

1. Polynomien summa ja erotus

Laske seuraavat yhteen- ja vähennyslaskut.

$$1.1 (3x^2 + 5x - 2) + (2x^2 - 4x + 6)$$

$$1.2 (4x^3 - x^2 + 7) - (3x^3 + 5x - 2)$$

$$1.3 (5x^2 - 3x + 8) + (6x^2 + 4x - 9)$$

$$1.4 (x^4 - 2x^3 + x) - (x^4 - x^2 + 4x)$$

$$1.5 (3x^2 + 2x + 1) + (4x - 7)$$

2. Polynomien tulo

Kerro seuraavat polynomit keskenään.

$$2.1 (x + 3)(x - 4)$$

$$2.2 (2x - 1)(x^2 + 3x - 5)$$

$$2.3 (x - 5)(x^2 + 2x + 1)$$

$$2.4 (x^2 + 3x + 2)(x - 6)$$

$$2.5 (3x - 2)(x + 4)$$

3. Muistikaavat

Sievennä muistikaavojen avulla.

$$3.1 (x + 3)^2$$

$$3.2 (x - 5)^2$$

$$3.3 (2x + 4)^2$$

$$3.4 (x - 7)^2$$

$$3.5 (3x + 1)^2$$

$$3.6 (x - 8)^2$$

$$3.7 (5x + 2)^2$$

$$3.8 (3x - 1)^2$$

$$3.9 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$3.10 \left(2x + \frac{1}{4}\right)^2$$

$$3.11 \left(3x - \frac{1}{6}\right)^2$$

$$3.12 (x + 3)(x - 3)$$

$$3.13 (2x + 5)(2x - 5)$$

$$3.14 (x + 6)(x - 6)$$

$$3.15 (x + 9)(x - 9)$$

$$3.16 (4x - 1)(4x + 1)$$

$$3.17 (3x + 7)(3x - 7)$$

$$3.18 \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$3.19 \left(2x + \frac{1}{2}\right)\left(2x - \frac{1}{2}\right)$$

$$3.20 \left(3x - \frac{1}{3}\right)\left(3x + \frac{1}{3}\right)$$

4 Tekijöihin jakaminen

Jaa tekijöihin eli kirjoita tulomuodossa.

$$4.1 x^2 - 5x$$

$$4.2 x^3 - 5x$$

$$4.3 x^2 - 9$$

$$4.4 x^2 - 25$$

$$4.5 x^3 - 25x$$

$$4.6 x^3 + 25x$$

$$4.7 x^2 - 6x + 9$$

$$4.8 x^2 - 10x + 25$$

$$4.9 x^2 + 20x + 100$$

$$4.10 x^2 + x + \frac{1}{4}$$

$$4.11 x^2 + 2x - x - 2$$

$$4.12 x^3 + 4x + x^2 + 4$$

$$4.13 x^3 - 9x + x^2 - 9$$

$$4.14 x^3 - 25x + x^2 - 25$$

$$4.15 x^3 - 100x - x^2 + 100$$

4. Toisen asteen yhtälöt

Ratkaise seuraavat yhtälöt.

$$4.1 x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$4.2 x^2 + 4x - 12 = 0$$

$$4.3 2x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$4.4 x^2 - 9 = 0$$

$$4.5 x^2 + 7x = 0$$

$$4.6 x^2 - 16 = 0$$

$$4.7 x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$4.8 x^2 - 3x = 10$$

$$4.9 x^2 - 3x = 4$$

$$4.10 x^2 = 9x$$

$$4.11 x^2 = -6x$$

$$4.12 2x^2 + x - 1 = 0$$

$$4.13 \ 3x^2 + 8x = 3$$

$$4.14 \ 5x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$4.15 \ x^2 - 10 = 0$$

$$4.16 \ x^2 + 10 = 0$$

$$4.17 \ 2x^2 - 10 = 0$$

$$4.18 \ x^2 + 6x + 5 = 0$$

$$4.19 \ x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$4.20 \ -x^2 = -x$$

5. Diskriminantti

Määritä yhtälön juurten lukumäärä.

$$5.1 \ x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$5.2 \ x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$5.3 \ 3x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$5.4 \ x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$5.5 \ 2x^2 + x - 4 = 0$$

$$5.6 \ x^2 - x - 12 = 0$$

$$5.7 \ x^2 - 4x = 5$$

$$5.8 \ x^2 + 2x = 7$$

$$5.9 \ x^2 + 2x + 7 = 0$$

$$5.10 \ x^2 - 4 = 0$$

6. Nollakohdat ja tekijät

Etsi polynomien nollakohdat ja jaa tekijöihin.

$$6.1 \ x^2 - 5x + 6$$

$$6.2 \ x^2 + 3x - 4$$

$$6.3 \ x^2 - 4$$

$$6.4 \ x^2 + 6x + 9$$

$$6.5 \ 2x^2 - 8x + 6$$

$$6.6 \ x^2 - 9$$

$$6.7 \ x^2 + x - 2$$

$$6.8 \ x^2 + x - 12$$

$$6.9 \ x^3 - 9x^2$$

$$6.10 \ x^3 - 9x$$

7. Polynomiepähtälöt

Ratkaise seuraavat polynomiepähtälöt.

$$7.1 \ x^2 - 4x + 3 > 0$$

$$7.2 \ x^2 - 5x + 6 \leq 0$$

$$7.3 \ 3x^2 + 2x - 1 > 0$$

$$7.4 \ 4x^2 - 9 \geq 0$$

$$7.5 \ x^2 + 6x + 8 < 0$$

$$7.6 \ 2x^2 - 4x + 1 \leq 0$$

$$7.7 \ x^2 - 7x + 10 > 0$$

$$7.8 \ x^2 + 4x - 20 = 0$$

$$7.9 \ 2x^2 - 10x + 12 > 0$$

$$7.10 \ (x + 3)^2 > 0$$

$$7.11 \ (x + 5)(x - 5) < 0$$

$$7.12 \ x^2 - 12x + 36 = 0$$

$$7.13 \ 3x^2 + 6x - 18 < 0$$

$$7.14 \ x^2 - 2x - 8 < 0$$

$$7.15 \ x^2 + 4x - 20 > 0$$

$$7.16 \ 2x^2 - 10x + 12 > 0$$

$$7.17 \ (x + 3)^2 \leq 0$$

$$7.18 \ (x + 6)(x - 7) > 0$$

$$7.19 \ x^2 - 12x + 36 > 0$$

$$7.20 \ 3x^2 + 6x - 18 < 0$$

$$7.21 \ 4x^2 - 2x - 8 \geq 0$$

$$7.22 \ x^2 + 4x - 20 < 0$$

$$7.23 \ 2x^2 - 10x + 12 > 0$$

$$7.24 \ (x + 3)^2 < 0$$

$$7.25 \ (x + 5)(x - 5) > 0$$

$$7.26 \ x^2 - 12x + 36 < 0$$

$$7.27 \ 3x^2 + 6x - 18 < 0$$

$$7.28 \ x^2 - 2x - 8 > 0$$

$$7.29 \ x^2 + 8x + 16 \leq 0$$

$$7.30 \ (x + 2)^2 < 0$$

MAA2 – loppuosan lisätehtävät

Korkeamman asteen epäyhtälöt

1. Ratkaise epäyhtälö: $x^3 + 2x > x^2$
2. Ratkaise epäyhtälö: $x^4 < -8x$
3. Ratkaise epäyhtälö: $x^5 - 3x^4 < 0$
4. Ratkaise epäyhtälö:
 $6x^3 - 3x^2 + 4 \leq 4$
5. Ratkaise epäyhtälö:
 $2x - x^2 + 4 \leq 1$
6. Ratkaise epäyhtälö: $x^5 + 4x^3 > x^4$
7. Ratkaise epäyhtälö: $x^6 > 9x^4$
8. Ratkaise epäyhtälö: $x^3 + x^2 - 6x > 0$
9. Ratkaise epäyhtälö: $x^3 - 5x^2 > 0$
10. Millä muuttujan x arvoilla funktion
 $f(x) = x^3 + 7x^2 - 8x$ arvot ovat
negatiivisia?
11. Ratkaise epäyhtälö: $8x^3 - 2x^2 > x$
12. Ratkaise epäyhtälö: $x^4 + 2x^3 \geq -x^2$
13. Ratkaise epäyhtälö:
 $-x^3 + 3x^2 + 4x - 12 > 0$
14. Millä muuttujan x arvoilla funktion
 $f(x) = -3x^4 + 12x^2$ arvot ovat
negatiivisia?
15. Ratkaise epäyhtälö:
 $2x^3 + 6x^2 < 2x + 6$

Juurifunktiot

Tehtävissä 16 – 25 määritä annetun funktion määrittelyjoukko

16. $f(x) = \sqrt{3x - 2}$
17. $f(x) = \sqrt[3]{3x - 5}$ (kolmas juuri)
18. $f(x) = \sqrt{-2x + 7}$
19. $f(x) = \sqrt[4]{6 - 2x}$ (neljäs juuri)
20. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x - 6}$ (kolmas juuri)
21. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$
22. $f(x) = 1 - \sqrt{4 - x}$
23. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$
24. $f(x) = \sqrt{2x + 6} - \sqrt{4 - x}$
25. $f(x) = \sqrt{x^3 - x}$

Juuriyhtälöt

26. Ratkaise yhtälö $\sqrt{2x - 4} = 3$
27. Ratkaise yhtälö
 $\sqrt[3]{x - 1} = -2$ (kolmas juuri)
28. Ratkaise yhtälö $\sqrt{12x - x^2} = 6$
29. Ratkaise yhtälö
 $\sqrt[3]{x^3 - 4x + 9} = 2$ (kolmas juuri)

30. Ratkaise yhtälö $\sqrt{6 - x} = x$
31. Ratkaise yhtälö: $1 - \sqrt{4 - x} = -5$.
32. Ratkaise yhtälö: $\sqrt{2x + 5} = -x + 5$.
33. Ratkaise yhtälö: $\sqrt{2x + 3} = x + 1$.
34. Ratkaise yhtälö $\sqrt{x^2 - 2x - 2} + 1 = 0$
35. Ratkaise yhtälö: $\sqrt{x + 6} + \sqrt{x} = 2$.

Rationaalifunktiot

Tehtävissä 36 – 39 määritä annetun funktion määrittelyjoukko

36. $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 2}$
37. $f(x) = \frac{4x + 3}{x^2 - 4}$
38. $f(x) = \frac{x^2 + 6x + 5}{(6 - x)^2}$
39. $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x + 2} - \frac{x^3}{x - 4}$

Tehtävissä 40 – 50 sievennä annettu lauseke

40. Sievennä lauseke: $\frac{x^2 - 3x}{x - 3}$.

41. Sievennä lauseke: $\frac{10x^2 + 25x}{5x}$

42. Sievennä lauseke: $\frac{x}{3x^2 - x}$

43. Sievennä lauseke: $\frac{x + 5}{x^2 - 25}$.

44. Sievennä lauseke: $\frac{2x + 8}{3x + 12}$.

45. Sievennä lauseke $\frac{x^3 + 8x^2 + 16x}{x^2 + 4x}$

46. Sievennä lauseke $\frac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 9}$

47. Sievennä lauseke $\frac{6 - 2x}{x - 3}$

48. Sievennä lauseke: $\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$.

49. Sievennä lauseke $\frac{2 - x}{-2x^2 - 2x + 12}$

50. Sievennä lauseke $\frac{a + 1}{a^3 + 2a^2 - a - 2}$

Rationaaliyhtälöt

51. Ratkaise yhtälö: $\frac{x - 5}{x + 3} = 0$

52. Ratkaise yhtälö: $\frac{x + 1}{x^2 - 1} = 0$

53. Ratkaise yhtälö $\frac{x^2 - x - 2}{x + 3} = 0$

54. Ratkaise yhtälö $\frac{x + 2}{x - 5} = 2$

55. Ratkaise yhtälö: $\frac{x^2 - x}{x + 2} = 2$

56. Ratkaise yhtälö: $\frac{x}{3x - 1} + 1 = 0$

57. Ratkaise yhtälö: $\frac{x + 1}{x} = \frac{x}{x + 1}$

58. Ratkaise yhtälö: $\frac{3x^2 - 12}{x - 3} = 3$

59. Ratkaise yhtälö: $x + 2 = \frac{1}{x - 2}$

60. Ratkaise yhtälö: $\frac{1}{x} - \frac{x}{x + 3} = 0$

MAA3 Lisätehtävät

Yksikönmuunnokset

1. Muunna pyydettyyn yksikköön.

$$3,4 \text{ cm} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ dm}$$

$$356 \text{ mm} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ mm}$$

$$27 \text{ dm} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ mm}$$

$$34 \text{ km} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ m}$$

$$3,7 \text{ cm}^2 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ mm}^2$$

$$250 \text{ mm}^2 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ dm}^2$$

$$1800 \text{ m}^2 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ km}^2$$

$$140 \text{ cm}^2 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ mm}^2$$

$$150 \text{ ha} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ km}^2$$

$$18 \text{ mm}^3 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^3$$

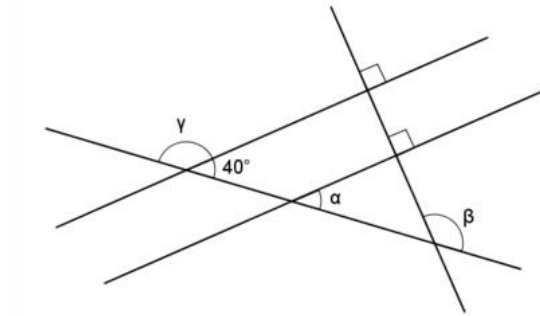
$$1800 \text{ cm}^3 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ l}$$

$$12 \text{ m}^3 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ l}$$

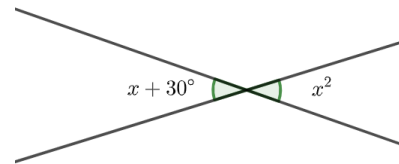
$$2,5 \text{ dl} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^3$$

Tasogeometrian peruskäsitteitä

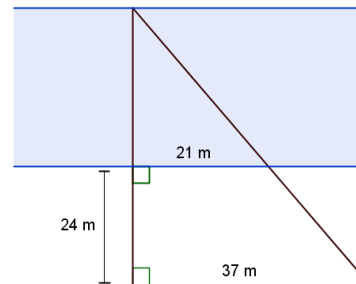
2. Määritä kuvassa olevien kulmien $\alpha=40$, $\beta=130$ ja $\gamma=140$ suuruudet.



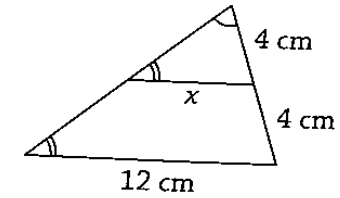
3. Ratkaise x . $x=-5$ tai $x=6$.



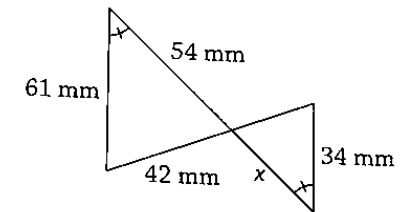
4. Joen leveys määritettiin kuvion mukaisten mittausten avulla. Kuinka leveä joki on?
31,5 m



5. Määritä sivun x pituus. $x=6 \text{ cm}$

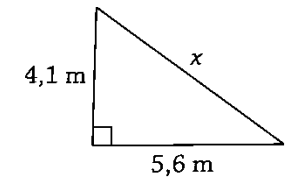


6. Määritä sivun x pituus. $x \approx 30 \text{ mm}$

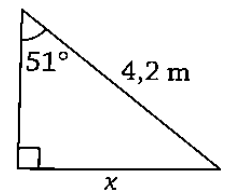


Suorakulmainen kolmio

7. Laske sivun x pituus.
 $x \approx 6,9 \text{ m}$

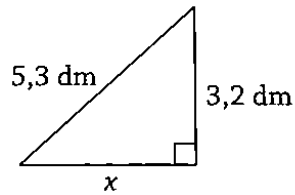


8. Laske sivun x pituus.
 $x \approx 3,3 \text{ m}$

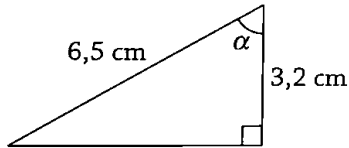


Tarkista nämä tehtävät TI-Nspiren yksikönmuunnostoiminnon avulla.

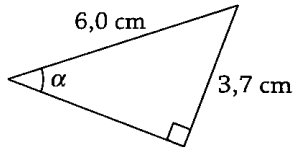
9. Laske sivun x
pituus.
 $x \approx 4,2 \text{ dm}$



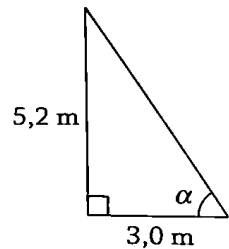
10. Laske kulman α suuruus. $\alpha \approx 61^\circ$



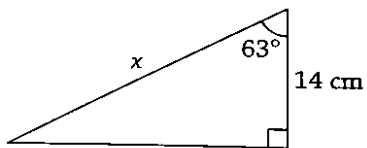
11. Laske kulman α suuruus. $\alpha \approx 38^\circ$



12. Laske kulman α suuruus. $\alpha \approx 60^\circ$



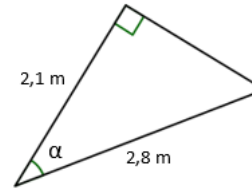
13. Laske sivun x pituus. $x \approx 31 \text{ cm}$



14. Tasakylkisen kolmion kyljen pituus on
17 cm ja kannan pituus 16 cm. Laske
kolmion kulmien suuruudet.

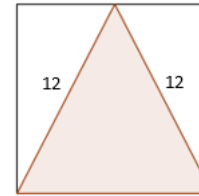
$56^\circ, 62^\circ \text{ ja } 62^\circ$

15. Ratkaise
kulma α .
 $\alpha \approx 41^\circ$

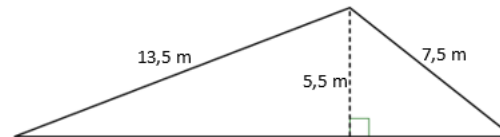


16. Kuvassa olevan neliön
sisään on piirretty
kolmio. Määritä tämän
kolmion pinta-ala.

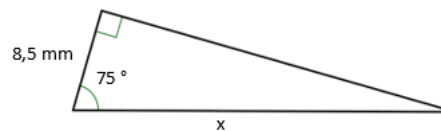
$$A = \frac{288}{5}$$



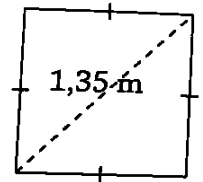
17. Laske kolmion pinta-ala. $A \approx 48 \text{ m}^2$



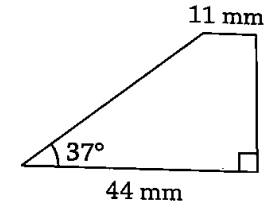
18. Laske sivun x pituus. $x \approx 33 \text{ mm}$



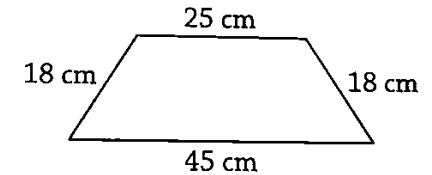
19. Laske nelikulmion
pinta-ala. $A \approx 0,91$
 m^2



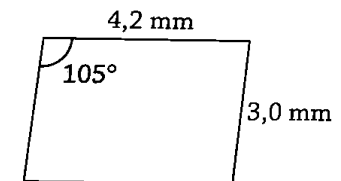
20. Laske
nelikulmion
pinta-ala.
 $A \approx 680 \text{ mm}^2$



21. Laske puolisuunnikkaan pinta-ala.
 $A \approx 520 \text{ cm}^2$



22. Laske suunnikkaan pinta-ala.



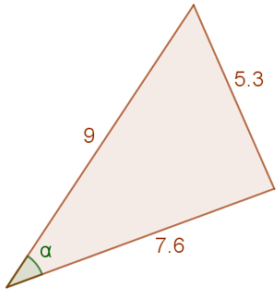
$A \approx 12 \text{ mm}^2$

23. Suorakulmion korkeus on 4,13 cm ja pinta-ala on 36,8 cm². Laske suorakulmion

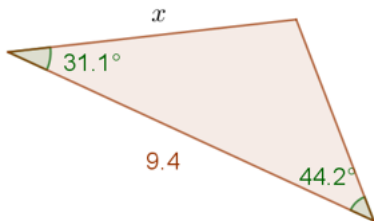
- kannan pituus **8,91 cm**
- lävistäjän pituus. **9,82 cm**

Sinilause ja kosinilause

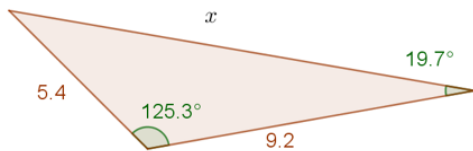
24. Laske kulman α suuruus. $\alpha \approx 36^\circ$



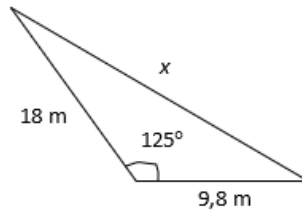
25. Kolmion pinta-ala on 16,4. Määritä sivun x pituus. $x \approx 6,8$



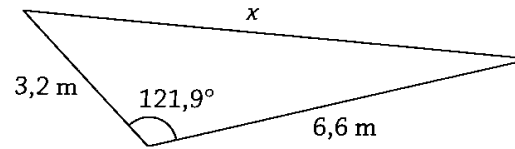
26. Määritä sivun x pituus. $x \approx 13$



27. Ratkaise sivun pituus x . $x \approx 25$



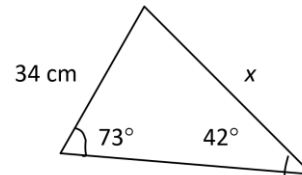
28. Laske sivun x pituus. $x \approx 8,7$ m



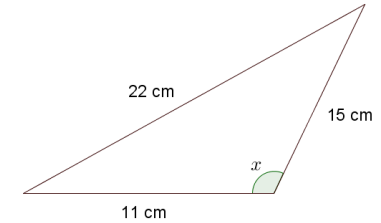
29. Kolmion kaksi sivua ovat 10,2 cm ja 8,70 cm. Jälkimmäisen sivun vastainen kulma on 46° . Laske kolmannen sivun pituus sekä suurin kulma. **Sivu 2,4 cm tai 11,8 cm. Kulma $122,5^\circ$ tai $76,5^\circ$.**

30. Suunnikkaan sivut ovat 142 cm ja 188 cm. Sivujen välinen kulma on 53° . Laske lävistäjien pituudet. **153 cm ja 296 cm**

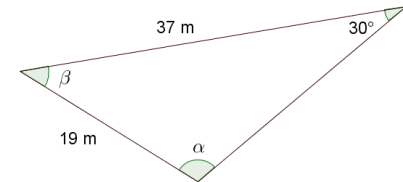
31. Laske sivun x pituus. $x \approx 49$ cm



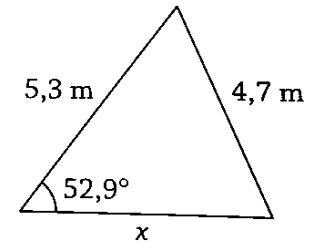
32. Ratkaise kulma x . $x \approx 115^\circ$



33. Ratkaise kulmat $\alpha \approx 103^\circ$ ja $\beta \approx 47^\circ$.



34. Laske sivun x pituus. $x \approx 5,3$ m

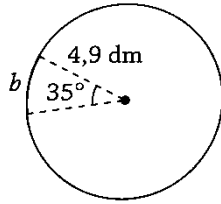


Ympyrä

35. Laske ympyrän kehän pituus, kun ympyrän

- halkaisija on 4,6 m **14,5 m**
- säde on 3,45 cm **21,7 cm**

36. Laske ympyrän kaaren b pituus. $b \approx 3 \text{ dm}$



37. Laske 129 asteen keskuskulmaa vastaavan kaaren pituus, kun ympyrän kehän pituus on 153 mm. $54,8 \text{ mm}$

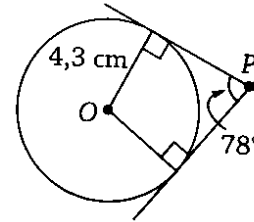
38. Mopoauton renkaan ulkohalkaisija on 42 cm.

- Laske renkaan ympärysmitta. 132 cm
- Kuinka monta kierrosta rengas pyörähtää 5,3 kilometrin matkalla? 4017

39. Ympyrän säde on 4,56 cm. Laske sektorin pinta-ala, kun keskuskulma on 56 astetta. $A \approx 10,2 \text{ cm}^2$

40. Ympyrän säde on 4,6 m. Siitä erotetaan sektori, jonka pinta-ala on 34 m^2 . Kuinka suuri on sektoria vastaava keskuskulma? 184°

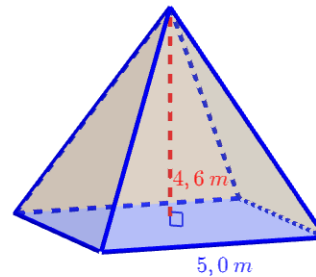
41. Laske pisteen P etäisyys ympyrän keskipisteestä O . $OP \approx 6,8 \text{ cm}$



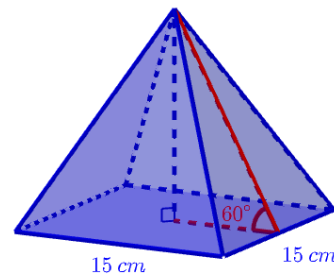
Avaruusgeometria

42. Suoran ympyrälieriön muotoisen peltitynnyrin tilavuus on 200 l ja korkeus 120 cm. Kuinka suuri on tynnyrin pohjan halkaisija? 46 cm

43. Laske pyramidin tilavuus. $V \approx 38 \text{ m}^3$

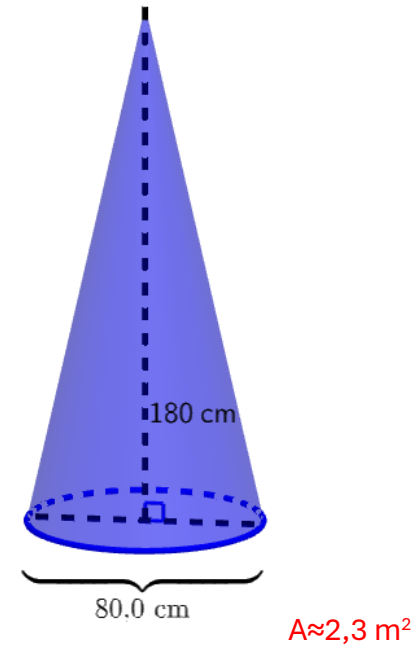


44. Laske pyramidin tilavuus.

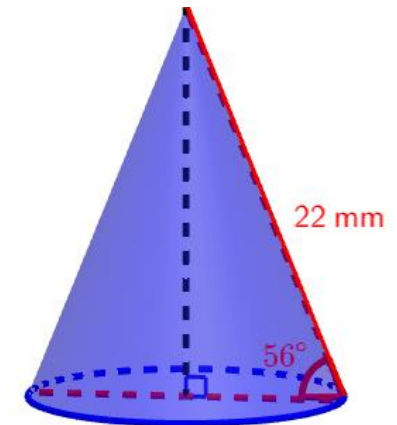


$V \approx 970 \text{ cm}^3$

45. Laske kartion vaipan ala.



46. Laske kartion vaipan ala.



$A \approx 850 \text{ mm}^2$

MAA4 Alkuosan lisätehtävät

Itseisarvo

- Määritä
 - $|3 - \pi|$
 - $|1 - \sqrt{2}|$
 - $|4 - \sqrt{13}|$
- Määritä luvun $\sqrt{3} - 5$ etäisyys
 - luvusta 4
 - luvusta $\sqrt{3} + 4$
- Ratkaise yhtälöt
 - $|x + 3| = 4$
 - $|2x + 1| = 6$
- Ratkaise yhtälö $|3x^2 + 2x| = 1$
- Ratkaise yhtälö $|2x - x^2| - 1 = 0$
- Ratkaise yhtälö $|x - 2| = |5 - 2x|$
- Ratkaise yhtälö $|10x + 4| - |20x| = 0$
- Ratkaise yhtälö $2|3x - 2| - 4 = 6$
- Lukujen $2x - 3$ ja $5x + 1$ välinen etäisyys on 5. Mitkä luvut ovat?
- Ratkaise yhtälö $|4x + 5| - x = 0$
- Ratkaise yhtälö $|2x + 3| = 4x - 3$.
- Ratkaise yhtälö $|2x - 3| = \sqrt{2x - 1}$
- Ratkaise yhtälö $||x| - 2| = |x|$

Koordinaatisto

- Laske pisteiden välinen etäisyys
 - $A = (1, 4)$ ja $B = (9, 10)$
 - $A = (-1, 1)$ ja $B = (1, 5)$
 - Laske janan keskipiste, kun päätepisteet ovat
 - $A = (-2, 4)$ ja $B = (3, -5)$
 - $A = \left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{5}\right)$ ja $B = \left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}\right)$
 - Janan päätepisteet ovat $A(-6, -1)$ ja $B(2, 7)$. Laske janan keskipisteen etäisyys origosta.
 - Kolmion kärkipisteet ovat $A = (-2, -1)$, $B = (2, 1)$ ja $C = (-1, 2)$. Osoita laskemalla, että kolmio on tasakylkinen.
 - Muodosta pistejoukon yhtälö, kun pisteen x-koordinaatti on kaksi kertaa niin suuri kuin y-koordinaatti. Etsi viisi pistettä, jotka kuuluvat pistejoukkoon. Merkitse löytämäsi pisteet koordinaatistoon, ja hahmottele näiden avulla pistejoukon kuvaaja.
 - Kuuluuko annettu piste käyrälle $-2x - y + 3 = 0$
 - (1, 1)
 - (-2, -1)
 - (0, 3)
 - Tarkastellaan käyrää $x^2 + y^2 + 2xy + 6x - 2y - 7 = 0$. Määritä algebrallisesti (eli laskemalla) ne pisteet, joissa käyrä leikkaa x-akselin.
- ### Suora
- Määritä suoran kulmakerroin, kun suora kulkee annettujen pisteiden kautta.
 - (-3, 5) ja (1, 9)
 - (13, 7) ja (-3, 7)
 - (8, 9) ja (8, 13)

22. Määritä suoran $y = kx + 3$ kulmakerroin, kun suora kulkee pisteen $(-3, 7)$ kautta.
23. Määritä sellainen vakio t , että suora $4tx - 3t^2y = 0$ kulkee pisteen $(3, -6)$ kautta. Mikä on suoran kulmakerroin?
24. Suora kulkee pisteiden $(4, 5)$ ja $(7, 20)$ kautta. Kulkeeko se myös pisteen $(35, 150)$ kautta?
25. Suora kulkee pisteiden $(3a, 18)$ ja $(a, -2)$ kautta. Millä vakion a arvoilla suoran kulmakerroin on 2?
26. Suoran kulmakerroin on 2 ja suora kulkee pisteen $(4, 3)$ kautta.
- Muodosta suoran yhtälö
 - Kuluuko piste $(-9, -23)$ suoralle?
27. Määritä suoran yhtälö, kun suora kulkee pisteiden $(2, 7)$ ja $(7, -3)$ kautta
28. Määritä suoran yhtälö, kun suora kulkee pisteiden $(4, 3)$ ja $(-9, 3)$ kautta
29. Määritä suoran kulmakerroin
- $x + y - 3 = 0$
 - $4x - 12y + 5 = 0$
30. Janan päätepisteet ovat $(-2, 7)$ ja $(5, -4)$. Määritä yhtälö suoralle, joka puolittaa janan ja kulkee pisteen $(1, 5)$ kautta.

Yhtälöryhmä

31. Ratkaise yhtälöpari
$$\begin{cases} x + 3y = 7 \\ y = x - 1 \end{cases}$$

32. Ratkaise yhtälöpari
$$\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \end{cases}$$

33. Ratkaise yhtälöpari
$$\begin{cases} -3x + y - 9 = 0 \\ 2x - 3y - 8 = 0 \end{cases}$$

34. Ratkaise yhtälöryhmä
$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x - y = 3 \\ 4x + 7y = 15 \end{cases}$$

35. Ratkaise yhtälöryhmä
$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x - y = -1 \\ 6x - 9y = 1 \end{cases}$$

36. Ratkaise yhtälöryhmä
$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 13 \\ 3x + 5y - 2z = 2 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

37. Ratkaise yhtälöryhmä
$$\begin{cases} 3a + 4b - 2 = 0 \\ 5a - 3b + 2 = 0 \\ 2a - 2b + 1 = 0 \end{cases}$$

38. Määritä suorien $2x + 3y = 7$ ja $3x - 2y = 4$ leikkauspiste.

39. Suorat $x - y - 1 = 0$ ja $2x + 3y - 12 = 0$ rajaavat yhdessä x -akselin kanssa kolmion. Määritä laskemalla kolmion pinta-ala.

40. Määritä sellaiset vakiot a ja b , että piste $(-4, 7)$ on suorien $4ax + 5by - 1 = 0$ ja $-3ax - 4by - 3 = 0$ leikkauspiste.

Yhtälöryhmä

31. $x = 2\frac{1}{2}, y = 1\frac{1}{2}$

32. ei ratkaisua

33. $x = -5, y = 6$

34. $x = 2, y = 1$

35. ei ratkaisua

36. $x = -1, y = 3, z = 5$

37. ei ratkaisua

38. $(2, 1)$

39. 5

40. $a = -\frac{19}{4}$ ja $b = -\frac{15}{7}$

MAA4 Loppuosan lisätehtävät

Suorat

- Ovatko annetut suorat keskenään yhdensuuntaisia tai kohtisuoria?
 - $y = 3x - 4$ ja $6x - 2y + 8 = 0$ yhdensuuntaisia
 - $5x - 3y + 9 = 0$ ja $6x + 10y - 5 = 0$ kohtisuoria
 - $6x - y + 1 = 0$ ja $12x + 2y - 6 = 0$ ei kumpikaan
- Suora kulkee pisteen $(3, 2)$ kautta ja on yhdensuuntainen suoran $4x - 3y + 7 = 0$ kanssa. Määritä suoran yhtälö. Missä pisteessä suora leikkaa x-akselin? $(\frac{3}{2}, 0)$
- Suora a leikkaa y -akselin samassa pisteessä kuin suora $11x + 3y + 6 = 0$ ja on yhdensuuntainen suoran $3x - y + 1 = 0$ kanssa. Määritä suoran yhtälö. $y = 3x - 2$
- Missä pisteessä janan AB keskinormaali leikkaa x -akselin, kun $A = (-5, 1)$ ja $B = (-3, -5)$? $(2, 0)$
- Suoran $y = 3x + 1$ normaali kulkee pisteen $(3, 4)$ kautta. Määritä normaalin yhtälö. V: $y = -\frac{1}{3}x + 5$
- Määritä pisteen etäisyys suorasta $3x + 4y + 6 = 0$
 - $(1, -6)$ 3
 - $(-2, 5)$ 4
- Määritä niiden pisteiden joukko, joiden etäisyys suorasta $8x - 6y = 3$ on täsmälleen 4. $8x - 6y - 43 = 0$ tai $8x - 6y + 37 = 0$

Ympyrä

- Määritä ympyrän keskipistemuotoinen yhtälö, kun ympyrän
 - keskipiste on $(-6, -2)$ ja säde 1 $(x + 6)^2 + (y + 2)^2 = 1$
 - keskipiste on $(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ ja säde $\frac{1}{3}$. $(x + \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{2}{3})^2 = \frac{1}{9}$
- Määritä ympyrän keskipiste ja säde.
 - $(x - 7)^2 + (y + 6)^2 = 9$ $kp = (7, -6)$ ja $r = 3$
 - $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 11$ $kp = (-5, 2)$ ja $r = \sqrt{11}$
 - $x^2 + (y + 1)^2 = \frac{4}{25}$ $kp = (0, -1)$ ja $r = \frac{2}{5}$
- Millä vakion k arvoilla yhtälö $x^2 + y^2 + kx - ky - 2k = 0$ esittää ympyrää? $k < -4$ tai $k > 0$
- Sijaitseeko piste ympyrän $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 20$ sisäpuolella, ulkopuolella vai ympyrän kehällä?
 - $(-6, 1)$ sisäpuolella
 - $(-1, 0)$ kehällä
 - $(1, 7)$ ulkopuolella
- Määritä ympyrän yhtälö, kun sen keskipiste on $(4, 3)$ ja ympyrä sivuaa y -akselia. $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 16$
- Määritä pisteen $(-2, 5)$ etäisyys ympyrän $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 16$ kehästä. 1
- Määritä ympyröiden $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 8$ ja $(x - 9)^2 + y^2 = 18$ välinen etäisyys yhden desimaalin tarkkuudella. 5,9

15. Neliön keskipiste on origossa ja yksi kärjistä pisteessä $(2, 2)$. Neliön ympäri piirretään ympyrä. Määritä ympyrän yhtälö. $x^2 + y^2 = 8$

16. Määritä ympyrän keskipiste ja säde

a. $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$ $kp = (3, 2)$ ja $r = 4$

b. $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$ $kp = (-2, 1)$ ja $r = 3$

c. $x^2 + y^2 = 8$ $kp = (0, 0)$ ja $r = 2\sqrt{2} (= \sqrt{8})$

17. Muodosta ympyröiden $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ ja

$x^2 + y^2 - 14x + 2y + 49 = 0$ keskipisteiden kautta kulkevan suoran yhtälö. $x + 2y - 5 = 0$

18. Määritä ympyrän $x^2 + y^2 - 24x + 80 = 0$ etäisyys pisteestä $(24, -5)$. 5

19. Mikä on sen ympyrän säde, jonka keskipiste on $(3, 4)$ ja joka sivuaa ympyrää $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$? $r = \sqrt{13} - 2$

20. Osoita, että piste $(3, 5)$ sijaitsee ympyrän $x^2 + (y - 3)^2 = 13$ kehällä. Määritä pisteeseen $(3, 5)$ piirretyn tangentin yhtälö. $3x + 2y - 19 = 0$

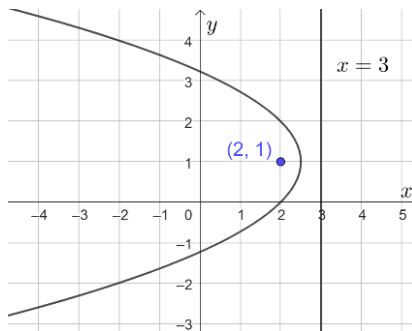
21. Määritä suoran $y = x - 2$ ja ympyrän $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5$ leikkauspisteet. $(3, 1)$ ja $(6, 4)$

22. Kuinka monta pisteen P kautta kulkevaa tangenttia ympyrälle $x^2 + y^2 = 25$ voidaan piirtää? Perustele.

a. $P = (3, 4)$ 1

b. $P = (5, 2)$ 2

c. $P = (4, 1)$ 0



23. Määritä ympyrän $x^2 + y^2 - 5x - 7y + 6 = 0$ ja y -akselin leikkauspisteet. $(0, 1)$ ja $(0, 6)$

24. Määritä yhtälöt ympyrän $x^2 + y^2 = 5$ tangenteille, jotka kulkevat pisteen $(-1, 3)$ kautta. $-x - 2y + 5 = 0$ ja $2x - y + 5 = 0$

Paraabeli

25. Määritä paraabelin $x = -y^2 + 6y$ ja y -akselin leikkauspisteet ja niiden avulla paraabelin huippu. $(0, 0)$ ja $(0, 6)$, huippu $(9, 3)$

25. Määritä paraabelin $x - 2y^2 + 1 = 0$ ja ympyrän $x^2 + y^2 = 2$ leikkauspisteet. $(1, 1)$ ja $(1, -1)$

26. Määritä paraabelin aukeamissuunta ja huippu.

a. $x = 3(y - 5)^2 + 1$ aukeaa oikealle, huippu $(1, 5)$

b. $y = -6(x - 7)^2 - 2$ aukeaa alaspäin, huippu $(7, -2)$

27. Tarkastellaan paraabelia, jonka polttopiste on $(2, 1)$ ja johtosuora $x = 3$.

a. Hahmottele paraabelin kuvaaja.

b. Määritä paraabelin yhtälö. $x = -\frac{1}{2}y^2 + y + 2$

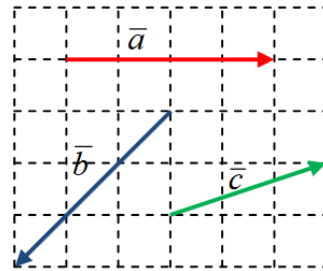
28. Paraabelin huippu on pisteessä $(2, 1)$. Paraabeli kulkee pisteen $(1, 5)$ kautta ja sen akseli on y -akselin suuntainen. Määritä paraabelin huippumuotoinen yhtälö. $y - 1 = 4(x - 2)^2$

29. Paraabelin huippu on pisteessä $(2, 1)$. Paraabeli kulkee pisteen $(-1, 4)$ kautta ja sen akseli on x -akselin suuntainen. Määritä paraabelin huippumuotoinen yhtälö. $x - 2 = -\frac{1}{3}(y - 1)^2$

Vektorilaskennan perusteita

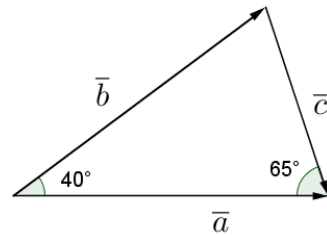
30. Piirrä vektorit \vec{x} , \vec{y} ja \vec{z} , joille pätee

- $\vec{x} = -\vec{c}$
- $\vec{y} \uparrow \vec{a}$ ja $|\vec{y}| = 3 \cdot |\vec{a}|$
- $\vec{z} \uparrow \vec{b}$ ja $|\vec{z}| = \frac{4}{3} |\vec{b}|$.



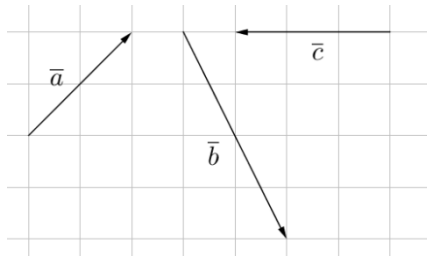
31. Määritä vektorien välinen kulma, kun vektorit ovat

- \vec{a} ja \vec{b} 40°
- \vec{a} ja \vec{c} 65°
- \vec{b} ja \vec{c} 75°



32. Piirrä vektori

- $\vec{a} + \vec{b}$
- $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
- $\vec{a} - \vec{b}$
- $\vec{c} - \vec{a}$

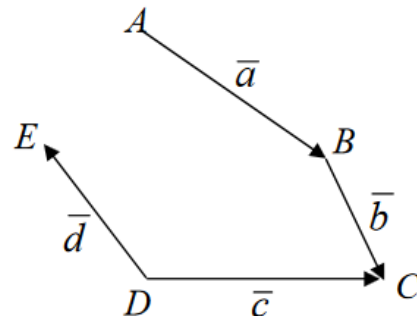


33. Ilmaise vektorit \vec{AC} , \vec{AE} ja \vec{DA} vektorien \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} ja \vec{d} avulla.

$$\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{AE} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$$

$$\vec{DA} = -\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$$



34. Olkoon suunnikkaassa ABCD sivuvektori $\vec{AB} = \vec{a}$ ja lävistäjävektori $\vec{AC} = \vec{b}$. Määritä vektoreiden \vec{a} ja \vec{b} avulla vektorit \vec{BC} ja \vec{AD} .
 $\vec{BC} = \vec{AD} = -\vec{a} + \vec{b}$

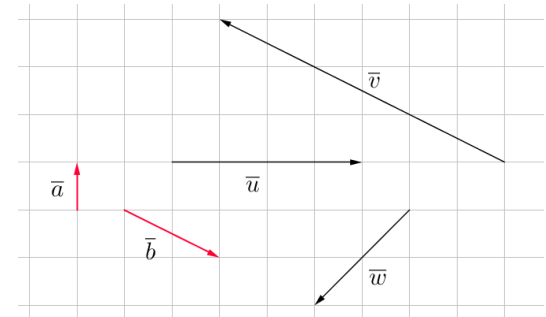
35. Suorakulmion ABCD lävistäjät puolittavat toisensa pisteessä E. Merkitään $\vec{ED} = \vec{a}$ ja $\vec{EC} = \vec{b}$. Määritä \vec{AB} vektoreiden \vec{a} ja \vec{b} avulla.
 $\vec{AB} = -\vec{a} + \vec{b}$

36. Esitä kuvan vektorit \vec{u} , \vec{v} ja \vec{w} vektoreiden \vec{a} ja \vec{b} avulla.

$$\vec{u} = 2\vec{a} + 2\vec{b}$$

$$\vec{v} = -3\vec{b}$$

$$\vec{w} = -3\vec{a} - \vec{b}$$



37. Olkoon ABCDE viisikulmio. Laske $\vec{AB} - \vec{CE} - \vec{ED} + \vec{CD} - \vec{CB} = \vec{AC}$

Vektorit koordinaatistossa

38. Määritä pisteiden $A = (-6, -1)$, $B = (0, 4)$, $C = (5, 2a)$ ja $D = (2x + 1, x - 5)$ paikkavektorit.

39. Määritä pisteet A, B ja C, kun $\vec{OA} = 4\vec{i} - 5\vec{j}$, $\vec{OB} = -11\vec{i}$ ja $\vec{OC} = -r\vec{i} - s\vec{j}$.

40. Olkoon $\vec{a} = -5\vec{i} - 3\vec{j}$ ja $\vec{b} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$.

- Laske $2\vec{a} + \vec{b} = -8\vec{i} - 11\vec{j}$
- Laske $\vec{a} - 3\vec{b} = -11\vec{i} + 12\vec{j}$

Vektorien pituus ja yhdensuuntaisuus

41. Määritä vektorin $-\vec{i} + 10\vec{j}$ loppupiste, kun alkupiste on

a. $(8, -10)$ $(7, 0)$

b. $(-9, -9)$ $(-10, 1)$

42. Määritä

a. vektorin $2\vec{i} - 3\vec{j}$ alkupiste, kun loppupiste on $(-4, 2)$ $(-6, 5)$

b. vektorin $-7\vec{i} + 3\vec{j}$ alkupiste, kun loppupiste on $(-6, 0)$. $(1, -3)$

43. Määritä vektori \overline{AB} , kun

a. $A = (-5, 0)$ ja $B = (-2, -3)$ $\overline{AB} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$

b. $A = (-3a, 2a)$ ja $B = (3a, -a)$ $\overline{AB} = 6a\vec{i} - 3a\vec{j}$

44. Kolmion kärkipisteet ovat $A = (-10, 6)$, $B = (2, -1)$ ja $C = (0, 9)$.

a. Laske $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}$ $(0, 0)$

b. Laske $\overline{AB} - \overline{AC}$. $(2, -10)$

45. Määritä vektori $\vec{a} = \overline{AB}$ kun $A = (3, -2)$ ja janan AB keskipiste

$M = (1, 0)$. $\vec{a} = -4\vec{i} + 4\vec{j}$

46. Vektorin $\overline{AB} = 4\vec{i} - 12\vec{j}$ loppupiste on $(-7, 3)$. Määritä vektorin

keskipiste. $(-9, 9)$

47. Suunnikkaan $ABCD$ kärkipisteet ovat $A = (2, 1)$, $B = (3, 3)$ sekä

$C = (1, 2)$. Määritä pisteen D koordinaatit. $(0, 0)$

48. Laske vektorin \vec{a} pituus, kun

a. $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$ $2\sqrt{5} (= \sqrt{20})$ b. $\vec{a} = -8\vec{j}$ 8

49. Laske vektorin $\vec{a} = 2(\vec{u} + \vec{v}) - (\vec{u} - \vec{v})$ pituus, kun $\vec{u} = 6\vec{i} - 6\vec{j}$ ja $\vec{v} = -2\vec{i} + 5\vec{j}$ 9

50. Määritä vakio t siten, että vektorit $\vec{a} = t\vec{i} - 5\vec{j}$ ja

$\vec{b} = -4\vec{i} + 2t\vec{j}$ ovat yhtä pitkät. $t = \pm\sqrt{3}$

51. Vektorin $\vec{a} = k\vec{i} + 3k\vec{j} - 2\vec{i}$ pituus on 2. Määritä vakio k .

$k=0$ tai $k=2/5$

54. Vektorin \vec{a} alkupiste on $A = (3, -2t)$ ja loppupiste $B = (t, 1)$. Määritä

luku t niin, että $|\vec{a}| = \sqrt{13}$

$t = -3/5$ tai $t = 1$

Vektorien pistetulo ja vektorien välinen kulma

56. Laske vektoreiden välinen pistetulo.

a. $\vec{a} = 4\vec{i} - 8\vec{j}$ ja $\vec{b} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$ **-28**

b. $\vec{a} = -3\vec{i} - \vec{j}$ ja $\vec{b} = -5\vec{j}$ **5**

57. Olkoon $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$ ja $\vec{b} = -\vec{i} + 5\vec{j}$.

a. Laske $\vec{a} \cdot \vec{b}$. **3**

b. Laske $|\vec{a}|$. **$\sqrt{5}$**

c. Laske $|\vec{b}|$. **$\sqrt{26}$**

d. Laske vektorien välinen kulma **$74,7^\circ$**

58. Laske vektoreiden $\vec{a} = -3\vec{i} + \vec{j}$ ja $\vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$ välinen kulma. **$98,1^\circ$**

59. Tutki ovatko vektorit kohtisuorassa toisiaan vastaan.

a. $\vec{a} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$ ja $\vec{b} = 6\vec{i} - 9\vec{j}$ **kyllä ovat**

b. $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ ja $\vec{b} = -8\vec{i} - 12\vec{j}$ **eivät ole**

59. Määritä vakio t siten, että vektorit $\vec{a} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$ ja $\vec{b} = -3t\vec{i} + 2\vec{j}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. **$t = -\frac{5}{3}$**

60. Suunnikkaan samasta kärjestä lähtevät sivuvektorit ovat $-2\vec{i} + 3\vec{j}$ ja $3\vec{i} + t\vec{j}$. Määritä reaaliluku t niin, että suunnikkaan lävistäjien välinen kulma on 90° . **$t = \pm 2$**

61. Kolmion kärkipisteet ovat $A = (1,6)$, $B = (2,-3)$ ja $C = (-3,3)$. Onko kolmio suorakulmainen?

Ei ole. (Ethän laskenut vain yhtä kulmaa, se kun ei riitä?)

62. Olkoon $A = (1,2)$, $B = (t,6)$ ja $C = (3,t)$. Määritä ne vakion t arvot, joilla vektorit \vec{AB} ja \vec{AC} ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

$$t = \frac{5}{3}$$

63. Olkoon $\vec{a} = 5\vec{i} + \vec{j}$ ja $\vec{b} = -2\vec{i} - 4\vec{j}$. Laske pistetulo

a. $\vec{a} \cdot \vec{b}$ **-14**

b. $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ **12**

c. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ **6**

64. Laske $\vec{a} \cdot \vec{b}$, kun $|\vec{a}| = 6$ ja $|\vec{b}| = 8$ ja vektorien \vec{a} ja \vec{b} välinen kulma on 60 astetta. **$\vec{a} \cdot \vec{b} = 24$**

65. Kolmion kärkipisteet ovat $(-1,2)$, $(3,-1)$ ja $(7,3)$. Laske kolmion kulmien suuruudet asteen tarkkuudella. **38, 44 ja 98**

66. Samasta pisteestä lähtevät vektorit $\vec{a} = 4\vec{i} + \vec{j}$ ja $\vec{b} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$ ovat suunnikkaan kaksi sivua. Laske suunnikkaan lävistäjien välinen kulma asteen tarkkuudella. **75°**

67. Vektorin \vec{a} pituus on 34 ja se on yhdensuuntainen vektorin $\vec{b} = 4\vec{i} - \vec{j}$ kanssa. Määritä vektori \vec{a} . **$\vec{a} = 8\sqrt{17}\vec{i} - 2\sqrt{17}\vec{j}$**

68. Määritä ne vakion s arvot, joilla vektorit $\vec{u} = s\vec{i} - 5\vec{j}$ ja $\vec{v} = -7\vec{i} + \vec{j}$ ovat yhdensuuntaiset. Ovatko ne tällöin samansuuntaiset vai vastakkaissuuntaiset?
 $s = 35$, vastakkaissuuntaiset

MAA7 Lisätehtävät

1. Määritä integraali.

- $\int 5x^4 + 3x^2 dx$
- $\int x^4 + x^2 dx$
- $\int 4x^5 - x^3 dx$

2. Määritä integraali.

- $\int 9x^5 + 6x^2 dx$
- $\int x^7 - x^8 dx$
- $\int 10x^3 + 12x^2 dx$

3. Määritä funktion $f(x) = 6x^2 + 8x^3$ se integraalifunktio, joka kulkee pisteen $(1, 2)$ kautta. $F(x) = 2x^4 + 2x^3 - 2$

4. Määritä integraali.

- $\int (2x + 1)^2 dx$
- $\int (3x + 1)(3x - 1) dx$
- $\int \frac{4x^2 + 6x}{x} dx$

5. Määritä funktion $f(x) = x^7 + x^5 + x^2$ integraalifunktion derivaattafunktio.

$$F'(x) = x^7 + x^5 + x^2$$

6. Määritä integraali, kun $x > 0$.

- $\int x^{-3} - x^{-5} dx$
- $\int 3x^{-2} dx$
- $\int \frac{x^{-5}}{x} dx$

7. Määritä integraali, kun $x > 0$.

- $\int \frac{4}{3x} dx$
- $\int \frac{5}{6x^2} dx$

8. Määritä integraali, kun $x > 0$.

- $\int \sqrt{x} dx$
- $\int \sqrt{x^3} dx$
- $\int \sqrt{x^6} dx$

9. Määritä integraali, kun $x > 0$.

- $\int \sqrt{x} dx$
- $\int \sqrt{x^3} dx$
- $\int \sqrt{x^6} dx$

10. Määritä integraali, kun $x > 0$.

- $\int \sqrt[3]{x} dx$
- $\int \frac{2}{\sqrt{x}} dx$
- $\int \frac{6}{\sqrt[3]{x}} dx$

11. Määritä se funktion $f(x) = \frac{2}{x\sqrt{x}}$

integraalifunktio, joka kulkee pisteen $(4, 10)$ kautta.

$$F(x) = -\frac{4}{\sqrt{x}} + 12$$

12. Määritä integraali, kun $x > 0$.

- $\int 3(3x + 1)^4 dx$
- $\int 10x(5x^2 + 7)^3 dx$
- $\int 4(4x^2 - 8)^5 dx$

13. Määritä integraali, kun $x > 0$.

- $\int (6x - 5)^4 dx$
- $\int x(6x^2 + 1)^5 dx$
- $\int x^2(x^3 - 7)^5 dx$

14. Määritä funktion $f(x) = x(6x^2 - 3)^2$ se integraalifunktio, joka kulkee pisteen $(1, 2)$ kautta.

$$F(x) = \frac{3(2x^2 - 1)^3}{4} + \frac{5}{4}$$

15. Määritä integraali, kun $x > 0$.

- $\int \frac{4x}{2x^2 - 1} dx$
- $\int \frac{10x}{5x^2 + 7} dx$
- $\int \frac{24x^2}{2x^3 - 1} dx$

16. Määritä integraali, kun $x > 0$.

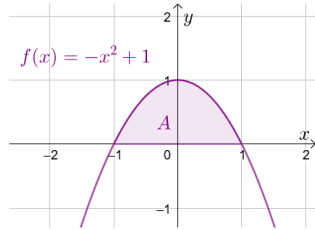
- $\int \frac{12x - 4}{6x^2 - 4x} dx$
- $\int \frac{6x^2 - 2}{x^3 - x} dx$
- $\int \frac{x}{x^2 - 1} dx$

17. Laske määrätty integraali.

- $\int_1^3 6x + x^2 dx$
- $\int_2^5 x^2 - x dx$

18. (B) Määritä kuvassa olevan väritetyn alueen pinta-ala käyttäen 10 osaväliä

- alasumman avulla $A \approx 1,12$
- yläsumman avulla. $A \approx 1,52$



19. Laske määrätyn integraalin arvo.

$$\int_1^3 \frac{24x}{6x^2 - 15} dx$$

20. Määritä integraali.

- $\int 3\sin(x) - 4\cos(x) dx$
- $\int 2\sin(4x) + 3\cos(6x) dx$

21. Määritä integraali

- $\int x^2 \cos(x^3) - 4x \cdot \sin(x^2) dx$
- $\int \cos x \sin^2 x dx$

22. Määritä integraali $\int (\cos x - \sin x)^2 dx$

23. Määritä integraali.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x - \sin 4x dx$$

24. Määritä integraali, kun $x > 0$.

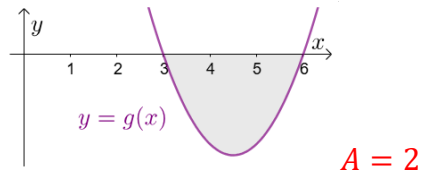
- $\int e^x + e^{3x} dx$
- $\int 5e^{2x} - \frac{e^{2x}}{4} dx$

25. Määritä integraali, kun $x > 0$.

- $\int \frac{e^x}{e^x - 1} dx$
- $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x} - 1} dx$
- $\int \frac{3e^x}{e^x - 3} dx$

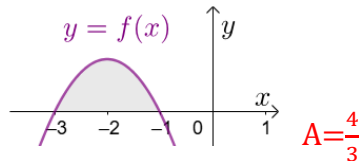
26. Määritä kuvan väritetyn alueen pinta-ala, kun

$$g(x) = \frac{4}{9}x^2 - 4x + 8.$$



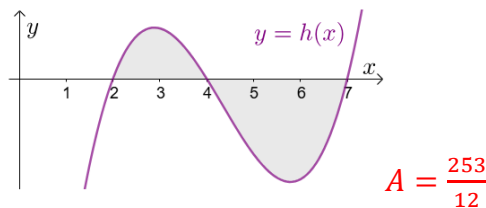
27. Määritä kuvan väritetyn alueen pinta-ala, kun

$$f(x) = -x^2 - 4x - 3.$$



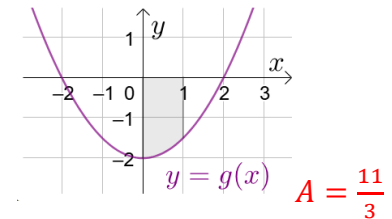
28. (B) Määritä väritetyn alueen pinta-ala, kun

$$h(x) = x^3 - 13x^2 + 50x - 56.$$



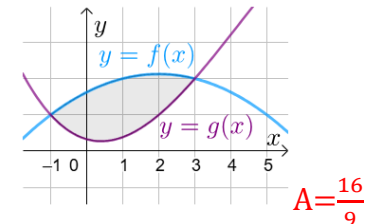
29. (B) Kuinka monta osaväliä tulisi käyttää, jotta T27 suorakaidesäännöllä saatavan likiarvon suhteellinen virhe olisi pienempi kuin yksi promille, kun laskentakohtina käytetään osavälien keskipisteitä? **23 osaväliä**

30. Määritä väritetyn alueen pinta-ala, kun $g(x) = x^2 - 4$.

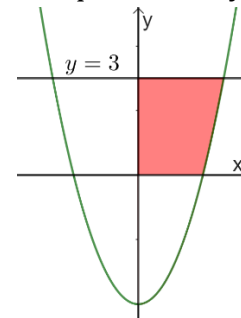


31. Määritä väritetyn alueen pinta-ala, kun $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$ ja

$$g(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1$$



32. (B) Määritä väritetyn alueen pinta-ala, kun paraabelin yhtälö on $y = x^2 - 4$.

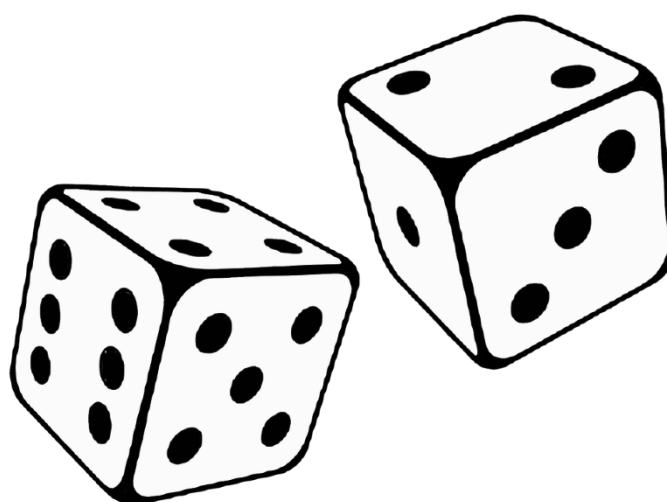


33. (B) Funktion $f(x) = e^x$ kuvaaja pyörähtää välillä $x \in [0, 1]$

- x -akselin ympäri $V = \frac{(e^2 - 1)\pi}{2}$
- y -akselin ympäri. $V = (e - 2)\pi$

Määritä pyörähdyskappaleen tilavuus.

Todennäköisyyden laskusäännöt



1. Suomalaisista 44 % kuuluu pääveriryhmään A, 17 % ryhmään B, 8 % ryhmään AB ja 31 % ryhmään O. Edelleen 85 %:lla suomalaisista on veressään reesustekijä (Rh+), joka muilta puuttuu (Rh-). Reesustekijän esiintyminen ei riipu veriryhmästä. Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu suomalainen kuuluu veriryhmään
 - a. B+
 - b. AB-

2. Liisa kylvi samaan ruukkuun yhden sitruunansiemenen ja yhden appelsiininsiemenen. Arvioidaan, että sitruunansiementen itävyysprosentti on 40 % ja appelsiininsiementen 30 %. Oletetaan, että siementen itävyys on toisistaan riippumatonta. Millä todennäköisyydellä
 - a. molemmat siemenet itävät
 - b. kumpikaan siemenistä ei idä
 - c. sitruunansiemen itää ja appelsiininsiemen ei idä
 - d. appelsiininsiemen itää ja sitruunansiemen ei idä?

3. Eräällä pelikierroksella kaikki viisi pelaajaa heittivät nopalla ykkösen. Mikä on tällaisen heittosarjan todennäköisyys?

4. Monivalintakokeessa on kahdeksan kysymystä, joista kolmessa on neljä vastausvaihtoehtoa ja viidessä kolme vaihtoehtoa. Vaihtoehtoista vain yksi on oikein. Millä todennäköisyydellä umpimähkäisesti vastaava
 - a. saa kaikki kahdeksan vastausta oikein
 - b. ei saa yhtään oikein?

5. Todennäköisyys, että koneen suuresta tuotantoerästä poimitussa neljän hehkulampun pakkauksessa kaikki pallot ovat virheetömiä, on 0,92. Millä todennäköisyydellä koneen tuotannosta satunnaisesti poimittu yksittäinen lamppu on virheetön?
6. Jousiampuja H saa laukauksistaan kymppiin keskimäärin 70 % ja jousiampuja M keskimäärin 80 %. Kumpikin ampuu kerran. Millä todennäköisyydellä
- molemmat osuvat kymppiin
 - kumpikaan ei osu kymppiin
 - H osuu kymppiin, mutta M ei?
7. Koulun monistuskoneista toinen on rikki keskimäärin 25 % kouluajasta ja toinen 15 % kouluajasta. Millä todennäköisyydellä satunnaisena koulupäivänä
- molemmat monistuskoneet ovat rikki?
 - molemmat monistuskoneet toimivat?
8. Pelaajatilaston mukaan eräs koripalloilija onnistuu 76 % vapaaheitoista. Millä todennäköisyydellä kaikki vapaaheitot menevät koriin, kun hän heittää
- kaksi
 - kolme vapaaheittoa?

9. Raviveikkauksessa V5 on valittava viiden ravilähdön voittaja. Eräällä veikkauskierroksella ensimmäisessä ja toisessa lähdössä oli 18 hevosta, kolmannessa ja neljännessä 16 hevosta ja viidennessä 12 hevosta. Millä todennäköisyydellä rivinsä umpimähkään täyttävä Einari saa
- 5 oikein
 - ei yhtään oikein
10. Kolmea noppaa heitetään. Millä todennäköisyydellä kaikki pisteluvut ovat pienempiä kuin 5?
11. Ruukkuun on kylvetty kaksi siementä, toinen pussista, jossa itävyysprosentiksi luvataan 90 %, ja toinen pussista, jonka itävyysprosentiksi luvataan 80 %. Millä todennäköisyydellä toinen siemenistä itää ja toinen ei?
12. Lukion opiskelijoista 62 % vastustaa ja 38 % kannattaa Suomen NATO-jäsenyyttä. Mikä on todennäköisyys, että kahdella satunnaisesti valitulla lukiolaisella on eri mielipide Suomen NATO-jäsenyydestä?
13. Millä todennäköisyydellä perheeseen syntyvät kaksi lasta ovat eri sukupuolta? Syntyvistä lapsista 51,2 % on poikia.
14. Arvioidaan, että poutapäivän jälkeisistä päivistä 70 % on poutapäiviä ja 30 % sadepäiviä. Sadepäivän jälkeisistä päivistä 40 % on sadepäiviä ja 60 % poutapäiviä. Millä todennäköisyydellä juhannuspäivänä on poutaa, jos juhannuksen aatonaatto on
- poutapäivä
 - sadepäivä?

- 15.** Millä todennäköisyydellä perheeseen syntyvät neljä lasta ovat kaikki samaa sukupuolta? Syntyvistä lapsista 51,2 % on poikia.
- 16.** Yatzy-pelissä heitetään viittä noppaa. Pelaaja saa yatzyn, jos kaikissa nopissa on sama silmäluku. Mikä on yatzyn todennäköisyys yhdellä viiden nopan heitolla?
- 17.** Tiina kohtaa aamulla koulumatkallaan kahden liikennevalot, joista ensimmäinen näyttää punaista 60 % ajasta ja toinen 45 % ajasta. Valot toimivat toisistaan riippumattomasti. Millä todennäköisyydellä Tiina joutuu pysähtymään liikennevaloihin yhden kerran?
- 18.** Koulun kahdesta monistuskoneesta toinen on rikki 25 % ajasta ja toinen 15 % ajasta. Millä todennäköisyydellä satunnaisena koulupäivänä monistuskoneista vain yksi toimii?
- 19.** Rasiassa A on kolme valkoista ja viisi punaista palloa, rasiassa B on kaksi valkoista ja kuusi punaista palloa ja rasiassa C on kahdeksan valkoista palloa. Pelaaja valitsee umpimähkään rasian ja edelleen rasiasta yhden pallon. Mikä on todennäköisyys, että hän saa punaisen pallon?
- 20.** Suomalaisista 44 % kuuluu pääveriryhmään A, 17 % ryhmään B, 8 % ryhmään AB ja 31 % ryhmään O. Millä todennäköisyydellä aviopuolisot kuuluvat samaan veriryhmään?

- 21.** Koripalloilija heittää keskimäärin 80 % vapaaheitoista koriin. Hän heittää kolme vapaaheittoa. Millä todennäköisyydellä
- ainakin yksi menee koriin
 - kaikki eivät mene koriin?
- 22.** Viittä kolikkoa heitetään. Millä todennäköisyydellä tulee ainakin yksi klaava?
- 23.** Mikä on todennäköisyys, että seitsemästä henkilöstä ainakin yksi on syntynyt sunnuntaina?
- 24.** Erästä koneen osaa tuotetaan sarjavalmisteisesti. Viallisia tuotteita on 0,2 %. Kyseisiä osia ostetaan 250 kappaletta. Millä todennäköisyydellä ainakin yksi osista on viallinen?
- 25.** Seuramatkalennolla kuulutetaan matkustajien joukosta lääkäriä. Millä todennäköisyydellä 150 matkustajan joukossa on ainakin yksi lääkäri? Suomessa on yksi lääkäri 340 henkeä kohden. Oletetaan, että lennon matkustajia voidaan pitää satunnaisena otoksena suomalaisia.
- 26.** Suomalaisista 31 % kuuluu veriryhmään B. Kuinka suuri tulee satunnaisesti kootun suomalaisryhmän olla, jotta todennäköisyys, että mukana on ainakin yksi B-veriryhmään kuuluva, olisi suurempi kuin 0,99?

- 27.** Tuotteessa on kolme mahdollista vikaa, jotka esiintyvät toisistaan riippumatta todennäköisyyksillä 0,01, 0,02 ja 0,03.
- Millä todennäköisyydellä yksi tuote on viallinen, eli siinä on ainakin yksi kolmesta viasta?
 - Millä todennäköisyydellä kymmenestä tuotteesta ainakin yksi on viallinen?
- 28.** Anna heittää noppaa seitsemän kertaa. Millä todennäköisyydellä ainakin kerran tulee kuutonen?
- 29.** Millä todennäköisyydellä kolmilapsisessa perheessä ainakin yksi lapsi on tyttö? Syntyvistä lapsista 51,2 % on poikia.
- 30.** Lasiesineessä esiintyy toisistaan riippumatta värivirhe todennäköisyydellä 0,12 ja valuvirhe todennäköisyydellä 0,15. Millä todennäköisyydellä tuotteessa on korkeintaan toinen vioista?
- 31.** Suomalaisista 5 % on vasenkätisiä. Millä todennäköisyydellä opetusryhmän 27 opiskelijasta ainakin yksi on vasenkätinen?

Vastaukset:	8.	21.
1.	a. 0,58	a. 0,99
a. 0,14	b. 0,44	b. 0,49
b. 0,012	9.	22. $31/32=0,97$
2.	a. $1/995328$	23. 0,66
a. 0,12	b. 0,719	24. 0,39
b. 0,42	10. 0,30	25. 0,36
c. 0,28	11. 0,26	26. <u>väh.</u> 13 hlö
d. 0,18	12. 0,47	27.
3. $1/7776$	13. 0,50	a. 0,059
=0,00013	14.	b. 0,46
4.	a. 0,67	28. 0,72
a. 0,000064	b. 0,66	29. 0,87
b. 0,056	15. 0,125	30. 0,98
5. 0,98	16. $1/1296$	31. 0,75
6.	=0,00077	
a. 0,56	17. 0,51	
b. 0,06	18. 0,33	
c. 0,14	19. $11/24=0,46$	
7.	20. 0,33	
a. 0,038		
b. 0,64		