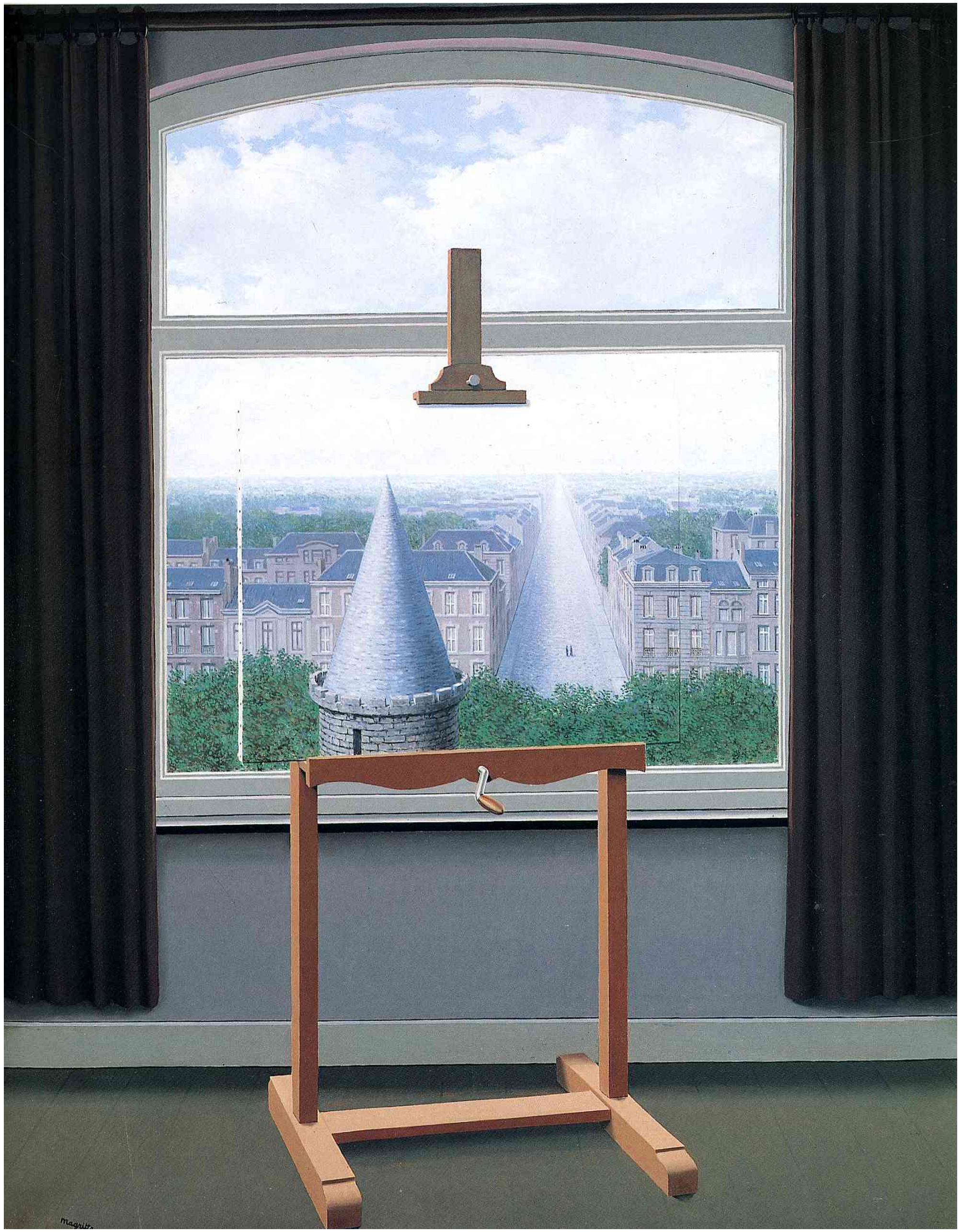
MATEMATIIKKA JA TAIDE:

REYEN KONFIGURAATIO

Taneli Luotoniemi

LUMATIKKA 2020



René Magritte: *Les promenades d' Euclide* (1955)

René Magritten maalauksessa *Les promenades d' Euclide* on huone, jonka ikkunan osittain peittää maalausteline.

Telineellä oleva maalaus esittää näkymää ulos, jota hallitsee kartiomuotoinen torni ja horisonttiin suorana ulottuva katu.

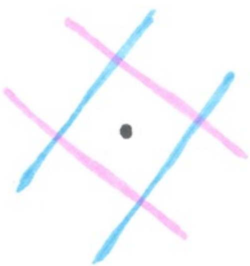
Maalaus on sommiteltu niin, että torni ja katu piirtyvät vieri viereen yhtenevinä kolmiomuotoina, ja lisäksi torni kärki osuu juuri horisontille, aivan kuten kadun pakopistekin.

Vaikka kuvan idea on ehkä ensivaikutelmaltaan tyhjänpäiväinen, nostaa se esiin mielenkiintoisen kysymyksen:

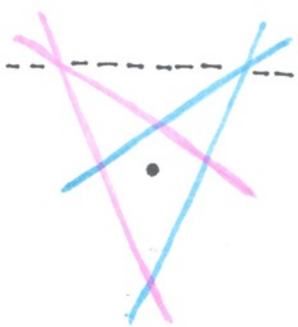
Voisimmeko käsittää pakopisteet ja tavalliset pisteet jotenkin samanlaisina, samanarvoisina, ja yhtä todellisina?

Ottakaamme neliö, jonka keskipiste on merkitty mustalla täplällä, ja jonka sivujanat on jatkettu täysiksi suoriksi. Lisäksi väritämme sen sivut niin, että yhdensuuntaisilla sivuilla on sama väri.

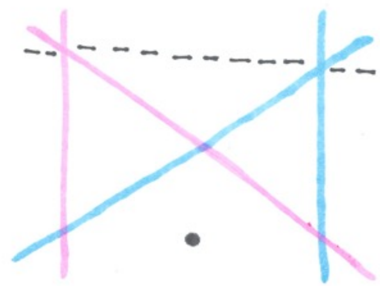
Miten neliö näyttäytyy perspektiivikuvassa kun kuvan katselukulmaa käännetään hitaasti?



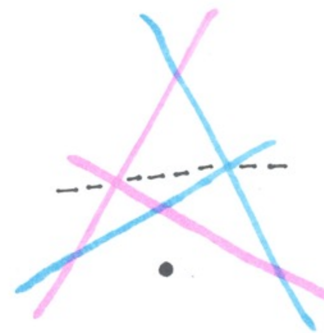
Ajattele että seisot autiolla hiekka-aavikolla, ja katsot alas maahan piirrettyä neliötä suoraan ylhäältäpäin.



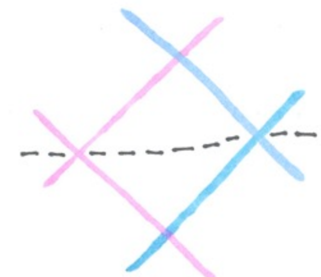
Jos nostat katsettasi ylemmäs, näet taivaanrannan, jossa neliön vastakkaiset sivut yhtyvät.



Jos kohotat katsettasi vielä ylemmäs, on neliön sinua lähin kärki livahtanut äärettömyyteen.



Jos katsot vielä korkeammalle, ilmaantuu tuo neliön kärki taivaalle horisontin ylle.



Lopulta sivut muodostavat taas neliön, mutta nyt kaksi sen kärjistä onkin pakopisteitä!

Voimme yleistää tämän ilmiön projektiivisesta tasosta projektiiviseen avaruuteen, ja havainnollistaa sitä tikuista kootuilla malleilla:

Tarkastelkaamme siis kuutiota, jonka keskipiste on merkitty valkoisilla lävistäjillä, ja jonka särmäjanat on jatkettu täysiksi suoriksi.

Lisäksi väritämme sen särmät niin, että yhdensuuntaisilla särmäsuorilla on sama väri.

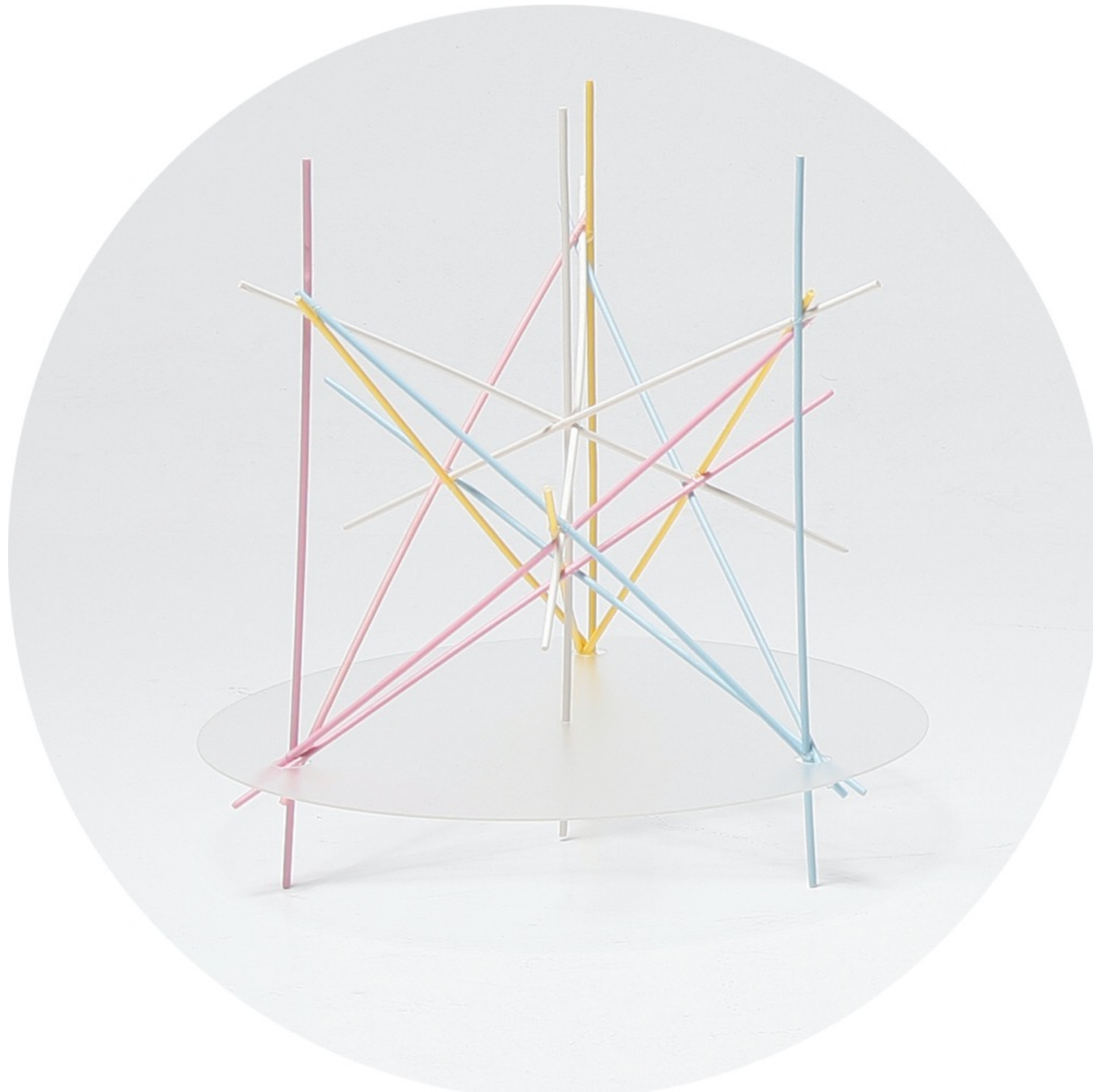
Miten kuutio näyttäytyisi korkeampiulotteiselle olennolle joka tarkastelisi sitä perspektiivikuvissa eri kulmista?

Jos se katsoo sitä ensin suoraan ’ylhäältä’ päin, ja näkee kuution säännöllisenä, kuten mekin.

Jos tuo hyperolento kääntää katsettaan hieman, näkyviin tulee ’horisontti’ – taso, jossa kuution yhdensuuntaiset särmät yhtyvät.

Taso on esitetty mallissa muovilevyllä, kuvassa alhaalla.

Yksi kuution alkuperäisistä kärjistä on nyt singahtanut ylös äärettömyyteen.



Jos hyperolento kääntää lisää, ilmestyy ylös kadonnut kärkipiste horisonttitason alapuolelta taas näkyviin.

Nyt kuitenkin kolme uutta kärkipistettä on matkannut yläkautta äärettömyyteen.

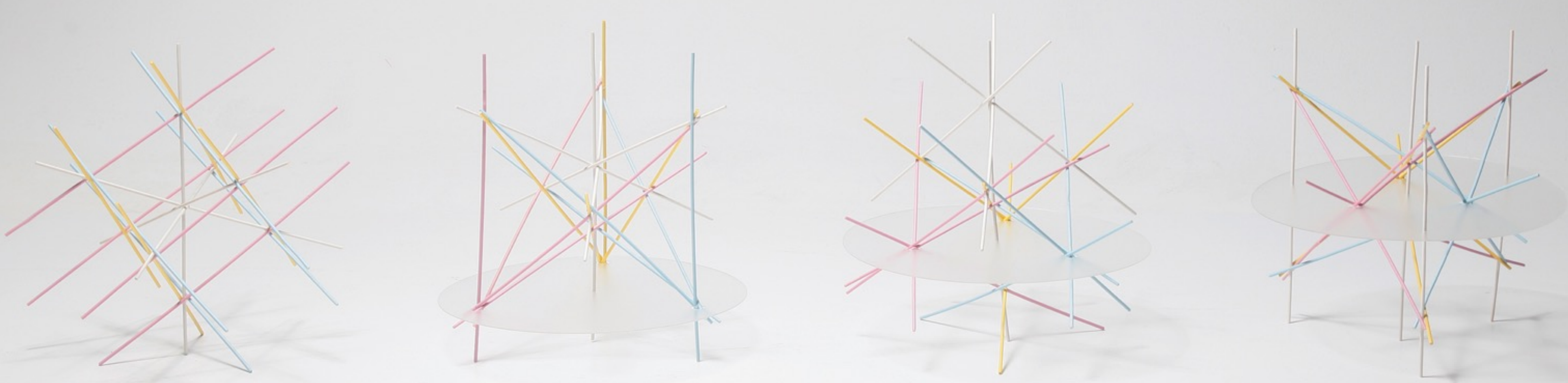
Suorista piirtyy jälleen kuutio, mutta nyt alkuperäinen keskipiste, sekä kolme horisonttitason pakopistettä toimittaa kuution kärkipisteiden virkaa!

Lopulta hyperolento saavuttaa katselukulman, josta käsin alkuperäisen kuutiomme horisonttitaso piirtyy mallin keskelle.

Kuutiomme valkoiset lävistäjät ovat nyt yhdensuuntaisia, eli kuution keskipiste on äärettömyydessä.

Katso animaatio yllä kuvaillusta liikkeestä, jossa mallit kääntyvät toisikseen osoitteessa:

https://www.youtube.com/watch?v=d-Krgh_v2ds

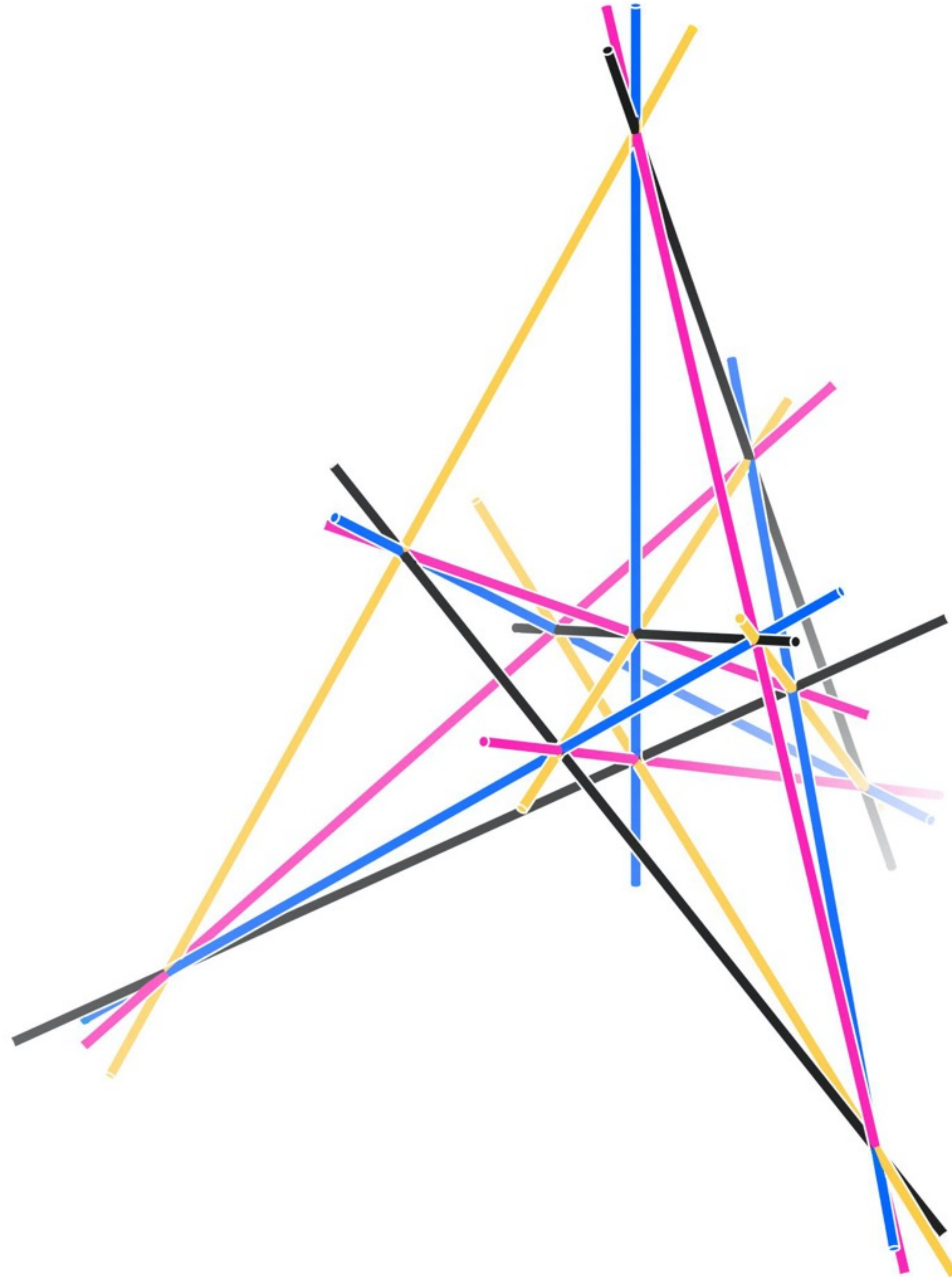


Mallien kuvaamaa rakennetta kutsutaan *Reyen konfiguraatioksi*, löytäjänsä Theodor Reyen mukaan.

Se koostuu siis kahdestatoista pisteestä, kuudestatoista suorasta, ja kahdestatoista tasosta. Konfiguraation jokainen piste on neljän suoran ja kuuden tason leikkaus, sen jokainen suora kulkee kolmen pisteen läpi ja on kolmen tason leikkaus, ja sen jokainen taso kulkee kuuden pisteen ja neljän suoran läpi.

Tämä säännönmukaisuus mahdollistaa suorien värittämisen neljällä värillä siten, etteivät samanväriset suorat kosketa toisiaan missään, mutta kaikki värit ovat läsnä konfiguraation jokaisessa risteyspisteessä ja jokaisessa tasossa.

Kirjassaan *Anschauliche Geometrie* (1932) David Hilbert ja Stephan Cohn–Vossen kuvailevat kuinka Reyen konfiguraatio saadaan projisoimalla 24-soluksi kutsuttu neliulotteinen kappale meidän kolmiulotteiseen avaruuteemme.

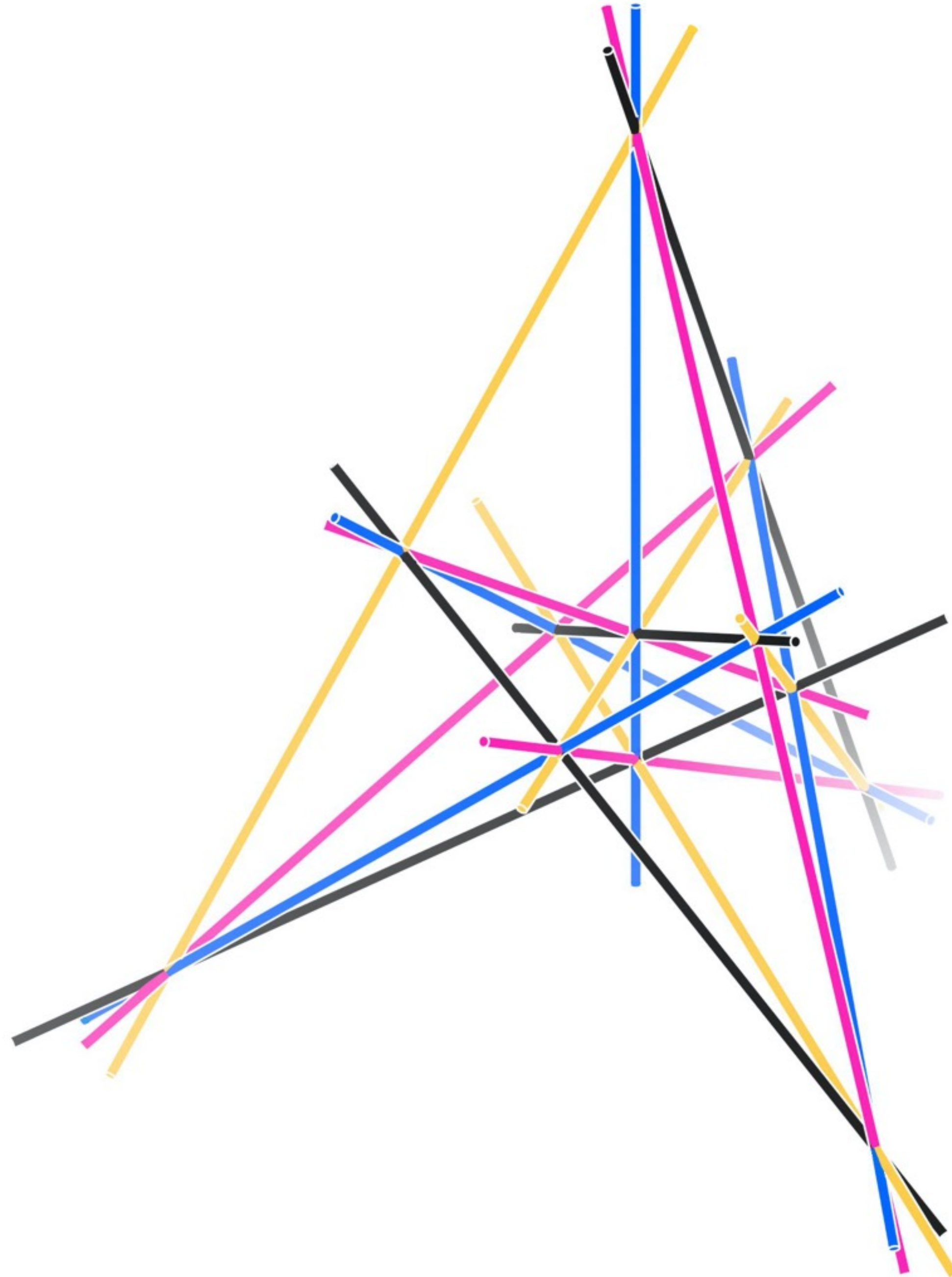


Tehtävä: Kokoa kuudestatoista tikusta (grillivartaista, kasvitukikepeistä, tms.) Reyen konfiguraatio.

- Käytä esimerkiksi pieniä kumilenkkejä tai rautalangan pätkiä risteyksissä
- Kiinnitä erityistä huomiota siihen millä tavoin tikut ohittavat toisensa risteyksissä.
- Jokaisen tikun tulisi olla täysin suorassa, ja toisiaan koskettavien tikkujen tulisi muodostaa mahdollisimman tiivis risteys.
- Liu'uttele ja säädä tikkujen asentoa rakennelmassa niin että kaikki risteykset ovat mahdollisimman etäällä naapureistaan, ja että rakennelman 'huoneet' ovat mahdollisimman selvästi piirtyviä.

Tällainen tikkurakennelma on hyödyllinen paitsi Reyen konfiguraation itsenäiseen opiskeluun, myös havainnollinen askartelutehtävä tunnilla.

Kokeile ensin ratkaista tehtävä ilman muita ohjeita. Jos tarvitset apua, katso videota osoitteessa: https://youtu.be/ZVtHbLF2G9M



Projektiivisia konfiguraatioita on helppo koota esim. puutikkuja yhteen sitomalla. Kynnys kokeilevaan rakenteluun on matala, kun pikkutarkkoja esivalmisteluja, kuten mittauksia tai merkintöjä, ei tarvita.

Katso video, jossa Reyen konfiguraatio rakennetaan puutikuista ja kumilenkeistä osoitteessa: https://youtu.be/ZVtHbLF2G9M

Projektiiviset konfiguraatiot toimivat myös suuressa mittakaavassa.

Shanghain *West Bund Art Centre*ssä järjestetyssä *Art and Design Education: Future Lab Exhibition* -näyttelyssä *Aalto Math&Arts* -tiimi rakensi nelimetrisistä bambutangoista *Space Hug* -veistoksen.

Veistos kutsui näyttelyvieraita osallistumaan interaktiiviseen installaatioon, jossa he saivat tilaisuuden rakennella omia pienempiä bambukonfiguraatiotaan, joko annettuja ohjeita seuraten tai taiteellista vapautta noudattaen. Pienoiskonfiguraatiot sijoitettiin *Space Hug*in ympärille näyttelyn aikana kasvavaksi kokonaisuudeksi.

(https://www.aalto.fi/en/news/aalto-math-arts-in-shanghai-future-lab-exhibition)

KIRJALLISUUTTA:

Hilbert, David and Cohn-Vossen, Stephan (1990). *Geometry and the Imagination* [1932]. Chelsea Publishing Company.

Luotoniemi, Taneli (2019). *Hyperspatial Interlace - Grasping Four-dimensional Geometry through Crafted Models*. Aalto University publication series DOCTORAL DISSERTATIONS, 56/2019.
(https://aaltodoc.aalto.fi/handle/123456789/37574).

Reye, Theodor. (1882). *Das Problem der Configurationen.* Acta Mathematica, 1 (1): 93–96.