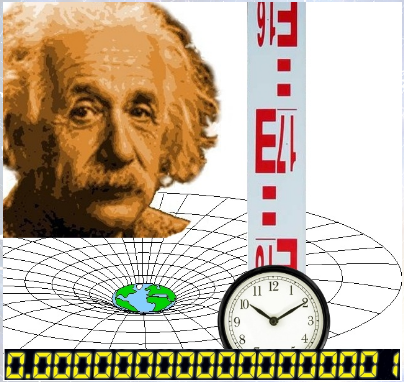
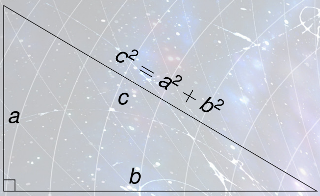
Suhteellisen tarkka vaaitus –

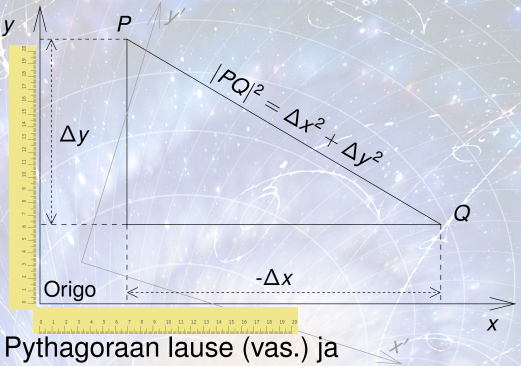
aika-avaruuden geometria maanmittareille

Martin Vermeer, Aalto-yliopisto

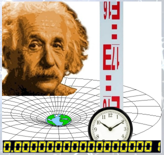


Miten tarina alkaa: Pythagoras (1)





Yllä olevassa kuvassa tuttu Pythagoraan lause (vas.) ja sen versio suorakulmaisissa koordinaateissa (oik.): kahden pisteen P ja Q välistä etäisyyttä $|PQ|$ voidaan laskea kahdesta koordinaattierosta Δx ja Δy.



Pythagoras (2)

Kaava on

$$|PQ|^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \left[= \left(\Delta x'\right)^2 + \left(\Delta y'\right)^2, \text{ jne.} \right],$$

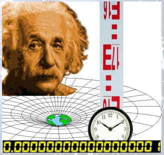
missä $\Delta x = x_P - x_Q$, $\Delta y = y_P - y_Q$ jne.

$|PQ|$ on *invariantti*: se ei riipu käytetystä koordinaatistosta, xy vai $x'y'$. Pythagoraan lauseen muoto taas, eli *metriikka*, kuvaa avaruutemme geometrista käyttäytymistä.

Usein käytetty kaavan differentiaalimuoto

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

toimii myös kaarevalla pinnalla jos pisteiden P ja Q välinen etäisyys ds on pieni.



Pythagoras (3)

Kolmiulotteisessa avaruudessa Pythagoras on

$$|PQ|^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2,$$

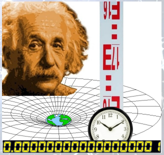
ja yleisessä *n*-ulotteisessa avaruudessa sen yleistys olisi

$$|PQ|^2 = \Sigma_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2 ,$$

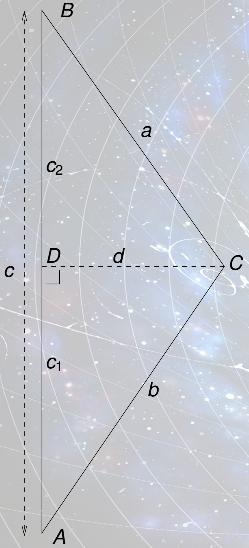
missä *i* on ulottuvuuslaskuri:

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= \Delta x \\ \Delta x_2 &= \Delta y \\ \Delta x_3 &= \Delta z \end{aligned}$$

ja niin edelleen. Aakkoset loppuvat kesken.



Pythagoras ja kolmioepäyhtälö



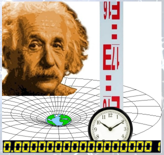
Kuvassa Pythagoras kertoo

$$
\begin{aligned}
a &= \sqrt{d^2 + c_2^2}, \\
b &= \sqrt{d^2 + c_1^2}, \\
c &= c_1 + c_2,
\end{aligned}
$$

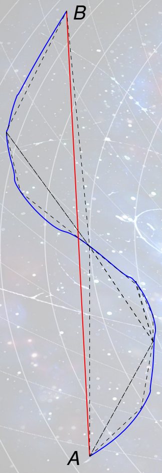
siis

$$
\begin{aligned}
a + b &= \sqrt{c_2^2 + d^2} + \sqrt{c_1^2 + d^2} \geq \\
\geq \sqrt{c_2^2} + \sqrt{c_1^2} &= c_1 + c_2 = c.
\end{aligned}
$$

Tämä on *kolmioepäyhtälö*: lyhin matka *A*:sta *B*:hen on suora matka ADB. Jos $d > 0$ on matka ACB aina pitempi.



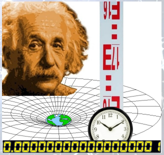
Lyhin matka ja geodeettinen viiva



Voimme soveltaa kolmioepäyhtälöä toistuvasti eli *rekursiivisesti* (katkoviivaiset pikkukolmiot) todistaaksemme, että epäsuora käyrä (sininen) on aina pitempi kuin suora (punainen).

Lyhintä matkaa kutsutaan *geodeettiseksi viivaksi*, myös kaarevilla pinnoilla. Tietysti silloin se ei ole enää suora, vaan “mahdollisimman suora”.

Esim. pallon pinnalla isoympyrä on geodeettinen viiva. Se on lentokoneen polku joka ei ohjaudu tyyrpuuriin eikä paapuuriin.



Pythagoras aika-avaruudessa (1)

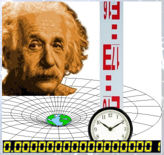
Aika-avaruudessa on koordinaatit aika t, paikka x (ja y, ja z). Pisteet aika-avaruudessa kutsutaan *tapahtumiksi*. Esimerkki tapahtumista on saman ihmisen sijainti aika-avaruudessa elämänsä kahdella eri ajankohdalla.

Pythagoras on nyt hieman erilainen, yleinen kaava tapahtumien P ja Q väliselle "välille" on

$$|PQ|^2 = \Delta t^2 - \mathfrak{c}^{-2}\left(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2\right).$$

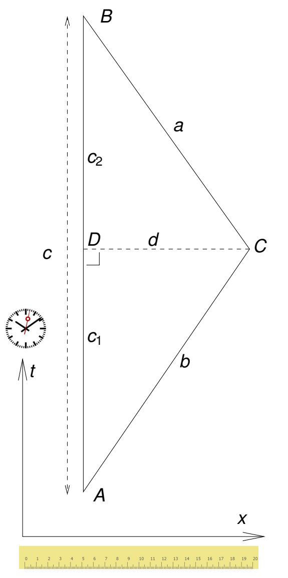
Huomaa miinusmerkki ja $\mathfrak{c}$, valon nopeus. Jos P ja Q ovat sama ihminen eri elämänhetkeissä, on tämä väli $|PQ|$ hetkien välillä kulunut elinaika.

Jos käytämme yhteensopivia eli luonnollisia yksiköitä (vuosia ja valovuosia), putoaa $\mathfrak{c}$ pois. Silloin



$$|PQ|^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2.$$

Pythagoras aika-avaruudessa (2)



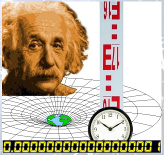
Kuvassa nyt

$$\begin{aligned} a^2 &= c_2^2 - d^2, \\ b^2 &= c_1^2 - d^2, \\ c &= c_1 + c_2, \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} a + b &= \sqrt{c_2^2 - d^2} + \sqrt{c_1^2 - d^2} \leq \\ \leq \sqrt{c_1^2} + \sqrt{c_2^2} &= c_1 + c_2 = c. \end{aligned}$$

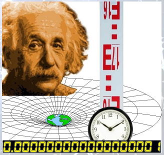
Eli nyt suora matka (ajassa!) tapahtumasta A tapahtumaan B on *pisin* kaikista matkoista, eikä lyhin!



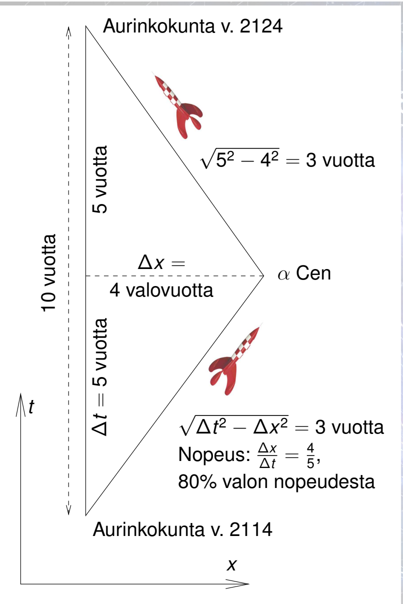
Pythagoras aika-avaruudessa (3)

Kappaleen, tai ihmisen, matka olemassaolonsa aikana ajan ja avaruuden kautta kutsutaan sen *maailmanviivaksi*. Yllä saatu tulos on, että kahden tapahtuman välisen maailmanviivan pituus, matkassa kulunut *ominaisaika*, on maksimaalinen jos maailmanviiva on *suora* – tai yleisemmin, *geodeettinen viiva*. Mutkikkaammat matkat tapahtumasta toiseen ovat aina *lyhyempiä*, ts. näin kuluu vähemmän ominaisaikaa matkustavalta ihmiseltä tai kappaleelta – tai tikittävältä kellolta.

Kysymys on, tapahtuuko matkan aikana *kiihtymisiä*. Jos matkalla kiihdytään ja jarrutetaan, kuluu vähemmän aikaa kuin jos matkustaja on vapaassa putoamistilassa. Tästä seuraa kaksosparadoksi: intuitiomme perustuu *avaruuden* Pythagoraan lauseen muotoon eli *metriikkaan*, jonka mukaan kiertotie on aina pitempi tie. *Aika-avaruudessa* tilanne on juuri päinvastainen, sen erilaisen metriikan suorana seurauksena!

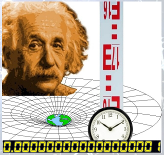


Kaksosparadoksi



Konkretisoidaan tämä. Toinen kaksosveli matkustaa α Kentauriin 4 valovuoden etäisyydellä. Hän käyttää matkaan $3 + 3 = 6$ vuottaa omaa aikaa, ja on palatessaan matkalta v. 2124, neljä vuotta nuorempi kuin kotiin jäänyt velinsä.

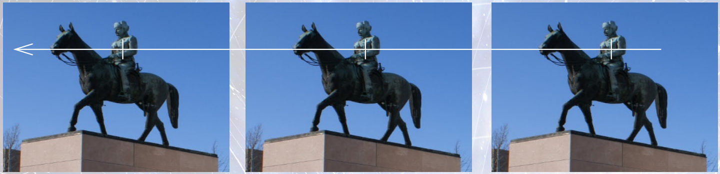
Matkustava veli on se joka kiihtyy rajusti, jarruttaa, kiihtyy ja taas jarruttaa. Kotiin jäävän veljen kiihtyvyydet ovat sen verrattuna lähes olemattomia.



Mannerheimin patsaan maailmanviiva (1)

Mannerheimin patsas pysyy paikallaan. . .

Mannerheimin patsaan maailmanviiva (2)

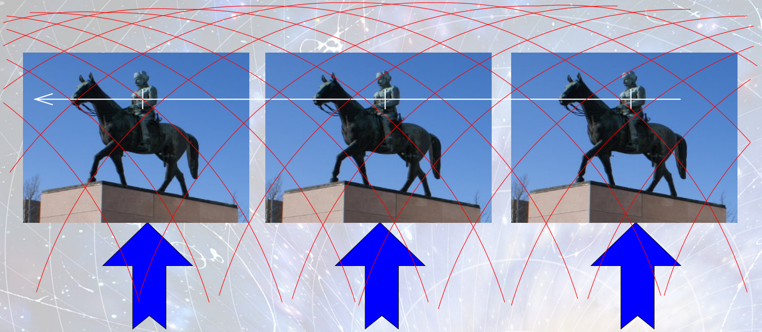


. . . eli sen polku *avaruudessa* on hyvin suora.

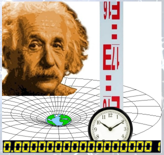
Mannerheimin patsaan maailmanviiva (3)

Kuitenkaan se ei ole vapaassa putoamistilassa: Maan pinta työntää sitä jatkuvasti ylös, aiheuttaen kiihtyvyyttä $9,8\,{}^{\mathrm{m}}\!/\!_{\mathrm{s}^2}$ ylöspäin!

Mannerheimin patsaan maailmanviiva (4)

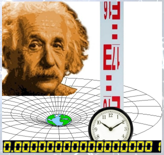


Siksi patsaan maailmanviiva *ei ole geodeettinen viiva*: se kaartuu kaarevassa aika-avaruudessa (punainen, konseptitaidetta) lievästi ylöspäin, noin viisi metriä yhden sekunnin (n. 300 000 000 m) aikamatkan jälkeen.

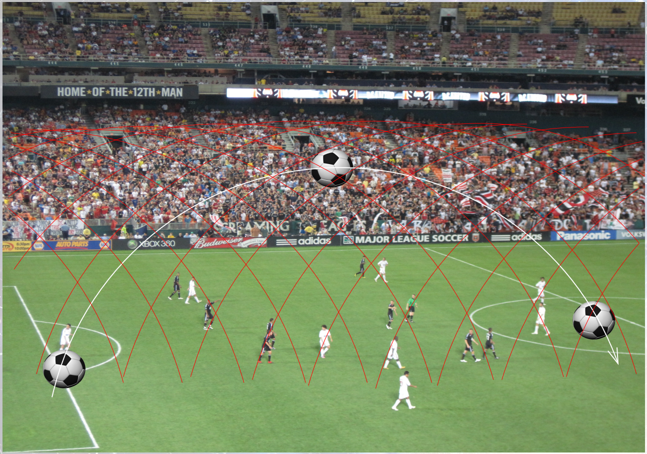


Jalkapallon maailmanviiva (1)

Toisaalta *jalkapallo* on vapaassa putoamistilassa.
Ja vaikka sen polku *avaruudessa* on kaareva. . .

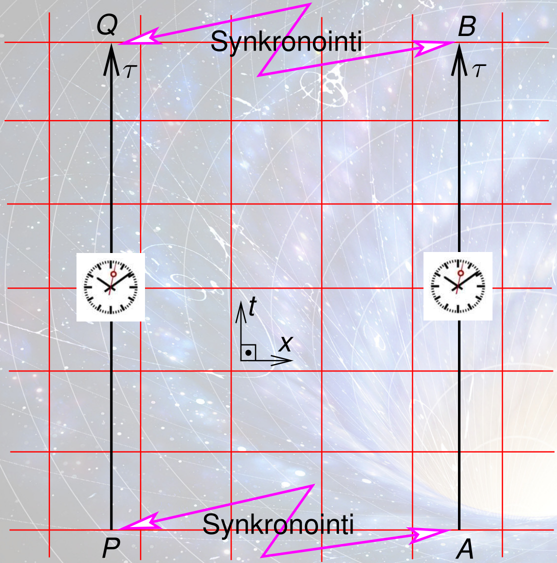


Jalkapallon maailmanviiva (2)



. . . on sen maailmanviiva maapalloa ympäröivässä kaarevassa aika-avaruudessa *geodeettinen viiva*, eli “suora”!

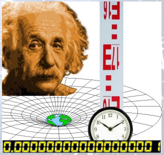
Kellot avaruudessa. . .



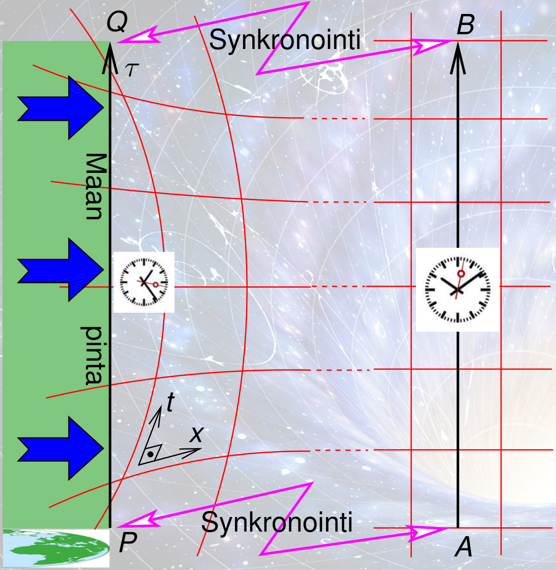
Vieläkin eri perspektiivi.

Vaapassa avaruudessa kellot kulkevat samaan tahtiin, eli

$$\tau_Q - \tau_P = \tau_B - \tau_A.$$

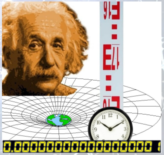


…ja Maan pinnalla



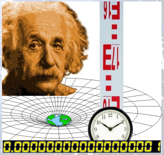
Maan painovoimakentässä kuitenkin kellon näennäisesti suora maailmanviiva *kaartuu ylöspäin* maanpinnan työntövoimasta. Siksi

$$\tau_Q - \tau_P < \tau_B - \tau_A!$$



Miten kronometrinen vaaitus toimii (1)

Olemme nähneet, että kellon “ominaisaika” kun se olemassa-olonsa aikana matkustaa tulevaisuuteen, on sitä lyhyempi, mitä kiemuraisempi sen maailmanviiva on. Maan pinnalla olevan kellon maailmanviiva poikkea jatkuvasti suorasta viivasta eli geodeettisesta viivasta painovoiman — tarkemmin, maanpinnan vastustuksen — seurauksena, ks. yllä Mannerheimin patsas. Siksi se *menettää aikaa* verrattuna vertauskelloa joka esim. leijaisi kaukana avaruudessa. Teoria kertoo, että menetetty aika on suoraan verrannollinen *mittauspaikan geopotentiaaliin*, Maan painovoimakentän potentiaaliin. Painovoima on Maan gravitaation (vetovoiman) ja Maan rotaation aiheuttaman keskipakoisvoiman yhteisvaikutus. Näin ollen voidaan tarkoilla kelloilla mitata pisteiden välisiä geopotentiaalieroja, eli suorittaa *vaaitus*.

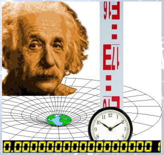


Miten kronometrinen vaaitus toimii (2)

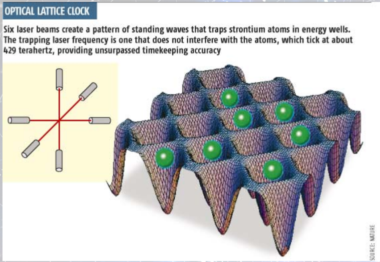
Kaava on (Bjerhammar 1986, Vermeer 1983):

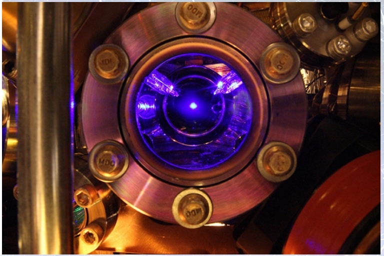
$$\frac{\Delta\tau}{\tau} = \frac{\Delta W}{\mathfrak{c}^2},$$

jossa τ on kellon mittaama aika, $\Delta\tau$ kellojen välinen aikaero, ΔW pisteiden välinen geopotentiaaliero ja $\mathfrak{c}$ valon nopeus. Saadaan suoraan, että geopotentiaalieron $1\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$, eli korkeuseron 10 cm, mittaamiseksi tarvitaan kellojen suhteellista tarkkuutta 10^{-17}. Vuonna 1983 tämä kuulosti vielä aika haastavalta, mutta viime vuosina on kehitetty ns. optiset hilakellot joiden tarkkuus on jopa luokkaa 10^{-18}.



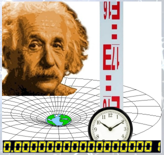
Optinen hilakello



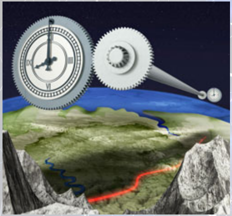


Teknologinen uutuus optisissa hilakelloissa on, että käytetty aallonpituus on *optisella alueella* eikä mikroaaltoalueella kuten perinteisempien atomikellojen aallonpituudet. Nopeammat värähtelyt mahdollistavat tarkempaa ajanpitoa.

Optinen hila – Nature – Physics World

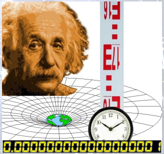


Ajansiirto valokuidulla



Potentiaalierojen mittaaminen edellyttää kellojen vertailua. Etenkin suuremmilla etäisyyksillä tämä on tällä tarkkuustasolla haasteellista.

Saksassa *Physikalisch-Technische Bundesanstalt* ja *Max-Planck-Institut für Quantenphysik* ovat kehittäneet menetelmän, jolla voidaan käyttää jo olemassa olevat, Internetin käyttämät optiset kuituverkot. Kokeilut (PTB/MPQ 2012) ovat osoittaneet tämän toimivaksi ratkaisuksi jopa 920 km:n matkalla. Kuitenkin kuitukaapeleissa säännöllisin välein olevat vahvistimet on vaihdettava erikoisvalmisteisiin.



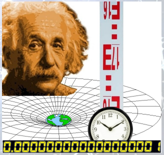
Sovelluksia

Optisten hilakellojen sovelluksia on monta. Jo tietoliikenteen sovelluksissa tarkka ajanpito voi olla kriittinen, ja siellä uusia kelloja tullaan varmaan käyttämään.

Teoreettisen fysiikan kannalta kellot mahdollistavat entistä tarkempia yleisen suhteellisuusteorian testejä.

Kaiken mielenkiintoisin sovellusala on kuitenkin geodesia. On merkille pantavaa, että, vaikka teknologia yleensä on mennyt eteenpäin, kaiken tarkin tekniikka korkeuserojen mittaamiseksi on edelleen tarkkavaaitus perinteisillä vaaituskojeilla. Tekniikalla on monta vaikeasti hallittavissa olevaa virhelähdettä, osin systemaattisia. Ehkä nyt uuden, hyvin erilaisen vaaitusteknologian aika on koitunut.

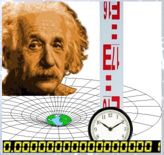
Suomessa MIKES tutkii optisia hilakelloja.



Geodeettinen infrastruktuuri

Kun teknologia kypsyy, tullaan varmaan rakentamaan jatkuvasti toimivia, optisella kuitukaapeliverkolla yhteen kytkettyjä korkeudenmittausasemia, samalla tavalla kuin on jo olemassa maailmanlaajuisesti pysyviä GNSS-verkkoja. Näin saataisiin aikaan “nollannen luokan” korkeusverkko, joka toimisi ei vain korkeusvertausrunkona, vain mahdollistaisi myös maankuoren vertikaaliliikkeiden seurantaa.

Pieni ongelma on saaripisteet kaukana valokuituverkosta, kuten myös eri mantereiden kytkeminen yhteen: välivahvistimien installointi jo olemassa oleviin merenalaisiin kaapeleihin ei ole aivan helppoa. Ehkä tähän tarjoutuu synkronointi GNSS-järjestelmien avulla, kuten Vermeer (1983) alunperin ehdotti. Sellaiset mittaukset kestäisivät vuosia.



Saksalainen aloite

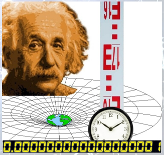
Saksassa käynnistettiin v. 2014 ns. Collaborative Research Centre (*Sonderforschungsbereich*)

Geo-Q, "*Relativistic geodesy and gravimetry with quantum sensors*"

liittovaltion rahoituksella €11 miljoonaa ensimmäisen neljän vuoden aikana. Kronometrisen vaaitusmenetelmän kehittäminen on osana tätä projektia.

Valitettavasti v. 2018 ei ole saatu jatkoa tähän.

DFG:n ilmoitus - Leibniz-yliopisto Hannover - PTB:n teksti



http://www.arbeitsplatz-erde.de/

Kiitos kiinnostuksesta!

"What good is a newborn baby?"

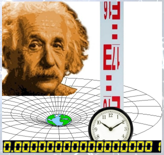
– Benjamin Franklin, 1783, ilmapallokokeilusta

Kirjallisuutta

Arne Bjerhammar (1975): *Discrete approaches to the solution of the boundary value problem in physical geodesy*. Boll. de geodesia e scienze affini.

Arne Bjerhammar (1986): *Relativistic Geodesy*. NOAA Technical Report NOS 1 18 NGS 36. https://www.ngs.noaa.gov/PUBS_LIB/RelativisticGeodesy_TR_NOS118_NGS36.pdf

Martin Vermeer (1983): *Chronometric levelling*. Report 83:2 of the Finnish Geodetic Institute, Helsinki. ISBN 951-711-087-1, ISNN 0355-1962



Epilogi: Einsteinin pitkä varjo

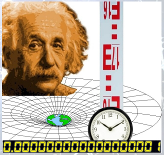
Fermat keksi periaatetta, jonka mukaan valo kulkee kahden pisteen välillä *nopeinta* mahdollista polkua pitkin.

Gauss keksi, samanaikaisesti János Bolyai'n ja Nikolai Lobatševskin kanssa, epä-euklidista geometriaa ja kehitti kaarevien avaruuksien matemaattista teoriaa.

Hamilton yleisti Fermatin periaatetta koskemaan kappaleiden liikettä ▷ *Hamiltonin mekaniikka*. Hän ei vielä ymmärtänyt miksi tämä oli mahdollinen. . .

De Broglie ymmärsi: *myös aine on aaltoliike* (ja kääntäen valo koostuu *fotoneista*) ▷ *kvanttiteoria*, hiukkas–aalto–dualismi.

Myös suhteellisuusteorian *geodeettiset viivat* ovat Hamiltonin, tai Fermatin, periaatteen mukaisia polkuja. Ne liittyvät *absoluuttisen derivaatan* käsitteeseen kaarevassa aika-avaruudessa, mitä oli **Levi-Civita**'n kuningasajatus.



Tähän voisi lisätä vielä **Pythagoras, Riemann, Maxwell**, . . .