & Kokko, L. (2023). [ALVA \(Arvioidaan, Lasketaan ja Vahvistetaan\)](#). Matematiikan perustaitojen kartoitus, opetusmateriaaleja ja harjoitustehtäviä yläkouluun ja toiselle asteelle. *Opikko*.

Genom att skaffa en licens för ALVA får du också rättighet att använda det elektroniska materialet för korrektiv undervisning.

## 4.2 Fortsatta åtgärder utgående från kartläggningar

Med hjälp av kartläggningar kan man identifiera de delområden i matematik där det finns brister som senare skulle försvåra lärandet av nya saker. Då kan SSS-studierna ge stöd och övning i tillräcklig mängd så att den studerande kan framskrida i sina studier.

### 4.2.1 Exempel på fortsatta åtgärder utgående från kartläggning av grundläggande matematiska färdigheter

Mikko Halonen (2021), som arbetat som lektor och arbetsplatskoordinator vid Åbo yrkesinstitut, har närmare tagit upp hur man kan stödja de grundläggande matematiska färdigheterna i SSS-studierna som stöder studiefärdigheterna. Detta kompletterar bildserien som länkats till rubriken. Halonen har särskilt granskat studieframgången hos närvårdarstuderande med främmande språk utgående från en enkel kartläggning av matematiska färdigheter som gjorts i början av studierna. Halonen har använt en kartläggning utformad av Hanna Peltonen år 2013, som du får tillgång till via länken till följande rubrik.

Peltonen, H. (2013). [Matematiikan oppimisvaikeuksien kartoitus maahanmuuttajille](#). *Hämeen ammattikorkeakoulu*.

I en video som utgår från resultaten från kartläggningen och en granskning av studieframgång reflekterar Halonen över betydelsen av kartläggningen av utgångsnivån för matematiska färdigheter i förhållande till den studerandes studieframgång. Videon kan ses på biblioteket för öppna lärresurser via länken till följande rubrik.

Halonen, M. (1.3.2022). [Yksinkertainen matematiikan pääsykoe vieraskielisille opiskelijoille: kuinka testatut ovat menestyneet opinnoissaan ja vieraskielisten ryhmien matemaattisten perustaitojen vahvistaminen lähihoitajakoulutuksessa](#). (Licens [CC BY-SA 4.0](#)). *Jyväskylän ammattikorkeakoulu, Ammatillinen opettajakorkeakoulu*.

I videon framgår det hur mycket stöd varje studerande får baserat på resultaten från kartläggningen av utgångsnivån och hurdan deltagande som förutsätts av den studerande. Dessutom ges bra och konkreta exempel på hur bristfälliga matematikkunskaper kan stödjas i SSS-studierna.

#### 4.2.2 Två exempel på stöd för att korrigera matematiska färdigheter

I bildserien som länkas till rubriken beskrivs med hjälp av exempel vilken betydelse korrigerande stöd av två studerandes matematikstudier kan ha så de får sin yrkesutbildning. Av dessa beskrivningar framgår det tydligt hur utmaningar i matematikundervisningen syns i innehållet för lägre klasser. Det är också bra att notera att när problemen ligger i baskunskaperna löses de inte omedelbart utan kräver långsiktigt och systematiskt stöd.

#### 4.2.3 Mot en individuell studieväg – Yrkesbollarna

Yrkesbollarna (se bildserie som länkats till rubriken där Yrkesbollarna är tillgängliga) samlar ämneshelheter relaterade till knutpunkter i yrkesskolans matematik som anses vara viktiga för att klara av studierna i matematik i yrkesskolan. Knutpunkterna har tidigare diskuterats i detta dokument. Yrkesbollarnas innehåll har valts utgående från praktiska erfarenheter. Till exempel påverkar förståelsen av tiosystemet väldigt många olika typer av uppgifter. En av de mest centrala knutpunkterna för yrkesutbildningen torde vara enhetsomvandlingar. En diskussion med den studerande i samband med Yrkesbollarna hjälper till att utreda förhållandet till matematik. Läraren får höra vad den studerande tänker om sina egna matematiska färdigheter och hur den studerande förhåller sig till matematik. På så sätt får läraren i bästa fall verktyg för att möta den studerande och planera sin undervisning.

Yrkesbollarna kan utnyttjas bland annat under den första lektionen med en ny SSS-grupp för att bekanta sig med den och som en del av kursinnehållet under hela SSS-perioden. Dessutom får den studerande med hjälp av Yrkesbollarna genast på den första lektionen fundera på hurdan matematik och vilka matematiska färdigheter hen kommer att behöva i sitt framtida yrke. Yrkesbollarna stödjer den studerandes målsättningar för lärande av matematiska färdigheter och kan som bäst fungera som ett bra motivationsverktyg för matematikstudierna.

##### **Exempel på användning av yrkesbollarna**

Läraren kan planera sina egna Yrkesbollor utifrån kartläggningen av utgångsnivån eller använda färdiga Yrkesbollor som finns i bildserien som är länkad till det här avsnittet. Yrkesbollarna-kompendiet delas ut till de studerande. Varje studerande ringar med grön penna in de innehåll på pappret som hen upplever sig kunna. På samma sätt märker de studerande med ett rött kryss ut innehåll som kräver mer övning eller som de inte kan. Det är bra att tillsammans med de studerande diskutera innehållet i kompendiet - förstår alla vad som står i Yrkesbollarna-kompendiet och vad som menas med det som står på pappret.

När Yrkesbollarna-kompendiet har gått igenom, börjar man studierna till exempel med tiosystemet eller något annat område för grundläggande färdigheter där det finns utmaningar. Först löser man tillsammans några uppgifter. De som har märkt ut att de kan uppgifterna relaterade till tiosystemet kan gå vidare till de följande uppgifterna. De som har märkt ut att de behöver öva på uppgifterna relaterade till tiosystemet får extra övningsuppgifter och sakerna går igenom tillsammans. Av läraren krävs detta olika typer av uppgifter för samma lektion och mycket förberedelser på förhand. För dem som går

framåt snabbare kan man också erbjuda elektroniska uppgifter, till exempel uppgifter på Vile-lärplattformen (<https://vile.utu.fi/>). Yrkesbollarna erbjuder alltså en möjlighet att individuellt gå framåt inom gruppen och fokusera på de områden där varje studerande behöver mest stöd.

#### 4.2.4 Perspektiv och material för att stödja knutpunkter i de grundläggande matematiska färdigheterna

Ikäheimo upprätthåller webbplatsen "*Iloa ja Ymmärrystä matematiikkaan!*", som erbjuder tips och material för matematikundervisningen.

Ikäheimo, H. (2023). *Iloa ja ymmärrystä matematiikkaan!* Opperi. <https://www.opperi.fi/>

På Opperis webbplats finns en länk till Hannele Ikäheimos YouTube-videor på Ikäheimos YouTube-kanal. På den här kanalen finns det 26 undervisningsvideor om att undervisa grundläggande begrepp på ett funktionellt sätt. Hannele arbetar alltid tillsammans med en elev i videorna. Videornas innehåll anknyter väl till arbetsmetoderna i den tidigare nämnda handboken "*Matematiikan osaaminen vahvaksi. Iloa opetukseen ja oppimiseen*" [6]. Videorna förmedlar en genuin interaktion mellan elev och lärare. Du kommer till kanalen via följande länk:

Ikäheimo, H. (2022). [Opperis YouTube-videor gällande matematikundervisning](#). *Hannele Ikäheimos YouTube-kanal*.

Enhetsomvandlingar är en av de viktigaste knutpunkterna inom grundskolans matematik och de utmanar även de studerande i studierna på andra stadiet. Att behärska enhetsomvandlingar baserar sig på förståelse av tiosystemet och dess koppling till dekadiska (med tiobas) mått skulle vara viktigt. Förståelse för förhållandet mellan tiosystemet och enhetsomvandlingar skulle stödja både förståelsen av tiosystemet i sig och dess koppling till enhetsomvandlingar. Å andra sidan innebär detta också en djupgående förståelse av de grundläggande begreppen och färdigheterna relaterade till tiosystemet inom matematik. De tidigare nämnda grundläggande begreppen och färdigheterna inkluderar bl.a. talbegreppet, tallinjefärdigheter, jämförelse av tal, uppskattning och avrundning, grundläggande räkneoperationer, tiosystemet, naturliga tal och decimaltal. I ett PDF-dokument med titeln *Mittayksiköitä uteliallyle* förklarar Hannele Ikäheimo relationerna mellan tiosystemets placeringar och belyser hur denna kunskap är kopplad till enhetsomvandlingar.

Ikäheimo, H. (2023). [Mittayksiköitä uteliallyle](#). *Opperi*.

Att behärska tiosystemet betyder att den studerande förstår förhållandet mellan olika sifferpositioner när man flyttar från en position till en annan och detta tänkande bör överföras också till enhetsomvandlingar av mått. Denna färdighet anknyter analogt till omvandlingar av enheter med tiobaser.

# Sammanfattning kapitel 4

## **Grunder för kartläggningar av utgångsnivån i matematik**

- Till yrkesstudier kommer man med olika utgångspunkter:
  - direkt från den nioåriga grundläggande utbildningen
  - flera år efter grundskolan och/eller tidigare utbildning
  - den studerandes skolbakgrund är knapp och den har kompletterats på kort tid
  - den studerandes språkkunskaper är bristfälliga och det försvårar förståelsen av uppgifterna.
    - en vuxen med invandrarbakgrund kan ha mycket utbildning men bristande språkkunskaper.
- med hjälp av kartläggningen strävar man efter att utreda om den studerande har tillräckliga matematiska färdigheter för att genomföra yrkesstudier.

## **Vad får man reda på i kartläggningen av utgångsnivån**

- Om kartläggningen av utgångsnivån har gått bra har den studerande möjlighet att gå vidare till yrkesstudier från matematikstudier som är relaterade till dem.
- Ett svagt resultat i kartläggningen av utgångsnivån och att matematikstudierna framskrider svagt berättar att det finns behov av stöd.
- Ett svagt resultat i kartläggningen av utgångsnivån och problem i hur studierna framskrider kan vara tecken på inlärningsvärigheter i matematik eller gestaltungsproblem.

## **Hurdan är en bra kartläggning av utgångsnivån?**

- En bra kartläggning inriktad på alla yrkesbranscher innehåller åtminstone grundläggande räkneoperationer, procentberäkningar och enhetsomvandlingar i enlighet med yrkesbranschen.
- Det är bra om kartläggningen innehåller några verbala uppgifter, men språket bör vara tydligt.
- Kartläggningen ska gärna vara sådan att den studerande gör den på under en halvtimme.

## **Reflektioner för läsaren**

- Vad kan man göra utgående från resultaten av kartläggningen av utgångsnivån?
- Har den studerande behov av att delta i SSS-gruppen i matematik före GEM-matematiken?
- Vilka differentieringsmetoder kan planeras utgående från kartläggningen av utgångsnivån? Skulle det vara bra att dela upp de studerande i grupper enligt deras nivå? Hurdan differentiering kunde göras med hjälp av uppgifter?

## 5 Matematikbildens betydelse - känslor med i spelet

Matematikbilden byggs stegvis upp under skolåren. För studerande som söker sig till yrkesstudier avser begreppet matematikbild ett känslomässigt förhållningssätt till matematik och också motivation och föreställningar relaterade till matematik. Den studerandes matematikbild påverkas av deras upplevelser av matematikens natur, lärandet och undervisningen under skoltiden samt det sociala sammanhang där lärandet sker. Det har konstaterats att klassens lärandemiljö och studiekultur har betydelse för formandet av matematikbilden. Man ska inte förbise inflytandet från hemmet och kamratkretsen på formandet av matematikbilden. Enligt en rapport publicerad år 2016 [11] om PISA-undersökningen har den matematiska kunskapsnivån hos finländska elever sjunkit väldigt snabbt. Också enligt den senaste PISA-undersökningen 2022 [12] har kunskapen hos finländska elever fortsatt att försvagas. Enligt en [11] rapport som publicerades 2016 och enligt PISA-undersökningen 2022 [12] klarar sig Finland dock bättre än OECD-ländernas medelvärde i matematik. Finländska elever tycker mindre om att studera matematik jämfört med elever i OECD-länderna i genomsnitt. Även om de inte riktigt gillar att studera matematik upplever de mindre matematikångest än toppländerna i PISA-undersökningen. Till exempel är de bästa prestationerna i Korea och Japan kopplade till högre matematikångest samt en mer negativ självbild som matematikstuderande och uppfattning om sin duglighet när det gäller förmågan att lösa matematikuppgifter. [13, 11] Det är viktigt att beakta att finländska grundskoleelevers matematikbild är positiv i de lägre årskurserna, men blir mer negativ mot slutet av grundskolan. När matematikbilden har blivit negativ är det vanligtvis svårt att återigen göra den positiv. Matematikbilden påverkar vilka val grundskoleleverna gör när de väljer studieplats på andra stadiet. (jfr. [13]). Grundskolelever som inriktar sig på yrkesstudier kommer specifikt för att de vill ha ett yrke. Många av dem tänker inte på att matematik också studeras inom yrkesstudierna. För dessa studerande kan matematiken ha framstått som ett motbjudande ämne. Av den anledningen är det viktigt att man i början av yrkesstudierna utreder de studerandes engagemang i matematikstudierna och deras matematikbild.

Invandrare som söker till yrkesutbildningen kan utmanas av att de har gått så lite i skola och att de bara har kunskaper i svenska som håller på att utvecklas. De ovan nämnda sakerna kan orsaka oro och ångest hos dessa studerande när det gäller framsteg i matematikstudierna. Det är ofta matematikläraren och SSS-läraren som möter oron för framsteg i matematikstudierna och känslorna av matematikångest hos både finländska studerande och studerande med invandrarbakgrund.

Det är bra om läraren fäster uppmärksamhet vid sin egen matematikbild och hur hen, matematiken och den studerande möts. Ett positivt och uppmuntrande förhållningssätt har betydelse. Knappa timresurser kan utmana lärarna. I sådana situationer kan lärarna uppleva en känsla av otillräcklighet. Baserat på det ovanstående är det viktigt att undersöka de studerandes matematikbild för att bättre kunna hitta sätt att stödja de studerande och sätta upp mål för deras studier. (jfr. [14, 15]) Via de bildserier som är länkade till följande rubriker (5.1; 5.2; 5.3) får du information om hur matematikbilden formas och hur den kan påverkas, samt hur man kan kartlägga de studerandes matematikbild, till exempel genom den enkät som tagits fram av Furner [16]. Den enkäten är lätt att bifoga till exempel till kartläggningar av utgångsnivån för matematiska färdigheter som görs elektroniskt eller på papper, eller så kan SSS-läraren och matematikläraren tillsammans med den studerande gå igenom enkäten genom att diskutera. Syftet med att undersöka den studerandes matematikbild är uttryckligen att försöka hitta mål och meningsfullhet för att studera matematik samt att stödja framsteg inom matematikstudierna.

## 5.1 Matematikbilden och matematiska färdigheter byggs upp stegvis

I bildserien som länkas till rubriken ges en kort förklaring av matematikbildens struktur, betydelsen av skolupplevelser för matematikbilden och differentieringen av matematiska färdigheter. Matematiska färdigheter utvecklas baserat på tidigare förvärvade färdigheter, dvs. det påminner om en s.k. snöbollseffekt. Om grunden till de tidigare förvärvade färdigheterna är stabil, så kommer det tidigare förvärvade kunnandet att påskynda lärandet och även stödja en positiv matematikbild.

## 5.2 Bakgrund och utgångspunkter för matematikbilden i yrkesstudierna

I bildserien som länkas till rubriken reflekteras över matematikbildens uppkomst och utgångspunkter i yrkesstudierna. Studerande som söker till yrkesstudier kommer ofta för att få ett yrke och förväntar sig praktisk undervisning. De kanske inte har tänkt på att även i yrkesstudierna och i det framtida yrket behövs matematik och teoretiska kunskaper. Det är bra att komma ihåg att studerande som söker sig till yrkesinriktade studier från grundskolan har en lång relation till matematik och har utvecklat en uppfattning om vad matematik är och hurdana de är som studerande i matematik. Å andra sidan kan vuxna som redan varit i arbetslivet och påbörjar yrkesstudier ha glömt viktiga matematiska färdigheter från skoltiden och uppleva rädsla och ångest när de börjar sina matematikstudier i yrkesutbildningen. Det skulle vara bra att stödja dessa vuxna med SSS-matematikstudier så att de får förstärkning och stöd för sin matematikkunskap samt en positiv inställning till matematik.

## 5.3 Metoder för att stödja de studerandes matematikbild

I bildserien som länkas till rubriken betonas vikten av att kartlägga de studerandes utgångsnivå för matematiska färdigheter samt vikten av att kartlägga de studerandes matematikbild i början av studierna, för att kunna ge de studerande individuellt stöd i färdigheter i SSS-matematik. Svag framgång i kartläggningen av utgångsnivån och en negativ matematikbild är ofta relaterade till varandra. När kunskapen är svag är det lätt att man fjärras från matematiken och vägrar att studera. Dessa studerande borde få sådana upplevelser i matematik som ger dem känslan av att lyckas. Till exempel i beskrivningen av SSS-matematiklektionen i kapitel 2 fokuserade läraren särskilt på att uppgifterna skulle vara tillräckligt enkla för de studerande så att de kunde uppleva att de lyckades. När fokus läggs på en positiv matematikbild och den studerandes färdighetsnivå gynnas den studerande av SSS-stödet och kommer vidare i sina matematikstudier och upplever framför allt att hen lyckas.

Intervjuunderlaget som Furner [\[16\]](#) har utvecklat ger en god modell för hur man kortfattat kunde kartlägga den studerandes matematikbild antingen med hjälp av en gemensam diskussion eller en enkät om matematikbilden i samband med kartläggningen av utgångsnivån. På följande bild finns en

kartläggning av matematikbilden baserad på intervjuunderlaget som Furner utvecklat. På bild 16 finns också den studerandes svar som beskrivs i Huhtalas och Janhonsens [15] artikel.

#### Bild 16

Underlag för intervju om matematikbilden utvecklat av Furner [16] enligt Huhtala och Janhonen [ 15]

##### **Lauseen alku (opettajan antama)**

1. Matikka herättää minussa sellaisen fiiliksen, että... —

2. Kun kuulen sanan matematiikka, ...

3. Matikan opiskelusta tulee aina mieleen...

5. Haluaisin oppia matikassa... (Miksi?)

6. Haluaisin välttää matikassa... (Miksi?)

7. Lempiasiani matikassa on...

8. Jos voisin kysyä yhdestä asiasta matikassa, se olis...

EXTRA: Haluaisin vielä kertoa, että...

##### **Lauseen jatko (opiskelijan laatima)**

*Olen väärässä paikassa.*

*tulee fiilis että haluaisin kyllä oppia mutta en usko että opin. en oo ainakaan tähän mennessä oppinu.*

*ala-aste*

*Musta tuntuu suoraan sanoen järkyttä tulla matikan opetukseen. Se ei liity sinuun mutta kuitenkin.*

*En osaa sanoa asioita. Ainakaan oikeilla nimillä, Haluaisin kuitenkin valmistua ammattiin ja opettajan mukaan jotakin matikkaa täytyis osata.*

*Mielellään ihan kaikkea. Mutta ainakin prosenttilaskuja niitä muunnoksia, kun veivataan niitä jakolaskuja ja näitä.*

*Koominen kysymys. Ehkä mittaaminen. Jostakin syystä osaan hyvin ne keittiömitat.*

*Miks tää on niin vaikeeta.*

*Mä pelkään että tää katu tähän matikkaan. Nyt jo tarviin jotakin tukiopetusta vaikka nuoremmatki pärjää hyvin. Tosin ne on kyllä harjottellu vähemmän aikaa sitten.*

Furners [16] utvecklade intervjuunderlag kan användas tillsammans med den studerande i samband med Yrkesbollarna (se avsnitt 4.2.3) under den första SSS-matematiklektionen, eller så kan intervjuunderlaget tas med som ett delområde i kartläggningen av utgångsnivån för matematiska färdigheter. Om det finns betydande utmaningar med språkkunskaperna eller läsförståelsen, kan ett förenklat intervjuunderlag som på bild 17 användas i stället för kartläggningen av matematikbilden på bild 16.

## Bild 17

Underlag för intervju som bifogas till kartläggningen av utgångsnivån bearbetad efter Furner [\[16\]](#)

Svara på frågorna 1–3. Välj bland de tre svarsalternativen det som passar dig bäst. Märk ditt val med ett kryss.

- |  |                                     |                      |   |
|--|-------------------------------------|----------------------|---|
| 1. För mig känns matematiken             | 😊 trevlig                           | 😐 som ingenting alls | 😞 eländig                               |
| 2. När jag hör ordet matematik           | Skulle jag vilja lära mig matematik | Kan inte säga        | Tror jag inte att jag lär mig matematik |
| 3. Matematikstudier får mig att tänka på | Matematikstudier i skolan           | Rädsla och ångest    | Iver                                    |

Skriv ett kort svar till följande meningar 4–8.

4. Inom matematiken skulle jag vilja lära mig
5. I matematikstudierna skulle jag vilja undvika
6. Det bästa med matematikstudierna är
7. Ställ en fråga om matematik
8. Om matematikstudierna skulle jag ännu vilja berätta att

Intervjuunderlaget på bild 17 kan bifogas kartläggningen av utgångsnivån i matematiska färdigheter eller användas som intervjuunderlag i samband med Yrkesbollarna.

# Sammanfattning kapitel 5

## **Vad är en matematikbild?**

- ett känslomässigt förhållningssätt till matematik
- föreställningar om en själv som lärare eller studerande
- föreställningar om matematik (Vad och hurdan är matematiken? Hur lär man sig/undervisar man?)

## **Hur bildas matematikbilden?**

- Den bildas stegvis under skolåren
- Matematikbildens struktur påverkas av
  - upplevelser i inlärningssituationer, atmosfären och kulturen i lärmiljön
  - matematikens natur: *Hur upplevs matematiken? Hur undervisar man och hur lär man sig matematik?*
- *Lärarens professionella identitet och sätt att möta studerande i lärande- och undervisningssituationer i matematik är centrala faktorer som påverkar strukturen i den studerandes matematikbild.*

## **Hur påverkar den?**

- Matematikbilden påverkar valet av studier på andra stadiet
  - tanken att det inte behövs matematik inom yrkesutbildningen
- En studerande som klarat sig svagt i matematiken har ofta negativa känslor
  - leder till ett undvikande av matematik och till matematikångest: fysiologiska reaktioner, undvikande och mental belastning

## **Hur stödja den studerandes matematikbild?**

- Det är viktigt att klargöra den studerandes matematikbild
  - Målsättningen är att hitta sätt att stödja den studerande
- God interaktion och självbedömning (styrkor och svagheter)
- Att stödja självförmågan och känslan av att lyckas
- Verbalisering som inlärningsmetod
- Att hitta lämpliga sätt att studera och följa upp sina egna framsteg (konkretion)

## **För reflektion**

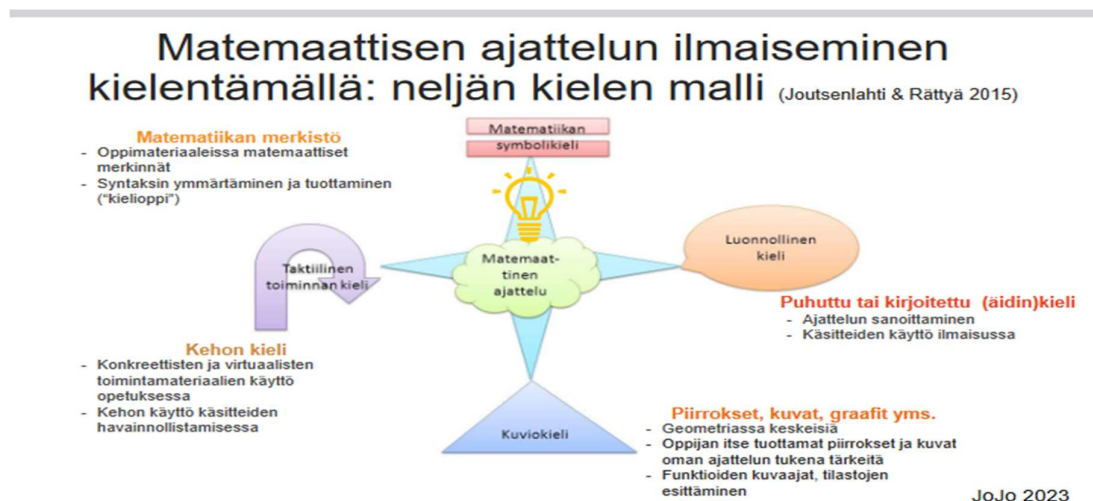
- Hur lönar det sig att stödja en studerande som har matematikångest?
- Hur påverkar jag med mitt eget förhållningssätt de studerandes matematikbild?
- Kartläggs förutom matematikfärdigheter också matematikbilden i er läroanstalt?

## 6 Verbalisering som verktyg för lärande av matematik

Grundtanken med verbalisering är att synliggöra den studerandes matematiska tänkande. Det är också en utmaning för skolundervisningen. Joutsenlahti och Tossavainen [17] lyfter fram verbalisering som ett av tillvägagångssätten för bearbetning av information eller kunskap, som regleras av affektiva faktorer (jfr. matematikbilden) samt individens tidigare kunskap och färdigheter (metakognition). Metakognition syftar på en individs tänkande om sin tankeprocess, vilket inkluderar medvetenhet om den egna tankeprocessen, kontroll och föreställningar samt intuition [18, 19]. Grundtanken med verbalisering är att få den studerande att förstå matematiska begrepp och innehåll genom att förklara det egna matematiska tänkandet. Då den studerande synliggör sitt matematiska tänkande kan andra studerande (kamratstuderande) och lärare lära sig av detta tanke sätt. Dessutom får läraren värdefull information om den studerandes nivå på tänkandet och kan vägleda den studerandes tänkande. Läraren kan också bedöma och planera ett eventuellt behov av stöd. Verbalisering uppmuntrar till diskussion och till och med till debatt till exempel om olika lösningsmetoder. Verbaliseringen förmedlar till den studerande att det inte finns en enda lösning på uppgifterna, utan att uppgifterna kan lösas på många olika sätt (se bild 18). I samband med verbalisering förstås matematiskt tänkande som bearbetning av *konceptuell* (begreppsmässig), *procedurell kunskap* eller *metodkunskap* (matematiskt symboliskt system och även matematiska algoritmer, procedurer och regler för att lösa matematiska problem) eller *strategisk kunskap* (information som uppkommer vid problemlösning) [19, 18]. Att uttrycka det matematiska tänkandet kan ske på de språk som presenteras på bild 18 antingen separat eller genom att kombinera dessa språk. På bild 18 ges också exempel på vilka uttrycksmedel som kan användas på olika språk.

Bild 18

*Språk som används i matematikstudier: matematiskt symbolspråk, naturligt språk (talat språk), taktilt handlingsspråk (inklusive kroppsspråk) och bildspråk [2]*



Språken på bild 18 kompletterar varandra väl och de har sina egna uttrycksmässiga styrkor. *Det naturliga språket* (talat språk) är särskilt betydelsefullt när man vill förklara begrepp och söka betydelser

för dem. *Matematikens symbolspråk* visar sig effektivt när man vill beskriva kvalitativa förändringar i begrepp / saker. Styrkan i *bildspråket* framträder särskilt i samband mellan begreppen och *kroppsspråk* används vid sidan av de ovannämnda språken för att åskådliggöra saker. Vanligtvis kan definitionerna av matematiska begrepp uttryckas på naturligt språk, bildspråk och matematikens symbolspråk. (jfr. [17])

I matematikstudierna hamnar SSS-lärare och matematiklärare att stöta på olika språk (modersmål och svenska) hos studerande med invandrabakgrund. För studerande med invandrabakgrund och även för finländska studerande som kommer från grundskolan är det viktigt för matematiklärandet att språken på bild 18 används rikt och mångsidigt i undervisningen. Den mångsidiga användningen av språken på bild 18 bygger upp en förståelse av både matematiska begrepp och beteckningar samt av lärandet av det svenska språket. När flera språk används (se bild 18) i samma situation, kan man tala om kodväxling (*code switching*) (jfr. [21]). Den studerande kan byta språk till exempel under matematisk problemlösning (till exempel från svenska till att skissa eller till taktilt handlingspråk eller från svenska till sitt modersmål eller till matematiskt symboliskt språk), och då påverkas språkvalet av vilket språk den studerande bäst kan uttrycka sitt tänkande på: den studerande använder det språk som hen bäst har förstått lösningen eller konceptualiseringsprocessen på. (jfr. [17]) Bildserierna som är länkade till följande underrubriker och de material som nämns i kapitlen ger en mer djupgående förståelse av verbaliseringen och dess användning.

## 6.1 Definition av matematiskt kunnande, verbalisering och matematiskt tänkande

I bildserien som länkas till rubriken förklaras matematisk verbalisering inom ramen för att bygga upp matematikförståelse. Inom LUMATIKKA-projektet som har finansierats av Utbildningsstyrelsen (2018–2022) (CC BY-SA 4.0-licens som tillåter kopiering, distribution och redigering av material för eget bruk) har videor som handlar om matematisk verbalisering producerats. I följande videor förklarar universitetslektor Jorma Joutsenlahti från Tammerfors universitet mer djupgående innehållet i bilderna som länkats till rubriken i avsnitt 6.1.

Joutsenlahti, J. (2022). Matemaattisen ajattelun kielentäminen. *LUMATIKKA-projektet (2018–2022)*. <https://www.youtube.com/watch?v=T428kK6QulQ>

Joutsenlahtis (2022) förklaring av betoningen av verbalisering i handledningsdokumenten ger grunder för att använda verbalisering av matematik som ett verktyg för lärande.

Joutsenlahti, J. (2022). Matemaattinen kielentäminen ohjausasiakirjoissa. *LUMATIKKA-projektet (2018–2022)*. <https://www.youtube.com/watch?v=91jyQfCY9IE>

I följande artikel förklarar universitetslektorerna Joutsenlahti och Perkkilä (2022) hur verbalisering stödjer matematikinläring och speciellt förståelsen av matematik.

Perkkilä, P., & Joutsenlahti, J. (2022). Matemaattisen ajattelun kielentäminen ymmärtävän oppimisen perustana. *Tidningen Dimensio*, 20.1.2022. <https://dimensiolehti.fi/matemaattisen-ajattelun-kielentaminen-ymmartavan-oppimisen-perustana/>

I artikeln granskas användningen av verbalisering i matematikundervisningen på olika skolnivåer, från förskolan till slutet av den grundläggande utbildningen.

## 6.2 Perspektiv på verbalisering i läromaterial för matematik - uppgiftsexempel

I bildserien som länkas till rubriken förklaras verbalisering som förekommer i läromaterial och användning av verbalisering i uppgifter. Det bör påpekas att verbalisering som förekommer i läromaterial ges som en färdig modell, vilket innebär att den studerandes eget tänkande inte kommer fram. Det är viktigt att de studerandes tänkande utmanas med uppgifter som kräver verbalisering, så att den studerandes tänkande synliggörs för andra.

### 6.2.1 Modeller för skriftlig verbalisering

I bildserien som länkas till rubriken har man presenterat modeller för skriftlig verbalisering för att lösa matematikuppgifter. Med undantag för standardmodellen fungerar vägkartmodellen, berättelsemodellen, kommentarmodellen och dagboksmodellen väl för att lyfta fram tänkandet hos den som löser uppgiften och modelleringen för läsaren. I följande video går Joutsenlahti igenom skriftlig verbalisering i undervisningen för klasserna 6–9.

Joutsenlahti, J. (2022). Esimerkkejä kirjallisesta kielentämisestä luokille 6–9. *LUMATIikka-projektet (2018–2022)*. <https://www.youtube.com/watch?v=HTXqX484Okw>

Mer information om skriftlig verbalisering inom matematik och modeller relaterade till det finns i artiklarna av Joutsenlahti (2009) och Joutsenlahti och Tossavainen (2018) [20, 17].

### 6.2.2 Exempel på verbaliserade uppgifter

I följande uppgiftskompendium om verbalisering finns uppgifter som Joutsenlahti [22] har presenterat.

Joutsenlahti, J. (2015). [Omin sanoin matematiikan maailmassa](#). Tampereen yliopisto.

I övningskompendiet som presenterades tidigare finns uppgiftstyper som också passar mycket väl för SSS-undervisning. När man vill säkerställa behärsknigen av skolmatematikens ordförråd och begrepp är till exempel övningskopiorna [22] på bilderna 19–20 meningsfulla.

- A. Uppgifterna 1 och 2 handlar om att repetera begrepp. På bild 19 repeteras geometriska begrepp. Begreppen kan också repeteras och förklaras med hjälp av Alias-spelet.
- B. De seriebildaktiga (se bild 20) övningsuppgifterna 3c, d, e och f [22] stödjer väl verbalisering av det matematiska tänkandet. Dessa uppgifter är *före-efter-uppgifter*, där både början och slutet av uppgiften visas. Av övningsuppgifterna [22] handlar den första (3c) om grundläggande räkneoperationer, medan de senare (3d, e och f) handlar om bråktaal. Det är den studerandes uppgift att modellera en berättelse och ett beräkningsuttryck utifrån bilderna.

## Bild 19

### *Repetition av geometriska begrepp* [22]

#### HARJOITUS 1

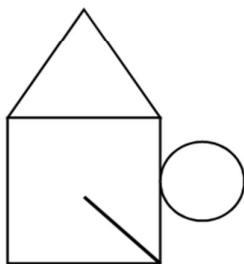
Suullinen kielentäminen: parityöskentelyssä toinen pari saa kuvan, jota ei näytä parilleen. Kuvan saanut oppilas ohjaa toista oppilasta piirtämään vain puheen avulla aivan samanlaisen kuvan paperille (joko vapaalla kädellä tai viivaimen ja harpin avulla). Mittauksia ei tehdä, vaan arvioidaan silmämääräisesti mitat ja kerrotaan ne parille.

Geometrian käsitteitä: (tasasivuinen) kolmio, neliö, jana, ympyrä

#### HARJOITUS 2

Suullinen kielentäminen: Suunnittele geometrian oppisisältöjen keskeisistä kuvioista tai kappaleista (esim. monikulmiot, ympyrä – sen osat tai kappaleet) kuva, jonka selittämisessä käsitteiden käyttöä tulee harjoiteltua.

Geometrian käsitteitä:

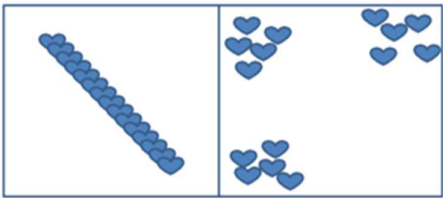


På bild 20 baserar sig verbaliseringen på att beskriva uppgifterna med före-efter-serier.

## Bild 20

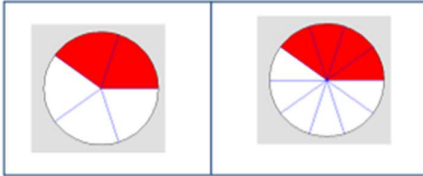
Matematiska övningar i verbalisering av grundläggande räkneoperationer och bråktal av [22]

c) ENNEN JÄLKEEN



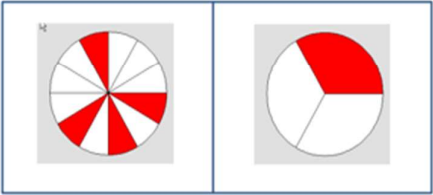
Tarina matematikan kielellä: \_\_\_\_\_  
Voisiko olla muita tarinoita: \_\_\_\_\_

d) ENNEN JÄLKEEN



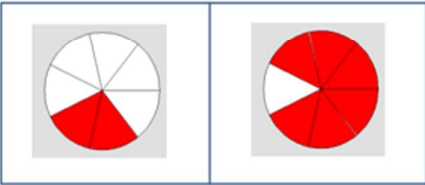
Tarina matematikan kielellä: \_\_\_\_\_  
Voisiko olla muita tarinoita: \_\_\_\_\_

e) ENNEN JÄLKEEN



Tarina matematikan kielellä: \_\_\_\_\_  
Voisiko olla muita tarinoita: \_\_\_\_\_

f) ENNEN JÄLKEEN



Tarina matematikan kielellä. Löydätkö kaikki nejä laskutoimitusta: \_\_\_\_\_  
Voisiko olla muita tarinoita: \_\_\_\_\_

De ovan nämnda uppgiftstyperna torde vara lämpliga både för studerande med invandrabakgrund och för studerande som kommer från grundskolan. Uppgifterna 6 (uttrycksverbalisering) och 7 (att förklara hur man löser uppgiften) i uppgiftskompendiet [22] lämpar sig också utmärkt för SSS-övningar. Den studerande kan handledas i matematisk verbalisering och produktion av problemlösning också med hjälp av Ikäheimos [6] berättelsepapper. På bild 21 presenteras ett berättelsepapper som leder fram till lösningen av en verbal uppgift. På berättelsepappret på bild 21 finns följande uppgift:

### Uppgift

Vid årets början ökades innehållet i en burk laxkonserv med 20 %, så att den vägde 180 gram. Hur mycket vägde laxkonserven förra året? [23]

För att lösa en sådan här uppgift lönar det sig att börja med att be de studerande att i grupper diskutera uppgiften och möjliga lösningsstrategier samt hur man kunde modellera uppgiften. Därefter handleds de studerande att lösa uppgiften först med färgstavar, sedan genom att rita och slutligen genom att använda sig av naturligt språk. Först efter dessa skeden utformas en lösning på matematikens språk. Dessutom kan man be de studerande berätta hur de förklarar en beräkning med hjälp av en tabell, ett diagram eller en bild. På följande bild finns ett berättelsepapper där uppgiften som nämndes tidigare

har placerats in. Den studerande har i uppgift att verbalisera uppgiftens lösning enligt anvisningarna för lösningsprocessen som beskrivits ovan.

Bild 21

Handledning för att lösa en verbal uppgift med hjälp av ett berättelsepapper [6]. Exempel: vi börjar med en berättelse (från en verbal uppgift) genom att placera in berättelsen och frågan på ett berättelsepapper. De övriga delarna löses enligt anvisningarna.

1. <b>Kysymys</b> matematiikan kielellä
2. <b>Ratkaisu</b> välineillä ja/tai piirtämällä
3. <b>Tarina</b> (sanallinen tehtävä)  <i>Vuoden alusta lohisäilykkeen sisällön määrää lisättiin 20 %, niin että se painoi 180 grammaa.</i>
4. <b>Kysymys</b> sanallisesti (tarinaan / tehtävään liittyvä kysymys)  <i>Kuinka paljon lohisäilyke painoi viime vuonna?</i>
5. <b>Vastaus sanallisesti</b> kokonaisella lauseella
6. <b>Lasku ja sen tulos matematiikan kielellä</b>

Enligt Ikäheimo [6] kan det på berättelsepappret till exempel finnas ett färdigt beräkningsuttryck som den studerande ska lösa genom att verbalisera enligt delarna på berättelsepappret. Berättelsepappret ger utmärkt handledning i att utveckla verbalisering av matematiken samt att lösa och förstå verbala uppgifter. De tidigare givna uppgifterna stöder användningen av naturligt språk i matematikinläring och -undervisning på ett bra sätt.

Ett bra exempel på projekt som stödjer verbalisering är *Darling-projektet (Dialogic argumentation for learning) vid Jyväskylän universitet*, där argumentationsfärdigheter tränades. Projektets uppgifter och lektionsplaneringar stödjer verbalisering. Inom Darling-projektet följde man utvecklingen av lärares och studerandegrupperns argumentationsfärdigheter. Målgruppen var samma elevgrupper från början av sjunde klass till slutet av åttonde klass. På projektets webbplats finns det material som utvecklats inom Darling-projektet bl.a. för matematikundervisningen. Till exempel kan man lära sig att lösa ekvationer genom att använda vågmodellen på ett konkret sätt. På Darling-projektets webbplats kan du titta på användningen av vågmodellen i ekvationslösningarna genom att först välja matematikuppgifter och

sedan avsnittet för algebra, där du hittar material relaterat till ekvationslösning för undervisningen. Det lönar sig att också kika på andra material.

Darling-argumentaatiomateriaali (2019). Matematiikan tehtävät. *Koppa, Jyväskylän yliopisto*.  
<https://koppa.jyu.fi/avoimet/okl/darling-argumentaatiomateriaali/tunnin-rakenteet>  
[Exempel på en uppgift från Darling-projektet - lösning av ekvationer med hjälp av vågmodellen](#)

I följande kapitel undersöker vi språket i matematikinläringen och särskilt lätt språk i matematikundervisningen.

## 6.3 Språk i matematiklärandet

I bildserien som länkas till rubriken granskas språket i matematiklärandet ur ett språkmedvetenhetsperspektiv. Matematikens språk har många olika framställningssätt. På en SSS-matematiklektion kan läraren i början av lektionen ta till orda för att förklara det som ska läras eller så kan hen stanna upp för att handleda de studerande i att förstå det aktuella ämnet eller uppgiften. Om språkkunskaperna i svenska är svaga eller den studerande inte behärskar det akademiska språket inom matematik kan det vara utmanande för den studerande att följa med lärarens förklaringar. Det är viktigt att läraren

1. *pratar tydligare och långsammare*
2. *verbaliserar och upprepar* (strävar efter att hitta vardagliga sammanhang och förklara sambanden mellan vardagsspråk och matematikspråk)
3. *använder samma uttryck i samma sammanhang*
4. *använder modellering* (ritar, visar med hjälp av verktyg, ansiktsuttryck och gester)
5. *använder lätt språk för att förklara uppgiftens uppbyggnad*

Sammantaget ger verbaliseringsmetoder läraren goda sätt att öppna upp matematikens språk i lärandesituationer. Det är viktigt att även uppmuntra de studerande att använda verbaliseringsmetoder för att förklara sin egen förståelse. I artikeln av Hakamies och Takala (2023) har sambanden mellan språk och matematiklärande utforskats mångsidigt med hjälp av konkreta exempel. Artikeln ger metoder för hur läraren kan förklara det akademiska språket inom matematiken.

Hakamies, M. & Takala, T. (2023). Kohti kielitietoisuutta – kielen ja matematiikan oppimisen kytkökset. *Tidningen Dimensio*, 6.4.2023. <https://dimensiolehti.fi/kohti-kielitietoisuutta-kielen-ja-matematiikan-oppimisen-kytkokset/>

Checklistan för en språkmedveten lärare ger tips för matematikundervisningen. Listan kan laddas ned i PDF-format på MAOL r.f.:s sida via följande länk:

Takala, T. (sammanställare). 2022. *Kielitietoisen opettajan tarkistuslista*. [bit.ly/selkotarkistaMAOL; https://maol.fi/app/uploads/2022/09/Kielitietoisen-opettajan-tarkistuslista.pdf](https://selkotarkistaMAOL;https://maol.fi/app/uploads/2022/09/Kielitietoisen-opettajan-tarkistuslista.pdf)  
Mer info: [selkokeskus.fi/selkokieli/MAOLin-kielitietoisuuskoulutus](https://selkokeskus.fi/selkokieli/MAOLin-kielitietoisuuskoulutus).

MAOL r.f. har publicerat material för att stödja språkmedveten undervisning som skapats inom ett utbildningsprojekt finansierat av Utbildningsstyrelsen.

Kielitietoisuus matematiikan opetuksessa (2023). MAOL. <https://maol.fi/materiaalit/kielitietoisuus-matematiikan-opetuksessa/>

På Utbildningsstyrelsens webbplats finns 'Nivåskalan för språkkunskaper' tillgänglig, med hjälp av vilken man får information om nivån för kunskaperna i svenska. Den här skalan ger SSS-läraren information om vilka saker den studerande förväntas kunna både när det gäller förståelsen av både det svenska språket och matematikens språk.

Nivåskala för språkkunskaper. UBS. [https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/nivaskala-for-sprakkunskaper-och-sprakutveckling\\_2003.pdf](https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/nivaskala-for-sprakkunskaper-och-sprakutveckling_2003.pdf)

Universitetslektor Päivi Portaankorva-Koivisto har fördjupat sig i språkmedveten matematikundervisning. I följande video öppnar förklarar hon på ett intressant sätt matematikkunskaper och grunderna för språkmedveten undervisning med hjälp av exempel. Dessutom belyser hon bra hur verbalisering stöder språkmedveten undervisning och lärande av matematik. Videon har producerats som en del av LUMATIKKA-projektet som finansierats av Utbildningsstyrelsen (2018–2022). (CC BY-SA 4.0-licens som tillåter kopiering, distribution och redigering av material för eget bruk.)

Portaankorva-Koivisto, P. (11.11.2020). LUMATIKKA-webbinarium: Kielitietoisuus matematiikan opetuksessa. LUMATIKKA-projektet (2018–2022). <https://www.youtube.com/watch?app=desktop&v=lZZaTgH288>

Matematikens skriftspråk kan vara visuellt, verbalt, symbolspråk (numeriskt eller algebraiskt). Ofta utmanar det matematiska verbala språket de studerande, och till exempel kan verbala uppgifter vara svåra att förstå för studerande som kommer från olika språkområden. Förståelsen försvåras av svaga kunskaper i svenska och innehållet i uppgifterna som relaterar till sådant som är karakteristiskt för den finländska kulturen. De studerande har svårt att förstå det språkliga innehållet i verbal text och dess koppling till matematiska uttryck. Av den här anledningen är det bra att läraren förklarar verbala uppgifter på lätt språk. Portaankorva-Koivisto (2020) framhäver i den tidigare nämnda videon hur en förklaring av en verbal uppgift på lätt språk också stödjer finländska elever, dvs. alla gynnas av att uppgiften förklaras på lätt språk. I matematikundervisningen är det viktigt att beakta att den studerandes eget modersmål är språket för deras matematiska tänkande och problemlösning. Den studerande bör ges tid för språklig bearbetning på sitt modersmål. I undervisningen förenas lärarens instruering och det tal som används under matematiskt arbete, och växelverkan mellan dessa skapar matematiska betydelser. Det är viktigt att ge tid för växelverkan och diskussion där den studerandes modersmål, matematikens språk och matematiskt tänkande förenas. Förståelsen av det matematiska språket och matematiska begrepp och termer stöds av användningen av kroppsligt, taktilt handlingsspråk, naturligt språk, bildspråk och matematiskt symbolspråk. Lätt språk är en version av det svenska språket som har anpassats för att göra innehållet, terminologin och strukturen mer lättläst och begriplig. Ur ett kognitivt perspektiv betonas tillgängligheten av information och bearbetningen av information samt lösningar som underlättar förståelse, gestaltning, minne och lärande av ny kunskap. I följande exempel (1–3) ges exempel på hur man kan förklara matematiska uppgifter med lätt språk.

*Exempel 1.*

*Den ursprungliga uppgiften:* Torgförsäljarens plommon (Edita, 2012):



Kuva jillWellington, Pixabay

En torgförsäljare köpte 120 kg plommon till priset 1,00 €/kg. En fjärdedel av plommonen var så dåliga att de såldes med förlust för 0,50 €/kg. Vad var försäljningspriset på plommonen av god kvalitet, då försäljaren fick 100 € vinst på försäljningen av plommonen?

I uppgiften finns det mycket information som kan vara svår att förstå. Det är därför bra att dela upp uppgiften i mindre delar enligt hur räkneuppgiften framskrider till exempel på följande sätt:

*Uppgiften på lätt språk:*

Torgförsäljaren köpte 120 kilogram (kg) plommon. Ett kilogram plommon kostade en euro (1,00/kg).

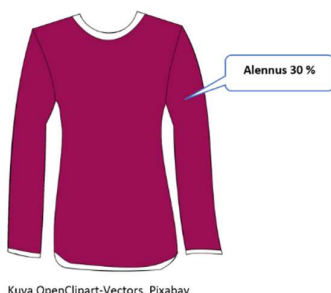
- a) Hur mycket betalade torgförsäljaren för plommonen?

Ett fjärdedels kilogram av torgförsäljarens plommon hade blivit dåliga.

- b) Hur många kilogram av de 120 kilogrammen plommon hade blivit dåliga?  
c) Hur mycket kostade de dåliga plommonen, då deras försäljningspris var 0,50 €/kg  
d) Hur många kilogram av plommonen var av god kvalitet?  
e) Räkna ut vad försäljningspriset var på plommonen av god kvalitet? Torgförsäljaren fick 100 € vinst på försäljningen av alla plommon.

### Exempel 2.

Den ursprungliga uppgiften: Det rabatterade priset på en blus:



Kuva OpenClipart-Vectors, Pixabay

Blusens ursprungliga pris var 40 €. På rean såldes blusen med en rabatt på 30 %. Hur mycket kostade blusen på rean?

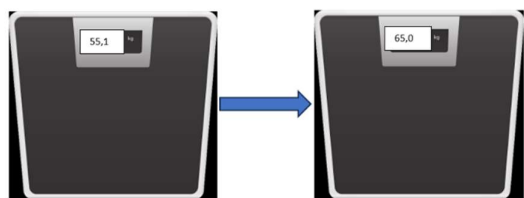
### Uppgiften på lätt språk:

En blus kostade 40 €. På rean fick man 30 % rabatt på blusen.

- Hur mycket rabatt fick man på blusen?
- Vad var blusens rabatterade pris?

### Exempel 3.

Den ursprungliga uppgiften: Viktökning:



Miras vikt hade ökat från 55,1 kg till 65 kilogram. Hur mycket hade hennes vikt ökat i procent?

### Uppgiften på lätt språk

Miras vikt hade ökat från 55,1 kg till 65 kilogram.

- Med hur många kilogram hade Miras vikt ökat?
- Med hur många procent hade Miras vikt ökat?

För förklaringar och för att man ska lära sig om lätt språk i matematikundervisningen finns det bra material som presenteras i listan nedan:

Göös, R.-I. & Laitinen, I. (2009). *Arkimatikkaa*. Kehitysvammaliitto. Opike. (innehåller material om matlagning, penninghantering, rengöring på lätt språk för studerande med särskilt behov).

Huhtala, S. (27.1.2021). *Oppijan ikä kaikki. Matematiikan oppimiseen ja opettamiseen liittyviä vinkkejä*. <https://blogs.tuni.fi/oppija/numerotaidot/matematiikan-oppimiseen-liittyvia-vinkkejä/>

Kilkki, S. (2020). *Arkimatikkaa: raha, tablettisovellus*. Kehitysvammaliitto. Opike. (Övningar om penninghantering som kan laddas ner från App Store; ingår i bokserien Arkimatikkaa.)

Leskelä, L. 2019. *Selkokieli. Saavutettavan kielen opas*. Helsinki: Opike.

Europeiska socialfonden och staten har finansierat ett tvåårigt projekt som har resulterat i material för att stärka grundläggande matematiska färdigheter. Målet med detta projekt var enligt Taito-programmet att förbättra grundläggande färdigheter för *vuxna invandrare*. Materialet stöder *lärandet av det finska språket och matematik inom den grundläggande utbildningen* och särskilt den studerandes *läs- och skrivförmåga samt studier av numeriska färdigheter*. Materialhelheten lämpar sig för de studerande vars språkkunskaper är under nivå A1.3 enligt den europeiska referensramen och som har svaga matematiska färdigheter. Materialet lämpar sig för användning till exempel *i det tidiga skedet i undervisningen för vuxna invandrare och i undervisning av läskunnighet*.

Mäkirinta, J., Toppola, T., Sojakka, K., Partanen, P., Aarnio, M., & Mäkelä, V. (2020). *Numerotaidot. Osaan opiskella matematiikkaa. Perustaitojen oppimista vahvistava opiskelumateriaali*. Vanajaveden Opisto, Ammattiopisto Tavastia ja Otavan Opisto. <https://osaansuomessa.fi/wp-content/uploads/2021/01/Osaan-opiskella-matematiikka-final.pdf>

Utgående från handboken som nämndes tidigare har kurserna Matematiikan startti 1 och Matematiikan startti 2 skapats för Otavan Opiston Muikkuverkko (kurserna är avsedda att användas i samband med materialet Numerotaidot, eftersom man kan lyssna på uppgifterna på Muikkuverkkos webbplats), vilka du kan utforska via följande länk till Muikkuverkko.

Muikkuverkko (2022). *Materiaalit*. Otavan Opisto.

<https://otavanopisto.muikkuverkko.fi/workspace/matematiikan-startti/materials#p-206626>

Matematiikan perusteiden kouluoppimisen sanaluettelo (Räsänen, 2011) finns på Niilo Mäki Instituuttis webbplats. Det är en ordlista över grunderna i matematik, och den kan öppnas via länken här nere.

Räsänen, P. (2011). *Matematiikan perusteiden kouluoppimisen sanasto*. Niilo Mäki Instituutti. <http://www.lukimat.fi/matematiikka/monimat/matematiikan-sanasto/matematiikan-sanasto/matematiikan-perusopetuksen-sanaluettelo>

Inom Polkuja-projektet som finansierats av Utbildningsstyrelsen har man vid Koulutuskeskus Salpaus skapat ett repetitionspaket som lämpar sig för att repetera ordförrådet i grundskolans matematik. Terminologin är tillgänglig på biblioteket för öppna lärresurser. I denna ordlista har också ett grundpaket för repetition av matematik utarbetats, samt ett paket för kartläggning av utgångsnivån. Länken till grundpaketet finns under matematikens knutpunkter (Kapitel 3) och kartläggningspaketet finns i kapitel 4 som handlar om kartläggningar av utgångsnivån.

Kankainen, J. & Kankainen, M. (2022). *Matikkakertauksen sanasto*. Koulutuskeskus Salpaus-kuntayhtymä. <https://www.finna.fi/L1Record/aoe.2129?sid=3454023187&lng=en-gb>

Vid Turun kristillinen opisto har det utarbetats ett övningspaket med matematikuppgifter för invandrare.

Rinne, E. (2010). *Matematiikkaa maahanmuuttajille*. Turun kristillinen opisto. [https://linnas.fi/wp-content/uploads/2019/09/matematiikkaa\\_maahanmuuttajille.pdf](https://linnas.fi/wp-content/uploads/2019/09/matematiikkaa_maahanmuuttajille.pdf)

Utöver det nämnda materialet "*Matematiikkaa maahanmuuttajille*" har det även utvecklats andra material på lättläst språk vid Linnasmäns Opisto med stöd från Utbildningsstyrelsen. Via följande länk kan du bekanta dig med materialet <https://linnas.fi/opiston-tuottamaa-oppimateriaalia/>

Följande övningskompendium för SSS-matematik är ett material som har utvecklats inom ramen för SSS-projektet och riktar sig främst till invandrarestuderande med svaga grundläggande matematiska färdigheter. Materialet är också lämpligt för svenskspråkiga studerande som har brister i grundläggande matematiska färdigheter.

Matematikens SSS. [Matematiikan OPVA-opinnot ammatillisessa koulutuksessa](#). Tredu.

Matematik-alias lämpar sig för studerande vars förståelse av svenska är på en god nivå och som redan har en viss förståelse av grundläggande matematiska begrepp. Via följande länk kan du titta på anvisningar och kort för spelet matematik-alias. Du kan också printa ut anvisningar och spelkort åt dig själv.

Karjalainen, E. (18.12.2014) Matematiikka-alias. *Summamutikan materiaalipankki*. <https://blogs.helsinki.fi/summamutikka/matematiikka-alias/>

Matematik-alias spelas med samma regler som det bekanta Alias-spelet i små grupper. De studerande spelar ofta spelet i en spelsituation, strävar efter att lyckas i spelet och på så sätt fokuserar de bra på att förklara den matematiska terminologin. Dessutom är det roligt att spela och spelet ger läraren information om hur de studerande förstår matematikens terminologi och begrepp. Du kan också planera egna matematikaliasspel både för matematiken och andra läroämnen.

För längre kunna studerande och studerande från olika språkområden med goda kunskaper i finska passar matematikens nätordbok som upprätthålls av tidskriften Solmu.

Matematiikan verkkosanakirja (2024). *Tidningen Solmu*. <https://matematiikkalehtisolmu.fi/sanakirja/a.html>

Nätordboken innehåller ett brett matematiskt ordförråd och engelska översättningar till den akademiska matematiska terminologin.

## 6.4 Verbalisering som verktyg för läraren

I bildserien som länkas till rubriken har tillämpningen av verbalisering i en språkmedveten matematikundervisning förklarats. Användningen av verbalisering i undervisningen har förklarats med hjälp av uppgiftsexempel. Det är viktigt att läraren fungerar som modell för de studerande och strävar efter att förtydliga sin undervisning på ett mångsidigt sätt med hjälp av verbalisering. Lika viktigt är det också att läraren kräver att de studerande använder sig av verbalisering när de löser uppgifter, så att de studerandes matematiska tänkande utvecklas och synliggörs för andra studerande. De studerande kan samtidigt lära sig att uttrycka sitt matematiska tänkande på svenska på ett mer uttrycksfullt sätt.

# Sammanfattning kapitel 6

## Vad är verbalisering?

- en modell med fyra språk; i undervisningen används olika former av matematiska uttryck
  - symbolspråk
  - taktilt handlingspråk
  - naturligt språk
  - bildspråk
- grundtanken är att synliggöra den studerandes matematiska tänkande
- målsättningen är att den studerande förstår begrepp och innehåll genom att förklara det egna matematiska tänkandet
- den studerande för fram sin tankeprocess
- läraren beaktar de studerandes behov och använder redskap för verbalisering som lämpar sig för situationen

## Vilka fördelar är det med verbalisering?

- läraren kan utgående från verbalisering planera och bedöma ett eventuellt behov av stöd
- tanken att det inte finns bara ett rätt sätt att lösa uppgifterna förmedlas till de studerande
- att kombinera språk hjälper de studerande som har svaga kunskaper i svenska
- var och en har utrymme att bygga upp sitt matematiska tänkande utifrån sina egna utgångspunkter
- memorering bygger inte upp förståelse - verbalisering är en viktig del i att bygga upp förståelse och forma den matematiska tankeprocessen

## För reflektion

- Hur kan man framställa grundläggande räkneoperationer på olika matematiska språk?
- Hur skulle du undervisa matematik åt en studerande som inte förstår svenska?
- Hurdana matematiska språk skulle du använda då en studerande har syn- eller hörselnedsättning eller då den studerande och handledaren inte har ett gemensamt språk?

## Källor:

1. Hannula-Sormunen, M., Mattinen, A., Räsänen, P., & Ruusuvirta, T. (2018). Varhaisten matemaattisten taitojen perusta: synnynnäiset valmiudet, tietoinen toiminta ja vuorovaikutus. I verkke J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (red.) *Matematiikan opetus ja oppiminen* (158–183). Niilo Mäki Instituutti.
2. Joutsenlahti, J. (2023). *Matematiikan didaktiikan luennot luokanopettajaopiskelijoille*. Kevät 2023. Tampereen yliopisto.
3. Kielitoimiston ohjepankki (2015). Luvut ja numerot: numeroiden ryhmittely. Kotimaisten kielten keskus. <http://ryhmittely.www.kielitoimistonohjepankki.fi/ohje/49>
4. Kajamies, A., Vauras, M., Kinnunen, R. & Iiskala, T. (2003). Matte. Matematiikan sanallisten tehtävien ratkaisutaidon ja laskutaidon arviointi. OTUK. Turun yliopisto.
5. Leppäaho, H. (2007). Matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opettaminen peruskoulussa. Ongelmanratkaisukurssin kehittäminen ja arviointi. [Doktorsavhandling, Jyväskylän yliopisto]. <https://jyx.jyu.fi/handle/123456789/13384>
6. Ikäheimo, H. (2021). Matematiikan osaaminen vahvaksi. Iloa oppimiseen ja opetukseen. ELLI.
7. Ikäheimo, H. (2022). Materiaalikirja. Matematiikan osaaminen vahvaksi. ELLI.
8. Aunio, P., Hautamäki, J. & Mononen, R. (2018). Matematiikan oppimisen ja oppimisvaikeuksien pedagoginen arviointi. I verkke J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (red.) *Matematiikan opetus ja oppiminen* (s. 240-257). Niilo Mäki Instituutti.
9. Ikäheimo, H. & Kokko, L. (2023). ALVA (**A**rvioidaan, **L**asketaan ja **VA**hvistetaan taitoja) -matematiikan perustaitojen kartoitus. OPIKKO.
10. Ikäheimo, H., Putkonen, H., & Voutilainen, E. (2018). *MaKeKo –digikokeet*. SanomaPro.
11. Vettenranta, J., Välijärvi, J., Ahonen, A., Hautamäki, J., Hiltunen, J., Leino, K., ... & Rautopuro, J. (2016). *PISA 15. Ensituloksia. Huipulla pudotuksesta huolimatta* (Opetus- ja kulttuuriministeriön julkaisuja 41).  
<http://julkaisut.valtioneuvosto.fi/bitstream/handle/10024/79052/okm41.pdf>
12. Opetus- ja kulttuuriministeriö (5.12.2023). PISA-tutkimus ja tulokset 2022. <https://okm.fi/pisa-2022>.
13. Hannula, M. S. & Holm, M. E. (2018). Oppilaan matematiikkakuva oppimistuloksena ja oppimisen taustatekijänä. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (red.) *Matematiikan opetus ja oppiminen* (132 –154). Niilo Mäki Instituutti.

14. Huhtala, S. & Laine, A. (2004). "Matikka ei ole mun juttu": Matematiikkavaikeuksien syntyminen ja niihin vaikuttaminen. I verket Räsänen, P. Kupari, P., Ahonen, T. & Malinen, P. (red.) *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. Niilo Mäki Instituutti, 320–346.
15. Huhtala, S., & Janhonen, S. (2022). Motivoidaan opiskelijoita ja karkotetaan matikka-ahdistusta: ammatillisen matematiikan arkea. *LUMAT-B: International Journal on Math, Science and Technology Education*, 7(2), 123–133. Hämtad från adressen <https://journals.helsinki.fi/lumatb/article/view/1810>
16. Furner, J.M. (2017). Teacher and Counselors: Building Math Confidence in Schools. *European Journal of STEM Education*, 2(2), 1–10.
17. Joutsenlahti, J. & Tossavainen, T. (2018). Matemaattisen ajattelun kielentäminen ja siihen ohjaaminen koulussa. I verket J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (red.) *Matematiikan opetus ja oppiminen* (s. 410 – 430). Niilo Mäki Instituutti.
18. Schoenfeld, A. (1987). What's all the fuss about metacognition? I verket A. Schoenfeld (red.) *Cognitive science and mathematics education* (s.189 – 215). Erlbaum Associates.
19. Joutsenlahti, J. (2005). *Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä: 1990-luvun pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattisen osaamisen ja uskomusten ilmentämänä*. [Väitöskirja, Tampereen yliopisto] <https://trepo.tuni.fi/handle/10024/67453>
20. Joutsenlahti, J. (2009). Matematiikan kielentäminen kirjallisessa työskentelyssä. I verket R. Kaasila (red.) *Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Rovaniemellä 7.-8.11.2008* (Kasvatustieteellisiä raportteja 9, s. 71 – 86). Lapin yliopisto.
21. Moschkovich, J. (2010). Language(s) and learning mathematics. I verket J. Moschkovich (red.) *Language and mathematics education* (s. 1 – 28). Information Age Publishing, Inc.
22. Joutsenlahti, J. (2015). *Omin sanoin matematiikan maailmassa. Harjoitukset*. Tampereen yliopisto.
23. Joutsenlahti, J., Perkkilä, P., & Kumakura, H. ym.,( 2019). *Prosenttikäsitetutkimuksen aineistonkeruu materiaali*. Opublicerad källa. Tampereen yliopisto.