Mot flexibelt matematiskt tänkande (3 sp)

Fortbildningsprojektet Flexibel matematik

Materialbeskrivning:

Ta grepp om flexibiliteten i matematikundervisningen! Det här materialet är avsett som självstudiematerial för undervisande och fostrande personal inom småbarnspedagogiken, lärare inom förskoleundervisningen och den grundläggande utbildningen, gymnasielärare och speciallärare. Materialet består av merparten av den för alla gemensamma kursen *Mot flexibelt matematiskt tänkande* inom utbildningsprogrammet *Flexibel matematik (Flexma)*. Materialet innehåller en stor mängd video- och textmaterial samt uppgifter. Videorna i materialet har, om inte annat uppges, svensk textning. Uppgifterna får man gärna fundera över både på egen hand och, i mån av möjlighet, tillsammans med sina kollegor.

Det här självstudiematerialet baserar sig på en pågående avgiftsfri nätbaserad fortbildningskurs. Om materialet ger upphov till frågor, entusiasm eller intresse kan du bekanta dig med innehållet i hela kursen på webbplatsen till utbildningsprogrammet Flexibel matematik via den här länken och anmäla dig till kursen. Den nätbaserade kursen innehåller en del videor och diskussioner mellan kursdeltagare, som det inte har varit möjligt att inkludera i det här självstudiematerialet. Du kan framskrida på kursen i egen takt, och den kommer att vara tillgänglig på kursplattformen Ville ända till slutet av november 2023.

Materialet har producerats i anslutning till projektet *Joustavaan matematiikkaan (Joma) – Flexibel matematik (Flexma)*. Joma – Flexma var ett nationellt fortbildningsprojekt om matematikundervisning i småbarnspedagogiken, förskoleundervisningen, årskurserna 1–6, årskurserna 7–9 och gymnasieutbildningen, som genomfördes under perioden 2018–2023. Inom ramen för projektet skapades 19 nätbaserade fortbildningskurser. En del av materialet som utvecklades för och på kurserna finns tillgänglig även här i Biblioteket för öppna lärresurser. Projektet, som finansierades av Utbildningsstyrelsen, var ett samarbetsprojekt mellan Åbo universitet, Åbo Akademi, Jyväskylä universitet och Uleåborgs universitet.

Upphovspersoner: Erno Lehtinen, Minna Hannula-Sormunen

Licens: Det här materialet har licensierats under licensen Creative Commons **Erkännande 4.0 Internationell (CC BY 4.0**). Närmare information om användningsområden och -rättigheter kan du läsa på adressen https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.sv.

Licensen gäller endast det här materialet. Licensen gäller inte materialet som nås via länkarna i det här materialet.

Innehåll

1. Välkommen på kursen! 4

Varför behövs det ett fortbildningsprogram om flexibel matematik? 5

Mångsidigt kursteam 6

Internationell expertförstärkning 9

2 Flexibelt matematiskt tänkande 12

2.1 Flexibelt matematiskt tänkande 12

Vad avses med flexibelt matematiskt tänkande och varför är det ett viktigt lärandemål i skolmatematiken? 12

Flexibla strategier i aritmetik 12

Flexibla strategier i algebra 14

Diskussion kring betydelsen av flexibelt matematiskt tänkande i skolundervisningen 14

Argument – motargument 1 ..... *14*

Argument – motargument 2 ..... *15*

Argument – motargument 3 ..... *16*

Argument – motargument 4 ..... *17*

2.2 Utveckling av matematiskt tänkande 19

Inledning 19

Vad kan en tidig numerisk kompetens säga om en elevs förmåga att lära sig matematik senare i livet? 19

På med matematikglasögon – redan i tidig barndom! 20

Biologiskt fundament till matematiskt tänkande *20*

Betydelsen av barnens egen aktivitet och interaktion för deras tidiga utveckling *21*

Åtta myter om matematiska färdigheter hos småbarn *22*

Vi slår hål på myter om småbarnsmatematik 23

Myt 1: ”För små barn är det viktigare att utveckla sina språkliga färdigheter än att öva matematiska färdigheter.” *23*

Myt 2: ”Småbarnsmatematiken går huvudsakligen ut på att lära sig siffror och former.” *24*

Myt 3: "Det är enkelt att undervisa småbarn i matematik, eftersom det handlar om den mest grundläggande matematiken.” *24*

Talbegreppet och den grundläggande aritmetiken i årskurserna 1–6 25

Utvecklingen av matematiskt tänkande på högre skolstadier 26

Variabel- och funktionsbegreppet *26*

Matematikens tre världar *27*

Uppgifter 28

Videorespons 29

Kärnbegrepp kring utvecklingen av matematiskt tänkande *29*
Felaktiga uppfattningar om tidiga matematikfärdigheter *30*
Grönsakstorget *30*
Elevdiskussion kring variabelbegreppet *31*
3 Vad behövs matematiken till? 32
3.1 Vad behövs matematiken till? 32
Olika sätt att svara på elevernas frågor om var matematik kan behövas 34
Framtida behov av matematiskt kunnande 35
Matematiken hjälper oss att förstå världen *36*
Framtidskompetenser i matematikundervisning *36*
3.2 Hur öka motivationen? 37
Att stärka elevernas motivation är en viktig del av flexibel matematik 37
Vad är det som gör matematiken intressant? *37*
Vad tycker man ute på fältet? 39
Sammandrag av frågor kring hur man kan väcka elevernas intresse för matematik *41*
Tron på egna färdigheter stärker även intresset 41
Allmän uppfattning: Den här typen av undervisning lämpar sig för de bästa eleverna. Är den alltså inte för krävande för de svagare eleverna? 42
Uppgift *44*
4 Hur stöder man flexibelt matematiskt tänkande i praktiken? 45
4.1 Att stärka flexibelt matematiskt tänkande 45
Främjande av flexibilitet i praktiken och olika representationer 45
Adaptiv och flexibel talkunskap ger strategisk flexibilitet *45*
Från enskilda strategier till heltäckande flexibilitet i matematiskt tänkande *46*
Adaptiv talkunskap om rationella tal *46*
Flexibla aritmetiska färdigheter ger en fingervisning om lärandet i matematik senare i livet *47*
Spel som inlärningsmiljöer för flexibel matematik 47
Utvecklande av flexibilitet med hjälp av jämförelseuppgifter 49
Utvecklande av flexibilitet med hjälp av argumenterande diskussioner 50
4.2 Vikten av övning i utvecklingen av flexibelt matematiskt tänkande 51
Kännetecken för målinriktad övning 54
4.3 Vardagsproblem och textuppgifter i matematikundervisningen 56
I hur stor utsträckning förutsätter studentprovet i matematik flexibelt tänkande? *57*
5 Kursavslutning 58

1. Välkommen på kursen!

Syftet med kursen är att ge en introduktion till flexibelt matematiskt tänkande, förklara vad som avses med det och visat hur det kommer till uttryck hos barn och unga i olika åldrar. De nätbaserade stadiespecifika Flexma-kurserna, som till sin omfattning motsvarar 6 studiepoäng, utgör en ypperlig fortsättning till den här introduktionskursen och erbjuder en hel del tips för fostrings- och undervisningsarbete. En del av materialet som ingår i dessa fortsättningskurser kommer också att finnas tillgängligt i Biblioteket för öppna lärresurser (aoe.fi) från och med januari 2023. Den här introduktionskursen är avsedd som självstudiematerial för undervisnings- och fostringspersonal, lärare i förskoleundervisning och grundläggande utbildning, gymnasielärare och speciallärare.

Välkommen med!

Obs! I videorna och i materialet i övrigt används i viss mån yrkestiteln *småbarnspedagog*, som emellertid är något problematisk på grund av sin vaghet. Med termen *småbarnspedagog* syftar vi på all personal som deltar i fostrings- och undervisningsarbetet inom småbarnspedagogik och förskoleundervisning.

Kursens innehåll

TEMAHELHET	DELTEMAN
Välkommen på kursen!	Välkommen på kursen!
Flexibelt matematiskt tänkande	Flexibelt matematiskt tänkande Utveckling av matematiskt tänkande
Vad behövs det här till?!	Vad behövs matematiken till? Hur öka motivationen?
Hur stöder man flexibelt matematiskt tänkande i praktiken?	Att stärka flexibelt matematiskt tänkande Vikten av övning Vardagsproblem och textuppgifter
Kursavslutning	Kursavslutning

Varför behövs det ett fortbildningsprogram om flexibel matematik?

Förändringen i arbetslivet och samhället i stort förutsätter en ny typ av kompetens. Utöver allmänna färdigheter är flexibla matematiska färdigheter och speciellt en stark antalsuppfattning, en god förståelse av rumsliga samband, algebraiskt tänkande och matematisk modellering samt problemlösningsförmåga färdigheter vars betydelse bara kommer att öka i framtiden.

Även om forskarna på bred front är eniga om att betydelsen av matematiskt tänkande ständigt ökar både i arbetslivet och i människornas vardag, kan man i hela västvärlden skönja en tendens till att den genomsnittliga studiemotivationen vad gäller matematik avtar mer och mer under utbildningens gång. Å andra sidan har det lyfts fram i olika undersökningar att studieframgångar i traditionell skolmatematik inte heller alltid automatiskt betyder att eleverna på ett ändamålsenligt sätt kan tillämpa den matematik lärt sig i skolan i vardagen, arbetslivet eller sina fortsatta studier.

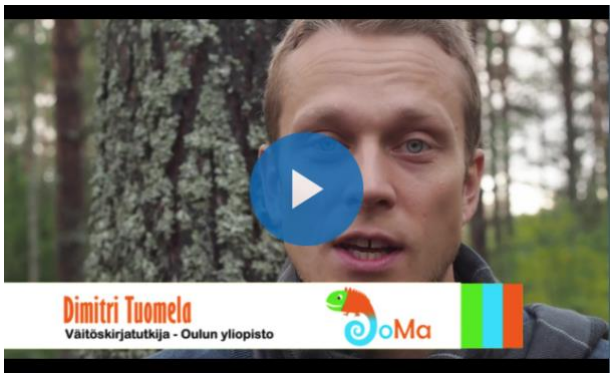
Idén med flexibel matematik är att svara mot alla de ovannämnda utmaningarna och det läggs särskild vikt på färdigheter som också är kännetecknande för de så kallade framtidskompetenserna. I flexibel matematik finns det är stark koppling mellan lärandet av formell matematik och förståelsen av betydelseskapande situationer och problemlösning. Syftet med flexibel matematik är därutöver att ge eleverna beredskap att själva kunna upptäcka och jämföra alternativ lösningsstrategier; matematiken går då inte längre ut på att mekaniskt tillämpa färdiga regler utan blir snarare ett redskap för elevernas självständiga tänkande.

I flexibelt matematiskt tänkande fokuserar man inte på en enskild modell utan tillämpar flexibelt olika tänkesätt. Flexibelt tänkande ger en redskap att komma vidare även i helt nya, utmanande situationer. En viktig del av flexibiliteten är också förmågan att diskutera och ta sig an även utmanande uppgifter – i samarbete med andra.

Mångsidigt kursteam

Dimitri Tuomela

Doktorand Dimitri Tuomela från Uleåborgs universitet ansvarar i huvudsak för kursdelarna för årskurserna 7–9 och gymnasiet. Han medverkar i ett flertal utvecklingsprojekt om matematikundervisning, och i sin doktorsavhandling undersöker han hur man kan skapa en inspirerande, kollaborativ och slutledningsorienterad inlärningskultur i matematik. Därutöver är han med i en internationell forskargrupp som undersöker flexibilitet.



Klicka på bilden ovan för att öppna videon.
Videon har svensk textning.

Erno Lehtinen

Erno Lehtinen är professor i pedagogik vid Åbo universitet och en erfaren lärarutbildare. Ända sedan slutet av 1970-talet har han forskat i lärande, inlärningssvårigheter, inlärningsmiljöer och expertis med särskilt fokus på utvecklingen av matematiskt tänkande på lång sikt.

Klicka på bilden ovan för att öppna videon.
Videon har svensk textning.

Peter Hästö

Matematikprofessor Peter Hästö från Åbo och Uleåborgs universitet ansvarar för kursdelarna för årskurserna 7–9 och gymnasiet. Han har fungerat bland annat som ansvarsperson för matematiklärarutbildning och som medlem i studentexamensnämndens matematiksektion. Utöver själva matematikforskningen har han forskat i flexibilitet i ekvationslösning i årskurserna 7–9 och gymnasiet.

Klicka på bilden ovan för att öppna videon.
Videon har svensk textning.

Minna Hannula-Sormunen

Konsortiet leds av pedagogikprofessor Minna Hannula-Sormunen från Åbo universitet. I det här fortbildningsprogrammet ansvarar hon dessutom för utbildningsdelarna för småbarnspedagogik samt förskole- och nybörjarundervisning. I sin forskning har hon fokuserat på utvecklingen av matematiska färdigheter, utvecklingsfaktorer och inlärningsmiljöer från småbarnspedagogiken till årskurs 6.

Klicka på bilden ovan för att öppna videon.
Videon har svensk textning.

Markus Hähkiöniemi

Universitetslektor i matematikens pedagogik vid institutionen för lärarutbildning vid Jyväskylä universitet Markus Hähkiöniemi ansvarar för utbildningsdelarna för årskurserna 7–9. Han har undersökt bland annat interaktionen lärare och elever emellan i matematik, undersökande lärande, användning av Geogebra i undervisningen samt matematiskt tänkande hos grundskole- och gymnasieelever.

Riina Harri

Universitetslärare Riina Harri från institutionen för lärarutbildning vid Jyväskylä universitet ansvarar även hon för utbildningsdelarna för årskurserna 7–9. Hon arbetar dessutom som lärare på skolan Sipoonlahden yhtenäiskoulu och jobbar på sin doktorsavhandling. Hon forskar i och är intresserad av interaktionen lärare och elever emellan samt matematiskt tänkande i matematikundervisningen.

I videon intill diskuterar Markus och Riina om klassrumsinteraktion och flexibelt matematiskt tänkande.

Klicka på bilden ovan för att öppna videon.
Videon har svensk textning.

Teija Laine

Utbildningsdelarna som berör årskurserna 1–6 har sammanställts av klassläraren Teija Laine. Hon har varit ett välkänt ansikte på Turun Matikkamaa och inom bildningsväsendet i Åbo och en eldsjäl som brunnit både för utvecklingen av matematikundervisningen och för lärarfortbildningen.

Teija har speciellt varit intresserad av problemorienterad undervisning och hur man med hjälp av den kan utveckla elevernas matematiska tänkande. Ett centralt tema för hennes forskning och utvecklingsarbete har redan i flera år varit hur traditionella textuppgifter i matematik kan göras mer meningsfulla för eleverna. På Turun Matikkamaa har hon utbildat lärare i hur de kan använda sig av konkreta, vardagsförankrade situationer och matematiska redskap i sin undervisning.

Våren 2021 avled Teija i en allvarlig sjukdom. På hennes och hennes familjs önskan får alla fantastiska undervisningsvideor, uppgifter och idéer som Teija bidragit med till utbildningsprogrammet fortsätta vara tillgängliga på Flexma-kurserna och hjälpa lärare att utveckla sin undervisning.

Teamet bakom de svenskspråkiga Flexma-kurserna

Teamet som arbetat med de svenskspråkiga Flexma-kurserna har bestått av universitetslektor Heidi Hellstrand, universitetslärare Johanna Hirvi samt översättare Niklas Ollila från Åbo Akademi. Både Heidi och Johanna verkar vid lärarutbildningen vid Åbo Akademi i Vasa, Heidi inom specialpedagogiken och Johanna inom småbarnspedagogiken. Gemensamt för båda är ett intresse för barns matematiska lärande och utveckling, framför allt hur öppna upp den matematiska världen för alla barn. Heidi och Johanna har fungerat som kursansvariga för de svenskspråkiga Flexma-kurserna. De svenskspråkiga kurserna är alla översatta från finska. Översättningarna har gjorts av översättaren Niklas Ollila.

Internationell expertförstärkning

Flexibel matematik är för närvarande ett hett tema även i den internationella debatten kring matematikundervisning. Vi har lyckats få med ett antal världsledande experter i matematiskt tänkande som sakkunniga i det här fortbildningsprogrammet.

Jon Star

Professor Jon Star från Harvarduniversitetet är före detta matematiklärare som gjort banbrytande forskning om flexibla matematiska strategier. Hans senaste forskningsprojekt har speciellt fokuserat på lösningsstrategier i algebra. (Videon har inga undertexter, men du kan läsa en **svensk sammanfattning** av hans presentation här (ingen direktöversättning).)

Lieven Verschaffel

Professor Lieven Verschaffel är en internationellt mycket välkänd forskare inom lärande och undervisning i matematik. Han har forskat i både utvecklingen av och undervisningen om flexibla aritmetiska färdigheter och tillämpningen av matematiskt tänkande i realistiska problemlösningssituationer. (Videon har inga undertexter, men du kan läsa en **svensk sammanfattning** av hans presentation här.)

Klicka på bilden ovan för att öppna videon.

Via den här länken kan du titta på den mer omfattande originalvideon.

Robert Siegler

Professor Robert Siegler från Carnegie Mellon-universitetet är för närvarande en av världens välkändaste forskare i kognitiv utveckling. Han har forskat mångsidigt i utvecklingen av matematiskt tänkande. För tillfället samarbetar han med oss inom ett forskningsprojekt kring undervisningen om en flexibel förståelse av begreppet rationella tal.

Videon har inga undertexter, men du kan läsa en **svensk sammanfattning** av hans presentation här. Samma video diskuteras närmare lite senare på kursen.

Klicka på bilden ovan för att öppna videon.

Douglas Clements

Douglas Clements är professor vid universitetet i Denver och en internationellt känd forskare i lärande och undervisning i tidig matematik. Vid sidan av sin huvudsakliga forskning har han aktivt varit med och utvecklat undervisningspraktiker i matematik. Dessutom har han publicerat ett flertal verk som riktar sig till småbarnspedagoger och lärare. (Videon har svensk textning.)

Klicka på bilden ovan för att öppna videon.

REFLEKTIONSUPPGIFT: Vilka intressanta saker togs det upp i presentationerna? Var det något du speciellt fastnade för? Fanns det något som du inte höll med om? Tycker du att de här idéerna kan tillämpas i undervisningen i praktiken?

2 Flexibelt matematiskt tänkande

2.1 Flexibelt matematiskt tänkande

Vad avses med flexibelt matematiskt tänkande och varför är det ett viktigt lärandemål i skolmatematiken?

Även om den här kursen behandlar i synnerhet flexibel matematik är flexibelt tänkande inte till nytta endast i matematiken. Professor emeritus Art Costa (California State University, Sacramento) har ägnat hela sitt yrkesverksamma liv åt att främja kritiskt och flexibelt tänkande (se **The Institute for Habits of Mind**). I videon intill reflekterar han över varför det generellt sett är viktigt med flexibelt tänkande.

Klicka på bilden ovan för att öppna videon.

Flexibla strategier i aritmetik

I videon nedan presenterar professor Lieven Verschaffel idén om flexibilitet i allmänhet och flexibiliteten i aritmetik i synnerhet. Om du vill kan du läsa en sammanfattning av presentationen också **på svenska** (inte en direkt översättning).

Klicka på bilden ovan för att öppna videon.

I sin andra video fokuserar Verschaffel på att diskutera motsatsförhållandet mellan addition och subtraktion och visar hur kännedom om förhållandet är till nytta i aritmetisk problemlösning. Bekanta dig gärna också med **den svenska sammanfattningen av Verschaffels föredrag och presentation**.

Klicka på bilden ovan för att öppna videon.

I sin video presenterar Verschaffel tre olika sätt att förstå flexibla och adaptiva strategier. På den här introduktionskursen ska vi titta närmare på vilken typen av flexibilitet som möjliggörs av olika uppgiftstyper. Det är emellertid viktigt att komma ihåg att flexibiliteten inte kan definieras endast utifrån egenskaperna hos bestämda uppgifter. Förhållandet mellan elevernas färdigheter och egenskaperna hos en viss uppgift är också centralt i bedömningen av flexibiliteten. Å andra sidan ska flexibiliteten också relateras till både situationsbundna krav och etablerade arbetssätt, dvs. kontexten som problem ska lösas i. Exempelvis kan undervisningen ha gett upphov till en uppfattning hos eleverna om att endast en av de rutiner de övat på leder till en godkänd prestation i skolan.

De teman som Verschaffel lyfter fram i sin föreläsning diskuteras mer i detalj i en artikel från 2009. Blev du intresserad får du gärna också läsa **artikeln** (Verschaffel m.fl., 2009).

Flexibla strategier i algebra

I videon intill ger professor Jon Star en introduktion till flexibilitet i allmänhet och flexibilitet i en ekvationslösningskontext i synnerhet. Föreläsningen har spelats in under en Flexma-sommarworkshop i Tammerfors 12.6.2018.

I artikeln "**The development of flexibility in equation solving**", skriven av Jon Star och Colleen Seifert, ges en beskrivning av ett sätt att lära sig ekvationslösning som hjälper eleverna att utveckla sin flexibilitet. Du kan också läsa en **svensk sammanfattning** av artikeln.

REFLEKTIONSUPPGIFT: Välj ut ett läroinnehåll i matematik som du behandlar i din egen undervisning. Fundera på vad flexibilitet kunde innebära i samband med det läroinnehållet och hur du kunde hjälpa eleverna att tänka flexibelt när de lär sig det.

Diskussion kring betydelsen av flexibelt matematiskt tänkande i skolundervisningen

Även om en stor del av forskningsresultaten stöder undervisningen om flexibelt matematiskt tänkande, präglas frågan fortsättningsvis av en del meningsskiljaktigheter när det gäller utvecklingen av undervisningen i praktiken. I följande videoklipp går Verschaffel igenom några av dessa omdiskuterade frågor.

Argument – motargument 1

Borde skolan fokusera på att undervisa om grundläggande matematikfärdigheter och att grundligt öva upp elevernas förmåga att tillämpa *en* fungerande lösningsmodell? Flexibla färdigheter kan de lära sig någon annanstans.

Verschaffel: Fråga 1.

Om du vill får du gärna läsa också en **svensk sammanfattning** av Verschaffels presentation.

Erno Lehtinen kommenterar.

Jon Star kommenterar.

Argument – motargument 2

Om vi accepterar att det är skolmatematikens uppgift att undervisa eleverna om flexibelt matematiskt tänkande och adaptiva kunskaper, när är det lämpligast att göra det? Är det en förnuftig tankegång att undervisningen börjar med rutinfärdigheter och först någon gång senare fokuserar på flexibelt tänkande?

Verschaffel: Fråga 2.

Om du vill får du gärna läsa också en **svensk sammanfattning** av Verschaffels presentation.

Erno kommenterar.

Dimitri kommenterar.

Argument – motargument 3

Vem ska man då undervisa om flexibelt tänkande? Borde man bara koncentrera sig på matematiskt begåvade elever?

Verschaffel: Fråga 3.

Om du vill får du gärna läsa också en **svensk sammanfattning** av Verschaffels presentation.

Erno kommenterar.

Jon Star kommenterar.

Dimitri kommenterar.

Argument – motargument 4

Hur borde man lära ut flexibla matematiska strategier?

Verschaffel: Fråga 4.

Om du vill får du också läsa en **svensk sammanfattning** av Verschaffels presentation.

Erno kommenterar.

Jon Star kommenterar.

I videon intill ger Teija några praktiska exempel på hur man kan undervisa om flexibla aritmetiska strategier med hjälp av matematikdiskussioner i en hypotetisk undervisningssituation.

I den här videon lyfte forskarna – som hade satt sig i elevrollen – fram strategier som inte alltid var de mest uppenbara. Exempelvis i uppgiften 9 · 49 vill många sannolikt gärna tillämpa tiouppdelningsstrategin så här: 9 · 50 − 9 eller 10 · 49 − 49. I en verklig situation med en hel elevklass föreslår alltid någon elev en sådan lösning. I matematikdiskussioner vars syfte är att stärka elevernas flexibla strategier är det emellertid viktigt att läraren inte fastnar för den allra uppenbaraste strategiska lösningen utan har tålamod att fortsätta diskussionen så att flera alternativ hinner behandlas. Småningom hjälper diskussionerna sedan eleverna att se vilka strategier som är de mest ändamålsenliga i en viss typ av uppgifter. Också då kan olika elever ha olika uppfattningar om vilken strategi som just för dem är den mest ändamålsenliga, eftersom strategisk flexibilitet förutsätter att inte bara uppgiftsegenskaper utan också individuella styrkor tas i beaktande.

REFLEKTIONSUPPGIFT: Fundera över diskussionen, som Verschaffel initierat. Diskussionen kan egentligen sammanfattas med de fyra frågeorden *varför, när, för vem* och *hur.*

2.2 Utveckling av matematiskt tänkande

Inledning

I videon nedan ger Erno Lehtinen en överblick över vad olika undersökningar ger vid handen när det gäller utvecklingen av matematiskt tänkande på lång sikt. Videon är ungefär 19 minuter lång.

Klicka på bilden för att öppna videon.

Vad kan en tidig numerisk kompetens säga om en elevs förmåga att lära sig matematik senare i livet?

Utvecklingen av matematiskt tänkande börjar inte först i och med den formella matematikundervisningen efter skolstarten. Grunden för matematiskt tänkande börjar läggas steg för steg redan under de försa levnadsåren. Förståelsen av naturliga tal, som utvecklats före skolåldern, och färdigheterna som hänför sig till den kan ge en fingervisning om elevernas förmåga att lära sig matematik i början av skoltiden. I det här avsnittet ges en inblick i temat utgående från två finländska undersökningar. I dem har forskarna tillämpat så kallade strukturella ekvationsmodeller, som kan utnyttjas för att undersöka hur flera olika variabler samtidigt kan förutspå en elevs senare inlärningsförmåga.

Av Aunio och Niemivirtas undersökning framgår det att både räknefärdigheterna och förståelsen av talbegreppet mer generellt (relational skills) hos förskoleeleverna kan ge en fingervisning om både matematikvitsordet och enskilda matematikfärdigheter i början av den grundläggande utbildningen.

Förståelsen av begreppet naturligt tal, spontan fokusering på antal samt räknefärdigheter, som i sin tur mätts före skolåldern, är alla faktorer som kan förutspå elevernas prestationsnivå i matematik i början av skoltiden och ända till slutet av årskurs 6. Motsvarande forskningsresultat finns även från andra länder än Finland. Du kan läsa närmare om temat i följande artiklar:

Aunio, P. & Niemivirta, M. (2010): Predicting children's mathematical performance in grade one by early numeracy. Learning and Individual Differences, 20, 427–435. Här är länken till artikeln.

Hannula-Sormunen, M., Lehtinen, E., & Räsänen, P. (2015): Preschool Children’s Spontaneous Focusing on Numerosity, Subitizing and Counting Skills as Predictors of their Mathematical Performance 7 Years Later at School. Mathematical Thinking and Learning 17 (2–3), 155–177. Här är länken till artikeln.

På med matematikglasögon – redan i tidig barndom!

Kurserna i matematik för småbarnspedagogik och nybörjarundervisning inom finska Flexma-fortbildningen baserar sig på ett forskningsprojekt som finansierats av spetsprojektmedel från Finlands Akademi. I den korta videon nedan förklarar Minna Hannula-Sormunen varför det finns ett behov av matematikundervisning i småbarnspedagogiken. Videon har spelats in under slutseminariet för Finlands Akademis spetsprojekt, som ordnades för representanterna för staten, samarbetspartnerna och de andra spetsprojekten.

Klicka på bilden för att öppna videon.

Biologiskt fundament till matematiskt tänkande

Lyssna på podcastavsnittet från webbplatsen WNYC Studios om fundamentet som människans matematiska tänkande vilar på och svara sedan på påståendena nedan. I avsnittet får du höra en diskussion mellan professorerna Stanislas Dehaene och Susan Carey, som båda är pionjärer inom forskningen kring numeriskt processande och kognitiv utveckling. Du kan också ta hjälp av **den svenska sammanfattningen** av avsnittet medan du lyssnar.

Du kan lyssna på podcastavsnittet på webbplatsen för **WNYC Studios via den här länken**.

Gör uppgiften nedan när du har lyssnat på avsnittet. I uppgiften får du uppskatta hur väl de angivna påståendena baserar sig på forskning. Underbyggs påståendena av de forskningsresultat som lyftes fram i podcastavsnittet eller inte?

UPPGIFT: Är påståendena nedan forskningsbaserade?

1. Spädbarn förfogar över observationsmekanismer för att identifiera mängder.

2. Förändringar i antalet föremål aktiverar andra områden i hjärnan än förändringar i föremålens karaktär.

3. Med hjälp av sina observationsmekanismer kan spädbarn skilja mellan antalen nio och tio från varandra.

4. Det bor stammar i Amazonas regnskogar som inte räknar genom att räkna upp räkneord, vilket är bevis för att förmågan att räkna är kulturbunden.

5. Ett litet spädbarn (2–3 mån.) upplever förändringen från ett till två som större än förändringen från åtta till nio.

Betydelsen av barnens egen aktivitet och interaktion för deras tidiga utveckling

Läs Hannula-Sormunen, Mattinen, Räsänen och Ruusuvirtas **artikel** om fundamentet till barnens tidiga matematiska färdigheter – medfödda färdigheter, medveten aktivitet och interaktion och ange sedan för påståendena nedan huruvida de underbyggs av forskningsresultaten som presenterades i artikeln.

UPPGIFT: Är påståendena nedan forskningsbaserade?

1. Enligt forskningen är förmågan att spontant kunna identifiera antal och den frivilliga övning förmågan ger upphov till centrala element i utvecklingen av barnens taluppfattning.

2. När barn interagerar med andra, mer erfarna medlemmar av sin kultur tillägnar de sig kulturella redskap, såsom förmågan att identifiera antal.

3. Barnens benägenhet att spontant lägga märke till antalet föremål eller företeelser är en egenskap som inte kan påverkas.

4. Interaktionen kring antal mellan barn och vuxna minskar när barnen har utvecklat ett spontant intresse för antal som förekommer i deras omgivning.

5. Delad uppmärksamhet betyder att båda parterna är benägna att fokusera på ett gemensamt objekt och att parterna samtidigt är medvetna om att de samordnat sin uppmärksamhet.

6. Vuxna och barn tolkat automatiskt föremålen och företeelserna i en situation på samma sätt.

7. Det är lättare att samordna uppmärksamheten kring små, exakta antal i situationer där antalet är uppenbart för den vuxna.

8. Förmågan att spontant fokusera på antal innebär att barnen på eget initiativ styr sin uppmärksamhet mot det exakta antalet i en mängd föremål eller en serie av företeelser.

9. I inlärnings- och undervisningssituationer är det fråga om tvåvägsinteraktion mellan barn och vuxna, eftersom de kan lära och lära sig av varandra.

Åtta myter om matematiska färdigheter hos småbarn

Det finns en hel del **felaktiga** uppfattningar om matematiska färdigheter hos småbarn, som inte underbyggs av forskningen. Vilka av dessa åtta nedan har du tidigare stött på?

1. Matematik lär man sig först i skolan.

Jag har ofta stött på den här felaktiga uppfattningen.
Det är inte särskilt ofta jag har hört någon tycka så här.

2. Matematik finns till för enstaka begåvade barn som har bättre matematiska gener.

Jag har ofta stött på den här felaktiga uppfattningen.
Det är inte särskilt ofta jag har hört någon tycka så här.

3. Små tal och enkla geometriska former är alldeles tillräckligt för barnen före skolåldern.

Jag har ofta stött på den här felaktiga uppfattningen.
Det är inte särskilt ofta jag har hört någon tycka så här.

4. Det är viktigare med språkliga färdigheter och läskunnighet än matematiska färdigheter.

Jag har ofta stött på den här felaktiga uppfattningen.
Det är inte särskilt ofta jag har hört någon tycka så här.

5. Småbarnspedagogerna borde hålla sig i bakgrunden och låta barnen leka i en stimulerande miljö.

Jag har ofta stött på den här felaktiga uppfattningen.
Det är inte särskilt ofta jag har hört någon tycka så här.

6. Det är onödigt att bedöma matematiska färdigheter hos småbarn.

Jag har ofta stött på den här felaktiga uppfattningen.
Det är inte särskilt ofta jag har hört någon tycka så här.

7. Barn lär sig matematik bara med hjälp av konkreta föremål.

Jag har ofta stött på den här felaktiga uppfattningen.
Det är inte särskilt ofta jag har hört någon tycka så här.

8. Datorer lämpar sig inte för undervisningen eller lärandet i matematik.

Jag har ofta stött på den här felaktiga uppfattningen.
Det är inte särskilt ofta jag har hört någon tycka så här.

Källa: Lee, J. S., & Ginsburg, H. P. (2009). Early childhood teachers' misconceptions about mathematics education for young children in the United States. Australian Journal of Early Childhood, 34, 37–45.

Vi slår hål på myter om småbarnsmatematik

Det finns en hel del myter och felaktiga uppfattningar om småbarnsmatematiken och icke minst om hur småbarn ska undervisas i matematik. I föreläsningsserien nedan slår direktören för Erikson Institute, Jennifer McCray, hål på några av de vanligaste myterna som hon har stött på när hon har utbildat småbarnspedagoger och lärare. Titta på videorna och svara på frågorna i anslutning till dem. Du kan också bekanta dig med **presentationsbilderna på engelska** som är tillgängliga på webbplatsen för Erikson Institute. Dessutom kan du ta hjälp av **den svenska sammanfattningen** av videorna.

Myt 1: ”För små barn är det viktigare att utveckla sina språkliga färdigheter än att öva matematiska färdigheter.”

Myten: ”För små barn är det viktigare att utveckla sina språkliga färdigheter än att öva matematiska färdigheter.”

Fundera en stund över varför myten inte är sann. Hur motiverar föreläsaren sin ståndpunkt?

De två övriga myterna hittar du på nästa sida.

Myt 2: ”Småbarnsmatematiken går huvudsakligen ut på att lära sig siffror och former.”

Myten: ”Småbarnsmatematiken går huvudsakligen ut på att lära sig siffror och former.”

Fundera en stund över hur du tänker kring den här myten och på vilka grunder myten kan sägas vara falsk. Upplevde du motiveringarna som överraskande?

Myt 3: "Det är enkelt att undervisa småbarn i matematik, eftersom det handlar om den mest grundläggande matematiken.”

Myten: "Det är enkelt att undervisa småbarn i matematik, eftersom det handlar om den mest grundläggande matematiken.”

Fundera en stund över varför det enligt föreläsaren inte är så enkelt att undervisa småbarn i matematik.

Talbegreppet och den grundläggande aritmetiken i årskurserna 1–6

Grunden som man lägger i årskurserna 1–6 både för användningen av matematik utanför skolkontexten och för senare matematikstudier under resten av den grundläggande utbildningen och i gymnasiet är ytterst viktig. I årskurserna 3–6 i den grundläggande utbildningen bygger inlärningen i matematik på det tidiga matematiska tänkandet som barnen har utvecklat redan före skolåldern samt på de färdigheter barnen lärt sig i småbarnspedagogiken. De här årskurserna är speciellt viktiga, eftersom barnen då stärker sin förståelse av naturliga tal och utvidgar sin taluppfattning till rationella tal. En god förståelse av talsystemet är en central förutsättning i flexibel matematik.

I videon intill talar Robert Siegler om hur barn lär sig bråktal och hur man kan undervisa dem om bråktal. Om du vill kan du läsa även en **svensk sammanfattning** av hans video.

Klicka på bilden för att öppna videon.

UPPGIFT: Lyfte Siegler fram någonting i sin video som du borde ta i beaktande i din egen undervisning?

Utvecklingen av matematiskt tänkande på högre skolstadier

I årskurserna 7–9 och gymnasiet utgörs den viktigaste förändringen i matematiskt tänkande av övergången från det konkreta till det mer abstrakta. Det är också en övergång från tal till variabler och från enskilda fall till generaliseringar. Tidigare illustrerade Teija Laine hur variabelbegreppet kan stärkas redan i årkurserna 1–6 genom att jämföra likhetsbegreppet med en våg och genom att ändra på talen på båda sidorna av likhetstecknet så att balansen bibehålls eller genom att använda en konkret våg. I de högre årskurserna står en variabel, som har en central roll i matematiken, inte längre bara för ett okänt tal, utan dess betydelse varierar beroende på situationen. I årskurserna 7–9 undersöker eleverna olika samband och allmänna egenskaper hos tal och uttryck och lär sig att koncentrera räkneoperationerna i ekvationslösning på variabeln. I gymnasiet behöver studerandena i sin tur kunna flexibelt reflektera över hur olika variabler är beroende av varandra och hur ändringar i olika parametrar påverkar situationen. Det är nödvändigt att förstå variabelbegreppet för att man ska kunna förstå funktionsbegreppet som utgör kärnan i gymnasiematematiken. Största delen av gymnasiematematiken går ut på att undersöka olika funktioner och deras egenskaper.

Problemlösningsfärdigheter och allmänna färdigheter kring matematiskt tänkande, såsom förmågan att identifiera regelbundenheter, göra antaganden, ifrågasätta, motivera, göra generaliseringar, utföra experimentella undersökningar, kombinera, dela upp i flera delar, jämföra osv. utgör grunden för utvecklingen av matematiskt tänkande på alla utbildningsstadier. På de högre skolstadierna utvecklas barnens och ungdomarnas metakognitiva färdigheter (till exempel förmågan att observera och styra ens egna arbetssätt) emellertid oerhört mycket, vilket på ett unikt sätt möjliggör utvecklingen av färdigheterna ovan, som utgör kärnan i matematiskt tänkande.

Variabel- och funktionsbegreppet

Dimitri Tuomela lyfter fram några utmaningar i förståelsen av variabelbegreppet och variablernas situationsbundna karaktär samt ger exempel på hur man kan stärka förståelsen av variabelbegreppet.

Klicka på bilden ovan för att öppna videon.

Frivilligt extramaterial: Om du vill läsa mer om temat ger Henna Heikkinens pro gradu-avhandling (på finska) en översikt över ett flertal undersökningar kring ämnet: **“Siirtymä aritmetiikasta algebraan - kirjainmuuttujan käyttöönottoon liittyviä oppimisvaikeuksia”**.

I gymnasiet behandlas variabelbegreppet framför allt i funktioner, där man undersöker sambanden mellan bestämda variabler. Funktionsbegreppet har visat sig vara mycket svårt till och med för matematikstuderande på universitetsnivån. Det schematiska upplägget i både läroböckerna och undervisningen har delvist bidragit till felaktiga uppfattningar om funktioner. Därför är det viktigt att få en så mångfasetterad bild som möjligt av på vilka olika sätt funktionsbegreppet kan missförstås. I videon intill presenteras Miroslawa Sajkas förtjänstfulla undersökning, där materialets kvalitet går före des kvantitet. Undersökningen baserar sig nämligen på en 45 minuter lång intervju med en genomsnittlig gymnasiestuderande och på observationer av hens arbete med en uppgift vars syfte var att på ett mångsidigt sätt främja förståelsen av funktionsbegreppet.

Dimitri Tuomela lyfter fram några felaktiga uppfattningar om funktioner och reflekterar över hur läroböckernas och undervisningens mångsidighet eller schematiska natur kan bidra till att de uppstår.

Klicka på bilden för att öppna videon.

Matematikens tre världar

Ett sätt att se på utvecklingen av matematiskt tänkande hos elever och studerande i alla åldrar är David Talls teori om matematikens tre världar. Även den här teorin betonar behovet av att erbjuda eleverna möjligheten att tänka på flera olika sätt. I videon presenteras teorin av Markus Hähkiöniemi, universitetslektor vid Jyväskylä universitet.

Klicka på bilden för att öppna videon.

Uppgifter

Uppgifterna nedan har kategoriserats enligt skolstadium. Det är inte meningen att du gör dem alla, utan du kan välja att göra endast de uppgifter som bäst passar in på dina arbetsuppgifter.

Ifall du inte just nu arbetar på ett daghem eller en skola, kan du välja ut den uppgift som för dig är enklast att göra. Om du inte har möjlighet att göra någon av uppgifterna, kan du avlägga den här kursdelen också genom att göra upp en plan (inklusive eventuella utmaningar) för hur du skulle genomföra övningarna.

Uppgiftsbeskrivningar (välj en)

1) Småbarnspedagoger och förskolelärare

Prova på leken om grönsakstorget ('Vihannestori') tillsammans med barnen. Med hjälp av leken får du en inblick i hur matematiska färdigheter kan främjas hos småbarn. Det här är en rollek som du kan testa att göra med ett eller flera barn. Aino Mattinen och Minna Hannula-Sormunen presenterar leken i videon nedan. Videon ger dig tips om hur rolleken kan genomföras tillsammans med ett eller flera barn.

Läs närmare skriftliga **instruktioner för leken här**.

Uppgift: Beskriv kort vad som var utmanande med och hur du lyckades främja barnens matematiska tänkande med hjälp av rolleken. Berätta också med hur gamla barn och var du testade den här matematiska leken.

Aino och Minna presenterar leken.

2) Lärare i årskurserna 1–6:

Testa att föra en matematisk diskussion med din egen klass, vars syfte är att stärka förståelsen av likhetsbegreppet. Med matematiska diskussioner avses diskussioner där eleverna uppmuntras att lyfta fram olika typer av lösningar och förslag. Här är man alltså inte ute efter ett "rätt" svar utan flera alternativa svar. Om det i diskussionen dyker upp förslag som matematiskt sett är felaktiga, ska de också rättas till genom att diskutera igenom dem tillsammans med elevgruppen (matematiskt felaktiga svar ger ofta upphov till ytterst fruktbara diskussioner). Om du inte just nu

arbetar med undervisning eller av någon annan orsak inte kan genomföra uppgiften i en undervisningssituation, kan du göra uppgiften genom att reflektera över hur du skulle styra diskussionen.

Uppgift: Beskriv kort dina erfarenheter med uppgiften.

3) Lärare i årskurserna 7–9 och gymnasiet:

Uppgift: För en matematisk diskussion tillsammans med eleverna eller studerandena kring variabelbegreppets olika betydelser. Beskriv kort vad som var utmanande, vad som lyckades väl och vad du lärde dig av uppgiften.

Om du vill får du gärna använda dig av de exempel som Dimitri Tuomela tog upp i sin video (mobilabonnemanget och produkten av två närliggande tal), diskussionen kring vågen som Teija Laine visade exempel på i sin video eller problemlösningsuppgiften som presenterades i videon om funktioner.

Ifall du inte har möjlighet att föra diskussionen tillsammans med elever eller studerande, kan du reflektera över variabel- eller funktionsbegreppet utifrån David Talls tre världar i matematik. Vilka element ingår det i den konceptuella-förkroppsligade, den symboliska och den formella världen? Ge exempel. Berätta också om du har upptäckt att en elev haft problem med någon av dessa världar och hur det har kommit till uttryck.

Videorespons

I responsvideorna går professor Erno Lehtinen igenom centrala begrepp när det gäller utvecklingen av matematiskt tänkande på lång sikt. Dessa begrepp är mycket viktiga för inlärningen av all annan matematik. Professor Minna Hannula-Sormunen fokuserar i sin tur speciellt på utvecklingen av tidiga matematikfärdigheter och myterna kring den och lyfter fram centrala observationer i samband med leken om grönsakstorget. Doktoranden Dimitri Tuomela reflekterar, utifrån de diskussioner som lärare i årskurserna 7–9 och gymnasiet rapporterat om i sina inlämningsuppgifter, över utmaningar med matematik samt matematikens olika språk, betydelser och långsamma förändring.

Kärnbegrepp kring utvecklingen av matematiskt tänkande

I videon diskuterar Erno Lehtinen kursdeltagarnas funderingar kring innehållet i temahelheten.

Felaktiga uppfattningar om tidiga matematikfärdigheter

Hur vanliga är de olika felaktiga uppfattningarna om tidiga matematikfärdigheter? Vad är speciellt utmanande i småbarnspedagogiken i Finland, när det gäller matematikfärdigheter? I sin video kommenterar Minna Hannula-Sormunen kursdeltagarnas svar på uppgiften om myterna om tidiga matematikfärdigheter.

Grönsakstorget

I videon intill lyfter Minna Hannula-Sormunen fram några viktiga observationer som småbarnspedagoger och förskollärare gjort i samband med leken om grönsakstorget.

Elevdiskussion kring variabelbegreppet

I videon nedan reflekterar doktoranden Dimitri Tuomela, utifrån diskussioner med ämneslärare kring temat, över utmaningar med matematik samt matematikens olika språk, betydelser och långsamma förändring.

Här får du också en direkt länk till **Worldometers** -webbplatsen och artikeln som Dimitri tipsar om i videon **van Leeuwen, A. & Janssen, J. (2019). A systematic review of teacher guidance during collaborative learning in primary and secondary education. Educational Research Review, 27, 71–89.**

3 Vad behövs matematiken till?

3.1 Vad behövs matematiken till?

Ibland kan det vara en utmaning i undervisningen att svara på elevernas frågor om vad specifika läroinnehåll behövs till.

Fenomenet förekommer inte bara i finländska klassrum, utan det är mycket allmänt speciellt i västvärlden. Nationella organisationen för matematiklärare i USA (NCTM) har sammanställt en webbplats specifikt kring den här frågan. Blev du intresserad kan du gå in och bekanta dig närmare med **NCTM** webbplats. Webbplatsen kräver en separat inloggning.

Efter inloggningen ska du klicka på *FAQ* och välja frågan *Why study math? How to study math.* På webbplatsen hittar du också en hel rad tips och idéer för undervisningen.

I videon nedan berättar en pilot om matematikens betydelse i pilotutbildningen och i själva arbetet som pilot.

Klicka på bilden för att öppna videon.

Specialexperten Jukka Mattila vid Finansministeriet reflekterar över vilken betydelse matematiskt kunnande har och vad matematiken egentligen behövs till.

Professor Maarit Järvenpää förklarar hur matematikens betydelse har ökat generellt och hur matematiken blivit till en viktig del av ett flertal yrken. Å andra sidan utgör matematiken också ett viktigt verktyg för tänkandet överlag.

Topi Törmä visar exempel på hur mer utmanande läroinnehåll i matematik kan förklaras för eleverna.

Nationalekonomen Olli Kärkkäinen förklarar vad han behöver matematik till i sitt arbete men understryker samtidigt att matematiska och sociala färdigheter inte utesluter varandra utan att dagens arbetsliv förutsätter att man kan kombinera dessa.

Webbplatsen för **Teknologiindustrins 100-årsjubileumsstiftelse** erbjuder materialunderlag för diskussioner t.ex. i klassrummet om hur matematiken används och vad den behövs till i olika situationer. (Materialet är tillgängligt endast på finska.)

Olika sätt att svara på elevernas frågor om var matematik kan behövas

1. På föregående sida innehöll både webbplatsen för NCTM och en del videor konkreta exempel på hur man kan svara på frågan genom att berätta om hur matematik behövs i vardagen och i olika yrken. När det gäller en del läroinnehåll i skolmatematiken är det här relativt enkelt gjort, men för några matematiska begrepp eller procedurer kan det vara utmanande att hitta ett specifikt exempel.

2. I vissa fall kan det vara bättre att ta utgångspunkt i själva det matematiska systemet. Ibland är det viktigt att lära sig ett visst begrepp helt enkelt för att senare matematiska begrepp eller operationer baserar sig på det. Sedan kan det i sin tur finnas en hel del exempel på konkreta tillämpningar av de senare kunskaperna, även om det inte skulle finnas ett specifikt exempel på tillämpningen av det ursprungliga begreppet.

3. Om undervisningen i stor utsträckning går ut på att använda matematiska begrepp för att tolka eller lösa vardagliga situationer, kan eleverna vara mindre benägna att ställa frågor om begreppens användningsområden. Ibland är det dock möjligt att besvara elevernas frågor just genom att presentera en uppgift där en ny matematisk färdighet används för att lösa ett problem i vardagslivet. Då ger man inte bara verbala motiveringar, utan det konkreta exemplet kan få tala för sig själv.

4. När man jobbar med matematiska problem händer det ofta att man behöver anstränga sig och att man kör fast. Det är bra att synliggöra de färdigheter för eleverna som sådana situationer ger upphov till och som behövs också i vardagslivet: metakognitiva färdigheter, känslomässiga färdigheter och allmänna kognitiva färdigheter. Matematiken ger en möjligheten att lära sig trivas utanför sin s.k. bekvämlighetszon, vilket är en viktig förutsättning för allt nyskapande och kreativt tänkande. Matematiken erbjuder en också

möjligheten att bli medveten om och utveckla de beteendemönster som aktiveras när man är mentalt ansträngd. De problemlösningsfärdigheter man lärt sig genom matematiken kommer till nytta även i vardagslivet.

5. Det är också viktigt att ibland låta eleverna ”ta bollen” och be dem själva fundera på hur matematiken kommer till nytta i vardagen och i arbetslivet.

6. Matematikstudier hjälper oss också att få en bättre kännedom om vårt eget tänkande. I matematiska problem kör vi ofta fast och behöver därför anstränga oss. För eleverna får man gärna synliggöra de färdigheter som är viktiga i vardagslivet och som man kan lära sig just i den typen av problemlösningssituationer: granskning och reglering av ens eget tänkande (s.k. metakognitiva färdigheter), känslorelaterda färdigheter och en allmän förmåga att tänka. Matematiken kan lära en att känna sig bekväm utanför sin egen bekvämlighetszon, vilket är en förutsättning för allt kreativt tänkande.

Framtida behov av matematiskt kunnande

I artikel på Yles webbplats sägs det att matematiken ofta ses som något tråkigt, besvärligt, teoretiskt och onödigt och något som inte har någon koppling till vardagslivet. Den uppfattningen utmanas i en kort dokumentärfilm (längd ca 21 min) och i tre podcastavsnitt (längd sammanlagt ca 45 min) **på samma webbplats**. (Materialet finns bara på finska.)

Professor Jon Star från Harvarduniversitetet har fungerat som expert för Flexibel matematik-fortbildningsprogrammet. I videon nedan reflekterar han över hur världen utvecklas och hur utvecklingen återspeglas i behovet av matematiskt kunnande. Titta på videon och gör uppgiften.

Klicka på bilden för att öppna videon.

REFLEKTIONSUPPGIFT: Tycker du att det är väsentliga aspekter av framtidens behov av matematiskt kunnande, som Jon Star identifierar i videon.

Matematiken hjälper oss att förstå världen

I videon nedan reflekterar lärarutbildaren Kaisa Jokiranta över vilken betydelse matematiken har i vardagslivet och hur den hjälper oss att förstå världen omkring oss.

REFLEKTIONSUPPIGFT: Väckte videon nya tankar hos dig kring matematikens betydelse?

Framtidskompetenser i matematikundervisning

En grupp kända forskare har nyligen publicerat en **artikel**, om matematikundervisning, där de ur olika synvinklar betraktar behovet av matematiskt kunnande i framtidens arbets- och vardagsliv. De kommer också med en del påståenden om hur förändringar i teknologin, samhället och arbetslivet kommer att påverka vilken typ av matematik som skoleleverna bör undervisas i. Du kan läsa även den **svenska sammanfattningen** av artikeln.

I videon nedan diskuteras artikeln av matematikern Peter Hästö och forskaren Erno Lehtinen, som forskat i lärande. Videon är ungefär 25 minuter lång.

UPPGIFT: Diskutera tillsammans med eleverna vilken typ av matematik som behövs i olika yrken och i vardagslivet och hur digitaliseringen påverkar behovet av matematiskt kunnande. Temat kan också diskuteras med barnen i småbarnspedagogiken och förskoleundervisningen. Diskutera temat gärna också med kollegorna. Om du för närvarande inte kan göra diskussionsuppgiften med elever eller kollegor kan du diskutera temat även i din bekantskapskrets.

3.2 Hur öka motivationen?

Att stärka elevernas motivation är en viktig del av flexibel matematik

Vad är det som gör matematiken intressant?

Ett flertal undersökningar som gjorts under de senaste åren har visat att finländska skolelever inte är särskilt motiverade att studera matematik och att motivationen ser ut att avta under åren i skolan. I den offentliga debatten föreslås ofta att problemet kan lösas genom att införa olika underhållande element, såsom spel, i matematikundervisningen. Men räcker det med sådana underhållningsknep för att matematiken ska kunna göras intressant för eleverna?

Läs Rimma Nymans (2016) **studie** om vad som gör matematiken intressant. Du kan också läsa en **svensk sammanfattning** av studien.

Frågan om hur intressant eleverna anser matematiken vara behandlas ofta rätt ytligt i den offentliga debatten. Det finns inte bara ett enda sätt att göra läroinnehållen i skolmatematiken intressanta för eleverna, utan elevernas matematikintresse kan höjas på olika sätt beroende på elevernas ålder, läroinnehållen som behandlas och olika situationsbundna faktorer. I videon intill diskuterar Teija Laine och Erno Lehtinen om vad det kan innebära när matematiken görs intressant. Videon är ungefär 27 minuter lång.

REFLEKTIONSUPPGIFT: Ger videon enligt dig svar på frågan om vad matematikintresset går ut på?

Dimitri Tuomela, som ingår i kursens planeringsteam, har lång erfarenhet – både som lärare och som forskare – av olika sätt att höja elevernas intresse för matematik. I videon intill talar han närmare om olika faktorer som kan väcka elevernas matematikintresse.

REFLEKTIONSUPPGIFT:

Ta ställning till följande påståenden på en skala från 1 till 5. (1= inte alls, 5 = i mycket hög grad):

I skolmatematiken har eleverna vanligtvis möjlighet att känna

a) att de kan jobba självständigt

b) att de är skickliga i det de gör

c) att de är en del av en gemenskap.

Hur tror du att du kan dra nytta av Dimitris tips i din egen undervisning?

Vad tycker man ute på fältet?

Vi frågade personer som länge undervisat i matematik eller som på andra sätt reflekterat över utmaningarna i matematikundervisningen om deras syn på vad det är som gör matematik intressant. De som delar med sig av sina tankar är lärarutbildarna Kaisa Jokiranta, Sinikka Kaartinen och Jarmo Leskinen, övningsskolelärare Tero Hirvi samt Maarit Rossi vars arbete för att förnya matematikundervisningen är internationellt erkänt.

Intervju 1: Kaisa Jokiranta

REFLEKTIONSUPPGIFT: Hur användbara, tycker du, är tankarna som framförts i videon?

Intervju 2: Tero Hirvi

REFLEKTIONSUPPGIFT: Hur användbara, tycker du, är tankarna som framförts i videon?

Intervju 3: Maarit Rossi

REFLEKTIONSUPPGIFT: Hur användbara, tycker du, är tankarna som framförts i videon?

Intervju 4: Sinikka Kaartinen

REFLEKTIONSUPPGIFT: Hur användbara, tycker du, är tankarna som framförts i videon?

Intervju 5: Jarmo Leskinen

REFLEKTIONSUPPGIFT: Hur användbara, tycker du, är tankarna som framförts i videon?

Sammandrag av frågor kring hur man kan väcka elevernas intresse för matematik

Flera undersökningar och lärarnas praktiska erfarenheter tyder på att insikten om nyttan med matematik är en viktig bidragande faktor när det gäller elevernas intresse för matematik. Nyttan med matematik kan betraktas ur olika synvinklar.

- På den här kursen bekantar vi oss med vilken koppling det finns mellan matematiken och de färdigheter som behövs både i vardagssysslorna och i arbetslivet – i dag och i framtiden.
- Uppgifterna som ger eleverna praktiska erfarenheter av hur matematik kan tillämpas för att lösa problem i verkliga livet är ett viktigt redskap för att kunna visa eleverna vilken nytta de har av matematik.

Matematik handlar emellertid inte bara om tillämpningar, utan det är ett teoretiskt system, där förståelsen av dess element och sambanden mellan dem i sig kan bidra till ett ökat intresse.

- Framför allt flexibla sätt att närma sig matematik kan göra sådana uppgifter intressanta som annars kanske upplevs som tråkiga.
- En viktig del av flexibel matematik är också möjligheten att hitta på egna strategier, som i sin tur bidrar till elevernas delaktighet. Med andra ord går matematiken inte bara ut på att mekaniskt följa någon annans instruktioner utan även att på ett kreativt sätt jobba med matematik i samarbete med andra.

Hur intressant ett skolämne upplevs vara påverkas också av inlärningsmiljöer och redskap som används i undervisningen. Undersökningar har visat att spel och spelifierade miljöer inte utgör någon helhetslösning när det gäller matematikintresset, men de kan bidra betydligt till att göra inlärningsmiljöer mer varierande och därigenom öka elevernas intresse för matematik.

REFLEKTIONSUPPGIFT: Vad är det som matematik intressant? Svaret beror antagligen rätt mycket på utbildningsstadiet och situationen. Reflektera över frågan för dig själv eller i mån av möjlighet tillsammans med en eller flera kollegor.

Tron på egna färdigheter stärker även intresset

Det som gör den sjunkande motivationen för matematikstudier speciellt problematisk är att motivationen verkar enligt undersökningar spela en central roll för lärandet på lång sikt. Till exempel i en omfattande tysk studie (Murayama, Pekrun, Lichtenfeld & vom Hofe, 2013) följde man utvecklingen av matematiskt kunnande hos över 3 000 elever under en femårsperiod. I början av studien hade intelligensen, som hade mätts med hjälp av olika test, en koppling till elevernas matematiska kunnande, men med skolåren avtog intelligensens betydelse. Istället visade det sig att elevernas motivation och studiestrategier blev en central förklarande faktor för förändringen i hur väl eleverna lärde sig matematik.

Forskningsresultaten som baserar sig på ett så exceptionellt omfattande material och en så långvarig uppföljning är viktiga för flexibel matematik. Den motivationsfaktorn som på lång sikt

förklarade utvecklingen av elevernas färdigheter i matematik var deras tro på att de själva kan kontrollera sitt lärande. I de senare årskurserna såg även elevernas inre motivation och eget intresse för matematik ut att ha en positiv inverkan på utvecklingen av deras färdigheter. En viktig målsättning med undervisningen om flexibelt matematiskt tänkande är att eleverna ska känna sig som aktiva deltagare som har ”rätt” att även själva komma på och testa olika lösningsstrategier. För det här fortbildningsprogrammet var det också ett viktigt forskningsresultat att de använda strategierna gav en betydligt tydligare fingervisning om elevernas framtida matematikkunskaper än intelligens. (Om du blev intresserad av studien får du gärna läsa även **originalartikeln (Murayma, 2013)**.)

Otaliga undersökningar har visat att de upplevelser av lärande som stärker elevernas tro på sina egna färdigheter och som samtidigt främjar deras autonomi och delaktighet leder till en bestående ökning av elevernas inre motivation..

När man undervisar eleverna om flexibel matematik innebär det att de inte ska lära sig endast ett sätt att lösa uppgifter, utan att de ska lära sig alternativa strategier och att de uppmuntras att hitta på egna strategier genom att reflektera över uppgifterna mer djupgående.

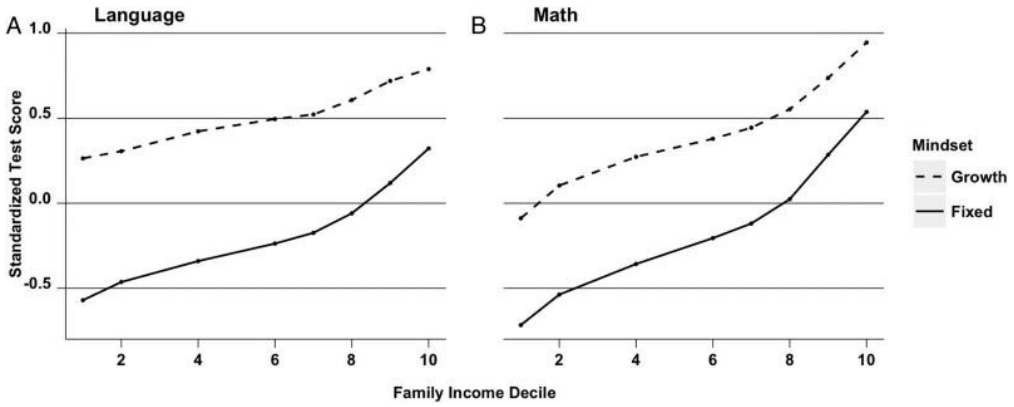
Allmän uppfattning: Den här typen av undervisning lämpar sig för de bästa eleverna. Är den alltså inte för krävande för de svagare eleverna?

Här kommer vi in på en central utmaning i matematikundervisningen, nämligen det faktum att eleverna är olika. I hur hög grad är det fråga å ena sidan om oföränderliga, medfödda skillnader och å andra sidan om skillnader som har skapats av tidigare upplevelser i uppväxtmiljön? Eller i hur stor utsträckning är det snarare fråga om föreställningar som främjar respektive hämmar lärandet och som skapats av tidigare skolupplevelser och kulturella faktorer?

Amerikanska Carol Dweck är motivationsforskare och hennes undersökningar har visat att elevernas lärande påverkas i hög grad av vilken uppfattning de har om huruvida deras färdigheter är bestående och utvecklingsbara. Dweck talar om tänkesätt (mindset) som skapas av kulturen. Tron på att de färdigheter som behövs för att utföra en viss uppgift kan övas upp med övningar ser ut att leda till bättre inlärningsresultat än ett tänkesätt som utgår från statiska färdigheter. Undersökningar har visat att det går att förändra den här typen av uppfattningar och att det i inlärningssituationer är möjligt att stärka ett tänkesätt som utgår från att färdigheterna kan utvecklas, vilket i sin tur leder till bättre inlärningsresultat. De så kallade Growth Mindset-interventionerna har gett goda resultat i den amerikanska skolkulturen där man tidigare i hög grad har betonat intelligensskillnader mellan eleverna. Modellen har tillämpats framför allt i undervisningen i matematik och naturvetenskap. Forskarna vid Stanforduniversitetet har skapat webbplatsen **Youcubed** som ger en uppfattning om hur idéerna i interventionerna.

En del av metoderna kan ur ett finländskt perspektiv verka något naiva, eftersom intelligensskillnaderna hos oss aldrig har betonats så mycket. Dessutom gör de finländska eleverna enligt undersökningar inte en lika tydlig skillnad mellan färdighet och försök. Det är emellertid inte bara fråga om ett amerikanskt fenomen. I en alldeles färsk chilensk undersökning som baserade sig på ett sampel på över 100 000 elever gav vid handen att elevernas tro på hur

mycket deras färdigheter kunde utvecklas korrelerade med deras resultat i matematik hos över 11 procent av tiondeklassarna (Claro, Paunesku & Dweck, 2016). Det är välkänt att skolelevers socioekonomiska bakgrund ger en tydlig fingervisning om deras inlärningsresultat i matematik. Ett intressant resultat i den här studien var att elevernas tro på att deras matematikfärdigheter kunde utvecklas korrelerade på samma sätt med inlärningsresultaten i alla socioekonomiska grupper. Med andra ord hade de elever som trodde på att deras färdigheter lät sig utvecklas också bättre inlärningsresultat i alla grupper (figur 1).

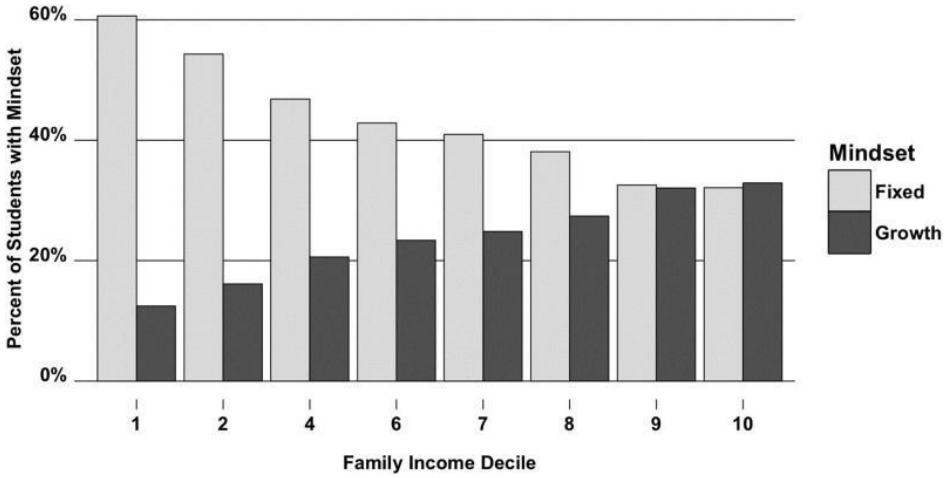


Figur 1: Påverkan av social bakgrund och talangföreställningar på inlärningsresultat i matematik (publiceras på nytt med tillstånd, Claro, Paunesku & Dweck, 2016).

Claro, S., Paunesku, D., & Dweck, C. S. (2016). Growth mindset tempers the effects of poverty on academic achievement. Proceedings of the National Academy of Sciences, 113(31), 8664–8668.

Läs artikeln via den här länken.

Samma undersökning visade även övertygande att elevernas sociala bakgrund också påverkar deras uppfattning om hur mycket de kan utveckla sina färdigheter (figur 2). En uppfattning om att ens färdigheter inte går att utvecklas ser ut att förmedlas tydligare i familjer med lägre socioekonomisk status än i andra familjer.



Figur 2: Korrelation mellan social bakgrund och talangföreställningar. (publiceras på nytt med tillstånd, Claro, Paunesku & Dweck, 2016).

Även om det i Finland inte har varit ett lika stort fokus på intelligensskillnader, är det en vanlig uppfattning även i den finländska skolkulturen att matematikfärdigheterna är statiska: antingen har man ”mattehuvud” eller så har man det inte. Growth Mindset-interventionerna innehåller vissa element som stöder även idéerna inom flexibel matematik. I videon intill går vi igenom några principer och praktiska tillämpningar.

a. Genom att slå hål på myten om ”mattehuvud” och att i sitt språkbruk fokusera på utvecklingspotentialen i matematikfärdigheterna istället för statiskt kunnande stöder man grundidén i flexibel matematik.

b. En av lärdomarna i Growth Mindset-interventionerna är att snabbhet inte är ett väsentligt element i lärandet i matematik. Utvecklingen av flexibelt matematiskt tänkande tar tid och förutsätter att olika fenomen undersöks i lugn och ro. Det är viktigt att fundera över hur man kan frigöra tid för det av matematiklektionerna.

c. Även eleverna som klarat sig mindre bra i matematik kan vara med och lösa krävande uppgifter som förutsätter flexibelt tänkande och stärker problemlösningsförmågan. Man ska bara se till att situationen är välorganiserad och att eleverna erbjuds det stöd de behöver.

Erno kommenterar undersökningarna som refereras ovan.

Uppgift

Via den här länken hittar du **ett Mindset-frågeformulär**.

Låt dina elever **fylla i formuläret** anonymt och sammanställ sedan (till exempel i några elevgrupper) ett sammandrag av alla svar på ett tomt formulär. I de lägre årskurserna kan eleverna få räkna antalet svar i absoluta tal, men i de högre årskurserna är det bra att beräkna också procentandelarna. Diskutera sedan sammandraget tillsammans. Ta upp till diskussion några av de argument för att färdigheter kan utvecklas, som lyfts fram i Growth Mindset-studien. (Du kan läsa mer om studien på **webbplatsen Youcubed**.)

Med förskoleelever och förstaklassare kan uppgiften göras muntligt så att man fokuserar bara på några av frågorna. De kan diskuteras i tur och ordning genast efter att de ställts.
I småbarnspedagogiken kan Mindset-frågorna diskuteras kollegorna emellan.

Om du inte för närvarande undervisar på en skola eller i småbarnspedagogiken kan du ta upp frågorna i din egen bekantskapskrets och diskutera temat på det sättet.

4 Hur stöder man flexibelt matematiskt tänkande i praktiken?

4.1 Att stärka flexibelt matematiskt tänkande

Främjande av flexibilitet i praktiken och olika representationer

I undervisningen är det möjligt att lära ut en mängd olika strategier och ge instruktioner för när de ska tillämpas. Ett sådant mekaniskt sätt att lära ut strategier ser emellertid inte ut att skapa den flexibilitet i matematiskt tänkande som gör det möjligt att använda bekanta strategier i varierande situationer och att vid behov skapa helt nya strategier. I den här temahelheten tar vi en titt på hur man på hållbart sätt kan främja utvecklingen av flexibelt matematiskt tänkande i undervisningen.

Adaptiv och flexibel talkunskap ger strategisk flexibilitet

Forskningen kring aritmetiska strategier tar utgångspunkt i iakttagelsen av att skickligheten hos dem som är duktiga på att räkna inte endast kan förklaras med en skicklig och automatiserad användning av aritmetiska operationer, som traditionellt är målet med aritmetikundervisningen i den grundläggande utbildningen. Matematisk skicklighet (hos såväl barn, unga som vuxna) kännetecknas av väl automatiserade aritmetiska faktakunskaper inom ett begränsat talområde men framför allt av en förmåga att kreativt tillämpa aritmetiska färdigheter i nya matematikuppgifter. Med andra ord kan en skicklig matematiker på ett flexibelt sätt använda sig av olika aritmetiska strategier och anpassa dem till nya situationer.

Merparten av undervisningsmetoderna, när det gäller flexibla aritmetiska strategier, fokuserar på en modell för hur man väljer ändamålsenliga strategier. Då ligger fokuset på hur flexibelt en person väljer ut den strategi, bland alla som hen redan känner till, som bäst låter sig tillämpas i en bestämd uppgift. När man exempelvis subtraherar talet 4 från talet 53 är det fråga om en typisk subtraktionsuppgift. Om uppgiften istället är att subtrahera talet 48 från talet 53 går den mest ändamålsenliga strategin ut på att se uppgiften som addition: Vilket tal ska adderas till talet 48 för att svaret ska bli 53? När målsättningen är att öka flexibiliteten kan det vara bra att utgå från en modell för hur man väljer ändamålsenliga strategier, men en sådan modell utgör endast en liten del av användningen av adaptiva och flexibla strategier. Utöver strategier som den som nämndes ovan använder skickliga matematiker sig av otaliga olika strategier som i många fall inte baserar sig på tillämpning av tidigare kunskaper utan har skapats för en bestämd situation utifrån en mer generell förståelse för talsystemets egenskaper. En viktig färdighet när det gäller flexibelt tänkande är

också förmågan att snabbt utan närmare beräkningar kunna granska huruvida resultaten man fått är i rätt storleksklass.

Från enskilda strategier till heltäckande flexibilitet i matematiskt tänkande

En central pedagogisk utmaning är således hur eleverna kan lära sig att se talsystemet som ett nätverk där talen på ett flertal olika sätt och genom flera olika kopplingar hänger ihop med varandra. Resultaten som fåtts av olika undersökningar tyder på att undervisningen om enskilda strategier inte nödvändigtvis leder till att eleverna lär sig använda dessa strategier på ett flexibelt sätt. En forskningsgrupp vid Åbo universitet, under ledning av E. Lehtinen, har i sin forskning fokuserat på vilken typ av kunskaper om tal i en ny uppgift gör det möjligt att identifiera de flexibla lösningar som uppgiften möjliggör. Den här typen av kunskap om talsystemet kallas för adaptiv talkunskap. Man kan uppfatta till exempel talet 143 i en uppgift på ett flertal olika sätt: det är nära talet 144, som är detsamma som 12 • 12, eller nära talet 140, som i sin tur är detsamma som 2 • 70 eller 7 • 20 och så vidare.

För utvecklingen av adaptiv talkunskap är det enligt undersökningar nödvändigt att både ha en god begreppslig förståelse och att problemfritt kunna utföra grundläggande räkneoperationer. Det är emellertid inte tillräckligt. Forskare som har undersökt flexibla strategier har betonat att eleverna bör få möjlighet att utforska olika talkombinationer och skapa egna strategier – som hjälper dem att lösa uppgifter på flera olika sätt – för att de ska kunna utveckla adaptiv talkunskap, som i sin tur är en förutsättning för flexibel aritmetik. I klassrumssituationer kan utvecklingen av adaptiv talkunskap främjas med hjälp av öppna uppgifter och matematikdiskussioner. Exempelvis kan eleverna tillsammans få jobba med uppgifter där alla grundläggande räkneoperationer (+, −, •, :) är tillåtna men där man endast får använda talen 6, 14, 2, 3 och 22. Eleverna har sedan i uppgift att diskuterande, tillsammans fundera på vilka aritmetiska uttryck som med de givna talen producerar resultatet 24.

Till exempel:

24 = 22 + 2
24 = 6 + 14 + 2 + 2
24 = 2 • 14 – 6 + 2
24 = 2 • 22 – 14 – 6

I nybörjarundervisningen kan man använda sig av mindre tal och i de högre årskurserna i sin tur av större tal, parenteser och potenser.

En närmare beskrivning av flexibel och adaptiv talkunskap kan du läsa i vår artikel: **McMullen, J., Brezovszky, B., Rodríguez-Afleht, G., Pongsakdi, N., Hannula-Sormunen, M. M., & Lehtinen, E. (2016). Adaptive number knowledge: Exploring the foundations of adaptivity with whole-number arithmetic. Learning and Individual Differences, 47, 172–181**.

Adaptiv talkunskap om rationella tal

Adaptiv talkunskap är viktigt inte bara för operationer med naturliga tal utan rentav ännu viktigare för operationer med rationella tal (bråk-, decimal- och procenttal). Som professor Robert Siegler, som är expert på utvecklingen av matematiskt tänkande, har påpekat har människor i allmänhet

mycket svaga kunskaper om rationella tal, trots att förmågan att flexibelt kunna använda rationella tal behövs både i vardagen och i arbetslivet. En nyligen publicerad studie har visat att endast en liten del av 12–13 år gamla elever klarar av att använda sig av rationella tal flexibelt i varierande situationer och vet hur man flexibelt växlar mellan olika framställningssätt, dvs. representationer, för rationella tal (bråktal–decimaltal och olika grafiska representationer). En god begreppslig förståelse och goda procedurala färdigheter är nödvändiga för utvecklingen av adaptiv talkunskap också när det gäller rationella tal. Det behövs emellertid mer än så. Det är också nödvändigt med ändamålsenliga övningar, där rationella tal används flexibelt i varierande sammanhang (McMullen, Hannula-Sormunen, Lehtinen & Siegler, skickats till granskning).

Flexibla aritmetiska färdigheter ger en fingervisning om lärandet i matematik senare i livet

I matematikundervisningen är det bra att komma ihåg att elevernas adaptiva talkunskap ger, enligt undersökningar, en fingervisning om hur väl eleverna senare lär sig algebra. Det beror i sin tur på att adaptiv talkunskap leder till skapandet av ett komplext system av kopplingar mellan tal. Traditionell aritmetikundervisning leder ofta till mekaniska, linjära kunskaper om aritmetik. Det betyder att eleverna lär sig utantill exempelvis $7 + 8 = 15$ men ser inte helheten som en representation för förhållandena mellan talen 7, 8 och 15. Med andra ord innehåller uttrycket ovan också information om att $15 – 7 = 8$ och att $7 = 15 – 8$ eller att $2 \cdot 7 + 2 \cdot 8 = 2 \cdot 15$. Övergången från en sådan systemisk förståelse av aritmetik till algebra är betydligt enklare en från en mekanisk och linjär aritmetik.

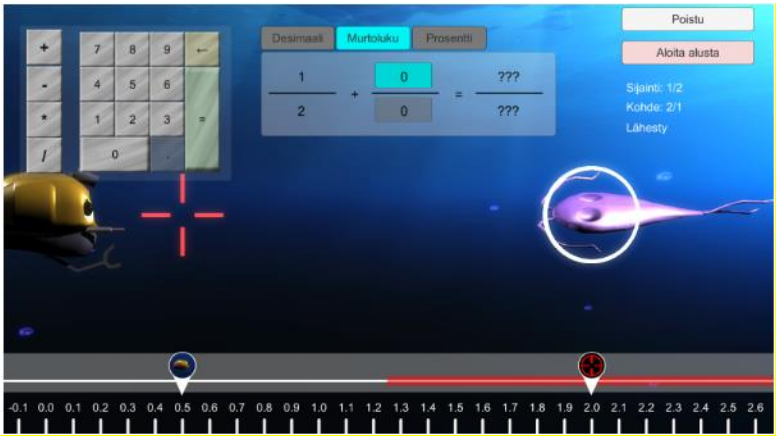
Kopplingen mellan flexibel och adaptiv talkunskap och lärandet i algebra diskuteras närmare i vår artikel: **McMullen, J., Brezovszky, B., Hannula-Sormunen, M. M., Veermans, K., Rodríguez-Aflecht, G., Pongsakdi, N., & Lehtinen, E. (2017). Adaptive number knowledge and its relation to arithmetic and pre-algebra knowledge. Learning and Instruction, 49, 178–187**.

Spel som inlärningsmiljöer för flexibel matematik

Som det konstaterades på föregående sida kan eleverna i klassrumssituationer öva upp sin adaptiva talkunskap – som användningen av flexibla strategier bygger på – med hjälp av öppna uppgifter och matematikdiskussioner. Då kan mängden övning emellertid förbli rätt liten, vilket inte nödvändigtvis är tillräckligt för utvecklandet av ett rikt nätverk av tal och operationer. En lösning på problemet är spelifierade inlärningsmiljöer. För det här ändamålet har vi i forskningsgruppen för lärandet i matematik vid Åbo universitet utvecklat spelet Number Navigation Game (NNG) kring naturliga tal. För rationella tal är spelet NanoRoboMath under utveckling. Båda spelen kommer att vara tillgängliga för lärare som deltar i kommande Flexma-kurser på sex studiepoäng. NNG-spelet har testats grundligt. Spelet har visat sig vara till stor nytta i utvecklingen av adaptiv talkunskap och stärkandet av grundläggande aritmetikkunskaper. Dessutom verkar spelet främja även utvecklingen av tidiga algebraiska färdigheter. Blev du intresserad kan du läsa mer om forskningen bakom iakttagelserna i artikeln **Brezovszky, B., McMullen, J., Veermans, K., Hannula-Sormunen, M.M., Rodríguez-Aflecht, G, Pongsakdi, N., Laakkonen, E. & Lehtinen, E. (2019). Effects of a mathematics game-based learning environment on primary school students' adaptive number knowledge. Computer & Education, 128, 63−74**.

I videon förklarar Erno Lehtinen vad spelet går ut på.

NanoRoboMath-spelet har kommit till pilotfasen, och nästa version av spelet kommer att vara tillgänglig på kommande Flexma-kurser på sex studiepoäng. Spelaren har i uppgift att styra räkneoperationerna i spelet med hjälp av en nanorobot. Roboten hjälper spelaren att sköta olika räddnings- och skötseluppdrag i exempelvis olika vattenlevande organismer. I räkneoperationerna används bråk-, decimal- och procenttal, och robotens rörelser visas på en skalbar tallinje (en konkret representation av tätheten i mängden som rationella tal bildar). Spelaren ska exempelvis föra roboten till en exakt punkt i en cell, applicera ett bekämpningsmedel så snabbt som möjligt i närheten av en farlig mikrob eller applicera ett läkemedel så nära en cellyta som möjligt med hjälp av roboten utan att röra själva cellväggen.



REFLEKTIONSUPPGIFT: Hur kunde den här typen av spelifierade miljöer på bästa sättet användas i matematikundervisningen? Reflektera över frågan för dig själv eller i mån av möjlighet tillsammans med en eller flera kollegor.

Utvecklande av flexibilitet med hjälp av jämförelseuppgifter

Jämförelseuppgifter är ett välbeprövat redskap för utvecklandet av flexibilitet. Nedan ser du ett exempel på en jämförelseuppgift om flexibilitet i användningen av olika representationer. Du får fram exemplet genom att klicka på länken nedan.

Exempeluppgift: Avståndet mellan punkter

I videon intill ger Dimitri Tuomela en kort presentation av hur man med hjälp av jämförelseuppgifter kan ändra på ungdomars uppfattningar om matematik och skapa goda ramar för utvecklingen av flexibelt tänkande.

Som extramaterial får du gärna läsa en nyligen publicerad **artikel av Riikka Palkki (på finska)** om vilka förhandsuppfattningar lärare och lärarstuderande har om användningen av jämförelseuppgifter.

I det finska fortbildningsprogrammet Joma ingår det också målgruppsspecifika kurser för årskurserna 7–9 och gymnasiet. Om du vill kan du ta en titt på vilken typ av flexibilitetsuppgifter och pedagogiska anvisningar som används på de kurserna via länkarna nedan (på finska):

Årskurserna 7–9

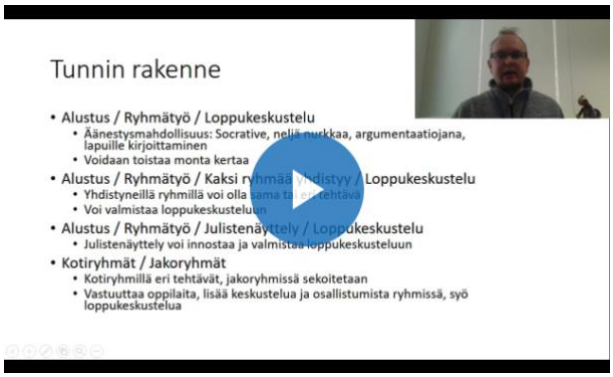
Gymnasiet

REFLEKTIONSUPPGIFT: Vilka fördelar och utmaningar ser du i användningen av jämförelseuppgifter?

Utvecklande av flexibilitet med hjälp av argumenterande diskussioner

Det är möjligt att få eleverna att utveckla flexibiliteten i sitt tänkande genom att diskutera olika lösningsförslag som eleverna själva har kommit på. En viktig del av flexibelt tänkande är förmågan att diskutera tänkesätt som avviker från ens eget och att förklara sina egna tankar för andra. Detta innebär argumenterande diskussioner, där eleverna diskuterar matematik.

I videon intill ger Markus en kort presentation av med hurdana lektionsstrukturer och uppgiftstyper man kan främja argumenterande diskussioner. Lektionsstrukturerna och uppgiftstyperna har testats i skolundervisningen.



Låt oss härnäst ta en närmare titt på en lektionsplan med argumenterande diskussioner. Figurserieuppgiften används ofta på alla utbildningsstadier från småbarnspedagogiken till gymnasiet. Först kan exempelvis komma underfund med regeln i figurserien och rita följande figur i serien. Till sist kommer man så långt att man kan formulera ett uttryck med vilket man kan beräkna antalet ”delar” i figurserien.

Läs **lektionsplanen via den här länken** och gör sedan uppgifterna nedan.

UPPGIFT 1

Formulera ett sätt att beräkna antalet delar i den 100:de figuren i serien. Kan du komma på ett annat sätt? Om du vill kan du fundera på uppgiften tillsammans med någon annan eller kanske till och med presentera uppgiften för din egen undervisningsgrupp.

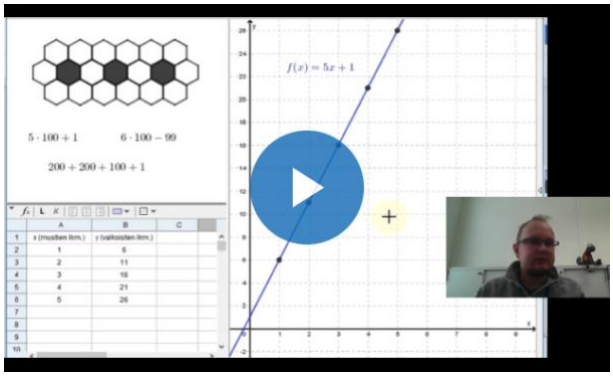
UPPGIFT 2

Undersök närmare dina, andras och eventuellt dina elevers lösningsförslag i uppgift 1 och reflektera över frågorna nedan.

a. Vilken nytta har man med tanke på undervisningen av att ha många olika alternativa sätt lösa uppgiften på?

b. På vilket sätt växlar man mellan olika representationer i de olika lösningsförslagen, och vilken nytta har man av det med tanke på lärandet?

När du har gjort uppgifterna får du titta på videon nedan, där Markus reflekterar över användningen av olika representationer i uppgiften.

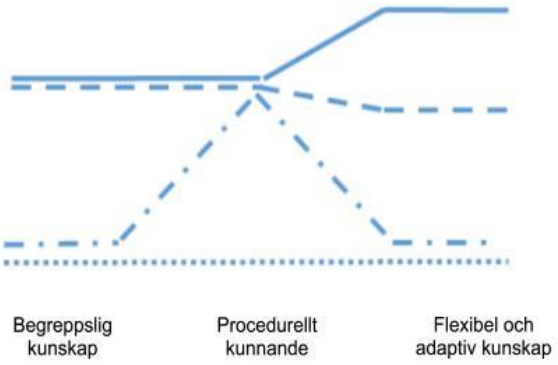


4.2 Vikten av övning i utvecklingen av flexibelt matematiskt tänkande

På de övriga Flexma-kurserna som riktar sig till specifika utbildningsstadier presenteras och testas olika uppgiftstyper och verksamhetsmodeller. Syftet med dem är att antingen stärka elevernas flexibla matematiska tänkande eller att utveckla deras förmåga att förstå begrepp och att problemfritt utföra olika operationer, vilket i sin tur möjliggör tillämpningen av flexibel matematik. Är det nödvändigt med övningar när eleverna lär sig om flexibel matematik? Hur stort är i så fall övningsbehovet och hurdana övningar är det fråga om? En matematikundervisning eller matematikstudier som fokuserar på betydelsen av begreppslig förståelse har ibland ansetts innebära att det inte längre är nödvändigt att öva, utan eleverna lär sig matematik i och med att de förstår matematiska begrepp och idéer. Det är ytterst viktigt att förstå begrepp, och det är också bra om alla tillsammans har möjlighet att ”upptäcka” matematiska lagbundenheter, men det går inte att lära sig matematik utan en stor mängd övning. Det har också visat sig vara problematiskt att göra en stark skillnad mellan begreppslig förståelse och procedurella färdigheter. Professor Jon Star, som har fungerat som sakkunnig inom projektet Flexibel matematik, har i sina undersökningar kunnat visa att starkt procedurellt kunnande förutsätter även goda begreppsliga kunskaper.

Våra egna undersökningar kring flexibelt matematiskt tänkande – både när det gäller aritmetiken med naturliga tal och rationella tal – har visat att god begreppslig förståelse och procedurella färdigheter är förvisso nödvändiga men inte tillräckliga förutsättningar för utvecklingen av starka matematikkunskaper. Figuren nedan ger en förenklad illustration av resultaten av vår nyligen slutförda studie om lärandet av rationella tal. I studien undersökte vi kunskaperna om bråk- och

decimaltal hos 400 kring 13 år gamla elever med hjälp av flera olika typer av tester. Testerna i studien innehöll uppgifter som förutsatte begreppslig förståelse och aritmetiska räkneoperationer med bråk- och decimaltal samt uppgifter som var utvecklade för att mäta flexibla och adaptiva kunskaper om rationella tal. Med hjälp av en statistik analys upptäcktes det fyra olika profiler bland elevernas resultat: (1) En fjärdedel av eleverna ingick i gruppen där prestationsnivån var jämnsvag inom alla de undersökta delområdena. (2) En knapp tredjedel av eleverna hade en svag begreppslig förståelse. De presterade också svagt när deras flexibla och adaptiva kunskaper testades. Däremot klarade de problemfritt av att utföra standardmässiga aritmetiska procedurer med rationella tal. (3) Största gruppen (en dryg tredjedel av eleverna) hade en god begreppslig förståelse och goda procedurella färdigheter men presterade endast genomsnittligt när deras flexibla och adaptiva kunskaper testades. (4) Endast tio procent av eleverna ingick i gruppen som i praktiken presterade på en lika hög nivå – när det gällde begreppslig förståelse och procedurella färdigheter – som eleverna med profil 3 men däremot på en avsevärt högre nivå när deras flexibla och adaptiva kunskaper testades.



Mycket likartade har resultaten varit även när det gäller naturliga tal. Även då är begreppsliga och procedurella kunskaper viktiga men inte tillräckliga förutsättningar för utvecklingen av flexibla färdigheter. Den goda begreppsliga förståelsen och de utmärkta procedurella färdigheterna hos eleverna med profil 3 i figuren ovan har säkert krävt en hel del övning. Vad är det då som skiljer eleverna med profil 4 från de andra? Är det fråga om medfödda skillnader i begåvning, eller har dessa elever övat ännu mer?

Man kan söka svar på frågan i en modern expertisundersökning, där forskarna försökt ta reda på olika faktorer som ger upphov till kunskaper på hög nivå. Traditionellt har den typen av kunskaper förklarats på två sätt: Å ena sidan är det en vanlig föreställning att expertis på hög nivå förutsätter en särskild medfödd begåvning. Å andra sidan har mångsidiga erfarenheter ansetts skapa förutsättningar för expertis på hög nivå. Resultaten av expertisundersökningen har utmanat båda synsätten. Anders Ericsson, som varit en ledande forskare när det gäller talang och prestation, sammanfattar resultaten av de senaste årtiondenas expertisforskning i sin populärvetenskapliga bok Peak – secrets from the new science of expertise, som gavs ut 2016. Youtube-videon nedan ger en underhållande sammanfattning av innehållet i boken.

Den vetenskapliga expertisforskningen har visat att det inte finns några genvägar till kunnande på hög nivå, utan det förutsätter alltid en stor mängd övning. Det här gäller även de så kallade barngenierna. Den talang för pianospel och komponering som exempelvis Mozart visade redan som barn hade förutsatt intensiva övningar under ledning av hans komponistpappa. Undersökningar har visat att individuella skillnader i begåvning spelar en viss roll när man börjar öva upp en ny färdighet, men senare skillnader i färdighetsnivån förklaras huvudsakligen av övningsmängden och -kvaliteten.

En annan viktig tes i videon är att en prestation på hög nivå inte har att göra med utvecklandet av en stark färdighet i sig. Istället förutsätter en bestående utveckling som ständigt ger upphov till prestationer på hög nivå att det skapas välstrukturerade och organiserade mentala modeller. För matematikens del innebär det att det inte är tillräckligt att eleverna direkt efter lektionen lär sig upprepa en viss operation, utan de behöver utveckla en välstrukturerad kunskapsram eller en mental modell av läroinnehållet.

En tredje viktig tes i videon är att ökande erfarenhet eller övningsmängd inte som sådana kan förklara någons färdighetsnivå. Lång rutinmässig erfarenhet kan till och med leda till en sjunkande kunskapsnivå, vilket verkar vara fallet i högutbildade yrkesgrupper (såsom läkare). Det avgörande är övningskvaliteten och hanteringen av den ökande erfarenheten. Det som kännetecknar erfarenheter och övningar som leder till en hög färdighetsnivå och som kallas målinriktad övning (deliberate practice) är (1) målmedvetenhet, (2) intensiv koncentration, (3) feedback, (4) strävan efter att överskrida gränserna för den nuvarande färdighetsnivån (och gå utanför sin ”bekvämlighetszon”) och (5) sakkunnig handledning.

Kännetecken för målinriktad övning

I ett flertal branscher, såsom inom musiken och idrotten, och i många yrken har man kunnat visa hur prestationer på hög nivå förutsätter målinriktade övningar. Kan man utgå från samma tänkesätt för att beskriva lärandet i skolan – och speciellt när det gäller barns och ungdomars lärande i matematik? I videon nedan ger Erno en introduktion till idén om målinriktad övning.

Antalet särskilda matematikstunder i småbarnspedagogiken eller matematiklektioner i skolan är endast en liten del ett barns eller en ungdoms liv. Övningsmängden är dessutom mycket mindre än den tid som de barn och unga som intensivt utvecklar sina färdigheter i musik eller idrott lägger ner på att öva. Dessutom är det bara en del av en lektion som ägnas åt övningar. I nästa video diskuterar Minna och Erno om hur det tidiga lärandet i matematik kan ha liknande kännetecken som målinriktade övningar utan att mängden formell undervisning utökas från den nuvarande nivån.

Barnens benägenhet att lägga märke till antal i situationer där ingen uppmuntrar dem att göra det verkar erbjuda ypperliga tillfällen för funderingar och lekar kring antal och antalsförändringar. De kan kallas för självstyrda övningar, och när de är som bäst har de många kännetecken som är typiska för målinriktad övning. Det här gör emellertid inte undervisningen onödig. Småbarnspedagoger och lärare har i uppgift att främja utvecklingen av en fördjupad begreppslig förståelse även hos de elever som har en stark benägenhet att lägga märke till antal.

Betydelsen av benägenheten att spontant lägga märke till bland annat antal är redan rätt välkänd. Olika nyligen publicerade forskningsresultat tyder emellertid på att barnens och de ungas självstyrda övningar inte bara gäller antalsobservationer utan ser ut att fortsätta även senare i samband med matematiskt mer komplicerade fenomen. I nästa video diskuterar Erno och Minna

nya forskningsresultat som gäller benägenheten att spontant lägga märke till hur olika antal förhåller sig till varandra.

I studier om benägenheten att spontant lägga märke till olika fenomen har man undersökt olika situationer där barn och unga lägger märke till matematiskt intressanta fenomen som inte har beskrivits som matematiska. Både lärarledd och självstyrd övning kan emellertid uppstå även i samband med matematikuppgifter. Matematikuppgifter kan göras relativt mekaniskt utifrån en modell som presenterats i undervisningen. Det är dock också möjligt att vägleda eleverna att se på uppgifterna på ett sådant sätt att de ger upphov till mer generella matematiska resonemang, till exempel kring matematiskt viktiga strukturer eller alternativa lösningsstrategier. Det är också möjligt att betrakta nya läroinnehåll ur ett problemorienterat perspektiv, så att det kan uppstå målinriktade matematiska resonemang utan en koppling till det som eleverna tidigare här lärt sig. Med andra ord är det fråga om att skapa situationer där det uppstår ett tydligt behov av nya matematiska begrepp (exempelvis situationer där ett större tal subtraheras från ett mindre: negativa tal, där man behöver hitta en rät vinkel endast med hjälp av ett längdmått: Pythagoras sats, eller där man behöver undersöka likformigt accelererande rörelse: derivata och integral).

Du kan läsa mer om betydelsen av målinriktad övning för lärandet i matematik i den här artikeln: **Lehtinen, E., Hannula-Sormunen, M., McMullen, J. & Gruber, H. (2017): Cultivating mathematical skills: From drill-and-practice to deliberate practice. ZDM – Mathematics Education, 49(4), 625–636**.

REFLEKTIONSUPPGIFT: Några av de tidigare temahelheterna på kursen har fokuserat på hur man för eleverna kan visa matematikens betydelse i olika yrken och situationer i samhället. Fundera nu över hur man kan få eleverna att intensivt grubbla över matematiska frågor i klassrummet och att fortsätta tillämpa det tänkesättet även utanför matematiklektionerna.

4.3 Vardagsproblem och textuppgifter i matematikundervisningen

Kopplingen mellan matematiska procedurer och vardagsproblem har traditionellt synliggjorts med hjälp av textuppgifter. Till exempel i läroböckerna för folkskolan i början av 1900-talet går det att hitta matematikuppgifter som har en tydlig koppling till betydelsefulla och viktiga lantbruksrelaterade frågor. Den här typen av kopplingar till vardagsfrågor har emellertid blivit svagare med tiden, och textuppgifter används mer och mer till att öva grundläggande räkneoperationer utan någon koppling till betydelsefull, praktisk problemlösning. I vår undersökning, där vi gjorde en internationell jämförelse av textuppgifter i matematiklläroböcker, hittade vi ett extremt exempel i en finsk lärobok på hur man har låtit textuppgifter bli bara ett av många verktyg för mekaniska övningar. I en del bokserier kunde alla textuppgifter på ett uppslag lösas med hjälp av samma artimetiska operationer. Med andra ord kunde alla andra uppgifter lösas genom att plocka ut talen ur uppgiftsbeskrivningen och upprepa samma aritmetiska operation som användes i första uppgiften.

Om läroböcker utformas på samma sätt som de finska läroböcker som beskrevs ovan blir elevernas ytliga uppfattning om textuppgifter, som läroböckerna skapar, bara starkare. Uppfattningen präglas av att eleverna så snabbt som möjligt försöker börja tillämpa matematiska operationer på några ytliga element som de hittar i uppgifterna. Fenomenet är mycket vanligt hos inte bara finländska utan speciellt hos andra västerländska elever. Det här ser ni ett roligt exempel på i videon nedan.

Ett annat typexempel på textuppgifter, där eleverna uppvisar en rätt ytlig användning av lösningsstrategier, är uppgifter som utöver det matematiska innehållet också förutsätter en viss typ av kunskap om världen för att man ska kunna ge ett korrekt svar. "Alla skolans 220 elever åker på en klassutflykt med charterbussar. I varje buss finns det plats för 40 elever. Hur många bussar

behöver rektorn beställa från bussföretaget?" Ett mycket vanligt svar på uppgiften är 5 ½ bussar. Ibland ger elever också svaret "5, 20 blir över". I uppgiften om kaptenens ålder är problemet för många elever att de inte uppriktigt försöker förstå den beskrivna uppgiften utan börjar tillämpa matematiska operationer utan någon faktisk förståelse. I bussexemplet ges svaret i sin tur direkt med hjälp av en aritmetisk operation utan att uppgiftskontexten beaktas.

I följande video diskuterar Anu, Teija och Erno betydelsen av textuppgifter och vardagsproblem i matematikundervisningen.

Av videorna framgår det tydligt att flexibelt matematiskt tänkande kan främjas med hjälp av uppgifter som förutsätter att man först skapar en så kallad situationell modell. Först därefter är det möjligt att reflektera över vilka matematiska operationer problemet i situationen kan lösas med. Teija har sammanställt **ett materialpaket** (på finska) för användningen av textuppgifter i undervisningen. Materialet innehåller både modelluppgifter och exempel på hur problemlösningen kan främjas i klassrumsarbetet. I paketet finns också tips för hur lärare själva kan berika läroboksuppgifter och göra dem intressantare så att de bättre främjar barnens förmåga till flexibel problemlösning.

REFLEKTIONSUPPGIFT: Hur kan textuppgifter göras intressantare och hur kan eleverna stödjas när de ska lösa mer komplicerade uppgifter?

I hur stor utsträckning förutsätter studentprovet i matematik flexibelt tänkande?

Nedan ser du exempel på hur studentprovet i matematik förutsätter flexibelt tänkande. Du kommer åt uppgifterna genom att klicka på länken nedan.

Matematikuppgifter som förutsätter flexibelt tänkande

Vad tycker gymnasieeleverna?

I **dokumentet som öppnas via den här länken** har vi samlat några examinanders kommentarer på uppgifter som kräver flexibelt tänkande och tillämpning av kunskaper. Kommentarerna utgör inte nödvändigtvis något representativt sampel, men de visar att ungdomarna har en annan uppfattning om matematikens natur än de som utarbetar studentexamensproven.

REFLEKTIONSUPPGIFT: Hur kan man förbereda ungdomar inför ett prov som mäter deras förmåga att flexibelt kunna tillämpa, modellera och anpassa sig till olika, nya situationer? Reflektera över frågan för dig själv eller i mån av möjlighet tillsammans med en eller flera kollegor.

REFLEKTIONSUPPGIFT: Nu har du kommit till slutet av kursen *Mot flexibelt matematiskt tänkande.* Fantastiskt! Stanna upp här ännu en gång och reflektera över innehållet i kursen. Vilka tankar har kursen väckt hos dig? Fick du nya idéer för ditt arbete? Är det något innehållsrelaterat som du har fortsatt att fundera på? Skulle du ha velat veta mer om ett visst tema eller finns det något som du tycker borde ha tagits upp på kursen?

Du får gärna också skriva ner och strukturera dina intryck så här avslutningsvis.

5 Kursavslutning

Grattis! Nu har du kommit i mål med kursen. Den här kursen var avsedd att ge en introduktion till flexibelt matematiskt tänkande, förklara vad som menas med begreppet och visa hur flexibelt matematiskt tänkande kommer till uttryck hos barn och unga i olika åldrar. Utöver Pikkumatikka-kursen erbjuds det inom Flexma-fortbildningsprogrammet en kurs som riktar sig till alla som jobbar inom småbarnspedagogik och som handlar om identifiering av stödbehov hos 3–5-åringar. Mer information om andra kurser och om hela fortbildningsprogrammet hittar du på adressen **flexibility.fi/sv**.