

MAT-02400 Vektorianalyysi

2014–2015

Janne Kauhanen

TTY
Matematiikan laitos



Vektorianalyysi, jonka tekijä on [Janne Kauhanen](#), on lisensoitu [Creative Commons Nimeä-EiKaupallinen-JaaSamoin 4.0 Kansainvälinen](#) -lisenssillä.

Alkusanat

Tämä moniste on laadittu TTY:n kurssille MAT-02400 Vektorianalyysi. Moniste ei ole kattava itseopiskelupaketti, vaan se on tarkoitettu käytettäväksi luentojen seuraamisen ja harjoitustehtävien ratkomisen tukena.

Merkinnät ja esitysjärjestys seurailevat soveltuvilta osin kurssikirjan [5] lukujen 12, 14 ja 15 esitystä. Kaikki lähdeluettelossa sivulla 130 mainitut ja myös monet muut *Calculus*- ja *Engineering mathematics* -kirjat soveltuvat mainiosti oheislukemistoksi.

Edelliseen versioon 2012–2013 verrattuna suuria muutoksia ei ole, esimerkiksi kappaleiden ja lauseiden numerointi on sama.

Kommentteja painovirheistä ja monisteesta yleisemminkin voi lähettää sähköpostitse kirjoittajalle: `janne.kauhanen@tut.fi`.

Sisällys

1	Vektorikentät	5
1.1	Vektorikenttä	5
1.2	Gradientti	11
1.3	Divergenssi	14
1.4	Roottori	15
1.5	Laplacen operaattori	17
1.6	Laskusääntöjä	18
2	Käyrä	21
2.1	Parametrisoitu käyrä	22
2.2	Käyrän derivaattavektori	27
2.3	Sileät käyrät, yksikkötangentti ja päänormaali	30
2.4	Suunnistus ja vastakäyrä	32
2.5	Käyrän pituus	34
2.6	Reaaliarvoisen funktion käyräintegraali	37
2.7	Massa ja massakeskipiste	40
2.8	Vektorikentän käyräintegraali	42
3	Konservatiivinen vektorikenttä ja potentiaalifunktio	50
3.1	Peruslause ja riippumattomuus tiestä	50
3.2	Potentiaalifunktion laskeminen	54
3.3	Potentiaalienergia	58
4	Kertaus tasointegraalista	58
4.1	Tasointegraali suorakulmiossa	59
4.2	Tasointegraali projisoituviissa joukoissa	61
4.3	Tasointegraalin laskeminen napakoordinaateilla	68
5	Greenin lause ja Gaussin lause tasossa	70
5.1	Greenin lause	71
5.2	Gaussin lause tasossa	75
6	\mathbb{R}^3:n pinnoista ja joukoista	76
6.1	Paraboloidi ja kartio	77
6.2	Pallo ja sylinteri	77
7	Pintaintegraali	80
7.1	Parametrisoitu pinta	80
7.2	Pinnan pinta-ala	83
7.3	Perusparametrisoinnit	85

7.4	Reaaliarvoisen funktion pintaintegraali	88
7.5	Massa ja massakeskipiste	90
7.6	Pinnan suunnistus ja reunakäyrä	92
7.7	Vektorikentän vuo	94
8	Kertaus avaruusintegraaleista	99
8.1	Määritelmä ja laskeminen projisoituissa joukoissa	99
8.2	Pallokoordinaatit	101
8.3	Sylinterikoordinaatit	103
9	Gaussin lause	104
10	Stokesin lause	113
11	Sovelluksia	121
11.1	Kenttäviivat	121
11.2	Jatkuvuusyhtälö	125
11.3	Maxwellin yhtälöistä	126
11.4	Vektorimuotoinen Gaussin lause	127
12	Kertaus	128
	Lähteitä ja kirjallisuutta	130
	Hakemisto	130

1 Vektorikentät

Tässä luvussa tutustutaan skalaari- ja vektorikenttiin ja differentiaalioperaattoreihin gradientti, divergenssi ja roottori.

1.1 Vektorikenttä

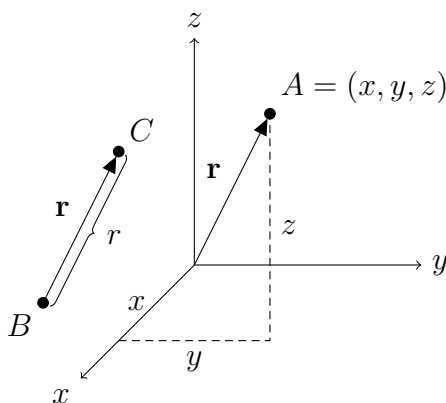
Avaruuden \mathbb{R}^3 alkiot ovat kolmen reaaliluvun järjestettyjä joukkoja (x, y, z) , missä $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ ja $z \in \mathbb{R}$. Alkiota (x, y, z) havainnollistetaan tilanteesta riippuen seuraavasti:

- (x, y, z) on piste A xyz -koordinaatistossa,
- (x, y, z) on pisteen A paikkavektori \overline{OA} ,
- (x, y, z) on siirtymävektori \overline{BC} pisteestä B pisteeseen C .

Tällä kurssilla vektorista käytetään merkintöjä $(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Yleisesti käytettyjä ovat myös merkinnät $[x, y, z]$ ja $\langle x, y, z \rangle$. Nollavektoria merkitään $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$.

Määritelmä 1.1. Vektorille (x, y, z) sovitaan lyhennysmerkintä $\mathbf{r} = (x, y, z)$. \mathbf{r} :n pituutta merkitään r :llä:

$$r = \|\mathbf{r}\| = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$



Määritelmä 1.2. Reaaliarvoista funktiota $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ (tai $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$) sanotaan *skalaarifunktioksi* tai *skalaarikentäksi* (*scalar field*). Vektoriarvoista funktiota $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (tai $\mathbf{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$)

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (P(\mathbf{r}), Q(\mathbf{r}), R(\mathbf{r})) = P(\mathbf{r})\mathbf{i} + Q(\mathbf{r})\mathbf{j} + R(\mathbf{r})\mathbf{k}$$

eli

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

kutsutaan *vektorikentäksi* (*vector field*). Reaaliarvoiset funktiot P , Q ja $R: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ovat tässä \mathbf{F} :n *koordinaattifunktioita* (*coordinate function*) eli *komponenttifunktioita*.

Vektorikenttiä merkitään tällä kurssilla painetussa tekstissä lihavoiduilla isoilla kirjaimilla \mathbf{F} , \mathbf{G} , ... ja käsin kirjoitettaessa \overline{F} , \overline{G} , ... tai \underline{F} , \underline{G} , ... Skalaarikenttiä merkitään lihavoimattomilla pienillä kirjaimilla f , g , ... Käyttämämme merkintä $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ koordinaattifunktioille on yleinen oppikirjoissa. Voidaan merkitä myös $\mathbf{F} = (f_1, f_2, f_3)$.

Yksinkertaisuuden vuoksi merkitsemme $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ja $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, vaikka määrittelyjoukko $D \subset \mathbb{R}^3$ ei olisikaan koko \mathbb{R}^3 . Tällöin määrittelyjoukoksi otetaan suurin mahdollinen joukko, jossa funktio on määriteltä.

Esimerkki 1.3. a) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^3 y \sqrt{z}$ on skalaarifunktio, jonka määrittelyä rajoittaa ehto $z \geq 0$, ts. määrittelyjoukkoon D kuuluu xy -taso ja sen yläpuolella olevat pisteet: $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0\}$.

b) $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{x^2 + y^2 + z^2}$$

on vektorikenttä, jonka määrittelyjoukko on $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Määritelmän 1.1 merkinnöillä tämä kenttä voitaisiin yhtäpitävästi määritellä

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{r^2}.$$

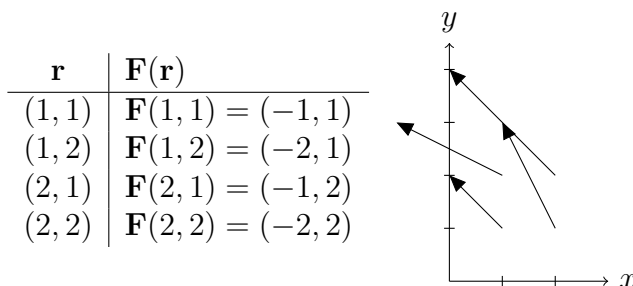
Vaikka matemaattisesti vektorikentälle sekä määrittelyjoukko että maalijoukko on \mathbb{R}^3 , niin sovelluksissa ne usein ovat ”eri avaruuksia”. Esimerkiksi nopeuskentälle määrittelyjoukon koordinaattien mittayksikkönä on m ja maalijoukon m/s.

Määritelmä 1.4. Vektorikentän $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ *voimakkuus* (*magnitude*) on $\|\mathbf{F}(\mathbf{r})\|$, ts. kuvavektorin pituus.

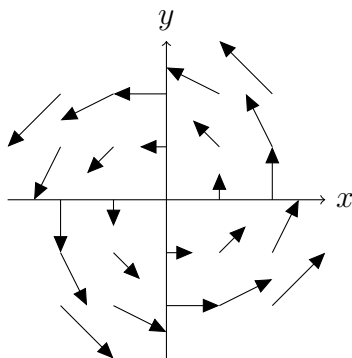
Vektorikenttää voidaan havainnollistaa piirtämällä sopiva kokoelma kuvavektoreita $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ alkamaan pisteistä \mathbf{r} .

Esimerkki 1.5. Piirrä kenttä $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$.

Ratkaisu. Lasketaan \mathbf{F} :n arvot esimerkiksi pisteissä $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$ ja $(2, 2)$ ja piirretään kuvavektorit ko. pisteisiin:



Seuraavaan kuvaan on laskettu enemmän pisteitä ja skaalattu kuvavektoreita kertoimella 0,5:



Esimerkki 1.6. Tasaisen ympyräliikkeen nopeuskenttä xy -tasossa, kun liike tapahtuu vakiokulmanopeudella $\omega > 0$ z -akselin ympäri vastapäivään on $\mathbf{v}(x, y) = \omega(-y, x)$. Perustelu:

$$\|\mathbf{v}(x, y)\| = \sqrt{(\omega x)^2 + (\omega y)^2} = \omega \sqrt{x^2 + y^2} = \omega r,$$

eli vauhti $v = \|\mathbf{v}\| = \omega r$ on suoraan verrannollinen etäisyyteen origosta ja

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = \omega(-y, x) \cdot (x, y) = \omega(-yx + xy) = 0,$$

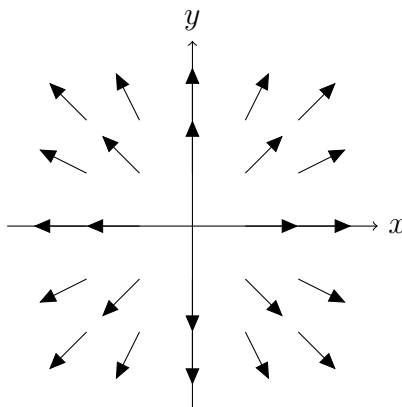
ts. nopeusvektori on kohtisuorassa paikkavektoria $\mathbf{r} = (x, y)$ vastaan. Suunta on vastapäivään, kuten esimerkin 1.5 kuvasta nähdään.

Opintojaksolta Insinöörimatematiikka 2 muistetaan, että jos $a \in \mathbb{R}$ ja $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, niin $\|a\mathbf{v}\| = |a|\|\mathbf{v}\|$.

Esimerkki 1.7. Kentän $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{r}$ voimakkuus on

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{r})\| = \left\| \frac{\mathbf{r}}{r} \right\| = \frac{1}{r} \|\mathbf{r}\| = 1$$

jokaisessa pisteessä $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ ja kenttä suuntautuu origosta poispäin, sillä $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r}\mathbf{r}$ on samansuuntainen paikkavektorin \mathbf{r} kanssa, koska paikkavektoria \mathbf{r} kerrotaan positiivisella luvulla $\frac{1}{r}$. Kuva xy -tasossa:



Monissa sovelluksissa esiintyy pallosymmetrisiä kenttiä. Pallosymmetrinen skalaarikenttä voidaan esittää muodossa

$$\boxed{f(\mathbf{r}) = h(r)}, \quad (1.8)$$

missä $h: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ on reaalifunktio. Funktion (1.8) arvo riippuu vain etäisyydestä r origoon ja vakioetäisyydellä origosta f :llä on vakioarvo. Pallosymmetrinen vektorikenttä voidaan esittää muodossa

$$\boxed{\mathbf{F}(\mathbf{r}) = h(r) \frac{\mathbf{r}}{r}}, \quad (1.9)$$

missä $h: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ on reaalifunktio. Kenttä (1.9) suuntautuu (h :n merkistä riippuen) kohti origoa tai origosta poispäin ja kentän voimakkuus

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{r})\| = \left\| \frac{h(r)}{r} \mathbf{r} \right\| = \frac{|h(r)|}{r} \|\mathbf{r}\| = |h(r)|$$

riippuu vain etäisyydestä r origoon ja vakioetäisyydellä origosta voimakkuudella on vakioarvo.

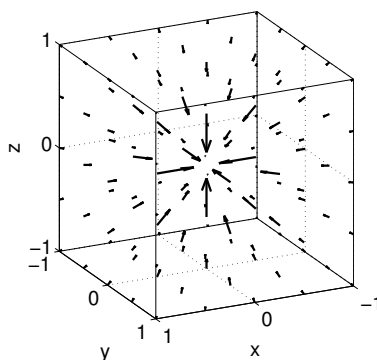
Esimerkki 1.10. a) Jos origossa on massa M , niin pisteessä \mathbf{r} olevaan massapisteeseen m kohdistuvan gravitaatiovoiman voimakkuus on GMm/r^2 ja voiman suunta on kohti origoa. Massapisteeseen m kohdistuu siis voima

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{GMm}{r^2} \left(-\frac{\mathbf{r}}{r} \right) = -GMm \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

b) Origossa oleva pistevaraus q_1 kohdistaa pisteessä \mathbf{r} olevaan pistevaraukseen q_2 voiman

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = cq_1q_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

Seuraavassa kuvassa on esitetty kenttä $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = c \frac{\mathbf{r}}{r^3}$, $c < 0$.



Kerrataan lyhyesti perusasioita osittaisderivaatoista ja differentioituvuudesta. Tällä opintojaksolla differentioituvuus todetaan käytännössä lauseen 1.12 avulla.

Määritelmä 1.11. Jos funktiolla $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ on kaikki osittaisderivaatat ja ne ovat jatkuvia, niin tällöin sanotaan, että f on *jatkuvasti differentioituva* (*continuously differentiable*).

Lause 1.12. Jos f on jatkuvasti differentioituva, niin se on differentioituva.

Vektorikentälle \mathbf{F} jatkuvuus, differentioituvuus ja jatkuva differentioituvuus määritellään komponenteittain.

Määritelmä 1.13. Vektorikenttä $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ on *jatkuva* / *differentioituva* / *jatkuvasti differentioituva*, jos komponenttifunktiot P , Q ja R ovat jatkuvia / differentioituvia / jatkuvasti differentioituvia.

Esimerkki 1.14. Esimerkin 1.3 **b** vektorikenttä

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \text{ts.} \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{r^2},$$

on jatkuva määrittelyjoukossaan, sillä komponenttifunktiot

$$P(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad Q(x, y, z) = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{ja}$$

$$R(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}$$

ovat jatkuvia, kun $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$. Osamäärän derivoimissäännöllä laske-
taan

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1 \cdot (x^2 + y^2 + z^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}.$$

Tämä on jatkuva, kun $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$. Samalla tavoin muutkin osittais-
derivaatat

$$\frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial z}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial R}{\partial z}$$

nähdään jatkuviksi, joten \mathbf{F} on jatkuvasti differentioituva (ja siten differen-
tioituva).

Toisen kertaluvun osittaisderivaatat määritellään seuraavaan tapaan:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad \text{ja} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Esimerkki 1.15. Laske funktion $f(x, y) = x^2 + xy^2$ toisen kertaluvun osit-
taisderivaatat.

Ratkaisu.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y^2 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy,$$

joten

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} (2x + y^2) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} (2x + y^2) = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (2xy) = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} (2xy) = 2x$$

1.2 Gradientti

Kerrataan aluksi gradientin määritelmä ja perusominaisuudet.

Määritelmä 1.16. Differentioituvan skalaarifunktion $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ *gradientti* (*gradient*) on vektorikenttä $\nabla f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Vastaavasti määritellään gradientti kentälle $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (ja yleisestikin kentälle $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$).

Usein ∇ ("nabla") ajatellaan differentiaalioperaattoriksi

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

ja ∇f lasketaan formaalisti ikään kuin ∇ olisi vektori:

$$\boxed{\nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)}. \quad (1.17)$$

Insinöörimatematiikka 4:lta muistetaan, että f kasvaa pisteessä \mathbf{r} nopeimmin gradientin osoittamaan suuntaan nopeudella $\|\nabla f(\mathbf{r})\|$ ja suunnattu derivaatta yksikkövektorin \mathbf{e} suuntaan on

$$D_{\mathbf{e}}f(\mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}.$$

Lisäksi gradienttia vastaan kohtisuorissa suunnissa funktion kasvunopeus on 0, ts. gradientti on kohtisuorassa kahden muuttujan funktiolla tasa-arvokäyrää (level curve, contour curve) ja kolmen muuttujan funktiolla tasa-arvopintaa (level surface) vastaan.

Esimerkki 1.18. Olkoon $f(x, y) = x^2 - y^2$. Tällöin $\nabla f(x, y) = (2x, -2y)$.

a) Pisteessä $(-1, 2)$ nopein hetkellinen kasvu saavutetaan suunnassa $\nabla f(-1, 2) = (-2, -4)$, johon suuntaan siirryttäessä hetkellinen kasvunopeus on

$$\|\nabla f(-1, 2)\| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{5} \approx 4,5.$$

Toisin sanoen lähdetessä pisteestä $(-1, 2)$ vektorin $(-2, -4)$ osoittamaan suuntaan funktion arvot kasvavat (paikallisesti, eli kun tehdään pieni siirty-mä) 4,5 yksikköä paikan (x, y, z) yksikköä kohden. Mihin tahansa muuhun

suuntaan lähdetessä kasvunopeus on hitaampi.

b) Kasvunopeus pisteessä $(-1, 2)$ suuntaan $\mathbf{u} = (3, 4)$? Normeerauksen

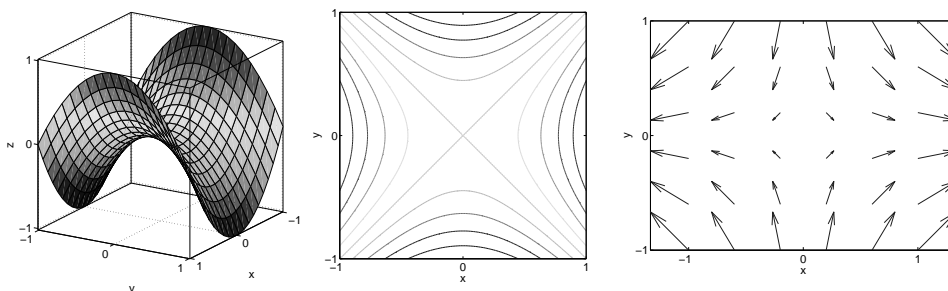
$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{1}{5}(3, 4)$$

jälkeen voidaan laskea suunnattu derivaatta

$$D_{\mathbf{e}}f(-1, 2) = \nabla f(-1, 2) \cdot \mathbf{e} = (-2, -4) \cdot \frac{1}{5}(3, 4) = -\frac{22}{5} \approx -4,4.$$

Kyseiseen suuntaan lähdetessä funktion arvot siis vähenevät 4,4 yksikköä/paikan yksikkö.

Seuraaviin kuviin on piirretty funktion $f(x, y) = x^2 - y^2$ kuvaaja, tasa-arvokäyriä ja gradienttikenttä. Tasa-arvokäyrät ovat ”korkeuskäyriä”, jotka kertovat funktion kuvaajan muodosta. Gradienttinuolet osoittavat, mihin suuntaan funktio kasvaa ja nuolet ovat sitä pidempiä, mitä nopeampaa kasvu on.



Lause 1.19. Jos f ja $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ovat differentioituvia skalaarifunktioita, $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on derivoituva reaalifunktio ja $a, b \in \mathbb{R}$, niin

$$\nabla(af + bg) = a\nabla f + b\nabla g \quad (\text{lineaarisuus})$$

$$\nabla(fg) = (\nabla f)g + f(\nabla g) \quad (\text{tulosääntö})$$

$$\nabla(h(f(\mathbf{r}))) = h'(f(\mathbf{r}))\nabla f(\mathbf{r}) \quad (\text{ketjusääntö})$$

Todistus. Todistetaan tulosääntö käyttäen ensin gradientin määritelmää ja sitten osittaisderivoinnin tulosääntöä tulolle fg :

$$\begin{aligned} \nabla(fg) &= \left(\frac{\partial(fg)}{\partial x}, \frac{\partial(fg)}{\partial y}, \frac{\partial(fg)}{\partial z} \right) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}g + f\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}g + f\frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}g + f\frac{\partial g}{\partial z} \right) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) g + f \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z} \right) = (\nabla f)g + f(\nabla g). \end{aligned}$$

Muut kohdat vastaavasti. □

Lemma 1.20. $\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r}$

Todistus. a) Gradientin määritelmää käyttäen lasketaan

$$\begin{aligned} \nabla r &= \nabla \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ &= \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{2z}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x, y, z) = \frac{\mathbf{r}}{r}. \end{aligned} \quad \square$$

Ketjusääntö ja lemma 1.20 antavat tehokkaan keinon laskea esimerkin 1.21 tyyppisten pallosymmetristen skalaarikenttien gradientti.

Esimerkki 1.21. Laske a) $\nabla \left(\frac{1}{r} \right)$ b) $\nabla(\ln r)$.

Ratkaisu. a) Sovelletaan ketjusääntöä: $h(t) = \frac{1}{t}$ ja $f(\mathbf{r}) = r$. Nyt $h'(t) = -\frac{1}{t^2}$, joten lemmaa 1.20 käyttäen saadaan

$$\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \nabla r = -\frac{1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

Lasketaan vertailun vuoksi myös xyz -koordinaatteja käyttäen:

$$\begin{aligned} \nabla \left(\frac{1}{r} \right) &= \nabla \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \nabla \left((x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \right) \\ &= \left(-\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} 2x, -\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} 2y, \right. \\ &\quad \left. -\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} 2z \right) \\ &= - (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} (x, y, z) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}. \end{aligned}$$

b) Samaan tapaan kuin a-kohdassa:

$$\nabla(\ln r) = \frac{1}{r} \nabla r = \frac{1}{r} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\mathbf{r}}{r^2}.$$

1.3 Divergenssi

Luvussa 1 tyydymme lähinnä opiskelemaan divergenssin ja roottorin laske-
mista sekä tutustumaan laskusääntöihin. Operaattoreiden käyttöön sovelluk-
sissa ja fysikaalisiin tulkintoihin palataan tarkemmin myöhemmin.

Määritelmä 1.22. Differentioituvan vektorikentän $\mathbf{F} = (P, Q, R): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
divergenssi (divergence) on skalaarifunktio $\nabla \cdot \mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \quad (1.23)$$

Vastaavasti määritellään divergenssi kentälle $\mathbf{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (ja yleisestikin
kentälle $\mathbf{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$).

Divergenssiä merkitään joskus myös $\operatorname{div} \mathbf{F}$. Operaattorin ∇ avulla divergenssi
voidaan laskea muodollisesti pistetulona

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (P, Q, R) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \quad (1.24)$$

Esimerkki 1.25. Jos $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, y^2 - z^2, yz)$, niin

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 - z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(yz) = y + 2y + y = 4y.$$

Lause 1.26. Jos \mathbf{F} ja $\mathbf{G}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ovat differentioituvia vektorikenttiä,
 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ on differentioituva skalaarifunktio ja $a, b \in \mathbb{R}$, niin

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (a\mathbf{F} + b\mathbf{G}) &= a\nabla \cdot \mathbf{F} + b\nabla \cdot \mathbf{G} && (\text{lineaarisuus}) \\ \nabla \cdot (f\mathbf{G}) &= (\nabla f) \cdot \mathbf{G} + f(\nabla \cdot \mathbf{G}) && (\text{tulosääntö}) \end{aligned}$$

Todistus. Merkitään $\mathbf{G} = (P, Q, R)$. Todistetaan tulosääntö käyttäen ensin
divergenssin määritelmää ja sitten osittaisderivoinnin tulosääntöä:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (f\mathbf{G}) &= \nabla \cdot (fP, fQ, fR) \\ &= \frac{\partial(fP)}{\partial x} + \frac{\partial(fQ)}{\partial y} + \frac{\partial(fR)}{\partial z} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}P + f\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}Q + f\frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}R + f\frac{\partial R}{\partial z} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \cdot (P, Q, R) + f \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \\ &= (\nabla f) \cdot \mathbf{G} + f(\nabla \cdot \mathbf{G}). \end{aligned}$$

Lineaarisuus vastaavasti. □

Lemma 1.27. \mathbb{R}^n :ssä $\nabla \cdot \mathbf{r} = n$ (tällä opintojaksolla $n = 2$ tai 3).

Todistus. Divergenssin määritelmää käyttäen lasketaan \mathbb{R}^3 :ssa

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = \nabla \cdot (x, y, z) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3.$$

\mathbb{R}^2 :ssa vastaavasti. □

1.4 Roottori

Määritelmä 1.28. Differentioituvan vektorikentän $\mathbf{F} = (P, Q, R): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ roottori (curl) on vektorikenttä $\nabla \times \mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right). \quad (1.29)$$

Roottori määritellään ainoastaan \mathbb{R}^3 :n vektorikentille. Roottoria merkitään joskus myös $\text{rot } \mathbf{F} = \text{curl } \mathbf{F}$. Operaattorin ∇ avulla roottori voidaan laskea muodollisesti ristitulona

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \quad (1.30)$$

Esimerkki 1.31. Jos $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, y^2 - z^2, yz)$, niin

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & y^2 - z^2 & yz \end{vmatrix} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial}{\partial y}(yz) - \frac{\partial}{\partial z}(y^2 - z^2) \right) \\ &\quad - \mathbf{j} \left(\frac{\partial}{\partial x}(yz) - \frac{\partial}{\partial z}(xy) \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial}{\partial x}(y^2 - z^2) - \frac{\partial}{\partial y}(xy) \right) \\ &= (3z, 0, -x). \end{aligned}$$

Lause 1.32. Jos \mathbf{F} ja $\mathbf{G}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ovat differentioituvia vektorikenttiä, $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ on differentioituva skalaarifunktio ja $a, b \in \mathbb{R}$, niin

$$\begin{aligned} \nabla \times (a\mathbf{F} + b\mathbf{G}) &= a(\nabla \times \mathbf{F}) + b(\nabla \times \mathbf{G}) && \text{(lineaarisuus)} \\ \nabla \times (f\mathbf{G}) &= (\nabla f) \times \mathbf{G} + f(\nabla \times \mathbf{G}) && \text{(tulosääntö)} \end{aligned}$$

Todistus. Merkitään $\mathbf{F} = (f_1, f_2, f_3)$ ja $\mathbf{G} = (g_1, g_2, g_3)$. Todistetaan lineaarisuus (täydennä \mathbf{j} - ja \mathbf{k} -komponentit):

$$\begin{aligned} \nabla \times (a\mathbf{F} + b\mathbf{G}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ af_1 + bg_1 & af_2 + bg_2 & af_3 + bg_3 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} \left(\frac{\partial}{\partial y}(af_3 + bg_3) - \frac{\partial}{\partial z}(af_2 + bg_2) \right) - \mathbf{j}(\dots) + \mathbf{k}(\dots) \\ &= \mathbf{i} \left(a \frac{\partial f_3}{\partial y} + b \frac{\partial g_3}{\partial y} - a \frac{\partial f_2}{\partial z} - b \frac{\partial g_2}{\partial z} \right) - \mathbf{j}(\dots) + \mathbf{k}(\dots) \\ &= a \left[\mathbf{i} \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) - \mathbf{j}(\dots) + \mathbf{k}(\dots) \right] \\ &\quad + b \left[\mathbf{i} \left(\frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial z} \right) - \mathbf{j}(\dots) + \mathbf{k}(\dots) \right] \\ &= a(\nabla \times \mathbf{F}) + b(\nabla \times \mathbf{G}). \end{aligned}$$

Tulosääntö vastaavasti. □

Lemma 1.33. $\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$

Todistus. Roottorin määritelmää käyttäen lasketaan

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{r} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \right) - \mathbf{j} \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial z} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) \\ &= (0, 0, 0) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad \square$$

Esimerkki 1.34. Laske keskeisvoimakentän $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ divergenssi ja roottori.

Ratkaisu. Käytetään divergenssin tulosääntöä, ketjusääntöä sekä lemmoja 1.20 ja 1.27:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} &= \nabla \cdot \left(\frac{1}{r^3} \mathbf{r} \right) = \nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) \cdot \mathbf{r} + \frac{1}{r^3} (\nabla \cdot \mathbf{r}) = -\frac{3}{r^4} \nabla r \cdot \mathbf{r} + \frac{3}{r^3} \\ &= -\frac{3}{r^4} \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{r} + \frac{3}{r^3} = 0, \end{aligned}$$

sillä $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = (x, y, z) \cdot (x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Samaan tapaan roottorin tulosääntöä, ketjusääntöä sekä lemmoja 1.20 ja 1.33 soveltamalla saadaan

$$\begin{aligned}\nabla \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} &= \nabla \times \left(\frac{1}{r^3} \mathbf{r} \right) = \nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) \times \mathbf{r} + \frac{1}{r^3} (\nabla \times \mathbf{r}) \\ &= -\frac{3}{r^5} \mathbf{r} \times \mathbf{r} + \mathbf{0} = \mathbf{0},\end{aligned}$$

sillä

$$\mathbf{r} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \mathbf{i}(yz - zy) - \mathbf{j}(xz - zx) + \mathbf{k}(xy - yx) = (0, 0, 0) = \mathbf{0}.$$

1.5 Laplacen operaattori

Määritelmä 1.35. Differentioituvan skalaarifunktion f Laplacen lauseke (Laplacian) $\nabla^2 f$ on gradientin divergenssi, ts.

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Operaattoria

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$$

kutsutaan Laplacen operaattoriksi (Laplace operator, Laplacian). Yhtälöä

$$\nabla^2 f = 0$$

kutsutaan Laplacen yhtälöksi ja Laplacen yhtälön toteuttavaa funktiota f harmoniseksi funktioksi.

Vektorikenttään $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ Laplacen operaattorilla operoidaan komponentteittain:

$$\nabla^2 \mathbf{F} = (\nabla^2 P, \nabla^2 Q, \nabla^2 R).$$

Esimerkki 1.36. a) Laske $\nabla^2 u$, kun $u(x, y, z, t) = \sin(x + y + z + \sqrt{3}ct)$, missä c on vakio ja t on aika (joka on vakio derivoitaessa x :n, y :n ja z :n suhteen).

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}\nabla^2 u &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\cos(x + y + z + \sqrt{3}ct) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\cos(x + y + z + \sqrt{3}ct) \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left(\cos(x + y + z + \sqrt{3}ct) \right) \\ &= -3 \sin(x + y + z + \sqrt{3}ct)\end{aligned}$$

b) Osoita, että $f(x, y, z) = e^{3x+4y} \cos(5z)$ on harmoninen.

Ratkaisu. f on harmoninen, sillä

$$\begin{aligned}\nabla^2 f &= \frac{\partial}{\partial x} (3e^{3x+4y} \cos(5z)) + \frac{\partial}{\partial y} (4e^{3x+4y} \cos(5z)) + \frac{\partial}{\partial z} (-5e^{3x+4y} \sin(5z)) \\ &= 9e^{3x+4y} \cos(5z) + 16e^{3x+4y} \cos(5z) - 25e^{3x+4y} \cos(5z) = 0.\end{aligned}$$

Laplacen operaattori esiintyy monissa luonnontieteiden ja tekniikan sovelluksissa. Esimerkiksi aaltoliikettä tai signaalin etenemistä kuvaava funktio $u = u(x, y, z, t)$ pisteessä (x, y, z) ajanhetkellä t saadaan tietyissä tilanteissa ratkaisemalla *aaltoyhtälö*

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (1.37)$$

Funktio u voi olla esimerkiksi pinnan korkeus veden pinnalla etenevissä aalloissa, ilmanpaine ääniaalloissa tai sähkökentän voimakkuus sähkömagneettisissa aalloissa. Parametri c on aaltoliikkeen nopeus.

Kappaleen lämpötilajakauma ajan funktiona $u = u(x, y, z, t)$ noudattaa *lämpöyhtälöä* eli *diffuusioyhtälöä*

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (1.38)$$

Lämpötilajakauman u saavutettua stationaarisen (ajasta riippumattoman) tilan u :n muutosnopeus ajan suhteen on nolla eli $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$. Tällöin yhtälö sievenny Laplacen yhtälöksi $\nabla^2 u = 0$.

Esimerkki 1.39. Osoita, että esimerkin 1.36 a funktio $u(x, y, z, t)$ toteuttaa aaltoyhtälön (1.37).

Ratkaisu.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{3}c \cos(x + y + z + \sqrt{3}ct) \right) = -3c^2 \sin(x + y + z + \sqrt{3}ct).$$

Niinpä esimerkin 1.36 a laskun mukaan $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nabla^2 u$.

1.6 Laskusääntöjä

Lauseiden 1.19, 1.26 ja 1.32 gradienttia, divergenssiä ja roottoria koskevien ”nablaussääntöjen” lisäksi voidaan osoittaa mm. seuraavat laskusäännöt.

Lause 1.40. Oletetaan, että kaikki seuraavissa kaavoissa esiintyvät osittaisderivaatat ovat jatkuvia. Tällöin

- (1) $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$
- (2) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$
- (3) $\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) + (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F}$
- (4) $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G})$
- (5) $\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F}(\nabla \cdot \mathbf{G}) - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - \mathbf{G}(\nabla \cdot \mathbf{F})$
- (6) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$

Kohdan (3) operaattori

$$\mathbf{F} \cdot \nabla = (f_1, f_2, f_3) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = f_1 \frac{\partial}{\partial x} + f_2 \frac{\partial}{\partial y} + f_3 \frac{\partial}{\partial z}$$

operoi kenttään \mathbf{G} seuraavasti:

$$(\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} = f_1 \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x} + f_2 \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} + f_3 \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial z}, \quad \text{missä} \quad \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x} = \left(\frac{\partial g_1}{\partial x}, \frac{\partial g_2}{\partial x}, \frac{\partial g_3}{\partial x} \right)$$

($\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y}$ ja $\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial z}$ vastaavasti).

Todistus. Nämä ovat suoria laskuja. Todistetaan (1) ja (2).

(1)

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla f &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) - \mathbf{j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \\ &= (0, 0, 0) = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

sillä osittaisderivoinnin vaihtosäännön mukaan $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, kun nämä osittaisderivaatat ovat jatkuvia.

(2) Merkitään $\mathbf{F} = (P, Q, R)$:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) &= \nabla \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Esimerkki 1.41. Osoita, että **a)** $(\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{r} = \mathbf{F}$ **b)** $(\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{c} = \mathbf{0}$, kun \mathbf{c} on vakiovektori.

Ratkaisu. a)

$$\begin{aligned} (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{r} &= f_1 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} + f_2 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} + f_3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \\ &= f_1 \cdot (1, 0, 0) + f_2 \cdot (0, 1, 0) + f_3 \cdot (0, 0, 1) = (f_1, f_2, f_3) = \mathbf{F} \end{aligned}$$

$$\text{b) } (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{c} = f_1 \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial x} + f_2 \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial y} + f_3 \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial z} = f_1 \cdot \mathbf{0} + f_2 \cdot \mathbf{0} + f_3 \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

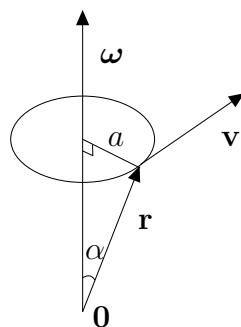
Esimerkki 1.42. a) Tarkastellaan tasaisessa ympyräliikkeessä a -säteisellä ympyrällä liikkuvaa massapistettä. Merkitään massapisteen paikkavektoria \mathbf{r} :llä, sen pituutta r :llä, nopeusvektoria \mathbf{v} :llä ja vauhtia v :llä sekä ympyräliikkeen pyörimisakselin ja paikkavektorin välistä kulmaa α :lla. Tällöin kulmanopeuden suuruudelle ω pätee

$$v = \omega a = \omega r \sin \alpha.$$

Muistetaan, että jos $\boldsymbol{\omega}$ on vektori, niin ristitulo $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ on se vektori, joka on kohtisuorassa sekä vektoria $\boldsymbol{\omega}$ että vektoria \mathbf{r} vastaan, jonka pituus on $\omega r \sin \alpha$ ja jonka suunta määräytyy oikean käden säännöllä. Näin ollen jos vektoriksi $\boldsymbol{\omega}$ valitaan se vektori, jonka pituus on ω ja joka on pyörimisakselin suuntainen oheisen kuvan mukaisesti, niin

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

Näin määräytyvää vektoria $\boldsymbol{\omega}$ kutsutaan ympyräliikkeen *kulmanopeudeksi* (*angular velocity*).



Lasketaan nopeuskentän \mathbf{v} roottori nabraussääntöä (5), lemmaa 1.27 ja edellistä esimerkkiä käyttäen:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v} &= \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega}(\nabla \cdot \mathbf{r}) - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{r} + (\mathbf{r} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}(\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) \\ &= 3\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} + \mathbf{0} - \mathbf{0} = 2\boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

b) Oletetaan, että **a**-kohdassa ympyräliikkeen origo **0** liikkuu vakionopeudella **u**. Massapisteen nopeus **v** voidaan tällöin jakaa osiin

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

Nyt $\nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{u} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \mathbf{0} + 2\boldsymbol{\omega} = 2\boldsymbol{\omega}$. Nopeuskentän **v** roottori kertoo siten ympyräliikkeen suunnan ja voimakkuuden. Sovelletuna virtauskenttään **v** tämä tarkoittaa, että $\nabla \times \mathbf{v}$ kertoo virtauksen *pyörteisyydestä*. Jos $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, niin kenttä on *pyörteetön*. Palataan tähän tarkemmin luvussa 10.

Esimerkki 1.43. Tyhjiössä sähkömagneettisessa kentässä sähkökentän voimakkuus **E** (V/m) ja magneettikentän voimakkuus **H** (A/m) riippuvat toisistaan seuraavien *Maxwellin yhtälöiden* osoittamalla tavalla:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 & \text{(b)} \quad \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0 \\ \text{(c)} \quad \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} & \text{(d)} \quad \nabla \times \mathbf{H} &= \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

Näissä μ_0 on magneettivakio ja ϵ_0 sähkövakio ($\mu_0\epsilon_0 = 1/c^2$, missä c on valon nopeus). Sekä **E** että **H** toteuttavat aaltoyhtälön:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad \text{ja} \quad \nabla^2 \mathbf{H} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}.$$

Todistetaan ensimmäinen käyttäen nabraussääntöä (6) sekä oletuksia (a)–(d):

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) \\ &= \mu_0 \nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) \\ &= \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) \\ &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Tässä toiseksi viimeisessä yhtäsuuruudessa käytetty derivoimisjärjestyksen vaihto voidaan perustella roottorin määritelmän ja osittaisderivoinnin vaihtosäännön avulla.

2 Käyrä

Tässä luvussa tutkitaan parametrisoituja käyriä derivaattavektorin avulla ja määritellään käyräintegraali skalaari- ja vektorikentille.

2.1 Parametrisoitu käyrä

Määritelmä 2.1. Funktiota $\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \quad (2.2)$$

kutsutaan *vektoriarvoiseksi yhden muuttujan funktioksi*. Funktiot $x_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ovat \mathbf{r} :n *koordinaattifunktioita* eli *komponenttifunktioita*.

Tapauksessa $n = 2$ merkitään usein

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

ja tapauksessa $n = 3$

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

Määritelmä 2.3. Vektoriarvoisen funktion (2.2) *raja-arvo (limit)* pisteessä $t_0 \in [a, b]$, merkitään $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t)$, on vektori

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \left(\lim_{t \rightarrow t_0} x_1(t), \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} x_n(t) \right),$$

mikäli ko. koordinaattifunktioiden raja-arvot ovat olemassa. \mathbf{r} on *jatkuva (continuous) pisteessä* t_0 , jos

$$\mathbf{r}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t)$$

ja *jatkuva*, jos \mathbf{r} on jatkuva jokaisella $t \in [a, b]$.

Lause 2.4. *Vektoriarvoinen funktio (2.2) on jatkuva jos ja vain jos kaikki koordinaattifunktiot $x_i(t)$ ovat jatkuvia.*

Todistus. \mathbf{r} on jatkuva t_0 :ssa

$$\Leftrightarrow \mathbf{r}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t)$$

$$\Leftrightarrow (x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)) = \left(\lim_{t \rightarrow t_0} x_1(t), \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} x_n(t) \right)$$

$$\Leftrightarrow x_i(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} x_i(t) \text{ jokaisella } i$$

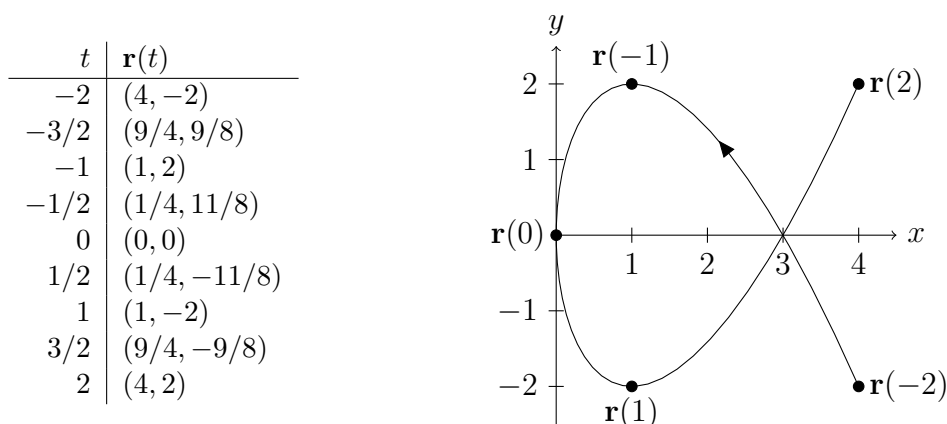
$$\Leftrightarrow x_i \text{ on jatkuva } t_0\text{:ssa jokaisella } i. \quad \square$$

Geometrisesti jatkuvuus tapauksessa $n = 2$ tarkoittaa sitä, että ”kuva voidaan piirtää kynää nostamatta”.

Määritelmä 2.5. Jos funktio $\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ on jatkuva, niin sitä kutsutaan *parametrisoiduksi käyräksi* (*parametric curve*). Kuvajoukko $C = \mathbf{r}([a, b]) = \{\mathbf{r}(t) : t \in [a, b]\}$ on *käyrän jälki* tai lyhyesti *käyrä*. Kun $n = 2$, puhutaan *tasokäyrästä* ja kun $n = 3$, puhutaan *avaruuskäyrästä*. Piste $\mathbf{r}(a)$ on käyrän *alkupiste* ja $\mathbf{r}(b)$ *loppupiste*.

Tasokäyrää \mathbf{r} voidaan havainnollistaa piirtämällä pisteet $(x(t), y(t))$ muutamilla t :n arvoilla ja yhdistämällä näin saadut pisteet.

Esimerkki 2.6. Kuva käyrästä $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3 - 3t)$, $-2 \leq t \leq 2$:



Käyrän jälki C voidaan ilmoittaa myös muulla tavoin kuin antamalla lauseke $\mathbf{r}(t)$, jolloin tarvittaessa muodostetaan *parametrisointi* (*parametrization*) $\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, jolle $\mathbf{r}([a, b]) = C$. On huomattava, että käyrällä C on aina äärettömän monta erilaista parametrisointia.

Esimerkki 2.7. Yksikköympyrän $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ parametrisoinniksi otetaan yleensä

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

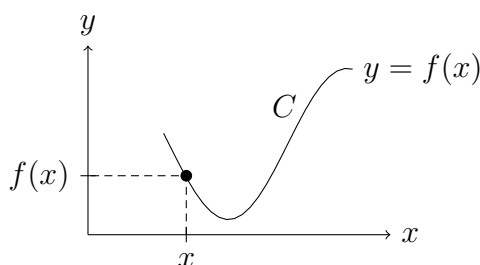
Tätä parametrisointia muokkaamalla saadaan C :lle samantapaisia parametrisointeja, joissa on eri vauhti, kiertosuunta tai alku- ja loppupiste:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= (\cos(2t), \sin(2t)), & 0 \leq t \leq \pi, \\ \mathbf{r}(t) &= (\cos(-t), \sin(-t)) = (\cos t, -\sin t), & 0 \leq t \leq 2\pi, \\ \mathbf{r}(t) &= (\cos(t + \pi/2), \sin(t + \pi/2)), & 0 \leq t \leq 2\pi, \\ \mathbf{r}(t) &= (\cos t, \sin t), & 0 \leq t \leq 5\pi. \end{aligned}$$

Näistä viimeisessä parametrisoinnissa kierretään yksikköympyrä 2,5 kertaa. Yleensä pyritään valitsemaan itseään leikkaamaton parametrisointi (ks. määritelmä 2.32).

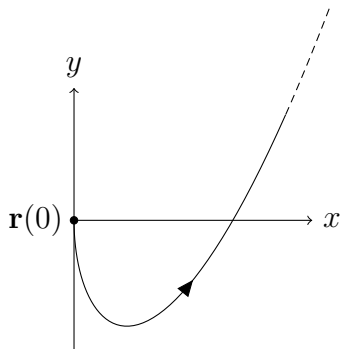
Huomautus 2.8. Jatkuvan funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ kuvaajalle $y = f(x)$ voidaan ottaa parametrisoinniksi

$$\mathbf{r}(t) = (t, f(t)), \quad t \in [a, b]. \quad (2.9)$$



Esimerkiksi käyrän $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, parametrisoinniksi käy $\mathbf{r}(t) = (t, \sin t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

Huomautus 2.10. a) Käyrän määrittelyväliksi voidaan suljetun ja rajoitetun välin $[a, b]$ sijasta ottaa myös mikä tahansa väli $I \subset \mathbb{R}$ (avoin, puoliavoin tai rajoittamaton). Esimerkiksi esimerkin 2.6 käyrä $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3 - 3t)$ välillä $t \in [0, \infty)$:



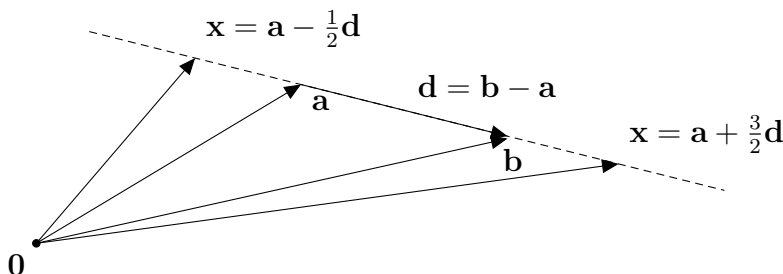
b) Yleensä sovelluksissa t on aika ja $\mathbf{r}(t)$ on massapisteen paikka hetkellä t , jolloin paikka $\mathbf{r} = (x, y, z)$ riippuu ajasta: $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Tällöin käyrän jälki $C = \mathbf{r}([a, b])$ kuvaa massapisteen kulkemaa reittiä aikavälillä $a \leq t \leq b$.

Joskus tasokäyrän C parametrisoinnista $x = x(t)$ ja $y = y(t)$ voidaan eliminoida muuttuja t , jolloin C voidaan ilmoittaa muuttujien x ja y avulla koordinaattimuodossa $g(x, y) = 0$.

Esimerkki 2.11. Ilmoita koordinaattimuodossa $\mathbf{r}(t) = (t + 1, t^2 - 2)$, $t \in \mathbb{R}$.

Ratkaisu. Nyt $x = t + 1$ ja $y = t^2 - 2$. Ratkaistaan ensimmäisestä yhtälöstä $t = x - 1$ ja sijoitetaan jälkimmäiseen: $y = (x - 1)^2 - 2 = x^2 - 2x - 1$. Kyseessä on paraabeli $y = x^2 - 2x - 1$. Vaihtoehtoisesti voitaisiin siis käyttää parametrisointia $\mathbf{r}_2(t) = (t, t^2 - 2t - 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

Huomautus 2.12. Suoran parametriesitys.



Pisteiden \mathbf{a} ja \mathbf{b} kautta kulkevan suoran *virittäjävektoriksi* voidaan valita $\mathbf{d} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, jolloin \mathbf{x} on suoralla jos ja vain jos $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{d}$ jollakin $t \in \mathbb{R}$. Pistettä \mathbf{a} kutsutaan *kauttakulkupisteeksi*. Kuvaan on piirretty pisteet \mathbf{x} t :n arvoilla $t = -\frac{1}{2}$ ja $t = \frac{3}{2}$. Suoran parametrisoinniksi käy siis

$$\boxed{\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}), \quad t \in \mathbb{R}.} \quad (2.13)$$

Esimerkki 2.14. Missä pisteessä pisteiden $(1, 2, 3)$ ja $(6, 5, 4)$ kautta kulkeva suora leikkaa yz -tason?

Ratkaisu. Parametrisoidaan suora:

$$\mathbf{r}(t) = (1, 2, 3) + t((6, 5, 4) - (1, 2, 3)) = (5t + 1, 3t + 2, t + 3).$$

yz -tasolla x -koordinaatti on 0, ts. $5t + 1 = 0$, josta $t = -\frac{1}{5}$. yz -tason leikkauspiste on siis $\mathbf{r}\left(-\frac{1}{5}\right) = \left(0, \frac{7}{5}, \frac{14}{5}\right)$.

Esimerkki 2.15. Alla on kuvat käyristä

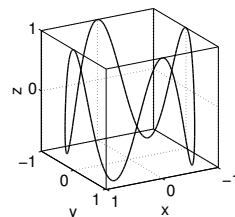
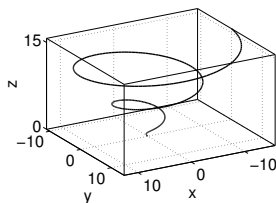
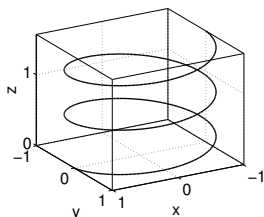
$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t/10), \quad 0 \leq t \leq 5\pi \quad (\text{ruuvikäyrä, helix}),$$

$$\mathbf{r}(t) = (t \cos t, t \sin t, t), \quad 0 \leq t \leq 5\pi,$$

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, \cos(4t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Miten kuvat voidaan päätellä $\mathbf{r}(t)$:n lausekkeesta? Millainen olisi käyrä

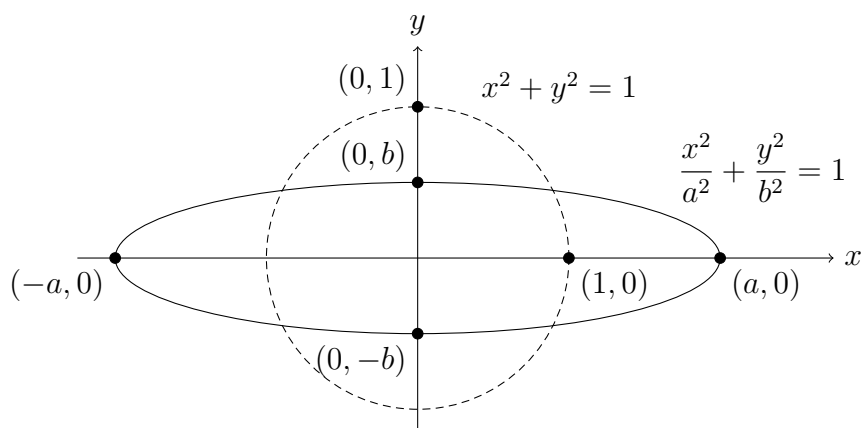
$$\mathbf{r}(t) = (t/10, \cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq 5\pi ?$$



Esimerkki 2.16. Muokataan yksikköympyrää $x^2 + y^2 = 1$ siten, että x -koordinaatit muuttuvat a -kertaisiksi ja y -koordinaatit b -kertaisiksi ($a, b > 0$). Tason piste (x, y) on siten syntyvällä tasokäyrällä jos ja vain jos $(x/a, y/b)$ on yksikköympyrällä (sillä tällöin uuden käyrän x -koordinaatti on a -kertainen yksikköympyrän vastaavaan pisteeseen verrattuna ja y -koordinaatti b -kertainen), ts.

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.} \quad (2.17)$$

Tätä tasokäyrää kutsutaan *ellipsiksi* (*ellipse*). Lukuja a ja b kutsutaan ellipsin *puoliakseleiksi* (*semiaxes*). Ellipsin voidaan ajatella syntyvän myös kuvaamalla yksikköympyrä lineaarikuvauksella $T(x, y) = (ax, by)$. Seuraavassa kuvassa $a > b$, jolloin ellipsi on litistynyt y -suunnassa. Jos $a = b$, niin kyseessä on a -säteinen ympyrä.



Ellipsin parametrisoinniksi voidaan ottaa

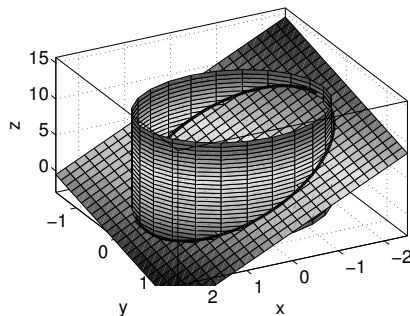
$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t, b \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (2.18)$$

Perustelu: jokainen piste $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = (a \cos t, b \sin t)$ on ellipsillä, sillä

$$\frac{x(t)^2}{a^2} + \frac{y(t)^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Lisäksi t :n kasvaessa $\mathbf{r}(t)$ kiertää vastapäivään ellipsillä, sillä välillä $0 \leq t \leq \pi$ $x(t) = a \cos t$ vähenee ja $y(t) = b \sin t \geq 0$ ja välillä $\pi \leq t \leq 2\pi$ $x(t) = a \cos t$ kasvaa ja $y(t) = b \sin t \leq 0$. Kun vielä lasketaan $\mathbf{r}(0) = (a, 0)$, $\mathbf{r}(\pi/2) = (0, b)$, $\mathbf{r}(\pi) = (-a, 0)$, $\mathbf{r}(3\pi/2) = (0, -b)$ ja $\mathbf{r}(2\pi) = (a, 0)$, niin $\mathbf{r}(t)$:n jatkuvuuden nojalla kuvajoukko on koko ellipsi. Parametri t ei kuitenkaan ole $\mathbf{r}(t)$:n ja positiivisen x -akselin välinen kulma, ellei kyseessä ole ympyrä ($a = b$).

Esimerkki 2.19. Parametrisoi tason $3x + 2y + z = 4$ ja elliptisen sylinterin $x^2 + 4y^2 = 4$ leikkauskäyrä C .



Ratkaisu. Pinnan $x^2 + 4y^2 = 4$ yhtälö voidaan muokata jakamalla puolittain 4:llä muotoon

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1.$$

xy -tasossa tämä on ellipsi, jonka puoliakselit ovat 2 ja 1. xyz -avaruudessa pinnaksi tulee siten kuvan mukainen elliptinen sylinteri. Esimerkin 2.16 mukaan xy -tasossa voidaan parametrisoida $x = x(t) = 2 \cos t$ ja $y = y(t) = \sin t$. Kun lisäksi pinnan yhtälöstä ratkaistaan $z = 4 - 3x - 2y = 4 - 6 \cos t - 2 \sin t = z(t)$, niin käyrän C parametrisoinniksi saadaan

$$\mathbf{r}(t) = (2 \cos t, \sin t, 4 - 6 \cos t - 2 \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

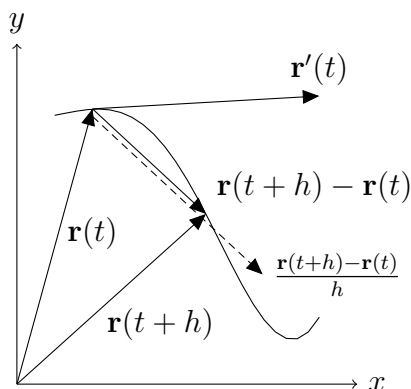
2.2 Käyrän derivaattavektori

Määritelmä 2.20. Käyrä \mathbf{r} on *derivoituva* (*differentiable*) pisteessä $t \in [a, b]$, jos on olemassa raja-arvo (päätepisteissä toispuoleinen)

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

ja *derivoituva*, jos \mathbf{r} on derivoituva jokaisella $t \in [a, b]$. Raja-arvoa $\mathbf{r}'(t)$ (ja funktiota $\mathbf{r}': [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$) kutsutaan *derivaataksi* (*derivative*) tai *derivaattavektoriksi*.

Käytetään myös merkintöjä $\mathbf{r}'(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = D_t(\mathbf{r}(t))$.



Geometrinen tulkinta derivaatalle on, että jos $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$, niin $\mathbf{r}'(t)$ on käyrän *tangenttivektori* (*tangent vector*) pisteessä $\mathbf{r}(t)$.

Lause 2.21. $\mathbf{r}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ on derivoituva pisteessä t jos ja vain jos kaikki koordinaattifunktiot $x_i(t)$ ovat derivoituvia t :ssä. Tällöin

$$\mathbf{r}'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t)).$$

Toisin sanoen: käyrä derivoidaan koordinaateittain.

Todistus.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_1(t+h), \dots, x_n(t+h)) - (x_1(t), \dots, x_n(t))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{x_1(t+h) - x_1(t)}{h}, \dots, \frac{x_n(t+h) - x_n(t)}{h} \right) \\ &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_1(t+h) - x_1(t)}{h}, \dots, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_n(t+h) - x_n(t)}{h} \right) \\ &= (x_1'(t), \dots, x_n'(t)). \end{aligned} \quad \square$$

Määritelmä 2.22. Jos $n = 3$ (tai $n = 2$), t on aika ja $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ tulkitaan massapisteen paikaksi hetkellä t , niin määritellään

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) && \text{nopeus (velocity)} \\ v(t) &= \|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} && \text{vauhti (speed)} \\ \mathbf{a}(t) &= \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t)) && \text{kiikhtyvyys (acceleration)} \end{aligned}$$

Esimerkki 2.23. Tarkastellaan esimerkin 2.6 käyrää $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3 - 3t)$, $-2 \leq t \leq 2$.

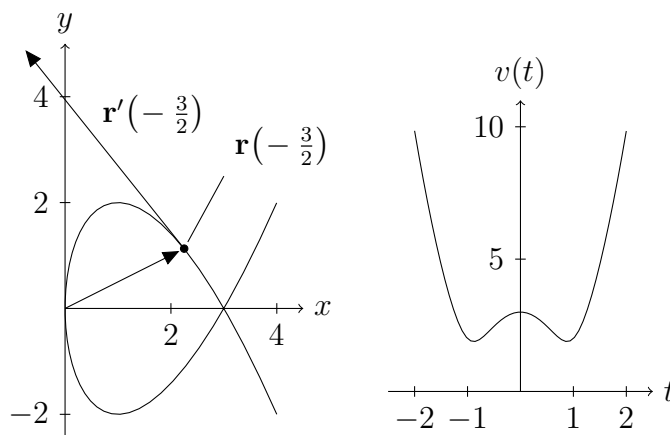
a) Laske tangenttivektori käyrän pisteeseen $(9/4, 9/8)$.

b) Missä pisteissä käyrällä on vaakasuora tangentti?

c) Mitkä ovat käyrän ja x -akselin leikkauspisteet?

d) Tutki vauhtia $v(t)$.

Ratkaisu. a) Derivaatta on $\mathbf{r}'(t) = (2t, 3t^2 - 3)$. Koska $\mathbf{r}(-3/2) = (9/4, 9/8)$, niin kysytty derivaattavektori on $\mathbf{r}'(-3/2) = (-3, 15/4)$.



b) Käyrällä on vaakasuora tangentti, kun $y'(t) = 0$ (ja $x'(t) \neq 0$). $y'(t) = 3t^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow t = \pm 1$. Käyrällä on vaakasuora tangentti siis pisteissä $\mathbf{r}(-1) = (1, 2)$ ja $\mathbf{r}(1) = (1, -2)$.

c) x -akselin leikkauspisteissä $y(t) = 0$, ts. $t^3 - 3t = t(t^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ tai $t = \pm\sqrt{3}$. Leikkauspisteet ovat siis $\mathbf{r}(0) = (0, 0)$ ja $\mathbf{r}(-\sqrt{3}) = \mathbf{r}(\sqrt{3}) = (3, 0)$.

d) Vauhti $v(t) = \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{(2t)^2 + (3t^2 - 3)^2} = \sqrt{9t^4 - 14t^2 + 9}$ on suurimmillaan alkupisteessä $\mathbf{r}(-2) = (4, -2)$ ja loppupisteessä $\mathbf{r}(2) = (4, 2)$ ja pienimmillään t :n arvoilla $t \approx \pm 0,88$ pisteissä $\mathbf{r}(-0,88) \approx (0,78; 1,96)$ ja $\mathbf{r}(0,88) \approx (0,78; -1,96)$ (ks. $v(t)$:n kuvaaja).

Esimerkki 2.24. Olkoon kappaleen paikka $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ ajanhetkellä t . Laske nopeus, vauhti ja kiihtyvyys kappaleen ollessa pisteessä $(2, 4, 8)$.

Ratkaisu. Nyt

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t) &= (1, 2t, 3t^2), \\ v(t) &= \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4} \quad \text{ja} \\ \mathbf{a}(t) &= (0, 2, 6t).\end{aligned}$$

Kappale on kyseisessä pisteessä hetkellä $t = 2$, sillä $\mathbf{r}(2) = (2, 4, 8)$. Siten kysytty nopeus on $\mathbf{v}(2) = (1, 4, 12)$, vauhti $v(2) = \sqrt{161}$ ja kiihtyvyys $\mathbf{a}(2) = (0, 2, 12)$.

Esimerkki 2.25. Ilmoita ruuvikäyrän $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ pisteeseen $(0, 1, \pi/2)$ piirretyn tangenettisuoran esitys parametrimuodossa.

Ratkaisu. Kyseisessä pisteessä $t = \pi/2$. Derivaatta on $\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$, joten tangenettisuoran virittäjävektoriksi voidaan ottaa $\mathbf{r}'(\pi/2) = (-1, 0, 1)$. Kysytyn tangenettisuoran parametriesitykseksi saadaan

$$\mathbf{r}_2(s) = (0, 1, \pi/2) + s(-1, 0, 1) = (-s, 1, \pi/2 + s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Tangenettisuora kulkee siis tasolla $y = 1$ ja leikkaa xy -tason 45° kulmassa.

Lause 2.26 (Derivoimissääntöjä). *Olkoot \mathbf{u} ja \mathbf{v} derivoituvia käyriä, h derivoituva reaalfunktio ja $c \in \mathbb{R}$ vakio. Tällöin*

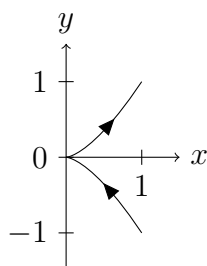
- (1) $D_t(\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$
- (2) $D_t(c\mathbf{u}(t)) = c\mathbf{u}'(t)$
- (3) $D_t(h(t)\mathbf{u}(t)) = h'(t)\mathbf{u}(t) + h(t)\mathbf{u}'(t)$
- (4) $D_t(\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t)$
- (5) $D_t(\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t) \quad (\mathbb{R}^3:ssa)$

Todistus. Nämä ovat suoraviivaisia laskuja. Todistetaan (3): Merkitään $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))$. Nyt

$$\begin{aligned} D(h(t)\mathbf{u}(t)) &= D(h(t)u_1(t), \dots, h(t)u_n(t)) \\ &= (D(h(t)u_1(t)), \dots, D(h(t)u_n(t))) \\ &= (h'(t)u_1(t) + h(t)u_1'(t), \dots, h'(t)u_n(t) + h(t)u_n'(t)) \\ &= h'(t)(u_1(t), \dots, u_n(t)) + h(t)(u_1'(t), \dots, u_n'(t)) \\ &= h'(t)\mathbf{u}(t) + h(t)\mathbf{u}'(t). \end{aligned} \quad \square$$

2.3 Sileät käyrät, yksikkötangentti ja päänormaali

Käyrän \mathbf{r} jälki C ei välttämättä näytä ”siistiltä” käyrältä. On esimerkiksi olemassa jatkuva käyrä $\mathbf{r}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, jolle jälki $\mathbf{r}([0, 1])$ on koko yksikköneliö $[0, 1] \times [0, 1]$ (ns. *Peanon käyrä*, ks. [2]). Lisäksi käyrässä voi olla kärkiä, vaikka käyrä olisi derivoituva ja derivaattavektori jatkuva. Tästä käy esimerkiksi käyrä $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3)$, $-1 \leq t \leq 1$:



Tälle käyrälle $\mathbf{r}'(t) = (2t, 3t^2)$, joten $\mathbf{r}'(0) = (0, 0)$. ”Vauhti pysähtyy” origossa $\mathbf{r}(0) = (0, 0)$, johon on silloin mahdollista muodostua kärki, vaikka $\mathbf{r}'(t)$ onkin jatkuva. Seuraava ehto takaa, että käyrä näyttää sileältä.

Määritelmä 2.27. Käyrä $\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ on *sileä (smooth)*, jos \mathbf{r}' on jatkuva ja $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ kaikilla $t \in [a, b]$.

Sileällä käyrällä on jokaisessa pisteessä nollavektorista poikkeava tangenttivektori $\mathbf{r}'(t)$, josta saadaan normeeraamalla *yksikkötangenttivektori (unit tangent vector)*

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{\mathbf{v}(t)}{v(t)}. \quad (2.28)$$

Lemma 2.29. $\mathbf{T}'(t) \perp \mathbf{T}(t)$ kaikilla t .

Todistus. Koska $\mathbf{T}(t)$ on yksikkövektori, niin

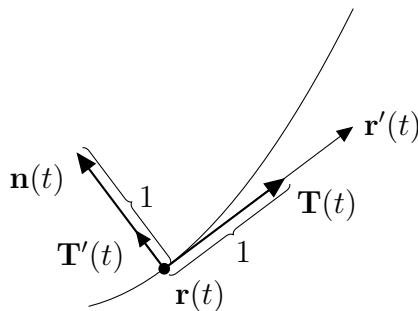
$$\|\mathbf{T}(t)\|^2 = \mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{T}(t) = 1.$$

Derivoidaan puolittain käyttäen vasemmalla puolella lausetta 2.26 (4):

$$\mathbf{T}'(t) \cdot \mathbf{T}(t) + \mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{T}'(t) = 0 \Rightarrow 2\mathbf{T}'(t) \cdot \mathbf{T}(t) = 0 \Rightarrow \mathbf{T}'(t) \cdot \mathbf{T}(t) = 0. \quad \square$$

$\mathbf{T}'(t)$ on siis käyrän eräs normaalivektori. Jos $\mathbf{T}'(t) \neq \mathbf{0}$, niin määritellään käyrän $\mathbf{r}(t)$ *päänormaali (principal unit normal)* $\mathbf{n}(t)$ normeeraamalla $\mathbf{T}'(t)$ ykkösen pituiseksi:

$$\mathbf{n}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}. \quad (2.30)$$



Esimerkki 2.31. Laske a -säteisen ruuvikäyrän $\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, $a, b > 0$, yksikkötangentti ja päänormaali (ks. kuva sivulla 26).

Ratkaisu. Tälle käyrälle

$$\mathbf{r}'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b),$$

joten yksikkötangentti on

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{(-a \sin t, a \cos t, b)}{\sqrt{a^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + b^2}} = \frac{(-a \sin t, a \cos t, b)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ja siten

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{(-a \cos t, -a \sin t, 0)}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Nyt

$$\|\mathbf{T}'(t)\| = \frac{\sqrt{a^2(\sin^2 t + \cos^2 t)}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

joten päänormaali on

$$\mathbf{n}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|} = (-\cos t, -\sin t, 0).$$

Pohditaan vielä ratkaisun oikeellisuutta:

$$\mathbf{n}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = a \cos t \sin t - a \sin t \cos t = 0,$$

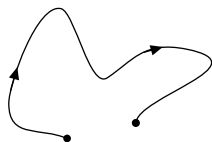
joten ainakin $\mathbf{n}(t)$ on kohtisuorassa käyrää vastaan. Lisäksi

$$\|\mathbf{n}(t)\| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1,$$

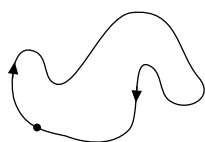
joten $\mathbf{n}(t)$ on yksikkövektori.

2.4 Suunnistus ja vastakäyrä

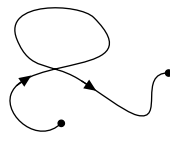
Määritelmä 2.32. Olkoon $\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ käyrä. Jos $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$, niin käyrä \mathbf{r} on *suljettu* (*closed*) eli *umpinainen*. Käyrä \mathbf{r} on *yksinkertainen* (*simple*), jos se ei leikkaa itseään, ts. jos $\mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$ aina, kun $t_1, t_2 \in [a, b]$ ja $t_1 \neq t_2$ (suljetulle käyrälle tässä sallitaan $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$).



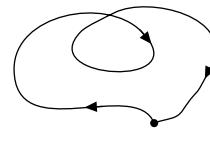
yksinkertainen
ei suljettu



yksinkertainen
suljettu



ei yksinkertainen
ei suljettu

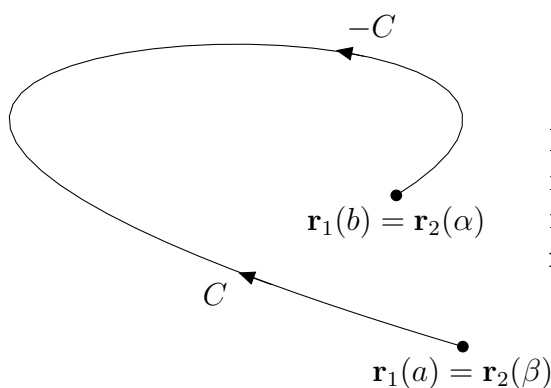


ei yksinkertainen
suljettu

Jos käyrä on yksinkertainen, niin parametrisointi ei piirrä käyrää edestakaisin, vaan kuljetaan edeten alkupisteestä loppupisteeseen. Tämä antaa mahdollisuuden luokitella käyrän jäljen yksinkertaiset parametrisoinnit kahteen luokkaan sen mukaan, kumpaan suuntaan eteneminen tapahtuu:

Määritelmä 2.33. Jos yksinkertaisilla käyrillä $\mathbf{r}_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ja $\mathbf{r}_2: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ on sama jälki C , niin käyrillä \mathbf{r}_1 ja \mathbf{r}_2 on *sama suunnistus (orientation)*, jos $\mathbf{r}_1(a) = \mathbf{r}_2(\alpha)$ ja $\mathbf{r}_1(b) = \mathbf{r}_2(\beta)$ (ts. kuljetaan samaan suuntaan), muutoin *vastakkainen suunnistus*.

Käyrän $C = \mathbf{r}([a, b])$ *vastakäyrä* $-C$ on käyrä, jolla on sama jälki kuin C :llä, mutta vastakkainen suunnistus.



Käyrä C ja sen vastakäyrä $-C$, joilla on parametrisoinnit $\mathbf{r}_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ja $\mathbf{r}_2: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Yksinkertaisen käyrän $\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ vastakäyrän parametrisoinniksi voidaan valita esimerkiksi

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(t) &= \mathbf{r}(a + b - t), & t \in [a, b] & \quad \text{tai} \\ \mathbf{r}_2(t) &= \mathbf{r}(-t), & t \in [-b, -a]. & \end{aligned}$$

Esimerkki 2.34. Paraabelin $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2, 0 \leq x \leq 1\}$ parametrisointi $\mathbf{r}(t) = (t, t^2)$, $0 \leq t \leq 1$, kulkee vasemmalta oikealle. Oikealta vasemmalle kulkevaksi vastakäyräksi voidaan ottaa esimerkiksi

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(t) &= \mathbf{r}(1 - t) = (1 - t, (1 - t)^2), & 0 \leq t \leq 1, & \quad \text{tai} \\ \mathbf{r}_2(t) &= \mathbf{r}(-t) = (-t, t^2), & -1 \leq t \leq 0. & \end{aligned}$$

Esimerkki 2.35. Esimerkissä 2.7 muodostettiin yksikköympyrälle $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ parametrisointeja sinin ja kosinin avulla. Nyt $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$, joten käyrän C x -akselilla ja sen yläpuolella oleva osa voidaan parametrisoida

$$\mathbf{r}_1(t) = (t, \sqrt{1 - t^2}), \quad -1 \leq t \leq 1$$

x -akselilla ja sen alapuolella oleva osa

$$\mathbf{r}_2(t) = (t, -\sqrt{1-t^2}), \quad -1 \leq t \leq 1.$$

Näissä parametrisoinneissa ympyränpuolikkaat on suunnistettu vasemmalta oikealle. Muokataan näistä yksi jatkuva parametrisointi \mathbf{r} koko yksikköympyrälle. Vaihdetaan ensin \mathbf{r}_2 :n suunnistus oikealta vasemmalle:

$$\mathbf{r}_3(t) = (-t, -\sqrt{1-(-t)^2}), \quad -1 \leq t \leq 1.$$

Haluaisimme liittää parametrisoinnit \mathbf{r}_1 ja \mathbf{r}_3 yhteen siten, että $\mathbf{r}_1(1) = \mathbf{r}_3(1)$. Muokataan \mathbf{r}_3 :n parametriväliä:

$$\mathbf{r}_4(t) = ((2-t), -\sqrt{1-(2-t)^2}), \quad 1 \leq t \leq 3.$$

Nyt voidaan määritellä C :lle jatkuva parametrisointi

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} (t, \sqrt{1-t^2}), & \text{kun } -1 \leq t \leq 1, \\ (2-t, -\sqrt{1-(2-t)^2}), & \text{kun } 1 \leq t \leq 3, \end{cases}$$

joka suunnistaa C :n myötäpäivään.

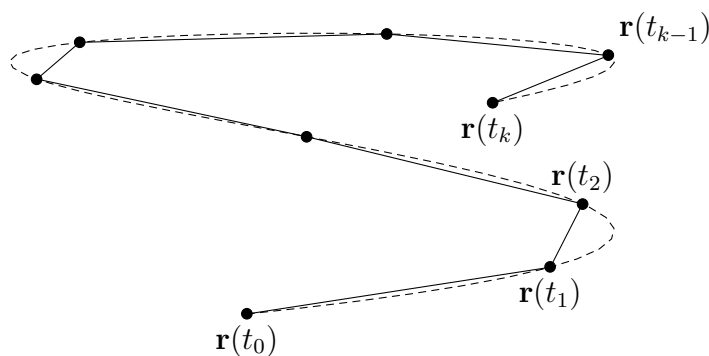
2.5 Käyrän pituus

Välin $[a, b]$ jako (*partition*) on joukko $P = \{t_0, t_1, \dots, t_k\}$, missä $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$. Jaon *normi* (*norm*) on

$$|P| = \max_{1 \leq i \leq k} (t_i - t_{i-1}),$$

ts. pisimmän jakovälin pituus. Olkoon $\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ käyrä. Approksimoidaan sitä pisteiden $\mathbf{r}(t_0), \mathbf{r}(t_1), \dots, \mathbf{r}(t_k)$ kautta kulkevalla murtoviivalla. Murtoviivan pituus on

$$s_P = \sum_{i=1}^k \|\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})\|.$$



Käyrän pituus on nyt järkevää määritellä murtoviivan pituuden raja-arvona, kun suurimman jakovälin pituus $|P| \rightarrow 0$. Seuraavassa määritelmässä rajankäynti tapahtuu yli kaikkien osavälijakojen P . Kyseisen raja-arvon tarkan määritelmän sivuutamme. Voidaan kuitenkin osoittaa, että raja-arvo on aina olemassa reaalilukuna tai se on $= \infty$. Tämä perustuu siihen, että jaon P tiheyssä s_P kasvaa ja muodostaa siten ”kasvavan jonon”.

Määritelmä 2.36. Käyrän $\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ pituus (length) on

$$s = \lim_{|P| \rightarrow 0} s_P.$$

Käyrän pituuden laskeminen määritelmää käyttäen onnistuu käytännössä harvoin. Jatkuvasti derivoituvan käyrän pituus sitä vastoin voidaan laskea seuraavalla kaavalla.

Lause 2.37. Jatkuvasti derivoituvan käyrän $\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ pituus on

$$s = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt.$$

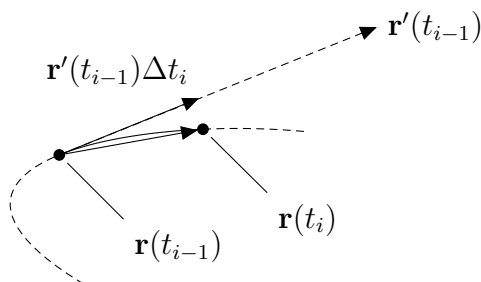
Todistus. Perustellaan väite ideatasolla geometrisesti. Tutkitaan käyrää pisteiden $\mathbf{r}(t_{i-1})$ ja $\mathbf{r}(t_i)$ välissä. Derivaatan määritelmän 2.20 mukaan pienillä $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ voidaan arvioida

$$\frac{\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})}{\Delta t_i} \approx \mathbf{r}'(t_{i-i}),$$

ts.

$$\boxed{\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1}) \approx \mathbf{r}'(t_{i-i})\Delta t_i}, \quad (2.38)$$

missä arvio on sitä parempi, mitä pienempi Δt_i on.



Jos pisteiden $\mathbf{r}(t_{i-1})$ ja $\mathbf{r}(t_i)$ välissä olevan käyränpalan pituutta merkitään Δs_i :llä, niin (2.38):n nojalla voidaan arvioida

$$\boxed{\Delta s_i \approx \|\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})\| \approx \|\mathbf{r}'(t_{i-i})\|\Delta t_i} \quad (2.39)$$

ja niinpä

$$s = \sum_{i=1}^k \Delta s_i \approx \sum_{i=1}^k \|\mathbf{r}'(t_{i-1})\| \Delta t_i.$$

Jälkimmäinen summa on funktion $\|\mathbf{r}'(t)\|$ Riemannin summa välillä $[a, b]$, josta saadaan rajalla $|P| \rightarrow 0$ integraali $\int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt$. \square

Puhutaan myös käyrän (jäljen) C pituudesta, joka lasketaan valitsemalla käyrälle C jokin parametrisointi. Voidaan osoittaa, että tällöin käyrän C pituus ei riipu parametrisoinnin valinnasta, kunhan pidetään huoli siitä, että parametrisointi on yksinkertainen.

Esimerkki 2.40. Laske käyrän \mathbf{r} pituus, kun \mathbf{r} on

a) sivulla 30 esitelty käyrä $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3)$, $-1 \leq t \leq 1$,

b) a -säteinen ruuvikäyrä $\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, $a, b > 0$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Ratkaisu. a) Nyt $\|\mathbf{r}'(t)\| = \|(2t, 3t^2)\| = \sqrt{4t^2 + 9t^4} = |t|\sqrt{4 + 9t^2}$, joten

$$\begin{aligned} s &= \int_{-1}^1 \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_{-1}^1 |t|\sqrt{4 + 9t^2} dt = 2 \int_0^1 t\sqrt{4 + 9t^2} dt \\ &= \frac{2}{27} \int_0^1 (4 + 9t^2)^{3/2} dt = \frac{2}{27} (13\sqrt{13} - 8). \end{aligned}$$

b) Derivaatta on $\mathbf{r}'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$, joten

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{a^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Niinpä

$$s = \int_0^{2\pi} \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2} dt = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Esimerkki 2.41. Tarkastellaan käyrää $\mathbf{r}(t) = t(\cos t, \sin t) = (t \cos t, t \sin t)$, $0 \leq t \leq 4\pi$. Miksi käyrän jälki on oheisen kuvan mukainen *Arkhimedeen spiraali*? Vertaa yksikköympyrän parametrisointiin $\mathbf{r}_2(t) = (\cos t, \sin t)$. Laskeetaan käyrän pituus:

$$\mathbf{r}'(t) = (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t),$$

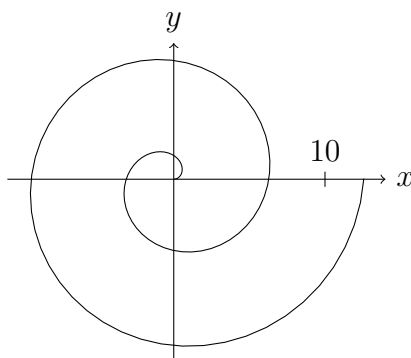
joten

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}'(t)\| &= \sqrt{(\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2} \\ &= \sqrt{(t^2 + 1)(\sin^2 t + \cos^2 t)} = \sqrt{t^2 + 1}. \end{aligned}$$

Käyrän pituus on siten

$$s = \int_0^{4\pi} \sqrt{t^2 + 1} dt = \int_0^{4\pi} \left(\frac{t\sqrt{t^2 + 1}}{2} + \frac{1}{2} \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) \right) \approx 80,8,$$

missä integraalifunktio on sijoitusmenetelmällä laskettua taulukkokirjatietoa.



2.6 Reaaliarvoisen funktion käyräintegraali

Käyräintegraalin määritelmän motivaationa voidaan käyttää seuraavaa kysymystä: Jos käyrän $C = \mathbf{r}([a, b])$ muotoisen langan (pituusyksikkönä m) pituustiheys pisteessä $(x, y, z) \in C$ on $f(x, y, z)$ (kg/m), niin mikä on langan massa?

Pienen käyränpalan Δs_i tiheys voidaan olettaa likimain vakioksi, jos f on jatkuva. Siten sen massalle Δm_i pätee arvion (2.39) nojalla

$$\Delta m_i \approx f(\mathbf{r}(t_{i-1})) \Delta s_i \approx f(\mathbf{r}(t_{i-1})) \|\mathbf{r}'(t_{i-1})\| \Delta t_i$$

ja käyrän kokonaismassalle

$$m = \sum_{i=1}^k \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^k f(\mathbf{r}(t_{i-1})) \|\mathbf{r}'(t_{i-1})\| \Delta t_i.$$

Tämä on funktion $f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\|$ Riemannin summa välillä $[a, b]$, joten rajalla $|P| \rightarrow 0$ saadaan

$$m = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt.$$

Otetaan tämä yleiseksi käyräintegraalin määritelmäksi:

Määritelmä 2.42. Jatkuvan skalaarifunktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ *käyräintegraalia* (line integral) jatkuvasti derivoituvan käyrän $C = \mathbf{r}([a, b])$ yli merkitään $\int_C f ds$ ja se määritellään asettamalla

$$\int_C f ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt.$$

Käytetään myös sanontoja *käyräintegraali käyrän C suhteen ja pitkin käyrää C* sekä nimityksiä *polkuintegraali, tieintegraali ja viivaintegraali*.

Merkinnässä $\int_C f ds$ ei oteta kantaa käyrän C parametrisointiin. Voidaan-kin osoittaa, että käyräintegraali ei riipu parametrisoinnin valinnasta, ts. jos käyrällä C on kaksi yksinkertaista jatkuvasti derivoituvaa parametrisointia $\mathbf{r}_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ja $\mathbf{r}_2: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$, niin

$$\int_a^b f(\mathbf{r}_1(t)) \|\mathbf{r}'_1(t)\| dt = \int_\alpha^\beta f(\mathbf{r}_2(t)) \|\mathbf{r}'_2(t)\| dt. \quad (2.43)$$

Erityisesti käyräintegraali käyrän C ja vastakäyrän $-C$ suhteen ovat yhtäsuuret:

$$\boxed{\int_C f ds = - \int_{-C} f ds.} \quad (2.44)$$

Integraali paloittain sileän käyrän $C = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n$ suhteen asetetaan

$$\int_C f ds = \int_{C_1} f ds + \int_{C_2} f ds + \dots + \int_{C_n} f ds.$$

Lauseen 2.37 nojalla yksinkertaisen jatkuvasti derivoituvan käyrän C pituus on

$$\boxed{s = \int_C 1 ds.} \quad (2.45)$$

Puretaan määritelmää 2.42 auki tapauksessa $n = 3$. Jos merkitään \mathbf{r} :n komponenttifunktioita x :llä, y :llä ja z :lla, ts. $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, missä $t \in [a, b]$, niin

$$\boxed{\int_C f ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt.} \quad (2.46)$$

Käyräintegraalin laskentaohje:

- Hae käyrälle parametrisointi $\mathbf{r}(t)$ ja selvitä parametriväli $[a, b]$.
- Laske derivaattavektori $\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ ja sen normi $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$.

- Laske $f(\mathbf{r}(t))$, ts. sijoita f :n lausekkeeseen x :n, y :n ja z :n paikalle parametrisoinnin komponentit $x = x(t)$, $y = y(t)$ ja $z = z(t)$.
- Integroi $f(\mathbf{r}(t))\|\mathbf{r}'(t)\|$ yli parametrivälin $[a, b]$.

Tapauksissa $n = 2$ ja $n = 3$ käyräintegraalia voidaan merkitä $\int_C f(x, y) ds$ ja $\int_C f(x, y, z) ds$, eli funktion nimen f sijaan integraaliin voidaan kirjoittaa suoraan funktion lauseke. Esimerkiksi funktion $f(x, y, z) = x + 2$ käyräintegraalia yli käyrän C voidaan merkitä $\int_C f ds$ tai $\int_C (x + 2) ds$.

Esimerkki 2.47. Laske

$$\int_C (x + 2) ds,$$

missä C on käyrä, jonka parametrisointina on $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{4}{3}t^{3/2}\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 2$.

Ratkaisu. Koska $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t^{1/2}\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, niin $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{1 + 4t + t^2}$. Lisäksi ko. käyrällä $x = t$, joten

$$\begin{aligned} \int_C (x + 2) ds &= \int_0^2 (t + 2)\sqrt{1 + 4t + t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^2 (4 + 2t)(1 + 4t + t^2)^{1/2} dt \\ &= \frac{1}{3} \int_0^2 (1 + 4t + t^2)^{3/2} dt = \frac{1}{3}(13\sqrt{13} - 1). \end{aligned}$$

Esimerkki 2.48. Laske

$$\int_C xy^2 ds,$$

kun $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$, ts. C on ensimmäisessä koordinaattineljänneksessä oleva yksikköympyrän osa.

Ratkaisu. Ensin on haettava jokin parametrisointi käyrälle C . Käytetään parametrisointia

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Nyt $\|\mathbf{r}'(t)\| = \|(-\sin t, \cos t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$, joten

$$\int_C xy^2 ds = \int_0^{\pi/2} \cos t \sin^2 t \cdot 1 dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{3} \cos^3 t = \frac{1}{3}.$$

Toinen mahdollisuus olisi käyttää parametrisointia

$$\mathbf{r}(t) = (t, \sqrt{1 - t^2}), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Tällöin

$$\mathbf{r}'(t) = \left(1, -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \right),$$

joten

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{1 + \frac{t^2}{1-t^2}} = \sqrt{\frac{1-t^2}{1-t^2} + \frac{t^2}{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Niinpä

$$\begin{aligned} \int_C xy^2 ds &= \int_0^1 t(1-t^2) \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^1 t(1-t^2)^{1/2} dt \\ &= -\int_0^1 \frac{1}{3}(1-t^2)^{3/2} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Huomautus 2.49. Esimerkin 2.48 jälkimmäinen parametrisointi ei itse asiassa ole jatkuvasti derivoituva välin päätepisteeseen $t = 1$ saakka. Tämä ei kuitenkaan haittaa, kunhan määritelmän 2.42 integraali suppenee.

2.7 Massa ja massakeskipiste

Jos k kappaletta massapisteitä m_i on paikoissa $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$, niin kokonaismassa on

$$m = \sum_{i=1}^k m_i \quad (2.50)$$

ja systeemin massakeskipiste $\mathbf{r} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ on paikkavektoreiden \mathbf{r}_i massoilla m_i painotettu keskiarvo

$$\mathbf{r} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^k m_i \mathbf{r}_i,$$

eli koordinaateittain

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^k m_i x_i \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^k m_i y_i \quad \text{ja} \quad \bar{z} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^k m_i z_i. \quad (2.51)$$

Olkoon käyrän $C = \mathbf{r}([a, b])$ muotoisen ohuen langan pituustiheys δ (kg/m). Muita tyypillisesti käytettyjä merkintöjä pituustiheydelle ovat μ ja λ . Tällöin langan massa on luvussa 2.6 todetun perusteella

$$\boxed{m = \int_C \delta ds.} \quad (2.52)$$

Voidaan myös ajatella, että käyränpalan ds massa on δds ja näitä massoja ”lasketaan yhteen”, jolloin yhtälöstä (2.50) päädytään määritelmään (2.52). Samalla tavoin yhtälöistä (2.51) lähtien voidaan perustella langan *massakeskipisteen* (*centroid, center of mass*) $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ määritelmäksi

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{m} \int_C x \delta ds, \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \int_C y \delta ds \quad \text{ja} \quad \bar{z} = \frac{1}{m} \int_C z \delta ds.} \quad (2.53)$$

k :n massapisteen hitausmomentti on

$$I = \sum_{i=1}^k m_i r_i^2,$$

missä r_i on etäisyys pyörimisakselista. Siten langan *hitausmomentin* (*moment of inertia*) määritelmäksi otetaan

$$\boxed{I = \int_C p^2 \delta ds,} \quad (2.54)$$

missä $p = p(x, y, z)$ on pisteen (x, y, z) etäisyys pyörimisakselista. Hitausmomentin yksikkö on

$$[I] = [p^2 \delta ds] = \text{m}^2 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}} \cdot \text{m} = \text{kg m}^2.$$

Esimerkki 2.55. Olkoon ruuvikäyrän $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq \pi$, muotoisen langan pituustiheys $\delta(x, y, z) = z$. Laske langan

a) massa ja massakeskipiste,

b) hitausmomentti z -akselin suhteen.

Ratkaisu. a) Nyt $\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$, joten

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}.$$

Lisäksi $z = t$, joten

$$m = \int_C \delta ds = \int_0^\pi t \sqrt{2} dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^\pi t^2 = \frac{\pi^2}{\sqrt{2}}.$$

Massakeskipisteen x -koordinaatti on siten

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{m} \int_C x \delta ds = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} \int_0^\pi \cos t \cdot t \sqrt{2} dt = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\pi (\cos t + t \sin t) \\ &= -\frac{4}{\pi^2} \approx -0,41. \end{aligned}$$

Vastaavalla tavoin lasketaan

$$\bar{y} = \dots = \frac{2}{\pi} \approx 0,64 \quad \text{ja}$$

$$\bar{z} = \dots = \frac{2\pi}{3} \approx 2,09.$$

Massakeskipiste on siis $\left(-\frac{4}{\pi^2}, \frac{2}{\pi}, \frac{2\pi}{3}\right) \approx (-0,41; 0,64; 2,09)$.

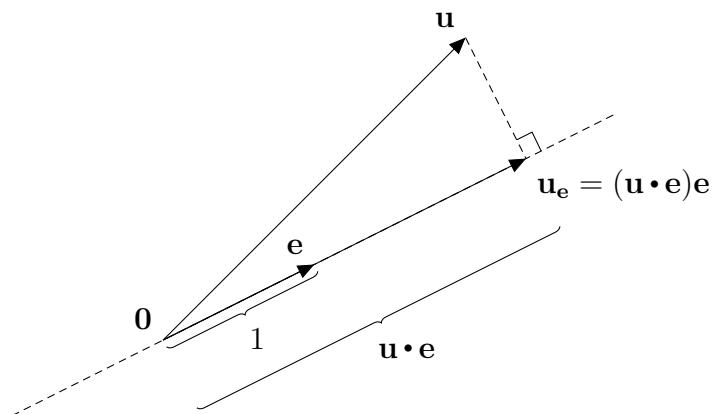
Hahmottele kuva käyrästä. Onko tulos järkevä, kun huomioidaan, että xy -tasolla tiheys on nolla ja kasvaa lineaarisesti siirryttäessä z -suunnassa ylöspäin?

b) Etäisyyden neliö pyörimisakselina olevasta z -akselista on $p(x, y, z) = x^2 + y^2$, joten

$$I = \int_C p^2 \delta ds = \int_0^\pi (\sin^2 t + \cos^2 t) t \sqrt{2} dt = \int_0^\pi t \sqrt{2} dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^\pi t^2 = \frac{\pi^2}{\sqrt{2}}.$$

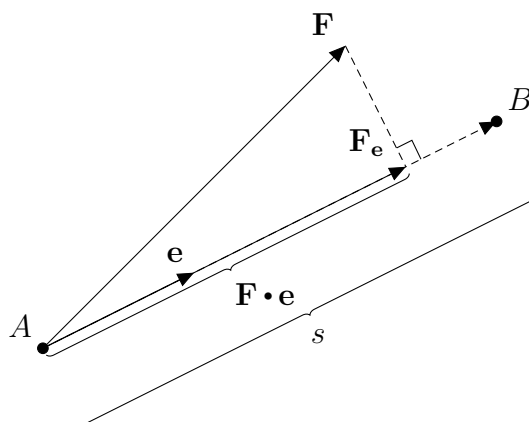
2.8 Vektorikentän käyräintegraali

Opintojaksolta Insinöörimatematiikka 2 muistetaan, että vektorin $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ projektiio \mathbf{u}_e yksikkövektorille $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$ on $\mathbf{u}_e = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}$. Kerrointa $\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}$ kutsutaan *skalaariprojektioksi*.



Liikkukoon massapiste suoraviivaisessa matkan s verran yksikkövektorin \mathbf{e} suuntaan ja vaikuttakoon siihen siirtymän ajan vakiovoima \mathbf{F} . Tällöin voiman kappaleelle tekemä työ on siirtymän suuntaisen \mathbf{F} :n komponentin (skalaariprojektion) ja matkan tulo, ts.

$$W = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{e})s.$$



Entä jos massapiste ei liiku suoraviivaisesti tai voima ei ole vakio? Olkoon $\mathbf{r}(t)$ massapisteen paikkavektori ajanhetkellä t ($a \leq t \leq b$) ja vaikuttakoon pisteessä (x, y, z) massapisteeseen voima $\mathbf{F}(x, y, z)$. Mikä on voiman massapisteelle tekemä työ, kun massapiste siirtyy käyrän $C = \mathbf{r}([a, b])$ alkupisteestä loppupisteeseen? Tehdään pieni Δs_i :n pituinen siirtymä pisteestä $\mathbf{r}(t_{i-1})$ pisteeseen $\mathbf{r}(t_i)$. Jos \mathbf{F} on jatkuva, niin voima on siirtymän aikana likimain vakio ja \mathbf{F} :ää voidaan arvioida sen arvolla alkupisteessä $\mathbf{r}(t_{i-1})$, ts. voima on siirtymän aikana likimain $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t_{i-1}))$. Siirtymän suuntaa voidaan arvioida yksikkötangenttivektorilla siirtymän alkupisteessä eli vektorilla $\mathbf{T}(\mathbf{r}(t_{i-1}))$.¹ Siirtymän pituudelle käytetään (2.39):n mukaista arviota $\Delta s_i \approx \|\mathbf{r}'(t_{i-1})\| \Delta t_i$. Niinpä voiman siirtymässä tekemälle työlle saadaan arvio

$$\Delta W_i \approx \mathbf{F}(\mathbf{r}(t_{i-1})) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{r}(t_{i-1})) \|\mathbf{r}'(t_{i-1})\| \Delta t_i$$

ja kokonaistyölle arvio

$$W = \sum_{i=1}^k \Delta W_i \approx \sum_{i=1}^k \mathbf{F}(\mathbf{r}(t_{i-1})) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{r}(t_{i-1})) \|\mathbf{r}'(t_{i-1})\| \Delta t_i.$$

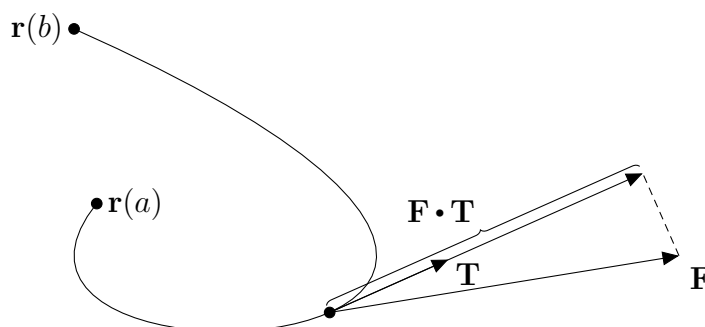
Tämä on funktion $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\|$ Riemannin summa välillä $[a, b]$, joten rajalla $|P| \rightarrow 0$ saadaan

$$W = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt. \quad (2.56)$$

Tässä pistetulo $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{r}(t)) = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T})(\mathbf{r}(t))$ on reaaliluku ja siten $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ on reaaliarvoinen funktio, joten määritelmän 2.42 mukaan

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds. \quad (2.57)$$

¹Tässä teknisistä syistä $\mathbf{T}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ on nyt paikan funktio toisin kuin määritelmässä (2.28) (jossa \mathbf{T} oli t :n funktio). Näin voidaan menetellä, jos käyrä on sileä ja yksinkertainen ja suunnistus on kiinnitetty, sillä tällöin yksikkötangentti \mathbf{T} riippuu ainoastaan käyrän pisteestä $\mathbf{r}(t)$.



Koska

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}(t)) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|},$$

niin yhtälötä (2.56) seuraa, että

$$W = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt. \quad (2.58)$$

Tämä integraali voidaan laskea jokaiselle jatkuvasti derivoituvalle käyrälle (ei pelkästään sileille yksinkertaisille käyrille). Otetaan tämä yleiseksi vektorikentän käyräintegraalin määritelmäksi:

Määritelmä 2.59. Jatkuvan vektorikentän $\mathbf{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ käyräintegraalia (*line integral*) jatkuvasti derivoituvan käyrän $C = \mathbf{r}([a, b])$ yli merkitään $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ja se määritellään asettamalla

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt.$$

Käytetään myös sanontoja käyräintegraali *käyrän C suhteen* ja *pitkin käyrrää C*. Merkinnän $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ motivaationa on (sinänsä melko epämääräinen) päätelmä

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}'(t) \quad \Rightarrow \quad d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t) dt.$$

Jos käyrä C on sileä ja yksinkertainen, niin huomion (2.57) perusteella

$$\boxed{\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds.} \quad (2.60)$$

Vektorikentän käyräintegraali sileän yksinkertaisen käyrän C yli ei riipu parametrisoinnin valinnasta, mikäli suunnistus säilyy samana, sillä yksikkötangentti \mathbf{T} on sama kaikille samaan suuntaan suunnistetuille parametrisoinneille. Vastakäyrän $-C$ yksikkötangentti on $-\mathbf{T}$, joten integraalin etumerkki

vaihtuu suunnistuksen vaihtuessa:

$$\int_{-C} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{T}) ds = - \int_{-C} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds \stackrel{(2.44)}{=} - \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds,$$

ts.

$$\boxed{\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.} \quad (2.61)$$

Näin ollen kirjoitettaessa $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ tai $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$ täytyy käyrän C suunnistus erikseen ilmoittaa, ellei se ole muutoin asiayhteydestä selvä. Integraali paloittain sileän käyrän $C = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n$ yli asetetaan

$$\boxed{\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \dots + \int_{C_n} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.} \quad (2.62)$$

Puretaan määritelmää 2.59 auki tapauksessa $n = 3$. Jos merkitään \mathbf{r} :n komponenttifunktioita x :llä, y :llä ja z :lla, ts. $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, missä $t \in [a, b]$, niin

$$\boxed{\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) dt.} \quad (2.63)$$

Käyräintegraalin laskentaohje:

- Hae käyrälle parametrisointi $\mathbf{r}(t)$ ja selvitä parametriväli $[a, b]$.
- Laske derivaattavektori $\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$.
- Laske $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$, ts. sijoita \mathbf{F} :n lausekkeeseen x :n, y :n ja z :n paikalle parametrisoinnin komponentit $x = x(t)$, $y = y(t)$ ja $z = z(t)$.
- Laske pistetulo $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)$ ja integroi se yli parametrivälin $[a, b]$.

Esimerkki 2.64. Laske vektorikentän $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, yz, x^2)$ käyräintegraali pitkin käyrää $\mathbf{r}(t) = (t, t, t^2)$ pisteestä $(-1, -1, 1)$ pisteeseen $(2, 2, 4)$.

Ratkaisu. Nyt $\mathbf{r}(-1) = (-1, -1, 1)$ ja $\mathbf{r}(2) = (2, 2, 4)$, joten parametriväli on $-1 \leq t \leq 2$. Lisäksi kyseisellä käyrällä $x = t$, $y = t$ ja $z = t^2$ sekä $\mathbf{r}'(t) = (1, 1, 2t)$, joten

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-1}^2 (t, t^3, t^2) \cdot (1, 1, 2t) dt = \int_{-1}^2 (3t^3 + t) dt = \frac{51}{4}.$$

Esimerkki 2.65. Laske voimakentän $\mathbf{F}(x, y, z) = (-x, -y, 1)$ (N) tekemä työ, kun sen vaikutuspiste liikkuu pitkin ruuvikäyrää $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$

(m) pisteestä $(1, 0, 0)$ pisteeseen $(-1, 0, 3\pi)$.

Ratkaisu. Käyrän z -koordinaatista nähdään, että parametriväli on $0 \leq t \leq 3\pi$. Nyt $x = \cos t$ ja $y = \sin t$, joten

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = (-\cos t, -\sin t, 1).$$

Lisäksi $\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$, joten kysytty työ on

$$\begin{aligned} W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{3\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_0^{3\pi} (-\cos t, -\sin t, 1) \cdot (-\sin t, \cos t, 1) dt \\ &= \int_0^{3\pi} (\cos t \sin t - \sin t \cos t + 1) dt \\ &= \int_0^{3\pi} dt = 3\pi \quad (\text{Nm}). \end{aligned}$$

Huomautus 2.66. Olkoon C jana pisteestä \mathbf{a} pisteeseen \mathbf{b} . Huomautuksen 2.12 nojalla parametrisoinniksi janalle C käy

$$\boxed{\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}), \quad 0 \leq t \leq 1.} \quad (2.67)$$

Tällöin $\mathbf{r}(0) = \mathbf{a}$ eli janan alkupiste, $\mathbf{r}(1) = \mathbf{b}$ eli janan loppupiste ja esimerkiksi $\mathbf{r}(1/2)$ on janan puoliväli.

Esimerkki 2.68. Laske esimerkin 2.65 työ, jos siirtymä pisteestä $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$ pisteeseen $\mathbf{b} = (-1, 0, 3\pi)$ tehdään pitkin janaa.

Ratkaisu. Huomautuksen 2.66 mukaan jana voidaan parametrisoida $\mathbf{r}(t) = (1, 0, 0) + t((-1, 0, 3\pi) - (1, 0, 0)) = (1 - 2t, 0, 3\pi t)$, $0 \leq t \leq 1$. Niinpä

$$\begin{aligned} W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_0^1 (2t - 1, 0, 1) \cdot (-2, 0, 3\pi) dt \\ &= \int_0^1 (2 - 4t + 3\pi) dt = 3\pi. \end{aligned}$$

Esimerkki 2.69. Olkoon $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$. Laske

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

origosta pisteeseen $(2, 4, 8)$, kun

a) C :llä on parametrisointina $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 2$,

b) C on jana.

Ratkaisu. a) $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$, joten

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^2 (t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + t\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}) dt \\ &= \int_0^2 (t^2 + 2t^4 + 3t^3) dt = \frac{412}{15}.\end{aligned}$$

b) Huomautuksen 2.66 mukaan voidaan valita

$\mathbf{r}(t) = (0, 0, 0) + t((2, 4, 8) - (0, 0, 0)) = (2t, 4t, 8t)$, $0 \leq t \leq 1$, joten

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_0^1 (4t, 8t, 2t) \cdot (2, 4, 8) dt \\ &= \int_0^1 56t dt = 28.\end{aligned}$$

Esimerkki 2.70. Laske

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

kun $\mathbf{F}(x, y, z) = (3x^2 + 6y, -14yz, 20xz^2)$ ja C on koordinaattimurtoviiva pisteestä $(0, 0, 0)$ pisteeseen $(1, -2, 3)$ ensin x -akselin suuntaista janaa C_1 pitkin, sitten y -akselin suuntaista janaa C_2 pitkin ja lopuksi z -akselin suuntaista janaa C_3 pitkin.

Ratkaisu. Käyräintegraali on laskettava kolmessa osassa:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Käytetään käyrille seuraavia parametrisointeja:

$$C_1: \mathbf{r}_1(t) = (t, 0, 0), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$C_2: \mathbf{r}_2(t) = (1, -t, 0), \quad 0 \leq t \leq 2,$$

$$C_3: \mathbf{r}_3(t) = (1, -2, t), \quad 0 \leq t \leq 3.$$

Tällöin $\mathbf{r}'_1(t) = (1, 0, 0)$, $\mathbf{r}'_2(t) = (0, -1, 0)$ ja $\mathbf{r}'_3(t) = (0, 0, 1)$, joten

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 (3t^2, 0, 0) \cdot (1, 0, 0) dt + \int_0^2 (3 - 6t, 0, 0) \cdot (0, -1, 0) dt \\ &\quad + \int_0^3 (-9, 28t, 20t^2) \cdot (0, 0, 1) dt \\ &= \int_0^1 3t^2 dt + \int_0^2 0 dt + \int_0^3 20t^2 dt = 181.\end{aligned}$$

Esimerkki 2.71. Kappale liikkuu pisteestä $(1, 0)$ pisteeseen $(-2, 3)$ pitkin paraabelia $y = x^2 - 1$, josta edelleen takaisin pisteeseen $(1, 0)$ pitkin janaa. Laske voimakentän $\mathbf{F}(x, y) = (y, -x)$ kappaleelle tekemä työ.

Ratkaisu. On syytä hahmotella kuva ja samalla varmistua siitä, että annettu paraabeli todella kulkee ko. pisteiden kautta. Paraabelin standardiparametrisointi olisi $\mathbf{r}(t) = (t, t^2 - 1)$, $-2 \leq t \leq 1$. Tämä parametrisointi kulkee kuitenkin väärään suuntaan, joten otetaan paraabelille C_1 parametrisoinniksi

$$\mathbf{r}_1(t) = (-t, t^2 - 1), \quad -1 \leq t \leq 2,$$

jolle $\mathbf{r}'_1(t) = (-1, 2t)$. Käytetään janalle C_2 parametrisointia (2.67):

$$\mathbf{r}_2(t) = (-2, 3) + t((1, 0) - (-2, 3)) = (3t - 2, 3 - 3t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

jolle $\mathbf{r}'_2(t) = (3, -3)$. Nyt työksi voidaan laskea

$$\begin{aligned} W &= \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{-1}^2 (t^2 - 1, t) \cdot (-1, 2t) dt + \int_0^1 (-3t + 3, -3t + 2) \cdot (3, -3) dt \\ &= \int_{-1}^2 (t^2 + 1) dt + \int_0^1 3 dt = 6 + 3 = 9. \end{aligned}$$

Määritelmä 2.72. Olkoon $C = \mathbf{r}([a, b])$ jatkuvasti derivoituva käyrä ja merkitään $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Reaaliarvoisen funktion $f(x, y, z)$ käyräintegraaleja käyrän C yli x :n, y :n ja z :n suhteen merkitään $\int_C f dx$, $\int_C f dy$ ja $\int_C f dz$ ja ne määritellään asettamalla

$$\begin{aligned} \int_C f dx &= \int_a^b f(\mathbf{r}(t))x'(t) dt \\ \int_C f dy &= \int_a^b f(\mathbf{r}(t))y'(t) dt \\ \int_C f dz &= \int_a^b f(\mathbf{r}(t))z'(t) dt \end{aligned}$$

Muistisääntönä ja merkintänä laskuissa voidaan integraalissa x :n suhteen käyttää päätelmää (vastaavasti y :n ja z :n suhteen)

$$\frac{dx}{dt} = x'(t) \quad \Rightarrow \quad dx = x'(t) dt.$$

Lause 2.73. *Jatkuvan vektorifunktion $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ käyräintegraali käyrän C yli voidaan laskea komponenteittain seuraavasti:*

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C P dx + \int_C Q dy + \int_C R dz.$$

Todistus. Suoralla laskulla nähdään

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_a^b (P(\mathbf{r}(t)), Q(\mathbf{r}(t)), R(\mathbf{r}(t))) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) dt \\ &= \int_a^b P(\mathbf{r}(t))x'(t) dt + \int_a^b Q(\mathbf{r}(t))y'(t) dt + \int_a^b R(\mathbf{r}(t))z'(t) dt \\ &= \int_C P dx + \int_C Q dy + \int_C R dz. \quad \square \end{aligned}$$

Suunnistuksen kääntäminen vaihtaa integraalin etumerkin:

$$\int_C f dx = - \int_{-C} f dx, \quad \int_C f dy = - \int_{-C} f dy, \quad \int_C f dz = - \int_{-C} f dz.$$

Esimerkki 2.74. Lasketaan esimerkin 2.70 käyräintegraali lauseen 2.73 avulla:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

kun $\mathbf{F}(x, y, z) = (3x^2 + 6y, -14yz, 20xz^2)$ ja C on koordinaattimurtoviiva pisteestä $(0, 0, 0)$ pisteeseen $(1, -2, 3)$ ensin x -akselin suuntaista janaa C_1 pitkin, sitten y -akselin suuntaista janaa C_2 pitkin ja lopuksi z -akselin suuntaista janaa C_3 pitkin.

Ratkaisu. Käytetään janoille samoja parametrisointeja kuin esimerkissä 2.70:

$$C_1: \mathbf{r}_1(t) = (t, 0, 0), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$C_2: \mathbf{r}_2(t) = (1, -t, 0), \quad 0 \leq t \leq 2,$$

$$C_3: \mathbf{r}_3(t) = (1, -2, t), \quad 0 \leq t \leq 3.$$

Nyt C_1 :llä

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = 0 \quad \text{ja} \quad \frac{dz}{dt} = 0,$$

joten $dx = dt$ ja $dy = dz = 0$. Niinpä

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} (3x^2 + 6y) dx + 0 + 0.$$

Vastaavasti C_2 :lla $dx = dz = 0$ ja $dy = -dt$ ja C_3 :lla $dx = dy = 0$ ja $dz = dt$.
Siten

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{C_1} (3x^2 + 6y) dx - 14 \int_{C_2} yz dy + 20 \int_{C_3} xz^2 dz \\ &= \int_0^1 3t^2 dt - 14 \int_0^2 (-t) \cdot 0 \cdot (-dt) + 20 \int_0^3 1 \cdot t^2 dt \\ &= \int_0^1 3t^2 dt + 0 + 20 \int_0^3 t^2 dt = 181. \end{aligned}$$

Vertaa laskua esimerkkiin 2.70. Huomataan, että lause 2.73 antaa vain tavan ryhmitellä määritelmän 2.59 pistetulo. Lause 2.73 on erityisen käyttökelpoinen laskettaessa käyräintegraali koordinaattimurtoviivaa pitkin, jossa kullakin janalla kaksi differentiaaleista dx , dy ja dz ovat nollia.

3 Konservatiivinen vektorikenttä ja potentiaalfunktio

Tässä luvussa tutustutaan vektorikentän potentiaalfunktioon ja sen merkitykseen käyräintegraalin laskemisessa.

3.1 Peruslause ja riippumattomuus tiestä

Lause 3.1 (Käyräintegraalien peruslause). *Olkoon $C = \mathbf{r}([a, b])$ jatkuvasti derivoituva käyrä ja f jatkuvasti differentioituva skalaarifunktio. Tällöin*

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)).$$

f :n gradientin käyräintegraali riippuu siis vain f :n arvoista käyrän päätepisteissä $\mathbf{r}(a)$ ja $\mathbf{r}(b)$. Vertaa analyysin peruslauseeseen: jos reaalifunktion f derivaatta f' on jatkuva, niin

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

Todistus. Merkitään $g(t) = f(\mathbf{r}(t))$. Ketjusäännön (lause 1.19) mukaan

$$g'(t) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t).$$

Nyt analyysin peruslausetta käyttäen saadaan

$$\begin{aligned}\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_a^b g'(t) dt = \int_a^b g(t) = g(b) - g(a) = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)). \quad \square\end{aligned}$$

Esimerkki 3.2. Esimerkin 1.21 mukaan keskeisvoimakenttä

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

on kentän

$$f(\mathbf{r}) = -\frac{1}{r}$$

gradienttikenttä, ts. $\mathbf{F} = \nabla f$. Siten keskeisvoimakentälle pätee: voiman tekemä työ siirryttäessä pisteestä A pisteeseen B on $W = f(B) - f(A)$, olipa tie C mikä tahansa.

Määritelmä 3.3. a) *Tie (path)* on paloittain sileä käyrä.

b) $D \subset \mathbb{R}^3$ on *(polku)yhtenäinen (connected)*, jos mitkä tahansa kaksi D :n pistettä voidaan yhdistää tiellä, joka on kokonaan D :ssä.

c) $D \subset \mathbb{R}^3$ on *alue (region)*, jos D on avoin ja yhtenäinen.

Määritelmä 3.4. Jatkuvan vektorikentän \mathbf{F} käyräintegraali on *tiestä riippumaton (independent of path)* alueessa D , jos sen käyräintegraali ei riipu pisteitä A ja $B \in D$ yhdistävästä D :ssä kulkevasta tiestä C , olivatpa A ja B mitä tahansa D :n pisteitä. Tällöin voidaan kirjoittaa

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Määritelmä 3.5. Jatkuva vektorikenttä \mathbf{F} on *konservatiivinen (conservative)* alueessa D , jos se voidaan esittää gradienttikenttänä $\mathbf{F} = \nabla f$ jollekin alueessa D määritellylle funktiolle f . Tällöin f :ää sanotaan \mathbf{F} :n *potentiaali-funktioksi (potential function)* eli *potentiaaliksi* alueessa D .

Lauseen 3.1 väite käyttäen uutta terminologiaa: Olkoon jatkuvalla vektorikentällä \mathbf{F} alueessa D potentiaalifunktio f . Jos A ja $B \in D$, niin

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A)$$

kaikille D :n teille C A :sta B :hen.

Esimerkin 2.69 kentälle \mathbf{F} käyräintegraali riippuu tiestä, sen sijaan esimerkin 3.2 mukaan keskeisvoimakentälle käyräintegraali on tiestä riippumaton. Esimerkeissä 2.65 ja 2.68 saatiin sama tulos kahdelle eri tielle, mutta käykö näin kaikille teille? Lauseen 3.1 mukaan konservatiivinen vektorikenttä on aina tiestä riippumaton. Peruskysymyksemme ovatkin nyt:

- Onko tiestä riippumaton vektorikenttä aina konservatiivinen?
- Kuinka potentiaalifunktio löydetään?

Näihin kysymyksiin vastaa seuraava lause:

Lause 3.6. *Jatkuvan vektorikentän \mathbf{F} käyräintegraali on tiestä riippumaton alueessa D jos ja vain jos se on konservatiivinen, ts. $\mathbf{F} = \nabla f$ jollekin alueessa D määritellylle funktiolle f . Lisäksi potentiaalifunktio f on vakiota vaille yksikäsitteinen ja jos $A_0 = (x_0, y_0, z_0) \in D$, niin potentiaalifunktioksi käy*

$$f(x, y, z) = \int_{A_0}^{(x,y,z)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (3.7)$$

Todistus. Lauseen ”jos ja vain jos” -osan suunta ” \Leftarrow ” todistettiin lauseessa 3.1. Suunnan ” \Rightarrow ” todistamiseksi oletetaan, että kentän $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ käyräintegraali ei riipu tiestä. On todistettava, että on olemassa f siten, että $\nabla f = \mathbf{F}$. Valitaan $A_0 \in D$ ja asetetaan

$$f(\mathbf{r}) = \int_{A_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Oletuksen mukaan tässä integraalin arvo riippuu vain päätepisteestä \mathbf{r} , joten f :n määritelmä on hyvin asetettu. Osoitetaan seuraavassa, että

$$\nabla f(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \quad \text{kaikilla } \mathbf{r} \in D. \quad (3.8)$$

Kiinnitetään $\mathbf{r} = (x, y, z) \in D$. Valitaan $\mathbf{r}_0 = (x_1, y, z) \in D$ siten, että $x_1 < x$ ja että \mathbf{r}_0 :aa ja \mathbf{r} :ää yhdistävä jana C_2 on kokonaan joukossa D . Valitaan lisäksi jokin A_0 :aa ja \mathbf{r}_0 :aa yhdistävä tie $C_1 \subset D$. Nämä valinnat ovat mahdollisia, sillä D on avoin ja yhtenäinen joukko. Valitaan janalle C_2 parametrisointi $\mathbf{s}(t) = (t, y, z)$, $x_1 \leq t \leq x$, jolloin $dx = dt$ ja $dy = dz = 0$. Nyt

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}) &= \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} P dx + \int_{C_2} Q dy + \int_{C_2} R dz \\ &= \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{x_1}^x P(\mathbf{s}(t)) dt. \end{aligned}$$

Osittaisderivoidaan tämä yhtälö puolittain x :n suhteen ja otetaan huomioon, että ensimmäinen käyräintegraali on x :n suhteen vakio ja että toisessa integraalissa derivoidaan ylärajan suhteen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_1}^x P(\mathbf{s}(t)) dt \\ &= 0 + P(\mathbf{s}(x)) = P(x, y, z) = P(\mathbf{r}).\end{aligned}$$

Vastaavalla tavoin saadaan $\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial y} = Q(\mathbf{r})$ ja $\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial z} = R(\mathbf{r})$, joten (3.8) pätee ja yhtälön (3.7) määrittely antaa siten erään potentiaalifunktion.

On jäljellä todistaa, että f on vakiota vaille yksikäsitteinen. Tehdään tämä kahdessa osassa:

(1) Jos $\nabla g = \mathbf{0}$, niin lauseen 3.1 mukaan kaikille A ja $B \in D$

$$g(B) - g(A) = \int_A^B \nabla g \cdot d\mathbf{r} = 0,$$

eli $g = C =$ vakio joukossa D .

(2) Olkoon nyt g mitä tahansa \mathbf{F} :n potentiaalifunktio. Silloin

$$\nabla(f - g) = \nabla f - \nabla g = \mathbf{F} - \mathbf{F} = \mathbf{0}.$$

Soveltamalla kohtaa (1) funktioon $f - g$ nähdään, että $f - g = C =$ vakio joukossa D . f ja g eroavat siis vain vakion verran: $f = g + C$. \square

Lemma 3.9. *Jatkuvan vektorikentän \mathbf{F} käyräintegraali on tiestä riippumaton alueessa D jos ja vain jos*

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

jokaiselle suljetulla tiellä $C \subset D$.

Todistus. Suunta " \Leftarrow ": Olkoot A ja $B \in D$ ja C_1 ja $C_2 \subset D$ A :ta ja B :tä yhdistäviä teitä. On osoitettava, että

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (3.10)$$

Nyt $C = C_1 \cup (-C_2)$ on suljettu tie A :sta B :hen pitkin C_1 :stä ja takaisin A :han pitkin C_2 :n vastakäyrää. Oletuksen mukaan

$$0 = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

josta väite (3.10) seuraa.

Suunta " \Rightarrow " samaan tapaan. \square

3.2 Potentiaalifunktion laskeminen

Kentän $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ potentiaaliksi f määrittämiseksi eräs keino on yrittää ratkaista yhtälö $\nabla f = \mathbf{F}$, ts. löytää sellainen f , jolle pätee

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q \quad \text{ja} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = R.} \quad (3.11)$$

Jos yhtälöryhmälle (3.11) löytyy ratkaisu, niin samalla tullaan osoittaneeksi, että kenttä \mathbf{F} on konservatiivinen.

Esimerkki 3.12. Hae kentän $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + (xz + y)\mathbf{j} + (xy + 1)\mathbf{k}$ potentiaalifunktio f , mikäli sellainen on olemassa.

Ratkaisu. On haettava funktio $f(x, y, z)$, jolle

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yz, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xz + y \quad \text{ja} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = xy + 1.$$

Integroimalla x :n suhteen ensimmäinen yhtälö saadaan yhtäpitävään muotoon

$$f(x, y, z) = xyz + g(y, z). \quad (3.13)$$

Miksi pelkkä integroimisvakio ei riitä, vaan on lisättävä y :stä ja z :sta riippuva funktio $g(y, z)$? Sijoitetaan f :n lauseke (3.13) yhtälöryhmän toiseen yhtälöön. Saadaan

$$xz + \frac{\partial g}{\partial y} = xz + y \quad \text{eli} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = y.$$

Integroidaan y :n suhteen:

$$g(y, z) = \frac{1}{2}y^2 + h(z) \quad (3.14)$$

Sijoitetaan (3.13) ja (3.14) yhtälöryhmän kolmanteen yhtälöön:

$$xy + h'(z) = xy + 1 \quad \text{eli} \quad h'(z) = 1.$$

Integroimalla saadaan

$$h(z) = z + C. \quad (3.15)$$

Yhtälöt (3.13), (3.14) ja (3.15) antavat potentiaalifunktioksi

$$f(x, y, z) = xyz + \frac{1}{2}y^2 + z + C.$$

Lopuksi **potentiaalifunktion lasku kannattaa aina tarkastaa laske-
malla gradientti!**

Jos vektorikenttä \mathbf{F} tiedetään konservatiiviseksi, niin lause 3.6 antaa vaihtoehdoisen keinon laskea potentiaalifunktio f : valitaan $A_0 = (x_0, y_0, z_0) \in D$ ja määritellään

$$\boxed{f(x, y, z) = \int_{A_0}^{(x,y,z)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.} \quad (3.16)$$

Tässä käyräintegraali lasketaan mahdollisimman helpolla tavalla, esimerkiksi pitkin janaa jos vain alueen D muoto sen sallii. Aluetta D sanotaan *tähtimäiseksi*, jos on olemassa $A_0 \in D$ siten, että jokainen D :n piste voidaan yhdistää pisteeseen A_0 janalla, joka on kokonaan D :ssä.

Oletetaan, että alueessa D voidaan käyttää koordinaattimurtoviivaa. Yhdistetään $A_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ja (x, y, z) koordinaattimurtoviivalla $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ ja käytetään parametrisointeja

$$C_1: \mathbf{r}_1(t) = (t, y_0, z_0), \quad x_0 \leq t \leq x,$$

$$C_2: \mathbf{r}_2(t) = (x, t, z_0), \quad y_0 \leq t \leq y,$$

$$C_3: \mathbf{r}_3(t) = (x, y, t), \quad z_0 \leq t \leq z.$$

Tällöin $\mathbf{r}'_1(t) = (1, 0, 0)$, $\mathbf{r}'_2(t) = (0, 1, 0)$ ja $\mathbf{r}'_3(t) = (0, 0, 1)$. Kun merkitään $\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$, niin

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{x_0}^x \mathbf{F}(\mathbf{r}_1(t)) \cdot \mathbf{r}'_1(t) dt \\ &= \int_{x_0}^x (P(t, y_0, z_0), Q(t, y_0, z_0), R(t, y_0, z_0)) \cdot (1, 0, 0) dt \\ &= \int_{x_0}^x P(t, y_0, z_0) dt. \end{aligned}$$

Tässä oletetaan, että $x_0 < x$. Tapauksessa $x_0 > x$ käytetään C_1 :n vastakäyrälle parametrisointia $\mathbf{r}_1(t) = (t, y_0, z_0)$, $x \leq t \leq x_0$, jolloin

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_x^{x_0} P(t, y_0, z_0) dt = \int_{x_0}^x P(t, y_0, z_0) dt.$$

Vastaavasti saadaan

$$\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{y_0}^y Q(x, t, z_0) dt \quad \text{ja} \quad \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{z_0}^z R(x, y, t) dt,$$

joten (3.16) voidaan laskea

$$\boxed{f(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(t, y_0, z_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t, z_0) dt + \int_{z_0}^z R(x, y, t) dt.} \quad (3.17)$$

Varoitus. Edellä integraalit (3.16) ja (3.17) voidaan laskea, vaikka potentiaalifunktiota ei olisikaan olemassa. Näissä on siis f :n laskemisen jälkeen vielä tutkittava, onko $\nabla f = \mathbf{F}$. Voidaan myös perustella seuraava keino potentiaaliolemassaolon testaamiseksi laskematta f :ää. Lauseen todistus (jota hahmotellaan sivulla 120) perustuu Stokesin lauseeseen, jota käsitellään luvussa 10.

Lause 3.18. *Olkkoon \mathbf{F} jatkuvasti differentioituva vektorikenttä tähtimäisessä alueessa D . Tällöin \mathbf{F} on konservatiivinen alueessa D jos ja vain jos $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ alueessa D .*

Esimerkki 3.19. Laske esimerkin 3.12 potentiaali kaavalla (3.16) käyttämällä janaa.

Ratkaisu. Määritellään f asettamalla

$$f(x, y, z) = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

missä C on jana pisteestä $A_0 = (0, 0, 0)$ pisteeseen (x, y, z) . Otetaan janan parametrisoinniksi $\mathbf{r}(t) = (tx, ty, tz)$, $0 \leq t \leq 1$, jolloin $\mathbf{r}'(t) = (x, y, z)$ ja

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (ty \cdot tz, tx \cdot tz + ty, tx \cdot ty + 1) \cdot (x, y, z) dt \\ &= \int_0^1 (3xyzt^2 + y^2t + z) dt = xyz + \frac{1}{2}y^2 + z. \end{aligned}$$

On vielä tutkittava, onko f kentän \mathbf{F} potentiaalifunktio. Lasketaan gradientti:

$$\nabla f = (yz, xz + y, xy + 1).$$

Huomataan, että $\nabla f = \mathbf{F}$. f on siten \mathbf{F} :n potentiaalifunktio.

Esimerkki 3.20. Laske esimerkin 3.12 potentiaali käyttämällä kaavaa (3.17).

Ratkaisu. Valitaan $A_0 = (0, 0, 0)$. Potentiaalifunktiokandidaatiksi f saadaan

$$f(x, y, z) = \int_0^x 0 dt + \int_0^y t dt + \int_0^z (xy + 1) dt = \frac{1}{2}y^2 + xyz + z,$$

joka todistetaan \mathbf{F} :n potentiaalifunktioksi laskemalla gradientti.

Joskus potentiaalifunktion hakemisessa voidaan käyttää symmetrioita:

Esimerkki 3.21. Tarkastellaan keskeisvoimakenttää $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$. Pallosymmetriasta johtuen jos kentällä \mathbf{F} on potentiaali f , niin sen on oltava pallosymmetrinen, ts. $f(\mathbf{r}) = f(r)$. Nyt

$$\nabla f = \mathbf{F} \Leftrightarrow f'(r)\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r^3} \Leftrightarrow \frac{f'(r)}{r}\mathbf{r} = \frac{1}{r^3}\mathbf{r}.$$

Koska $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$, niin viimeisessä yhtälössä vektorin \mathbf{r} kertoimien tulee olla samat:

$$\frac{f'(r)}{r} = \frac{1}{r^3} \Leftrightarrow f'(r) = \frac{1}{r^2} \Leftrightarrow f(r) = \int \frac{dr}{r^2} = -\frac{1}{r} + C.$$

Siten voimakentällä $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ on potentiaalifunktio $f(\mathbf{r}) = -\frac{1}{r}$.

Esimerkki 3.22. Olkoon käyrällä C parametrisointina $\mathbf{r}(t) = (t^2, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq \pi$, ja olkoon $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2 \cos z \mathbf{i} + 2xy \cos z \mathbf{j} - xy^2 \sin z \mathbf{k}$. Laske

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

hyödyntämällä \mathbf{F} :n potentiaalifunktiota.

Ratkaisu. Haetaan potentiaalifunktio $f(x, y, z)$ määritelmää (eli yhtälöryhmää (3.11)) käyttäen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \cos z, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy \cos z \quad \text{ja} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -xy^2 \sin z.$$

Integroimalla ensimmäinen yhtälö x :n suhteen saadaan

$$f(x, y, z) = xy^2 \cos z + g(y, z).$$

Sijoitetaan tämä f :n lauseke yhtälöryhmän toiseen yhtälöön:

$$2xy \cos z + \frac{\partial g}{\partial y} = 2xy \cos z \quad \text{eli} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 0,$$

josta integroimalla y :n suhteen $g(y, z) = h(z)$. Niinpä $f(x, y, z) = xy^2 \cos z + h(z)$. Sijoitetaan tämä yhtälöryhmän kolmanteen yhtälöön:

$$-xy^2 \sin z + h'(z) = -xy^2 \sin z \quad \text{eli} \quad h'(z) = 0,$$

joten $h(z) = C$. Potentiaalifunktioksi saatiin $f(x, y, z) = xy^2 \cos z$. Tarkasta laskemalla gradientti! Niinpä

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(\pi)) - f(\mathbf{r}(0)) = f(\pi^2, 0, \pi) - f(0, 0, 0) = 0 - 0 = 0.$$

3.3 Potentiaalienergia

Fysiikassa skalaarifunktio V on konservatiivisen voimakentän \mathbf{F} *potentiaalienergia*, jos $\mathbf{F} = -\nabla V$. Tutkitaan hiukkasen (massa m) liikettä pisteestä A pisteeseen B pitkin käyrää $C = \mathbf{r}([a, b])$. Newtonin lain mukaan $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = m\mathbf{a}(t) = m\mathbf{v}'(t)$. Voimakentän tekemä työ on siis

$$\begin{aligned} W &= \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b m\mathbf{v}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) dt = \int_a^b m \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t) \right) dt \\ &= \int_a^b m \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v(t)^2 \right) dt = \int_a^b \frac{1}{2} m v(t)^2 \\ &= \frac{1}{2} m v(b)^2 - \frac{1}{2} m v(a)^2, \end{aligned}$$

joka on liike-energian $\frac{1}{2}mv^2$ muutos siirtymässä pisteestä A pisteeseen B . Toisaalta lauseen 3.1 mukaan

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -V(B) + V(A),$$

joten

$$\frac{1}{2}mv(a)^2 + V(A) = \frac{1}{2}mv(b)^2 + V(B).$$

Näin ollen kokonaisenergia

$$E = \text{liike-energia} + \text{potentiaalienergia}$$

säilyy, kun kappale liikkuu konservatiivisessa voimakentässä. Tästä johtuu nimitys ”konservatiivinen”.

Esimerkki 3.23. Esimerkin 3.21 mukaan gravitaatiokentän

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -GMm \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

(eräs) potentiaalienergia on $V(\mathbf{r}) = -\frac{GMm}{r}$. Siten kappaleen kokonaisenergia ko. gravitaatiokentässä on

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}.$$

4 Kertaus tasointegraalista

Tässä luvussa kerrataan tasointegraaleja Insinöörimatematiikka 4:lta siinä määrin, kun on tarpeellista luvuissa 5 ja 7 taso- ja pintaintegraalien laske-
miseksi ja pintaintegraalien määrittämien ymmärtämiseksi.

4.1 Tasointegraali suorakulmiossa

Olkoon $R \subset \mathbb{R}^2$ suorakulmio

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

Jaetaan välit $[a, b]$ ja $[c, d]$ osaväleihin käyttäen jakopisteitä

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b$$

ja

$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < y_n = d.$$

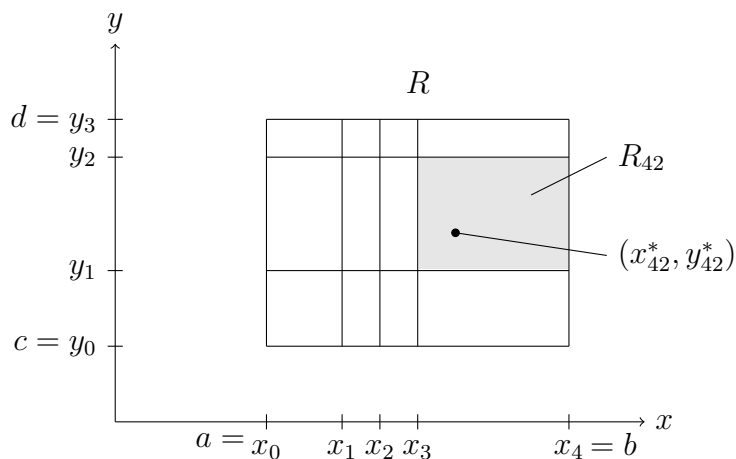
Nämä jaot jakavat suorakulmion R mn kappaleeseen osasuorakulmioita R_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Osasuorakulmioiden kulmapisteiden muodostamaa joukkoa

$$P = \{(x_i, y_j) : i = 0, \dots, m, j = 0, \dots, n\}$$

kutsutaan suorakulmion R *jaoksi* (*partition*). Merkitään osavälien pituuksia $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ja $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$, jolloin osasuorakulmion R_{ij} pinta-ala on $\Delta x_i \Delta y_j$. *Jaon P normi* $|P|$ on maksimi osasuorakulmioiden halkaisijoista, ts.

$$|P| = \max\{\text{diam}(R_{ij}) : i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n\}, \quad \text{missä}$$

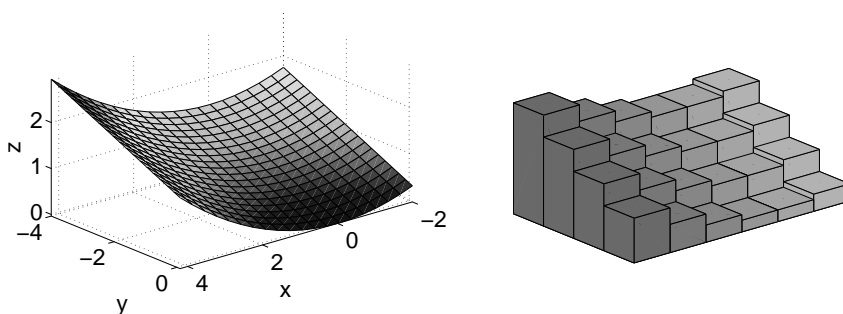
$$\text{diam}(R_{ij}) = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_j)^2}.$$



Valitaan lisäksi jokaisesta osasuorakulmiosta R_{ij} piste (x_{ij}^*, y_{ij}^*) . Jos $f(x, y)$ on suorakulmiossa R määritelty reaaliarvoinen funktio, niin summaa

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x_i \Delta y_j \quad (4.1)$$

kutsutaan jakoon P ja pisteisiin (x_{ij}^*, y_{ij}^*) liittyväksi funktion f *Riemannin summaksi*. Jos $f(x, y) \geq 0$, niin Riemannin summan termi $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x_i \Delta y_j$ on R_{ij} -pohjaisen $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ -korkuisen suorakulmaisen särmiön tilavuus. Riemannin summa antaa siten approksimaation f :n kuvaajan ja xy -tason väliin jäävän joukon tilavuudelle.



Geometrisesti on ilmeistä, että arvio paranee, kun osavälijakoa tihennetään, ts. kun $|P| \rightarrow 0$. Tämä antaa motivaation integraalin määrittelemiseksi.

Määritelmä 4.2. Olkoon $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ rajoitettu funktio suorakulmiossa $R = [a, b] \times [c, d]$. Jos raja-arvo

$$I = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x_i \Delta y_j$$

on olemassa, niin sanotaan, että f on *integroituva* (*integrable*) joukossa R ja luku I on funktion f *integraali* (*integral*) yli joukon R . Käytetään merkintöjä

$$I = \iint_R f(x, y) dx dy = \iint_R f(x, y) dA = \iint_R f dA.$$

Geometrinen tulkinta määritelmälle on, että jos $f(x, y) \geq 0$ ja f on integroituva, niin luku

$$\iint_R f(x, y) dx dy$$

on funktion f kuvaajan ja xy -tason väliin jäävän joukon tilavuus.

Lause 4.3. Suorakulmiossa $R = [a, b] \times [c, d]$ jatkuva funktio $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ on integroituva ja

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

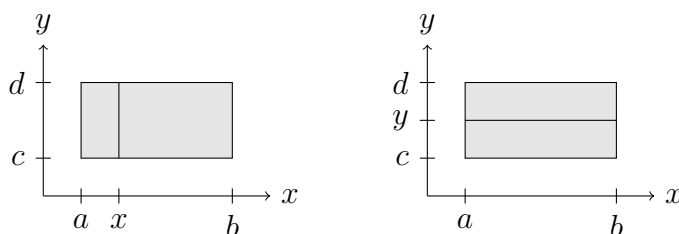
Integraalissa

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

sisempänä integroidaan y :n suhteen pitäen x :ää vakiona ja sen jälkeen tämän integroinnin tulos integroidaan x :n suhteen. Tätä havainnollistetaan vasemmanpuoleisessa kuvassa. Vastaavalla tavoin voidaan käyttää päinvastaista järjestystä

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy,$$

ks. oikeanpuoleinen kuva. Menetelmästä käytetään nimitystä *viipaloointiperiaate*.



Esimerkki 4.4. Laske

$$I = \iint_R (x^2 + y) dx dy,$$

missä $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$.

Ratkaisu. Käytetään lausetta 4.3:

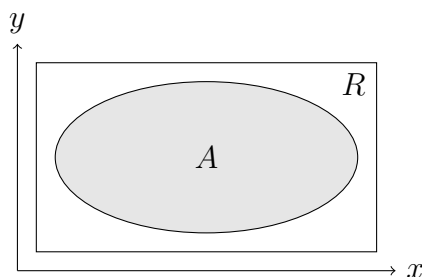
$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^2 (x^2 + y) dy dx = \int_0^1 \int_0^2 (x^2 y + \frac{1}{2} y^2) dy dx \\ &= \int_0^1 (2x^2 + 2) dx = \int_0^1 (\frac{2}{3} x^3 + 2x) dx = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Kokeile myös integroimisjärjestystä

$$\int_0^2 \int_0^1 (x^2 + y) dx dy.$$

4.2 Tasointegraali projisoituissa joukoissa

Olkkoon seuraavaksi $A \subset \mathbb{R}^2$ mikä tahansa rajoitettu joukko. Koska A on rajoitettu, niin se sisältyy johonkin suorakulmioon $R = [a, b] \times [c, d]$.



Jos $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ on A :ssa määritelty reaaliarvoinen funktio, niin sen *nollajatko* joukkoon R on funktio $f_A: R \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_A(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{jos } (x, y) \in A, \\ 0, & \text{jos } (x, y) \in R \setminus A. \end{cases}$$

Määritelmä 4.5. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ ja $A \subset R = [a, b] \times [c, d]$. Rajoitettu funktio $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ on *integroituva* joukossa A , jos f :n nollajatko f_A on integroituva suorakulmiossa R , ja tällöin funktion f *integraali yli joukon* A on

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_R f_A(x, y) dx dy.$$

f :n integraalille yli joukon A käytetään merkintöjä

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_A f(x, y) dA = \iint_A f dA.$$

Seuraavan lauseen mukaan integraali voidaan laskea sellaisten Riemannin summien raja-arvona, joihin otetaan mukaan vain ne osasuorakulmiot, jotka ovat kokonaan joukossa A .

Lause 4.6. Olkoot A , R ja f kuten määritelmässä 4.5 ja valitaan R :lle jaot kuten luvussa 4.1. Silloin f on integroituva jos ja vain jos seuraava raja-arvo on olemassa ja

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{\substack{i=1 \\ R_{ij} \subset A}}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x_i \Delta y_j. \quad (4.7)$$

Määritellään, että rajoitetulla joukolla $A \subset \mathbb{R}^2$ on *pinta-ala* $a(A)$, jos vakiofunktio 1 on integroituva joukossa A . Tällöin

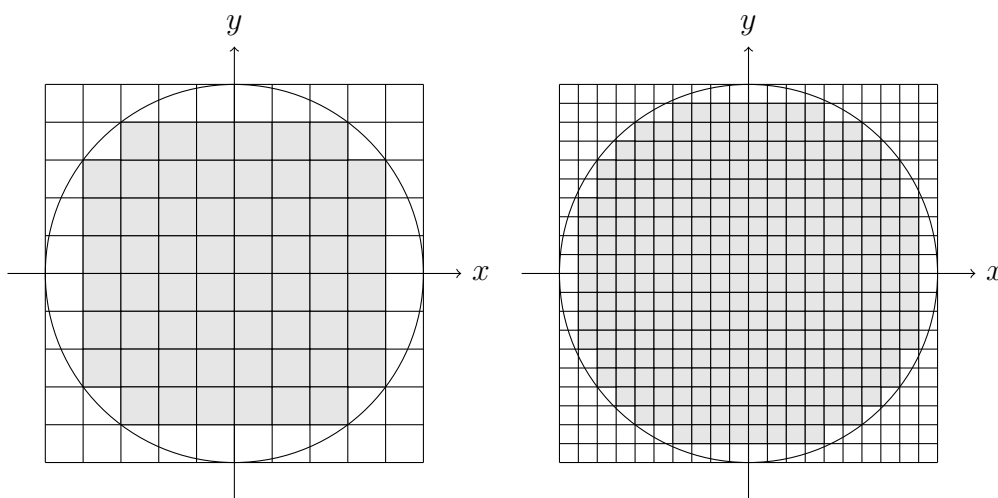
$$a(A) = \iint_A 1 dx dy. \quad (4.8)$$

Esimerkin joukosta, jolla ei ole pinta-alaa, tarjoaa

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, y \in [0, 1]\},$$

ts. yksikköneliön ne pystysuorat janat, joilla x -koordinaatti on rationaalinen.

Pinta-alan laskemista integroimalla vakiofunktioita 1 havainnollistetaan seuraavissa kuvissa, missä A on origokeskinen kiekko. Mitä tiheämpi jako peittäväällä suorakulmiolla on, sitä tarkemmin kiekon sisäpuolelle jäävien osasuorakulmioiden yhteenlaskettu pinta-ala approksimoi kiekon pinta-alaa.



Integroituvuus riippuu sekä funktion f että joukon A ominaisuuksista. Usein käytännön tilanteissa pärjätään seuraavalla tuloksella.

Lause 4.9. *Jos suljetun ja rajoitetun joukon $A \subset \mathbb{R}^2$ reuna koostuu äärellisen monesta paloittain sileästä käyrästä ja $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva, niin f on integroituva.*

Usein integraalin laskeminen perustuu integroimisjoukon projisoituvuuteen.

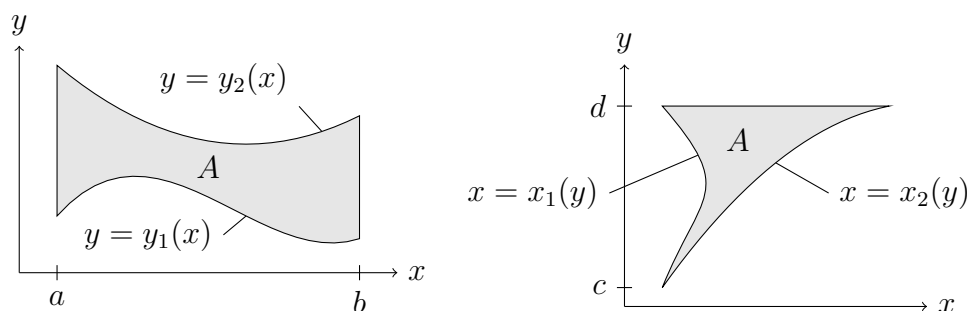
Määritelmä 4.10. $A \subset \mathbb{R}^2$ on x -projisoituva (x -simple), jos se on muotoa

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\},$$

missä y_1 ja y_2 ovat jatkuvia funktioita. $A \subset \mathbb{R}^2$ on y -projisoituva (y -simple), jos se on muotoa

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\},$$

missä x_1 ja x_2 ovat jatkuvia funktioita.



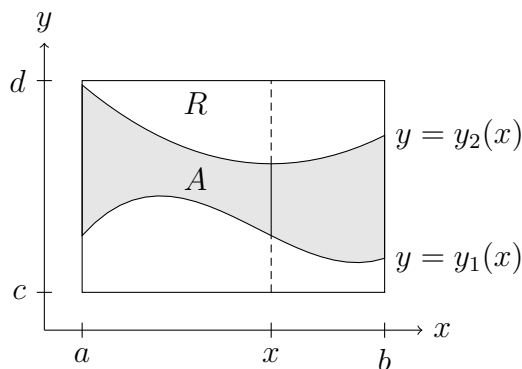
Lause 4.11. *Olkoon $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva. Jos A on x -projisoituva, niin f on integroitava ja*

$$\iint_A f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) \, dy \, dx,$$

ja jos A on y -projisoituva, niin f on integroitava ja

$$\iint_A f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) \, dx \, dy.$$

Laskemista x -projisoituvassa joukossa havainnollistetaan seuraavassa kuvassa.

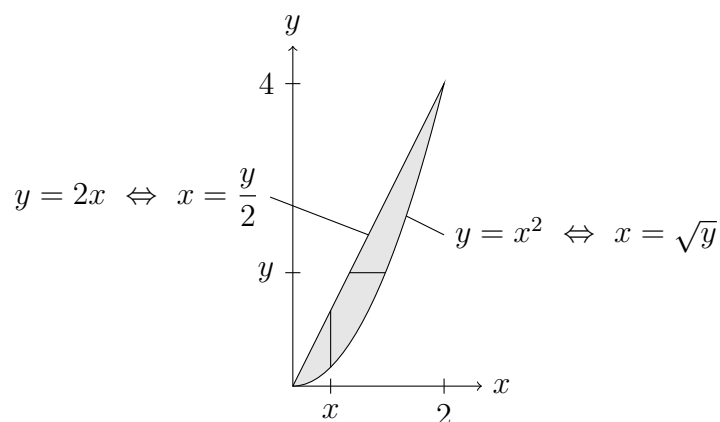


Esimerkki 4.12. Olkoon A käyrien $y = 2x$ ja $y = x^2$ rajaama rajoitettu tasojoukko. Laske

$$\iint_A (4x + 2) \, dx \, dy$$

kummassakin integroimisjärjestyksessä.

Ratkaisu. Haetaan käyrien leikkauspisteet: $2x = x^2 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ tai $x = 2$.



A on x -projisoituva, sillä

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 2], x^2 \leq y \leq 2x\}.$$

Uloimman integroimismuuttujan x rajat ovat $0 \leq x \leq 2$ ja kullakin x y :n rajat ovat $x^2 \leq y \leq 2x$ (ks. kuva):

$$\begin{aligned} \iint_A (4x + 2) \, dx \, dy &= \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4x + 2) \, dy \, dx \\ &= \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4xy + 2y) \, dx \\ &= \int_0^2 (8x^2 + 4x - (4x^3 + 2x^2)) \, dx \\ &= \int_0^2 (-4x^3 + 6x^2 + 4x) \, dx \\ &= \int_0^2 (-x^4 + 2x^3 + 2x^2) \, dx = -16 + 16 + 8 = 8. \end{aligned}$$

A on myös y -projisoituva, sillä

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 4], \frac{y}{2} \leq x \leq \sqrt{y} \right\}.$$

Uloimman integroimismuuttujan y rajat ovat $0 \leq y \leq 4$ ja kullakin y x :n

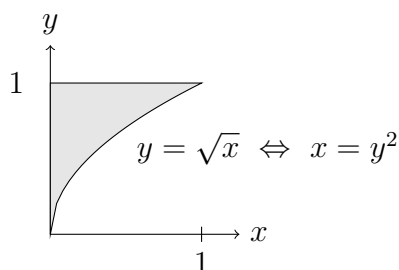
rajat ovat $y/2 \leq x \leq \sqrt{y}$ (ks. kuva):

$$\begin{aligned} \iint_A (4x + 2) dx dy &= \int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (4x + 2) dx dy \\ &= \int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (2x^2 + 2x) dy \\ &= \int_0^4 \left(2y + 2y^{1/2} - \left(\frac{1}{2}y^2 + y \right) \right) dy \\ &= \int_0^4 \left(-\frac{1}{2}y^2 + y + 2y^{1/2} \right) dy \\ &= \int_0^4 \left(-\frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{4}{3}y^{3/2} \right) dy = -\frac{32}{3} + 8 + \frac{32}{3} = 8. \end{aligned}$$

Esimerkki 4.13. Laske

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3} dy dx.$$

Ratkaisu. Funktion e^{y^3} integrointi y :n suhteen ei suoraan onnistu. Hahmotellaan kuva integroimisjoukosta A ja kokeillaan toista integroimisjärjestystä. Ulomman integroimismuuttujan x rajat ovat $0 \leq x \leq 1$ ja kullakin x y :n rajat ovat $\sqrt{x} \leq y \leq 1$, joten saadaan oheisen kuvan mukainen joukko.

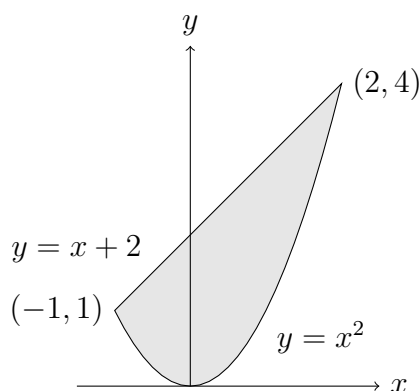


Toisessa järjestyksessä ulomman integroimismuuttujan y rajat ovat $0 \leq y \leq 1$ ja kullakin y x :n rajat ovat $0 \leq x \leq y^2$, joten

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3} dy dx &= \int_0^1 \int_0^{y^2} e^{y^3} dx dy = \int_0^1 \int_0^{y^2} x e^{y^3} dy \\ &= \int_0^1 y^2 e^{y^3} dy = \int_0^1 \frac{1}{3} e^{y^3} = \frac{e-1}{3}. \end{aligned}$$

Esimerkki 4.14. Laske paraabelin $y = x^2$ ja suoran $y = x + 2$ rajaaman tasojoukon A pinta-ala.

Ratkaisu. On laskettava funktion 1 integraali joukossa A .

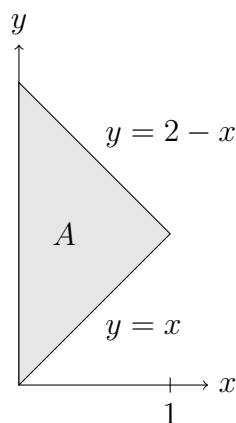


Käyrien $y = x^2$ ja $y = x + 2$ leikkauspisteet: $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ tai $x = 2$. Niinpä

$$\begin{aligned} a(A) &= \iint_A 1 \, dx \, dy = \int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} dy \, dx = \int_{-1}^2 \left[y \right]_{x^2}^{x+2} dx \\ &= \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) \, dx = \dots = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Esimerkki 4.15. Laske sen joukon tilavuus V , jota rajoittaa ylhäältä paraboloidi $z = x^2 + y^2$ ja alhaalta xy -tasossa suorien $y = x$, $x = 0$ ja $y + x = 2$ rajaama rajoitettu joukko.

Ratkaisu. On laskettava funktion $f(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0$ integraali em. suorien rajaamassa joukossa A .



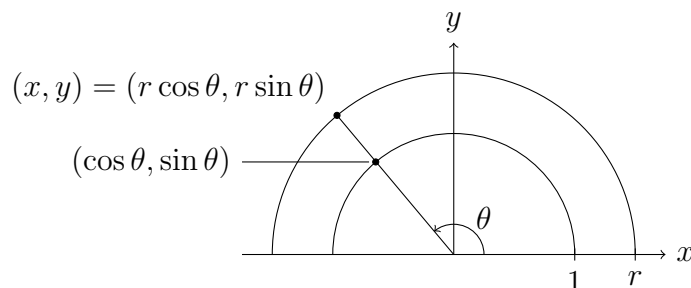
Suorien $y = x$ ja $y = 2 - x$ leikkauspiste on $(1, 1)$, joten A on kuvan mukainen

kolmiojoukko.

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_A (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^1 \int_x^{2-x} (x^2 + y^2) dy dx \\
 &= \int_0^1 \int_x^{2-x} \left(x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right) dx \\
 &= \int_0^1 \left(x^2(2-x) + \frac{1}{3}(2-x)^3 - \left(x^3 + \frac{1}{3}x^3 \right) \right) dx \\
 &= \int_0^1 \left(-\frac{8}{3}x^3 + 4x^2 - 4x + \frac{8}{3} \right) dx = \dots = \frac{4}{3}.
 \end{aligned}$$

4.3 Tasointegraalin laskeminen napakoordinaateilla

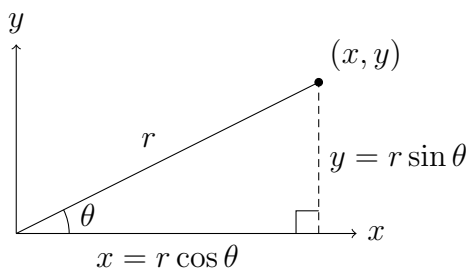
Tason \mathbb{R}^2 piste (x, y) voidaan ilmaista *napakoordinaattien* (*polar coordinates*) r (etäisyys origosta) ja θ (kulma positiivisesta x -akselista vastapäivään) avulla. Kosinin ja sinin määritelmien mukaan kulmaa θ vastaava kehäpiste yksikköympyrällä on $(\cos \theta, \sin \theta)$, joten r -säteisellä ympyrällä kehäpiste on $(x, y) = r(\cos \theta, \sin \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$.



x - ja y -koordinaattien ja napakoordinaattien r ja θ välinen riippuvuus on siis

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 x &= r \cos \theta \\
 y &= r \sin \theta
 \end{aligned}
 } \quad (4.16)$$

Tapauksessa $0 < \theta < \pi/2$ riippuvuudet voidaan lukea myös seuraavan kuvan suorakulmaisesta kolmiosta:



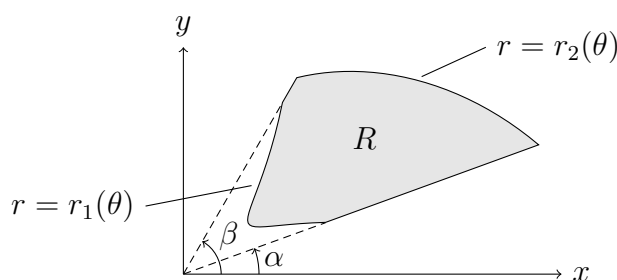
Käänteiseen suuntaan kaavat (4.16) voidaan kirjoittaa

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \theta = \frac{y}{x} \quad (\text{kun } x \neq 0) \end{cases} \quad (4.17)$$

Jälkimmäisestä voidaan laskea suoraan $\theta = \arctan(y/x)$ silloin, kun $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Muissa tapauksissa kulman osuminen oikeaan neljännekseen tulee erikseen pohtia. θ ei ole yksikäsitteinen, sillä arvoilla $\theta + n2\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) saadaan sama piste. Tilanteesta ja sovelluksesta riippuen θ on tapana valita väliltä $[0, 2\pi]$ tai $[-\pi, \pi]$.

Lause 4.18. Olkoon $R \subset \mathbb{R}^2$ tasojoukko, joka koostuu niistä pisteistä, joille napakoordinaateissa (r, θ) ilmaistuna pätee $\alpha \leq \theta \leq \beta$ ja $r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta)$, missä r_1 ja r_2 ovat jatkuvia funktioita. Jos $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva, niin

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$



$f(x, y)$:n lausekkeeseen on siis sijoitettava muunnokset (4.16) ja kerrottava napakoordinaattikuvauksen $T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ Jacobin determinantin itseisarvolla (eli pinta-alan muunnossuhteella)

$$|J_T(r, \theta)| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = r.$$

Esimerkki 4.19. Olkoon $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x, y \geq 0\}$ ja $f(x, y) = xy$. Laske

$$\iint_R f dx dy.$$

Ratkaisu. R on joukko, jonka pisteille napakoordinaateissa ilmaistuna pätee

$1 \leq r \leq 2$ ja $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Piirrä kuva! Niinpä

$$\begin{aligned} \iint_R f \, dx \, dy &= \int_0^{\pi/2} \int_1^2 r \cos \theta \cdot r \sin \theta \cdot r \, dr \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \int_1^2 \frac{1}{4} r^4 \, d\theta \\ &= \frac{15}{4} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \, d\theta = \frac{15}{4} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin^2 \theta \, d\theta = \frac{15}{8}. \end{aligned}$$

Jos sisäkkäisillä integraaleilla on vakiorajat ja integroitava funktio voidaan separoida muotoon $f(x, y) = g(x)h(y)$, niin

$$\boxed{\int_a^b \int_c^d g(x)h(y) \, dy \, dx = \left(\int_a^b g(x) \, dx \right) \left(\int_c^d h(y) \, dy \right)}. \quad (4.20)$$

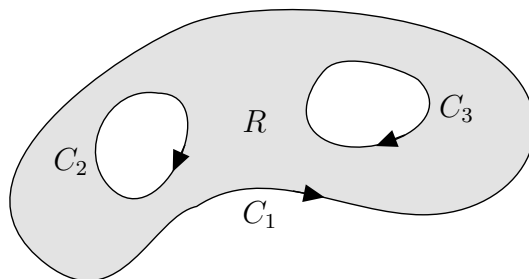
Tämä nopeuttaa usein laskemista. Esimerkiksi esimerkissä 4.19 voitaisiin kirjoittaa suoraan

$$\iint_R f \, dx \, dy = \left(\int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \, d\theta \right) \left(\int_1^2 r^3 \, dr \right) = \dots$$

5 Greenin lause ja Gaussin lause tasossa

Olkoon seuraavassa $R \subset \mathbb{R}^2$ suljettu ja rajoitettu tasojoukko, jonka reuna $C = \partial R$ koostuu yhdestä tai useammasta paloittain sileästä yksinkertaisesta suljetusta käyrästä C_1, C_2, \dots, C_n . Oletetaan lisäksi, että reuna on *positiivisesti suunnistettu*, mikä tarkoittaa, että parametrisoinnin suuntaan kuljettaessa joukko jää vasemmalle. Tällöin merkitään

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \dots + \int_{C_n} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$



Tässä merkinnällä \oint_C korostetaan käyräintegroinnin tapahtuvan yli suljetun käyrän C positiiviseen kiertosuuntaan.

Luvussa 2.8 vektorikentän käyräintegraalin motivaatio tuli voimakentän \mathbf{F} tekemän työn laskemisesta. Haetaan käyräintegraalille muita fysikaalisia merkityksiä siinä tapauksessa, että \mathbf{F} tulkitaan tason virtauskentäksi (yksikkönä m/s). Käyräintegraalissa

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds \quad (5.1)$$

$\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ on kentän \mathbf{F} skalaarikomponentti tangenttivektorin \mathbf{T} suuntaan eli positiiviseen kiertosuuntaan. Integraalissa siis ”summataan” käyrän suuntaisen virtauksen nopeus käyrän ympäri ja käyräintegraali (5.1) mittaa kokonaisvirtausnopeutta käyrän C ympäri positiiviseen kiertosuuntaan (yksikkönä m^2/s). Integraalia kutsutaankin kentän \mathbf{F} *kierroksi* (*circulation*) suljetun käyrän C ympäri.

Vastaavasti voidaan tutkia integraalia

$$\Phi = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds, \quad (5.2)$$

missä \mathbf{n} on reunakäyrän C *ulkoinen yksikkönormaali* (*outer unit normal*), ts. se yksikkönormaali, joka osoittaa joukosta R pois päin. Tällöin $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ on kentän \mathbf{F} skalaarikomponentti normaalivektorin \mathbf{n} suuntaan eli kohtisuoraan joukosta R pois päin. Integraalissa siis ”summataan” reunakäyrän C läpi menevä virtausnopeus ja käyräintegraali (5.2) mittaa kokonaisvirtausnopeutta joukosta R pois päin (yksikkönä m^2/s). Integraalia kutsutaankin kentän \mathbf{F} *vuoksi* (*flux*) reunan $C = \partial R$ läpi joukosta R pois päin.

5.1 Greenin lause

Lause 5.3 (Greenin lause). *Olkoon $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ jatkuvasti differentioituva joukossa R ja olkoon $C = \partial R$ joukon R positiivisesti suunnistettu reunakäyrä. Tällöin*

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Todistus. Todistetaan lause osoittamalla, että

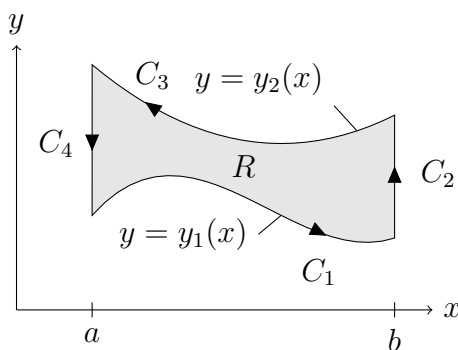
$$\oint_C P dx = - \iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \quad \text{ja} \quad \oint_C Q dy = \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy. \quad (5.4)$$

Väite seuraa näistä, sillä lauseen 2.73 mukaan

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C P dx + \oint_C Q dy.$$

A. Todistetaan ensin vain tapaus, jossa R on sekä x - että y -projisoituva. Koska R on x -projisoituva, niin se on muotoa

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}.$$



Reunakäyrän C positiivinen suunnistus ja jako neljään sileään käyrrään C_1 , C_2 , C_3 ja C_4 on merkitty kuvaan. Lasketaan ensin

$$\oint_C P dx = \oint_{C_1} P dx + \oint_{C_2} P dx + \oint_{C_3} P dx + \oint_{C_4} P dx.$$

Käyrillä C_2 ja C_4 $dx = 0$, joten integraalit niiden yli ovat nolliä. Parametrisoidaan C_1 ja C_3 :

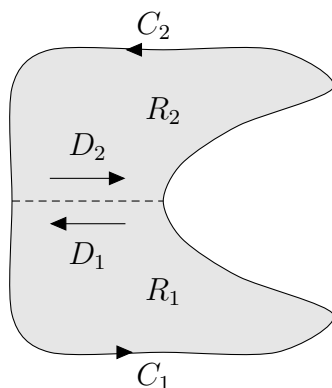
$$\begin{aligned} C_1: \mathbf{r}_1(x) &= (t, y_1(t)), \quad a \leq t \leq b, \\ -C_3: \mathbf{r}_3(x) &= (t, y_2(t)), \quad a \leq t \leq b. \end{aligned}$$

\mathbf{r}_3 on siis C_3 :n vastakäyrän parametrisointi. Näille parametrisoinneille $dx = dt$, joten

$$\begin{aligned} \oint_C P dx &= \int_a^b P(t, y_1(t)) dt - \int_a^b P(t, y_2(t)) dt \\ &\stackrel{x=t}{=} - \int_a^b (P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))) dx \\ &= - \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} P(x, y) dy dx \\ &= - \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy dx \\ &= - \iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dx dy. \end{aligned}$$

Jälkimmäinen yhtälöistä (5.4) todistetaan vastaavalla tavoin y -projisoituvuutta hyödyntäen.

B. Tarkastellaan sitten hieman yleisempää tapausta, jossa R voidaan jakaa äärellisen moneen osaan, jotka kaikki ovat sekä x - että y -projisoituvia.



Otetaan esimerkiksi kuvan mukainen joukko R , joka voidaan jakaa sekä x - että y -projisoituviiin osiin R_1 ja R_2 . Jaetaan R :n positiivisesti suunnistettu reunakäyrä ∂R osiin C_1 ja C_2 ja valitaan R :n osiin jakavalle käyrälle (katkoviiva) suunnistukset D_1 ja D_2 . Osan R_1 positiivisesti suunnistetuksi reunakäyräksi tulee siten $\partial R_1 = C_1 \cup D_1$ ja R_2 :n positiivisesti suunnistetuksi reunakäyräksi $\partial R_2 = C_2 \cup D_2$. Käyräintegraalit kumoutuvat osien yhteisellä reunakäyrällä, ts.

$$\int_{D_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{D_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

joten

$$\begin{aligned} \oint_{\partial R} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{D_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{D_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \sum_{i=1}^2 \oint_{\partial R_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &\stackrel{\mathbf{A}}{=} \sum_{i=1}^2 \iint_{R_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned}$$

C. Lauseen formuloinnissa esitetyn yleisen tapauksen todistus on syvällisempi ja sen sivuutamme. \square

Esimerkki 5.5. Lasketaan esimerkki 2.71 Greenin lausetta käyttäen, ts. kentän $\mathbf{F}(x, y) = (y, -x)$ tekemä työ, kun sen vaikutuspiste kiertää joukon

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x, -2 \leq x \leq 1\}$$

reunan ∂R myötäpäivään.

Ratkaisu. Tässä

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -1 - 1 = -2.$$

Greenin lause antaa käyräintegraalin positiiviseen kiertosuuntaan, joten etumerkki on vaihdettava:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial R} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= - \iint_R (-2) dx dy \\ &= 2 \int_{-2}^1 \int_{x^2-1}^{1-x} dy dx = 2 \int_{-2}^1 (1 - x - x^2 + 1) dx = 9. \end{aligned}$$

Esimerkki 5.6. Laske kentän $\mathbf{F}(x, y) = (e^x + y^2, \sin(y^2) - x^2)$ käyräintegraali joukon

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, y \geq 0\}$$

reunan yli positiiviseen kiertosuuntaan.

Ratkaisu. Lasketaan

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2x - 2y$$

ja käytetään napakoordinaatteja:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial R} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= -2 \iint_R (x + y) dx dy = -2 \int_0^\pi \int_1^3 (r \cos \theta + r \sin \theta) r dr d\theta \\ &= -2 \left(\int_0^\pi (\cos \theta + \sin \theta) d\theta \right) \left(\int_1^3 r^2 dr \right) = -2 \cdot 2 \cdot \frac{26}{3} = -\frac{104}{3}. \end{aligned}$$

Näissä esimerkeissä Greenin lauseella muunnettiin hankala käyräintegraali tasointegraaliksi. Seuraavassa sovelluksessa menetellään toisin päin: käyräintegraali laskemalla saadaan pinta-ala (eli vakiofunktion 1 tasointegraali).

Lause 5.7. Joukon R pinta-ala saadaan laskemalla

$$a(R) = - \oint_{\partial R} y dx = \oint_{\partial R} x dy.$$

Todistus. Jos $P(x, y) = -y$, niin yhtälöiden (5.4) mukaan

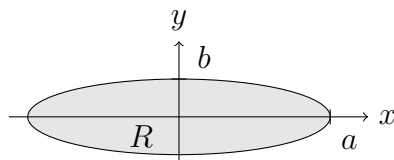
$$- \oint_{\partial R} y dx = \oint_{\partial R} P dx = - \iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \iint_R dx dy = a(R).$$

Toinen osa väitteestä saadaan samaan tapaan tarkastelemalla komponenttia $Q(x, y) = x$. \square

Esimerkki 5.8. Laske ellipsijoukon

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

pinta-ala.



Ratkaisu. Eräs reunaellipsin $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ positiivinen parametrisointi on $\mathbf{r}(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ (ks. esimerkki 2.16). Lisäksi $dy = b \cos t dt$, joten

$$a(R) = \oint_{\partial R} x dy = \int_0^{2\pi} a \cos t b \cos t dt = ab \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \pi ab.$$

5.2 Gaussin lause tasossa

Greenin lauseella kierto (5.1) muunnettiin tasointegraaliksi. Johdetaan seuraavassa keino muuntaa myös vuo (5.2) tasointegraaliksi.

Olkoot \mathbf{F} ja R kuten Greenin lauseessa ja olkoon \mathbf{n} reunakäyrän $C = \partial R$ ulkoinen yksikkönormaali. Jos $\mathbf{T} = (T_1, T_2)$ on R :n reunakäyrän positiivisen suunnistuksen antama yksikkötangentti, niin oikean käden säännön mukaan

$$\mathbf{n} = \mathbf{T} \times \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ T_1 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (T_2, -T_1).$$

Niinpä

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds &= \oint_C (P, Q) \cdot (T_2, -T_1) ds \\ &= \oint_C (-Q, P) \cdot (T_1, T_2) ds \\ &= \oint_C (-Q, P) \cdot d\mathbf{r} \\ &\stackrel{\text{Green}}{=} \iint_R \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA \\ &= \iint_R \nabla \cdot \mathbf{F} dA. \end{aligned}$$

Greenin lauseen avulla saatiin siis todistettua:

Lause 5.9 (Gaussin lause tasossa). *Olkoon \mathbf{F} jatkuvasti differentioituva joukossa $R \subset \mathbb{R}^2$, $C = \partial R$ joukon R reunakäyrä ja \mathbf{n} ulkoinen yksikkönormaali. Tällöin*

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_R \nabla \cdot \mathbf{F} \, dx \, dy.$$

Esimerkki 5.10. Olkoon $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$ ja $\mathbf{F}(x, y) = (x^3, y^3)$. Laske vuo

$$\Phi = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds$$

sekä suoraan että Gaussin lauseen avulla.

Ratkaisu. *Suoraan.* Reunakäyrän eräs positiivinen parametrisointi on $\mathbf{r}(t) = (3 \cos t, 3 \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ ja ulkoinen yksikkönormaali

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{3}(x, y).$$

Lisäksi $\|\mathbf{r}'(t)\| = \|(-3 \sin t, 3 \cos t)\| = 3$, joten

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_0^{2\pi} (27 \cos^3 t, 27 \sin^3 t) \cdot \frac{1}{3}(3 \cos t, 3 \sin t) \cdot 3 \, dt \\ &= 81 \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t) \, dt = \frac{243}{2} \pi, \end{aligned}$$

missä $\cos^4 t$:n ja $\sin^4 t$:n integroinnin yksityiskohdat sivuutetaan (ks. taulukot).

Gaussin lauseen avulla. $\nabla \cdot \mathbf{F} = 3x^2 + 3y^2$, joten siirtymällä napakoordinaatteihin saadaan

$$\Phi = \iint_R 3(x^2 + y^2) \, dx \, dy = 3 \int_0^{2\pi} \int_0^3 r^2 r \, dr \, d\theta = 3 \cdot 2\pi \int_0^3 \frac{1}{4} r^4 = \frac{243}{2} \pi.$$

6 \mathbb{R}^3 :n pinnoista ja joukoista

Luvussa 7 määritellään yleisesti, mitä tarkoitamme xyz -avaruuden (eli \mathbb{R}^3 :n) pinnalla. Kerrataan kuitenkin ensin joitakin peruspintoja ja joukkoja. Monissa seuraavista esimerkeistä on tärkeää tunnistaa seuraavat lausekkeet:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} &= \text{etäisyys origosta} \\ \sqrt{x^2 + y^2} &= \text{etäisyys } z\text{-akselista} \end{aligned} \tag{6.1}$$

\mathbb{R}^3 :n osajoukkoja määriteltäessä ilmoitetaan usein pelkkä joukon määrittävä yhtälö tai epäyhtälö. Esimerkiksi puhutaan joukosta $x^2 + y^2 + z^2 < 2$, kun tarkkaan ottaen tarkoitetaan joukkoa $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 2\}$.

6.1 Paraboloidi ja kartio

Jatkuvan funktion $z = z(x, y)$ kuvaaja on pinta. Esimerkiksi pinnan

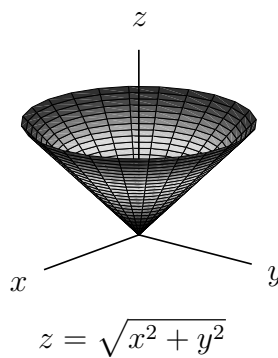
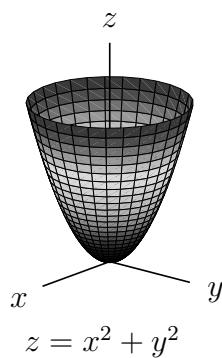
$$z = x^2 + y^2$$

z -koordinaatti on etäisyyden neliö z -akselista, joten kyseessä on *paraboloidi*.

Pinnalle

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

z -koordinaatti on etäisyys z -akselista, joten kyseessä on *kartio*.



6.2 Pallo ja sylinteri

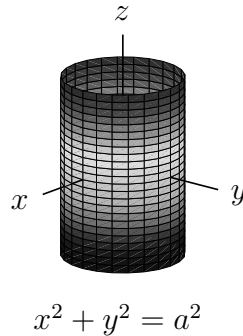
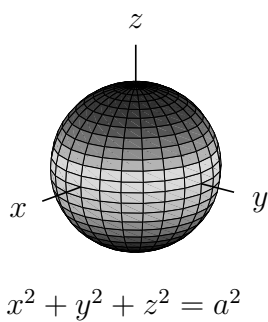
Olkoon $a > 0$. Joukon

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

pisteiden (x, y, z) etäisyys origosta on vakio a , joten kyseessä on a -säteinen *pallopinta*. Joukolle

$$x^2 + y^2 = a^2$$

etäisyys z -akselista on vakio a , joten kyseessä on a -säteinen *sylinteripinta*.



Joukko

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$$

koostuu pisteistä, joiden etäisyys origosta on $\leq a$, joten kyseessä on a -säteinen *suljettu pallo*. Joukko

$$x^2 + y^2 \leq a^2$$

koostuu pisteistä, joiden etäisyys z -akselista on $\leq a$, joten kyseessä on a -säteinen *umpinainen sylinteri*.

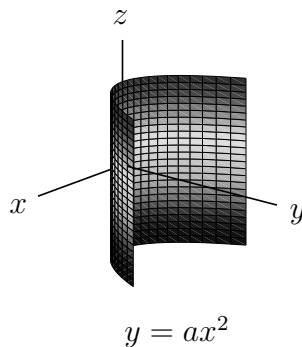
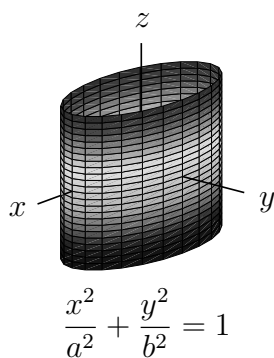
Yleisesti ottaen sylinteri voi olla mikä tahansa pystysuorista suorista (tai niiden osista) koostuva joukko. Esimerkkeinä *elliptinen sylinteri*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

jonka leikkaus xy -tason kanssa on ellipsi, tai *paraboloidinen sylinteri*

$$y = ax^2,$$

jonka leikkaus xy -tason kanssa on paraabeli.



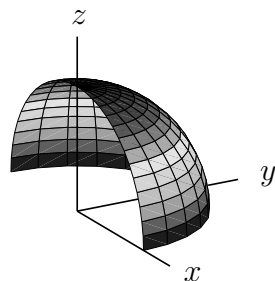
Esimerkki 6.2. Joukko

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2, y \geq 0, z \geq 0\}$$

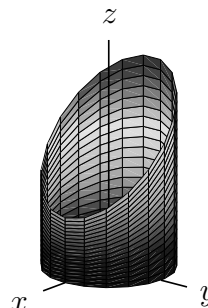
on $\sqrt{2}$ -säteisen pallopinnan osa, jota rajoittavat ehdot $y \geq 0$ ja $z \geq 0$. Kyseessä on pallopinnan neljännes. Vastaavasti joukko

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, y \geq 0, z \geq 0\}$$

on $\sqrt{2}$ -säteisen suljetun pallon se neljännes, jossa $y \geq 0$ ja $z \geq 0$.



Joukko A.



Joukko C.

Esimerkki 6.3. Joukko

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4, 0 \leq z \leq 4 - x\}$$

on 2-säteisen sylinteripinnan osa, jota rajoittaa alhaalta pinta $z = 0$ eli xy -taso ja ylhäältä pinta $z = 4 - x$ eli taso. Joukko

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 4 - x\}$$

on vastaava 2-säteisen umpinaisen sylinterin osa.

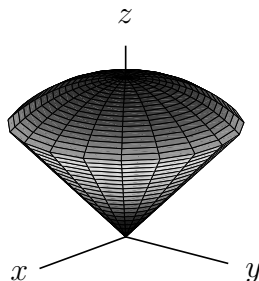
Esimerkki 6.4. Joukkoa

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}$$

rajoittaa alhaalta kartiopinta $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ja ylhäältä pinta $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ eli 1-säteinen pallopinta $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Näiden pintojen leikkauskäyrällä

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &= \sqrt{1 - x^2 - y^2} \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 &= 1 - x^2 - y^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Pinnat leikkaavat siis xy -tason $1/\sqrt{2}$ -säteisen origokeskisen ympyrän kohdalla.

Joukko E .

7 Pintaintegraali

Tässä luvussa tutkitaan parametrisoituja pintoja ja määritellään pintaintegraali skalaari- ja vektorikentille.

7.1 Parametrisoitu pinta

Käyrän $C \subset \mathbb{R}^3$ parametrisoinnin $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrijoukko $[a, b]$ on 1-ulotteinen. Siten myös kuvajoukko $C = \mathbf{r}([a, b])$ on tyypillisesti 1-ulotteinen ja C :n pisteiden $\mathbf{r}(t)$ ilmoittamiseen tarvitaan täsmälleen 1 koordinaatti $t \in [a, b]$.

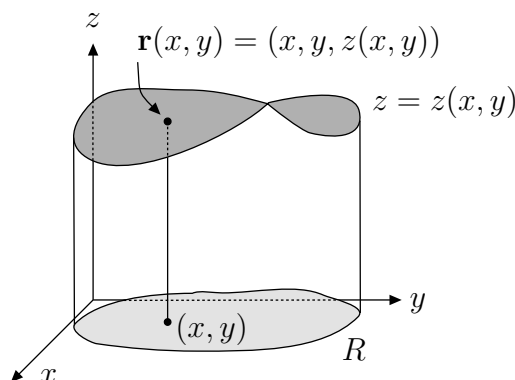
Määritelmä 7.1. Olkoon $R \subset \mathbb{R}^2$ suljettu ja rajoitettu tasojoukko, jonka reuna ∂R koostuu äärellisen monesta paloittain sileästä yksinkertaisesta suljetusta käyrästä. *Parametrisoitu pinta (parametric surface)* on kuvajoukko $S = \mathbf{r}(R)$, missä $\mathbf{r} : R \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ on jatkuva kuvaus. Kuvausta \mathbf{r} kutsutaan pinnan S parametrisoinniksi.

Tässä pinnan $S \subset \mathbb{R}^3$ määritelmässä ideana on, että parametrijoukko $R \subset \mathbb{R}^2$ on 2-ulotteinen. Siten kuvajoukko $S = \mathbf{r}(R)$ on tyypillisesti 2-ulotteinen ja pisteen $\mathbf{r}(u, v)$ ilmoittamiseen tarvitaan täsmälleen 2 koordinaattia $(u, v) \in R$.

Esimerkki 7.2. Jatkuvan funktion $z = z(x, y)$ kuvaaja on parametrisoitu pinta, jonka parametrisoinniksi käy

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, z(x, y)), \quad (x, y) \in R.$$

Tässä parametreina käytetään siis koordinaatteja x ja y .



Edellä käyrän $\mathbf{r}(t)$ kuvajoukon C ja pinnan $\mathbf{r}(u, v)$ kuvajoukon S ulotteisuuksista puhuttaessa on huomattava esimerkiksi seuraavanlaiset tilanteet. Dimension täsmällinen määrittely jätetään mittateorian kurssille.

- Yhden muuttujan funktio $\mathbf{r}(t) = (0, 0, 0)$ on jatkuva, mutta kuvajoukko $C = \{(0, 0, 0)\}$ on 0-ulotteinen.
- On olemassa jatkuva funktio $\mathbf{r}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, jolle kuvajoukko on 3-ulotteinen yksikkökuutio $[0, 1]^3$ (Peanon käyrä, ks. [2]).
- Funktio $\mathbf{r}(u, v) = (0, 0, 0)$ on jatkuva, mutta kuvajoukko $S = \{(0, 0, 0)\}$ 0-ulotteinen.
- Funktio $\mathbf{r}(u, v) = (uv, 0, 0)$ on jatkuva, mutta kuvajoukko S on \mathbb{R}^3 :n x -akseli, joka on 1-ulotteinen.

Käyrälle sileys (\mathbf{r}' on jatkuva ja $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ kaikilla t) takaa sen, että käyrä näyttää sileältä ja on 1-ulotteinen. Pinnalle sileys määritellään seuraavasti:

Määritelmä 7.3. Pinta $S = \mathbf{r}(R)$ on *sileä* (*smooth*), jos

- \mathbf{r} on itseään leikkaamaton (eli injektio) ja
- \mathbf{r} :n komponenttifunktioiden $x(u, v)$, $y(u, v)$ ja $z(u, v)$ kaikki osittaisderivaatat ovat jatkuvia ja \mathbf{r} :n *osittaisderivaattavektorit*

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \quad \text{ja} \quad \mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

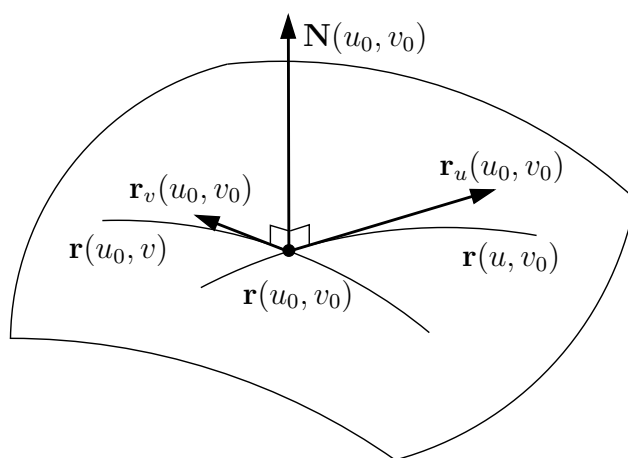
ovat lineaarisesti riippumattomat (ts. eivät ole nollavektoreita eivätkä yhdensuuntaisia, ts. $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$) kaikilla $(u, v) \in R$.

Pinta on *paloittain sileä*, jos se voidaan jakaa äärellisen moneen sileään osaan.

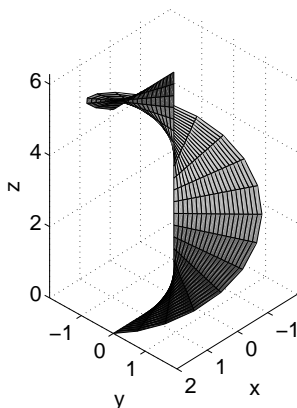
Geometrisesti $\mathbf{r}_u(u_0, v_0)$ on käyrän $\mathbf{r}(u, v_0)$ tangenttivektori ja $\mathbf{r}_v(u_0, v_0)$ käyrän $\mathbf{r}(u_0, v)$ tangenttivektori pisteessä $\mathbf{r}(u_0, v_0)$. Jos pinta on sileä, niin $\mathbf{r}_u(u, v)$ ja $\mathbf{r}_v(u, v)$ eivät ole yhdensuuntaiset ja siten virittävät pinnan S jokaiseen pisteeseen $\mathbf{r}(u, v)$ tangenttitason T . Tällä tangenttitasolla on *normaalivektori*

$$\mathbf{N}(u, v) = \mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v).$$

Sileyden määritelmässä osittaisderivaattojen jatkuvuus takaa, että normaalivektori $\mathbf{N}(u, v)$ on jatkuva ja siten pinnalla ei voi olla äkillisiä taitoksia.



Esimerkki 7.4. Tarkastellaan parametrisointia $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$, $0 \leq u \leq 2$, $0 \leq v \leq 2\pi$. Jos kiinnitetään $0 \leq u \leq 2$, niin parametrisointi piirtää u -säteisen ruuvikäyrän (vrt. esimerkki 2.15). Kun yhdistetään tällaiset käyrät arvoilla $0 \leq u \leq 2$, niin saadaan kuvan mukainen *ruuvipinta*.



Nyt $\mathbf{r}_u(u, v) = (\cos v, \sin v, 0)$ ja $\mathbf{r}_v(u, v) = (-u \sin v, u \cos v, 1)$, joten

$$\mathbf{N}(u, v) = \mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & u \cos v & 1 \end{vmatrix} = (\sin v, -\cos v, u).$$

Siten pinnalla on esimerkiksi pisteessä $\mathbf{r}(1, \pi/2) = (0, 1, \pi/2)$ normaalivektori $\mathbf{N}(1, \pi/2) = (1, 0, 1)$.

7.2 Pinnan pinta-ala

Tarkastellaan pintaa $S = \mathbf{r}(R)$. Kuten tasointegraalin määritelmässä luvussa 4, peitetään R suorakulmiolla, joka jaetaan osasuorakulmioihin. Otetaan mukaan ne osasuorakulmiot R_{ij} , $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, joille $R_{ij} \subset R$. Merkitään R_{ij} :n vasenta alakulmaa (u_{ij}^*, v_{ij}^*) . Suorakulmion R_{ij} leveys on Δu_i ja korkeus Δv_j , joten sen oikea yläkulma on $(u_{ij}^* + \Delta u_i, v_{ij}^* + \Delta v_j)$ ja pinta-ala on $\Delta u_i \Delta v_j$. Käyrälle $\mathbf{r}(u, v_{ij}^*)$ pätee derivaatan määritelmän nojalla

$$\mathbf{r}_u(u_{ij}^*, v_{ij}^*) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(u_{ij}^* + \Delta u, v_{ij}^*) - \mathbf{r}(u_{ij}^*, v_{ij}^*)}{\Delta u},$$

joten pienillä Δu_i pätee

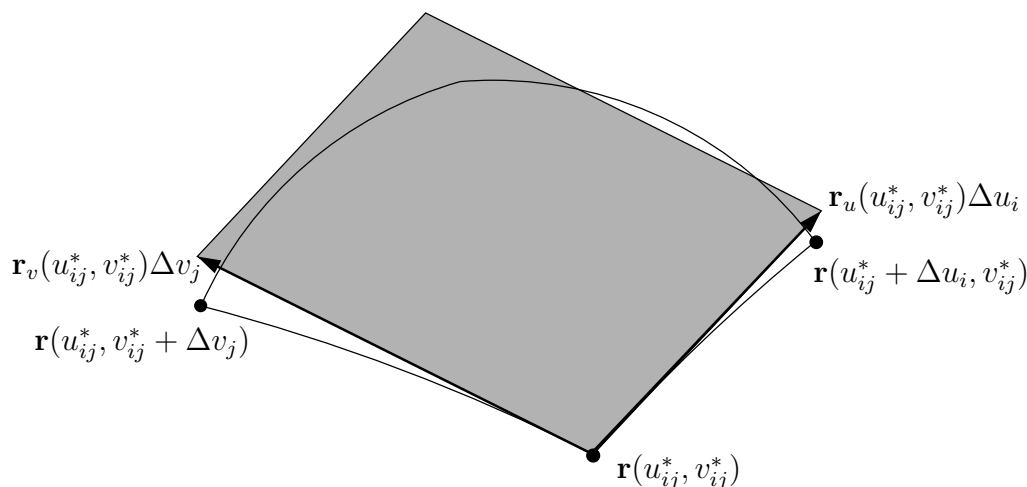
$$\frac{\mathbf{r}(u_{ij}^* + \Delta u_i, v_{ij}^*) - \mathbf{r}(u_{ij}^*, v_{ij}^*)}{\Delta u_i} \approx \mathbf{r}_u(u_{ij}^*, v_{ij}^*).$$

Vastaava pätee myös käyrälle $\mathbf{r}(u_{ij}^*, v)$, joten saadaan arviot

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u_{ij}^* + \Delta u_i, v_{ij}^*) - \mathbf{r}(u_{ij}^*, v_{ij}^*) &\approx \mathbf{r}_u(u_{ij}^*, v_{ij}^*) \Delta u_i \quad \text{ja} \\ \mathbf{r}(u_{ij}^*, v_{ij}^* + \Delta v_j) - \mathbf{r}(u_{ij}^*, v_{ij}^*) &\approx \mathbf{r}_v(u_{ij}^*, v_{ij}^*) \Delta v_j. \end{aligned}$$

Tässä toistettiin oleellisesti samat arviot kuin yhtälössä (2.38). Muistetaan, että vektoreiden \mathbf{a} ja $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ virittämän suunnikkaan pinta-ala on $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$. Niinpä suorakulmion R_{ij} kuvan $S_{ij} = \mathbf{r}(R_{ij})$ pinta-ala ΔS_{ij} voidaan arvioida vektoreiden $\mathbf{r}_u(u_{ij}^*, v_{ij}^*) \Delta u_i$ ja $\mathbf{r}_v(u_{ij}^*, v_{ij}^*) \Delta v_j$ virittämän suunnikkaan pinta-alalla seuraavasti:

$$\begin{aligned} \Delta S_{ij} &\approx \|(\mathbf{r}_u(u_{ij}^*, v_{ij}^*) \Delta u_i) \times (\mathbf{r}_v(u_{ij}^*, v_{ij}^*) \Delta v_j)\| \\ &= \|\mathbf{r}_u(u_{ij}^*, v_{ij}^*) \times \mathbf{r}_v(u_{ij}^*, v_{ij}^*)\| \Delta u_i \Delta v_j \\ &= \|\mathbf{N}(u_{ij}^*, v_{ij}^*)\| \Delta u_i \Delta v_j. \end{aligned} \tag{7.5}$$



Kuvan S_{ij} pinta-ala ΔS_{ij} on siten $\|\mathbf{N}(u_{ij}^*, v_{ij}^*)\|$ -kertainen suorakulmion R_{ij} pinta-alaan $\Delta u_i \Delta v_j$ verrattuna. Koko pinnan S pinta-alalle saadaan nyt arvio

$$\sum_{\substack{i=1 \\ R_{ij} \subset R}}^m \sum_{j=i}^n \|\mathbf{N}(u_{ij}^*, v_{ij}^*)\| \Delta u_i \Delta v_j.$$

Yhtälön (4.7) mukaisesti rajalla $|P| = \max\{\text{diam}(R_{ij})\} \rightarrow 0$ päädytään seuraavaan määritelmään:

Määritelmä 7.6. Sileän pinnan $S = \mathbf{r}(R)$ pinta-ala on

$$a(S) = \iint_R \|\mathbf{N}(u, v)\| \, du \, dv.$$

$\|\mathbf{N}(u, v)\|$ on pinta-alan *suurennussuhde* pisteessä (u, v) .

Esimerkki 7.7. Laske esimerkin 7.4 ruuvipinnan S pinta-ala.

Ratkaisu. $\|\mathbf{N}(u, v)\| = \sqrt{\sin^2 v + \cos^2 v + u^2} = \sqrt{1 + u^2}$, joten pinta-ala on

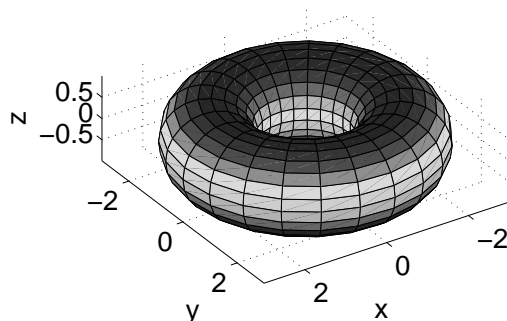
$$\begin{aligned} a(S) &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{1 + u^2} \, du \, dv = \left(\int_0^{2\pi} dv \right) \left(\int_0^2 \sqrt{1 + u^2} \, du \right) \\ &= 2\pi \int_0^2 \sqrt{1 + u^2} \, du = 2\pi \int_0^2 \left(\frac{u}{2} \sqrt{1 + u^2} + \frac{1}{2} \ln(u + \sqrt{1 + u^2}) \right) \\ &= 2\pi \left(\sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{5}) \right) \approx 18,6. \end{aligned}$$

Tässä integraalifunktio on sijoittamalla johdettua taulukkokirjatietoa, joka voidaan helposti tarkastaa derivoimalla.

Esimerkki 7.8. Olkoon S toruspinta, jossa ”putken” säde on R_2 ja putken poikkileikkausten keskipisteiden etäisyys origosta on R_1 , missä $R_1 > R_2 > 0$. Tällainen toruspinta voidaan parametrisoida asettamalla

$$\mathbf{r}(u, v) = (R_1 + R_2 \cos u) \cos v \mathbf{i} + (R_1 + R_2 \cos u) \sin v \mathbf{j} + R_2 \sin u \mathbf{k},$$

$0 \leq u, v \leq 2\pi$. Kuvassa $R_1 = 2$ ja $R_2 = 1$. Miten parametrisointi toimii? Tutki esimerkiksi, millainen käyrä muodostuu, kun $v = 0$ ja $0 \leq u \leq 2\pi$, tai kun $u = 0$ ja $0 \leq v \leq 2\pi$.



Nyt

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(u, v) &= \mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -R_2 \sin u \cos v & -R_2 \sin u \sin v & R_2 \cos u \\ -(R_1 + R_2 \cos u) \sin v & (R_1 + R_2 \cos u) \cos v & 0 \end{vmatrix} \\ &= -(R_1 + R_2 \cos u)(R_2 \cos u \cos v \mathbf{i} + R_2 \cos u \sin v \mathbf{j} + R_2 \sin u \mathbf{k}), \end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned} \|\mathbf{N}(u, v)\| &= (R_1 + R_2 \cos u)R_2 \sqrt{\cos^2 u \cos^2 v + \cos^2 u \sin^2 v + \sin^2 u} \\ &= (R_1 + R_2 \cos u)R_2. \end{aligned}$$

Niinpä pinta-alaksi voidaan laskea

$$a(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (R_1 + R_2 \cos u)R_2 \, du \, dv = 4\pi^2 R_1 R_2.$$

7.3 Perusparametrisoinnit

Luetellaan kolme tällä opintojaksolla yleisimmin käytettyä parametrisointia normaalivektoreineen. Tarkasta laskemalla $\mathbf{N}(u, v) = \mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)$.

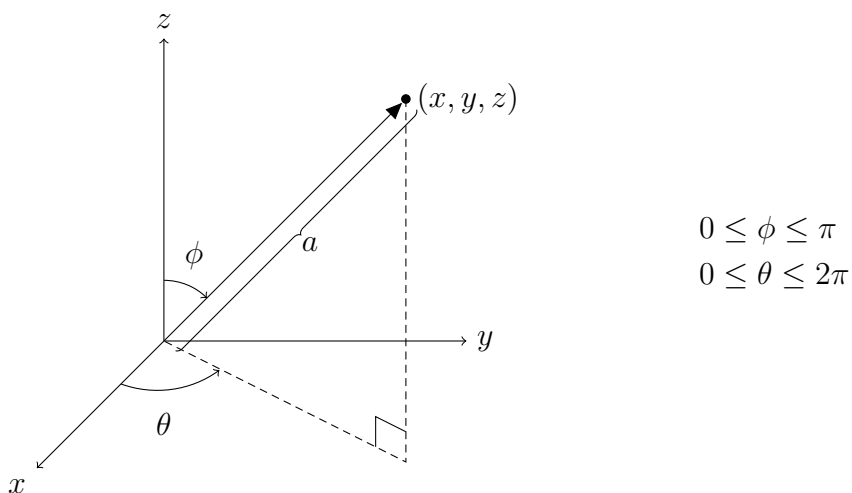
Funktion $z = z(x, y)$ kuvaaja

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(x, y) &= (x, y, z(x, y)) \\ \mathbf{N}(x, y) &= \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1 \right) \\ \|\mathbf{N}(x, y)\| &= \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} \end{aligned} \quad (7.9)$$

Ks. kuva sivulla 81.

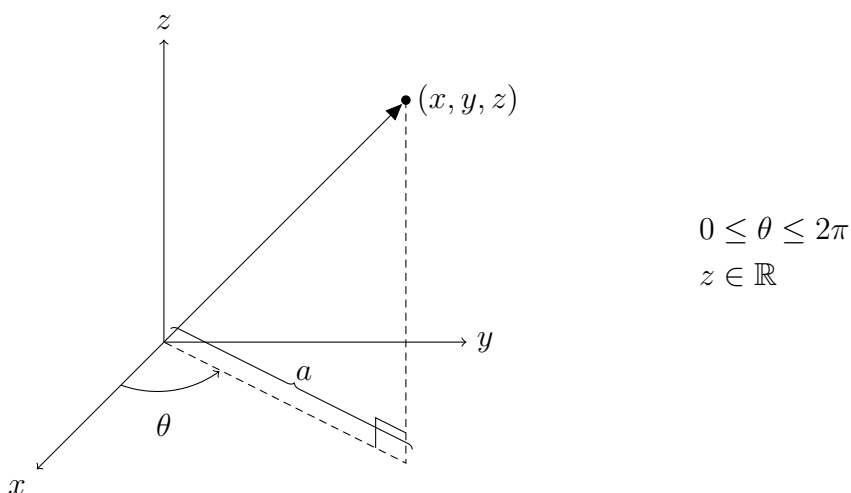
a -säteinen origokeskinen pallopinta

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\phi, \theta) &= (a \sin \phi \cos \theta, a \sin \phi \sin \theta, a \cos \phi) \\ \mathbf{N}(\phi, \theta) &= a^2 \sin \phi (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi) \\ \|\mathbf{N}(\phi, \theta)\| &= a^2 \sin \phi \end{aligned} \quad (7.10)$$



a -säteinen sylinteripinta, jonka symmetria-akselina on z -akseli

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\theta, z) &= (a \cos \theta, a \sin \theta, z) \\ \mathbf{N}(\theta, z) &= (a \cos \theta, a \sin \theta, 0) \\ \|\mathbf{N}(\theta, z)\| &= a \end{aligned} \quad (7.11)$$



Näistä funktion kuvaajan parametrisointi on aina sileä, jos funktio on jatkuvasti differentioituva. Sen sijaan pallo- ja sylinterikoordinaattiparametrisoinnit eivät ole sileitä. Pallokoordinaattiparametrisointi ei ole injektio, sillä $\mathbf{r}(0, \theta) = (0, 0, a)$ ja $\mathbf{r}(\pi, \theta) = (0, 0, -a)$ kaikilla $\theta \in [0, 2\pi]$. Lisäksi $\mathbf{N}(\phi, \theta)$ on nollavektori, kun $\phi = 0$ tai π . Sylinterikoordinaattiparametrisointikaan ei ole injektio, sillä $\mathbf{r}(0, z) = \mathbf{r}(2\pi, z)$ kaikilla z . Käytännössä tästä ei aiheudu huolta, koska ongelma ilmenee vain parametrijoukon 1-ulotteisilla reunajanoilla.

Esimerkki 7.12. Laske paraboloidin $z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$, pinta-ala.

Ratkaisu. Kyseessä on funktion $z(x, y) = x^2 + y^2$ kuvaaja joukossa $x^2 + y^2 \leq 1$. Nyt

$$\|\mathbf{N}(x, y)\| = \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1} = \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1},$$

joten pinta-ala on

$$\begin{aligned} \iint_{\{(x,y): x^2+y^2 \leq 1\}} \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1} \, dx \, dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{4r^2 + 1} \, r \, dr \, d\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{1}{12} (4r^2 + 1)^{3/2} \, dr = \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1). \end{aligned}$$

Esimerkki 7.13. Laske a -säteisen origokeskisen pallopinnan

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$$

pinta-ala.

Ratkaisu. Käytetään pallokoordinaattiparametrisointia:

$$\begin{aligned} a(S) &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} a^2 \sin \phi \, d\theta \, d\phi = a^2 \left(\int_0^\pi \sin \phi \, d\phi \right) \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \\ &= a^2 \cdot 2 \cdot 2\pi = 4\pi a^2. \end{aligned}$$

7.4 Reaaliarvoisen funktion pintaintegraali

Jos ohutseinäisen, sileän pinnan $S = \mathbf{r}(R)$ muotoisen astian pintatiheys pisteessä $(x, y, z) \in S$ on $f(x, y, z)$ (kg/m^2), niin mikä on astian massa? Arvion (7.5) mukaan pientä suorakulmiota $R_{ij} \subset R$ vastaavan pinnan osan $S_{ij} = \mathbf{r}(R_{ij})$ pinta-alalle pätee

$$\Delta S_{ij} \approx \|\mathbf{N}(u_{ij}^*, v_{ij}^*)\| \Delta u_i \Delta v_j.$$

Pinnan osan S_{ij} tiheys voidaan olettaa likimain vakioksi, jos f on jatkuva. Siten S_{ij} :n massalle Δm_{ij} pätee

$$\Delta m_{ij} \approx f(\mathbf{r}(u_{ij}^*, v_{ij}^*)) \|\mathbf{N}(u_{ij}^*, v_{ij}^*)\| \Delta u_i \Delta v_j$$

ja pinnan kokonaismassalle

$$m \approx \sum_{\substack{i=1 \\ R_{ij} \subset R}}^m \sum_{j=i}^n f(\mathbf{r}(u_i^*, v_i^*)) \|\mathbf{N}(u_{ij}^*, v_{ij}^*)\| \Delta u_i \Delta v_j.$$

Tämä on funktion $f(\mathbf{r}(u, v)) \|\mathbf{N}(u, v)\|$ Riemannin summa joukossa R (ks. (4.7)), joten rajalla $|P| = \max\{\text{diam}(R_{ij})\} \rightarrow 0$ saadaan

$$m = \iint_R f(\mathbf{r}(u, v)) \|\mathbf{N}(u, v)\| du dv.$$

Otetaan tämä yleiseksi pintaintegraalin määritelmäksi:

Määritelmä 7.14. Jatkuvan funktion $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ *pintaintegraalia* (*surface integral*) sileän pinnan $S = \mathbf{r}(R)$ yli merkitään $\iint_S f dS$ ja se määritellään asettamalla

$$\iint_S f dS = \iint_R f(\mathbf{r}(u, v)) \|\mathbf{N}(u, v)\| du dv.$$

Paloittain sileille pinnoille pintaintegraali määritellään sileiden osien yli laskettujen integraalien summana.

Huomautus 7.15. a) Merkinässä $\iint_S f dS$ ei oteta kantaa pinnan S parametrisointiin. Voidaankin osoittaa, että pintaintegraalin arvo on riippumaton parametrisoinnin \mathbf{r} valinnasta.

b) Pinnan pinta-alan määritelmän mukaan

$$a(S) = \iint_S 1 dS.$$

c) Vaikka pallo- ja sylinterikoordinaattiparametrisoinnit eivät aina olekaan määritelmämme mukaan sileitä, niitä voidaan kuitenkin pintaintegraaleja laskettaessa käyttää, koska ”ongelmajoukon” pinta-ala on sekä määrittely- että maalipuolella nolla.

Puretaan määritelmää 7.14 auki. Jos merkitään \mathbf{r} :n komponenttifunktioita x :llä, y :llä ja z :lla, ts. $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, missä $(u, v) \in R$, niin

$$\boxed{\iint_S f \, dS = \iint_R f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \|\mathbf{N}(u, v)\| \, du \, dv.} \quad (7.16)$$

Pintaintegraalin laskentaohje:

- Hae pinnalle parametrisointi $\mathbf{r}(u, v)$ ja selvitä parametrijoukko R .
- Laske normaalivektori $\mathbf{N}(u, v) = \mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)$ ja sen normi $\|\mathbf{N}(u, v)\|$.
- Laske $f(\mathbf{r}(u, v))$, ts. sijoita f :n lausekkeeseen x :n, y :n ja z :n paikalle parametrisoinnin komponentit $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ ja $z = z(u, v)$.
- Integroi $f(\mathbf{r}(u, v))\|\mathbf{N}(u, v)\|$ yli parametrijoukon R .

Esimerkki 7.17. Laske

$$\iint_S z \, dS,$$

kun S on kartiopinta $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 1$.

Ratkaisu. Pinta S on funktion $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ kuvaaja, joten parametrisoinniksi voidaan ottaa $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$. Parametreja x ja y rajoittaa ehto $\sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$, eli parametrijoukko on origokeskinen 1-säteinen kiekko $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Yhtälöiden (7.9) mukaan

$$\|\mathbf{N}(x, y)\| = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} + 1} = \sqrt{2},$$

joten siirtymällä napakoordinaatteihin saadaan

$$\begin{aligned} \iint_S z \, dS &= \iint_R \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{2} \, dx \, dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \sqrt{2} r \, dr \, d\theta = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}. \end{aligned}$$

Esimerkki 7.18. Laske

$$\iint_S (x + y + z) dS,$$

kun S on pallopinnan $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ensimmäisessä koordinaattikahdeksanneksessä oleva osa.

Ratkaisu. Käytetään pallokoordinaatteja (7.10). Parametrien rajat: $0 \leq \phi \leq \pi/2$ ja $0 \leq \theta \leq \pi/2$ (piirrä kuva!). Lisäksi $a = 1$, joten

$$\|\mathbf{N}(\phi, \theta)\| = a^2 \sin \phi = \sin \phi$$

ja siten

$$\begin{aligned} \iint_S (x + y + z) dS &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} (\sin \phi \cos \theta + \sin \phi \sin \theta + \cos \phi) \sin \phi d\phi d\theta \\ &= \left(\int_0^{\pi/2} (\cos \theta + \sin \theta) d\theta \right) \left(\int_0^{\pi/2} \sin^2 \phi d\phi \right) \\ &\quad + \left(\int_0^{\pi/2} d\theta \right) \left(\int_0^{\pi/2} \cos \phi \sin \phi d\phi \right) \\ &= \int_0^{\pi/2} (\sin \theta - \cos \theta) \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\phi) \right) d\phi + \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin^2 \phi \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} \phi - \frac{1}{4} \sin(2\phi) \right) + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

7.5 Massa ja massakeskipiste

Merkitään pintatiheysfunktioita δ :lla. Tällöin pinnan S muotoisen kappaleen massa on edellisessä luvussa todetun perusteella

$$m = \iint_S \delta dS. \quad (7.19)$$

Samaan tapaan kuin luvussa 2.7 voidaan massakeskipisteen $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ määrittelmäksi perustella

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iint_S x \delta dS, \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \iint_S y \delta dS \quad \text{ja} \quad \bar{z} = \frac{1}{m} \iint_S z \delta dS \quad (7.20)$$

sekä hitausmomentiksi annetun pyörimisakselin suhteen

$$I = \iint_S p^2 \delta dS, \quad (7.21)$$

missä $p = p(x, y, z)$ on pisteen (x, y, z) etäisyys pyörimisakselista.

Esimerkki 7.22. Laske esimerkin 7.4 ruuvipinnan massa ja massakeskipiste, kun pintatiheys on suoraan verrannollinen etäisyyteen z -akselista.

Ratkaisu. Pinnan parametrisointi on $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$, $0 \leq u \leq 2$, $0 \leq v \leq 2\pi$. Esimerkissä 7.4 normaalivektoriksi laskettiin $\mathbf{N}(u, v) = (\sin v, -\cos v, u)$, joten

$$\|\mathbf{N}(u, v)\| = \sqrt{\sin^2 v + \cos^2 v + u^2} = \sqrt{1 + u^2}.$$

Lisäksi

$$\delta(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2} = k\sqrt{u^2 \cos^2 v + u^2 \sin^2 v} = ku,$$

missä $k > 0$ on verrannollisuuskertoimen. Nyt

$$\begin{aligned} m &= \iint_S k\sqrt{x^2 + y^2} dS = \int_0^2 \int_0^{2\pi} ku\sqrt{1 + u^2} dv du \\ &= k \left(\int_0^{2\pi} dv \right) \left(\int_0^2 u\sqrt{1 + u^2} du \right) = 2\pi k \int_0^2 \frac{1}{3}(1 + u^2)^{3/2} \\ &= \frac{2\pi k}{3}(5\sqrt{5} - 1). \end{aligned}$$

Massakeskipisteen x -koordinaatti on

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{m} \iint_S xk\sqrt{x^2 + y^2} dS = \frac{1}{m} \int_0^2 \int_0^{2\pi} u \cos v \cdot ku \cdot \sqrt{1 + u^2} dv du \\ &= \frac{k}{m} \left(\int_0^{2\pi} \cos v dv \right) \left(\int_0^2 u^2 \sqrt{1 + u^2} du \right) = 0. \end{aligned}$$

Vastaavalla tavalla saadaan $\bar{y} = 0$. z -koordinaatti on

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{1}{m} \iint_S zk\sqrt{x^2 + y^2} dS = \frac{1}{m} \int_0^2 \int_0^{2\pi} v \cdot ku \cdot \sqrt{1 + u^2} dv du \\ &= \frac{k}{m} \left(\int_0^{2\pi} v dv \right) \left(\int_0^2 u\sqrt{1 + u^2} du \right) \\ &= \frac{3k}{2\pi k(5\sqrt{5} - 1)} \cdot 2\pi^2 \cdot \frac{5\sqrt{5} - 1}{3} = \pi. \end{aligned}$$

Massakeskipiste on siis $(0, 0, \pi)$. Vaikuttaako tulos geometrisesti järkevältä?

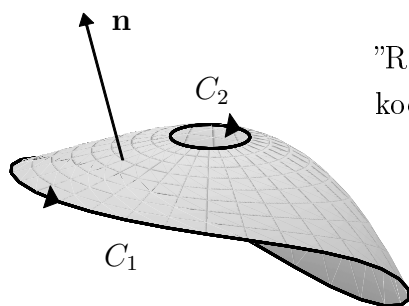
7.6 Pinnan suunnistus ja reunakäyrä

Määritelmä 7.23. Määritellään sileän pinnan $S = \mathbf{r}(R)$ suunnistukseen (*orientation*) liittyviä käsitteitä.

- Pinnalla S on täsmälleen kaksi jatkuvaa yksikkönormaalialia (*unit normal*) $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x, y, z)$:

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}(u, v)) = \pm \frac{\mathbf{N}(u, v)}{\|\mathbf{N}(u, v)\|} = \pm \frac{\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)}{\|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)\|}.$$

- \mathbf{n} :n valinta määrää pinnan S positiivisen puolen, ts. puolen, josta \mathbf{n} osoittaa pois päin.
- Pinnan S reunakäyrä on $\partial S = \mathbf{r}(\partial R)$.
- Reunakäyrän ∂S positiivinen suunta on se suunta, johon kuljettaessa pinnan positiivinen puoli jää vasemmalle.
- Paloittain sileä pinta on *suunnistuva* (*orientable*), jos paloille voidaan valita suunnistukset siten, että yhteisillä reunakäyrillä on vastakkaiset positiiviset suunnat.
- Paloittain sileä suunnistuva pinta S on *suljettu* (*closed*), jos se rajoittaa avaruudesta rajoitetun joukon $T \subset \mathbb{R}^3$. Tällöin S on T :n reunapinta eli $S = \partial T$. Tällaisen pinnan *ulkoinen yksikkönormaali* (*outer unit normal*) \mathbf{n} on se yksikkönormaali, joka osoittaa joukosta T pois päin.



”Reiällinen” pinta S , jonka reunakäyrä ∂S koostuu kahdesta osasta C_1 ja C_2 .

Pinnan positiivisen puolen valinta on sopimuskysymys. Esimerkiksi u :n ja v :n roolien vaihtaminen vaihtaa suunnistuksen, sillä $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = -\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_u$. Tällä opintojaksolla sovitaan, että ”ylöspäin” tarkoittaa z -akselin positiivista suuntaa, ts. vektori (x, y, z) osoittaa ylöspäin, jos $z > 0$.

Esimerkki 7.24. Tutkitaan luvun 7.3 parametrisoiteja.

- a) Kuvaajan $z = z(x, y)$ parametrisoinnille $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, z(x, y))$ normaali-

livektori

$$\mathbf{N}(x, y) = \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1 \right)$$

osoittaa ylöspäin, koska z -koordinaatti on positiivinen. Siten standardiparametrisoinnilla pinnan positiivinen puoli on pinnan yläpuoli.

b) Pallokoordinaattiparametrisoinnin normaalivektori on

$$\mathbf{N}(\phi, \theta) = a^2 \sin \phi (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi).$$

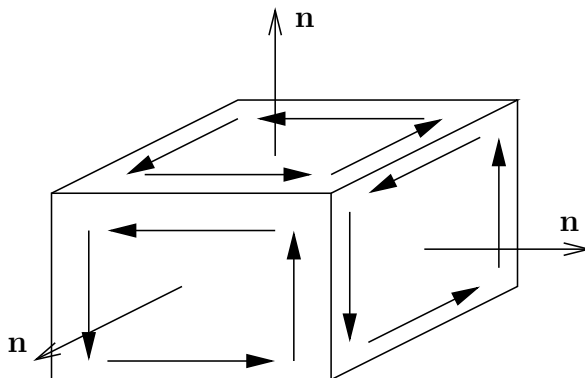
Tarkastetaan \mathbf{N} :n suunta ”päiväntasaajan” pisteessä $\mathbf{r}(\pi/2, 0) = (a, 0, 0)$. Normaalivektori on $N(\pi/2, 0) = (a^2, 0, 0)$, joka osoittaa origosta pois päin. Positiivisena puolena on siis pallopinnan kupera puoli.

c) Sylinterikoordinaattiparametrisoinnin normaalivektori on

$$\mathbf{N}(\theta, z) = (a \cos \theta, a \sin \theta, 0).$$

Tarkastetaan \mathbf{N} :n suunta xy -tason pisteessä $\mathbf{r}(0, 0) = (a, 0, 0)$. Normaalivektori on $N(0, 0) = (a, 0, 0)$, joka osoittaa z -akselista pois päin, joten positiivinen puoli on sylinterin ulkopinta.

Esimerkki 7.25. Suorakulmaisen särmiön reunapinta on suunnistuva. Oheisessa kuvassa kunkin sivun ulkoiset yksikkönormaalit \mathbf{n} määrittävät reunakäyrille suunnistukset, jotka kulkevat vastakkaisiin suuntiin yhteisillä reunakäyrien osilla.

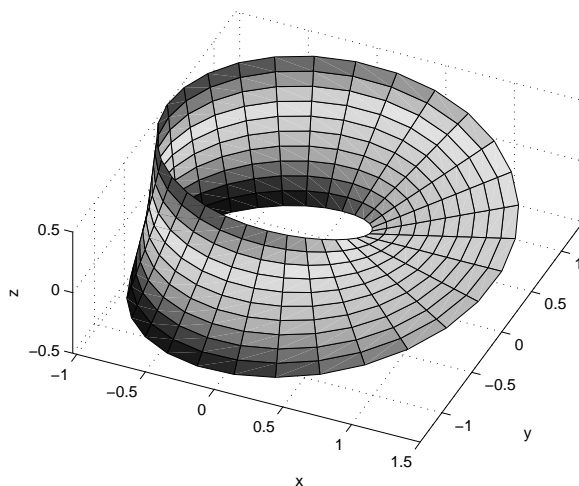


Esimerkki 7.26. Esimerkin ei-suunnistuvasta pinnasta tarjoaa *Möbiuksen nauha*

$$\mathbf{r}(u, v) = \left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2} \right) \cos u \mathbf{i} + \left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2} \right) \sin u \mathbf{j} + \frac{v}{2} \sin \frac{u}{2} \mathbf{k},$$

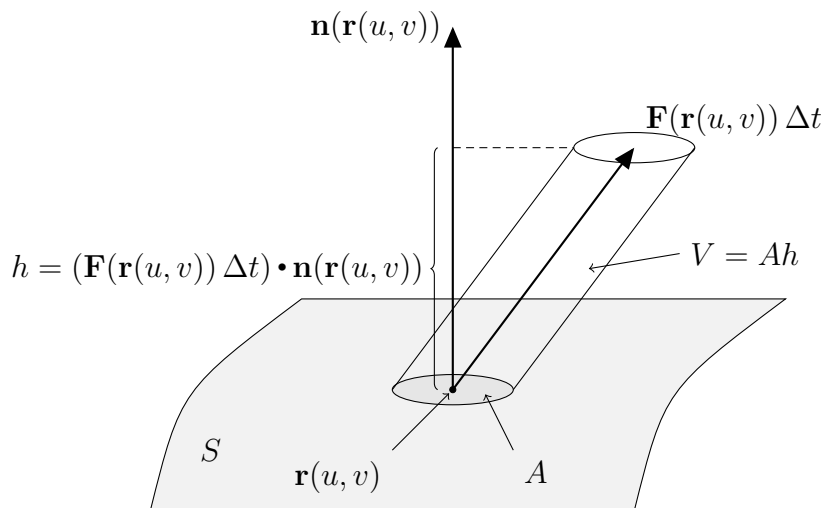
$0 \leq u \leq 2\pi$, $-1 \leq v \leq 1$. Pinta ei ole sileä, sillä poikkileikkausjanalla käyrä leikkaa itsensä: $\mathbf{r}(0, v) = \mathbf{r}(2\pi, v)$. Pinta saadaan kuitenkin kahdesta palasta koostuvaksi paloittain sileäksi pinnaksi leikkaamalla se poikki kahdesta

kohtaa. Näiden palasten suunnistuksia ei voida sovittaa yhteen, kuten piirtämällä voit todeta. Tällä pinnalla on vain yksi puoli, joten ei voida puhua positiivisesta ja negatiivisesta puolesta.



7.7 Vektorikentän vuo

Olkoon \mathbf{F} virtauskenttä (m/s). Mikä on kentän virtausnopeus Φ (m³/s) (kuvitteellisen) sileän pinnan $S = \mathbf{r}(R)$ läpi pinnan positiiviseen suuntaan?



Arvion (7.5) mukaan pientä suorakulmiota $R_{ij} \subset R$ vastaavan pinnan osan $S_{ij} = \mathbf{r}(R_{ij})$ pinta-alalle pätee

$$\Delta S_{ij} \approx \|\mathbf{N}(u_{ij}^*, v_{ij}^*)\| \Delta u_i \Delta v_j.$$

Arvioidaan virtausnopeutta S_{ij} :n läpi: Oletetaan, että S_{ij} sijaitsee likimain tasolla. Jos \mathbf{F} on jatkuva, niin sillä on joukossa S_{ij} likimain vakioarvo $\mathbf{F}(\mathbf{r}(u_{ij}^*, v_{ij}^*))$. Nyt $\mathbf{F}(\mathbf{r}(u_{ij}^*, v_{ij}^*)) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}(u_{ij}^*, v_{ij}^*))$ on virtauskentän $\mathbf{F}(\mathbf{r}(u_{ij}^*, v_{ij}^*))$ skalaariprojektio normaalin $\mathbf{n}(\mathbf{r}(u_{ij}^*, v_{ij}^*))$ suuntaan ollen positiivinen, jos virtaus kulkee normaalin suuntaan pinnan negatiiviselta puolelta positiiviselle ja negatiivinen päinvastaisessa tilanteessa. Virtausnopeus S_{ij} :n läpi on siten likimain

$$\begin{aligned} & \mathbf{F}(\mathbf{r}(u_{ij}^*, v_{ij}^*)) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}(u_{ij}^*, v_{ij}^*)) \Delta S_{ij} \\ & \approx \mathbf{F}(\mathbf{r}(u_{ij}^*, v_{ij}^*)) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}(u_{ij}^*, v_{ij}^*)) \|\mathbf{N}(u_{ij}^*, v_{ij}^*)\| \Delta u_i \Delta v_j. \end{aligned}$$

Vertaa oheiseen kuvaan, jossa V on aikavälillä Δt pinta-alaltaan A :n suuruisen pinta-alkion läpi virranneen aineen tilavuus. Virtausnopeus koko pinnan S läpi on siten

$$\Phi \approx \sum_{i=1}^m \sum_{\substack{j=i \\ R_{ij} \subset R}}^n \mathbf{F}(\mathbf{r}(u_{ij}^*, v_{ij}^*)) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}(u_{ij}^*, v_{ij}^*)) \|\mathbf{N}(u_{ij}^*, v_{ij}^*)\| \Delta u_i \Delta v_j.$$

Rajalla $|P| = \max\{\text{diam}(R_{ij})\} \rightarrow 0$ saadaan

$$\Phi = \iint_R \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}(u, v)) \|\mathbf{N}(u, v)\| du dv. \quad (7.27)$$

Tässä pistetulo $\mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}(u, v)) = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{r}(u, v))$ on reaaliluku ja siten $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ on reaaliarvoinen funktio, joten määritelmän 7.14 mukaan

$$\Phi = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Koska

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}(u, v)) = \frac{\mathbf{N}(u, v)}{\|\mathbf{N}(u, v)\|},$$

niin yhtälöstä (7.27) seuraa, että

$$\Phi = \iint_R \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{N}(u, v) du dv.$$

Otetaan tämä yleiseksi vuon määritelmäksi:

Määritelmä 7.28. Jatkuvan vektorikentän \mathbf{F} vuo (*flux*) paloittain sileän suunnistuvan pinnan $S = \mathbf{r}(R)$ läpi yksikkönormaalin \mathbf{n} suuntaan on

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_R \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{N}(u, v) du dv,$$

missä $\mathbf{n}(\mathbf{r}(u, v)) = \frac{\mathbf{N}(u, v)}{\|\mathbf{N}(u, v)\|}$.

Tässä kirjoitetaan usein lyhyesti jättämättä parametrit u ja v ja sisäfunktio $\mathbf{r}(u, v)$ kirjoittamatta:

$$\iint_R \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{N}(u, v) \, du \, dv = \iint_R \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, du \, dv.$$

Kirjallisuudessa määritelmän 7.28 integraalille käytetään myös merkintää

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Puretaan määritelmää 7.28 auki. Jos merkitään \mathbf{r} :n komponenttifunktioita x :llä, y :llä ja z :lla, ts. $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, missä $(u, v) \in R$, niin

$$\boxed{\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_R \mathbf{F}(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \mathbf{N}(u, v) \, du \, dv.} \quad (7.29)$$

Pintaintegraalin laskentaohje:

- Hae pinnalle parametrisointi $\mathbf{r}(u, v)$ ja selvitä parametrijoukko R .
- Laske normaalivektori $\mathbf{N}(u, v) = \mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)$.
- Laske $\mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v))$, ts. sijoita \mathbf{F} :n lausekkeeseen x :n, y :n ja z :n paikalle parametrisoinnin komponentit $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ ja $z = z(u, v)$.
- Laske pistetulo $\mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{N}(u, v)$ ja integroi yli parametrijoukon R .

Vektorikentän vuo ei riipu parametrisoinnin \mathbf{r} valinnasta, mikäli suunnistus säilyy samana. Jos suunnistus vaihtuu, niin integraalin etumerkki vaihtuu:

$$\boxed{\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = - \iint_S \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{n}) \, dS.} \quad (7.30)$$

Esimerkki 7.31. Laske kentän $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, 0)$ vuo paraboloidipinnan

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 4\}$$

läpi alaspäin.

Ratkaisu. S on kahden muuttujan funktion kuvaaja, joten voidaan käyttää yhtälön (7.9) parametrisointia $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$, missä parametrijoukko on $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$. Yhtälön (7.9) normaalivektori osoittaa ylöspäin, joten nyt normaalivektoriksi on otettava sen vastavektori

$$\mathbf{N}(x, y) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1 \right) = (2x, 2y, -1).$$

Nyt $\mathbf{F}(\mathbf{r}(x, y)) \cdot \mathbf{N}(x, y) = (x, y, 0) \cdot (2x, 2y, -1) = 2x^2 + 2y^2$, joten siirtymällä napakoordinaatteihin saadaan

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \iint_R \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dx \, dy = \iint_R 2(x^2 + y^2) \, dx \, dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 2r^2 r \, dr \, d\theta = \dots = 16\pi. \end{aligned}$$

Esimerkki 7.32. Laske kentän $\mathbf{F}(x, y, z) = (yz, x, -z^2)$ vuo pinnan $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq z \leq 4$, läpi xz -tasoon päin.

Ratkaisu. Otetaan pinnan parametrisoinniksi $\mathbf{r}(x, z) = (x, x^2, z)$, $R = \{(x, z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 4\}$. Tällöin

$$\mathbf{N}(x, z) = \mathbf{r}_x(x, z) \times \mathbf{r}_z(x, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2x, -1, 0).$$

Tämä normaalivektori osoittaa haluttuun suuntaan, sillä esimerkiksi $\mathbf{N}(0, 0) = (0, -1, 0)$. Piirrä kuva! Siten

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \iint_R \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dx \, dz = \int_0^4 \int_0^1 (x^2 z, x, -z^2) \cdot (2x, -1, 0) \, dx \, dz \\ &= \int_0^4 \int_0^1 (2x^3 z - x) \, dx \, dz = \dots = 2. \end{aligned}$$

Esimerkki 7.33. Laske kentän $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$ vuo pinnan $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, $y \geq 0$, läpi ylöspäin.

Ratkaisu. Voitaisiin käyttää parametrisointia $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, \sqrt{16 - x^2 - y^2})$, $x^2 + y^2 \leq 16$, $y \geq 0$. Kokeile!

Päästään kuitenkin helpommalla, kun huomataan, että kyseessä on 4-säteisen pallopinnan $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ se neljännes, jossa $y \geq 0$ ja $z \geq 0$, ja käytetään pallokoordinaattiparametrisointia (7.10):

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = (4 \sin \phi \cos \theta, 4 \sin \phi \sin \theta, 4 \cos \phi),$$

missä parametrijoukkona on $R = \{(\phi, \theta) : 0 \leq \phi \leq \pi/2, 0 \leq \theta \leq \pi\}$. Normaalivektori

$$\mathbf{N}(\phi, \theta) = 16 \sin \phi (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi)$$

osoittaa pois päin origosta, eli tässä tapauksessa ylöspäin oikeaan suuntaan,

joten

$$\begin{aligned}
 \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \iint_R \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\phi \, d\theta \\
 &= \int_0^\pi \int_0^{\pi/2} (-4 \sin \phi \sin \theta, 4 \sin \phi \cos \theta, 12 \cos \phi) \\
 &\quad \cdot (16 \sin^2 \phi \cos \theta, 16 \sin^2 \phi \sin \theta, 16 \sin \phi \cos \phi) \, d\phi \, d\theta \\
 &= \int_0^\pi \int_0^{\pi/2} 192 \sin \phi \cos^2 \phi \, d\phi \, d\theta \\
 &= \int_0^\pi \int_0^{\pi/2} 192 \sin \phi \cos^2 \phi \, d\phi \, d\theta \\
 &= 192 \left(\int_0^\pi d\theta \right) \left(\int_0^{\pi/2} \sin \phi \cos^2 \phi \, d\phi \right) \\
 &= 192\pi \int_0^{\pi/2} -\frac{1}{3} \cos^3 \phi = 64\pi.
 \end{aligned}$$

Esimerkki 7.34. Laske kentän $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ vuo ulospäin sylinterin

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq a^2, -h \leq z \leq h\} \quad (a, h > 0)$$

pinnan $S = \partial T$ läpi.

Ratkaisu. Pinta S koostuu kolmesta osasta: katosta S_1 , lattiasta S_2 ja sylinteripinnasta S_3 . Katto ja lattia voidaan hoidella parametrisoimatta ko. pinta.

Katto. $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$, joten $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = z = h$. Niinpä

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = h \iint_{S_1} dS = ha(S_1) = h\pi a^2.$$

Lattia. $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$, joten $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -z = h$. Niinpä

$$\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = h \iint_{S_2} dS = ha(S_2) = h\pi a^2.$$

Vaippa. Parametrisoidaan S_3 sylinterikoordinaattien (7.11) avulla: $\mathbf{r}(\theta, z) = (a \cos \theta, a \sin \theta, z)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $-h \leq z \leq h$. Nyt $\mathbf{N}(\theta, z) = (a \cos \theta, a \sin \theta, 0)$, joka osoittaa ulospäin. Siten

$$\begin{aligned}
 \iint_{S_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \int_0^{2\pi} \int_{-h}^h (a \cos \theta, a \sin \theta, z) \cdot (a \cos \theta, a \sin \theta, 0) \, dz \, d\theta \\
 &= a^2 \int_0^{2\pi} \int_{-h}^h dz \, d\theta = a^2 2\pi 2h = 4h\pi a^2.
 \end{aligned}$$

Kokonaisvuo saadaan laskemalla yhteen:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = h\pi a^2 + h\pi a^2 + 4h\pi a^2 = 6h\pi a^2.$$

8 Kertaus avaruusintegraaleista

Tässä luvussa kerrataan avaruusintegraaleja Insinöörimatematiikan opintojaksolta siinä määrin, kun on tarpeellista luvu 9 avaruusintegraalien laske-
miseksi.

8.1 Määritelmä ja laskeminen projisoituvissa joukoissa

Olkoon $T \subset \mathbb{R}^3$ suljettu ja rajoitettu joukko ja $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ rajoitettu funktio. Peitetään T suorakulmaisella särmiöllä, joka jaetaan osasärmiöihin T_{ijk} , $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq k \leq p$, joiden särmien pituudet ovat Δx_i , Δy_j ja Δz_k ja tilavuudet siten $\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$. Otetaan mukaan ne osasärmiöt T_{ijk} , joille $T_{ijk} \subset T$. Valitaan pisteet $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \in T_{ijk}$. Määritellään f :n *integraali yli joukon T* asettamalla

$$\iiint_T f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k,$$

mikäli raja-arvo on olemassa. Jaon normi $|P|$ määritellään vastaavalla tavoin kuin luvussa 4 tasointegraalille. Integraalia merkitään myös

$$\iiint_T f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_T f(x, y, z) \, dV = \iiint_T f \, dV.$$

Määritellään, että rajoitetulla joukolla $T \subset \mathbb{R}^3$ on *tilavuus* $v(T)$, jos vakiofunktio 1 on integroitava joukossa T . Tällöin

$$v(T) = \iiint_T 1 \, dV.$$

Integroitavuus riippuu sekä funktion f että joukon T ominaisuuksista. Usein käytännön tilanteissa pärjätään seuraavalla tuloksella.

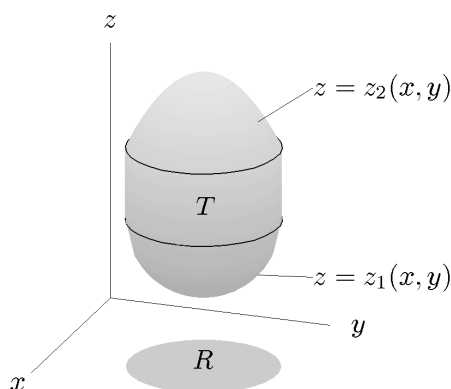
Lause 8.1. *Jos T :n reuna on paloittain sileä suunnistuva pinta ja $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva, niin f on integroitava.*

Usein integraalin laskeminen perustuu integroimisjoukon projisoituvuuteen.

Määritelmä 8.2. $T \subset \mathbb{R}^3$ on xy -projisoituva (z -simple), jos se on muotoa

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in R, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\},$$

missä $R \subset \mathbb{R}^2$ on sellainen xy -tason joukko, jolla on pinta-ala sekä z_1 ja z_2 jatkuvia funktioita. xz - ja yz -projisoituvuus määritellään vastaavasti.



Lause 8.3. Olkoon $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva. Jos T on xy -projisoituva, niin

$$\iiint_T f(x, y, z) dV = \iint_R \left(\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dA.$$

Vastaavat tulokset ovat voimassa myös xz - ja yz -projisoituville joukoille.

Esimerkki 8.4. Laske

$$\iiint_T f dV,$$

missä $f(x, y, z) = z$ ja T on koordinaattitasojen ja tason $z = 6 - 3x - 2y$ rajoittama joukko.

Ratkaisu. Ko. tason ja x -akselin leikkauspiste saadaan asettamalla tason yhtälössä $y = z = 0$: $0 = 6 - 3x \Leftrightarrow x = 2$. Samalla tavoin y -akselin leikkauspisteeksi saadaan $y = 3$ ja z -akselin $z = 6$. Kyseisen tason ja xy -tason leikkaussuora saadaan asettamalla tason yhtälössä $z = 0$, eli $y = (6 - 3x)/2$. Piirrä kuva! T on xy -projisoituva, projektiojoukkona

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq (6 - 3x)/2, 0 \leq x \leq 2\}.$$

Siten

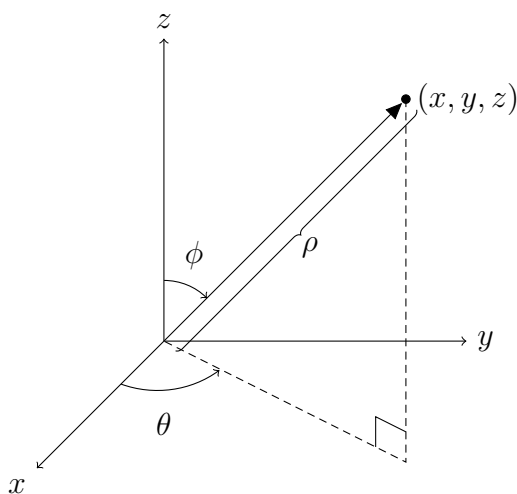
$$\begin{aligned} \iiint_T f \, dV &= \iint_R \int_0^{6-3x-2y} z \, dz \, dA \\ &= \int_0^2 \int_0^{(6-3x)/2} \int_0^{6-3x-2y} z \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_0^2 \int_0^{(6-3x)/2} \frac{1}{2} (6-3x-2y)^2 \, dy \, dx = \dots = 9. \end{aligned}$$

Käytännössä laskun alussa kirjoitetaan suoraan yhtälön toisen rivin lauseke. Tässä laskussa on 6 eri vaihtoehtoa integroimisjärjestykselle. Voitaisiin laskea myös esimerkiksi

$$\iiint_T f \, dV = \int_0^6 \int_0^{(6-z)/2} \int_0^{(6-2y-z)/3} z \, dx \, dy \, dz = \dots = 9.$$

Kokeile eri järjestyksiä!

8.2 Pallokoordinaatit



$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq 0 \\ 0 &\leq \phi \leq \pi \\ 0 &\leq \theta \leq 2\pi \end{aligned}$$

Ilmaistaan joukon $T \subset \mathbb{R}^3$ pisteet (x, y, z) pallokoordinaateissa (spherical coordinates):

$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases} \quad (8.5)$$

missä $(\rho, \phi, \theta) \in U$. Tällöin

$$\begin{aligned} & \iiint_T f(x, y, z) dV \\ &= \iiint_U f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Siirryttäessä integroimaan pallokoordinaateissa $f(x, y, z)$:n lausekkeeseen on siis sijoitettava muunnokset (8.5) ja kerrottava pallokoordinaattikuvauksen $T(\rho, \phi, \theta) = (\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi)$ Jacobin determinantin itseisarvolla (eli tilavuuden muunnossuhteella)

$$|J_T(\rho, \phi, \theta)| = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} \right| = \rho^2 \sin \phi.$$

Pallokoordinaatteja kannattaa kokeilla tapauksissa, joissa integroimisjoukko T on pallosymmetrinen tai funktiossa esiintyy lauseke $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$.

Esimerkki 8.7. Laske $\iiint_T f dV$, missä $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ja

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, x \leq 0, z \geq 0\}.$$

Ratkaisu. T on $\sqrt{2}$ -säteisen pallon neljännes (piirrä kuva!) ja $f(x, y, z) = \rho^2$. Nyt

$$\begin{aligned} \iiint_T f dV &= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \\ &= \left(\int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\theta \right) \left(\int_0^{\pi/2} \sin \phi d\phi \right) \left(\int_0^{\sqrt{2}} \rho^4 d\rho \right) = \dots = \frac{4\sqrt{2}\pi}{5}. \end{aligned}$$

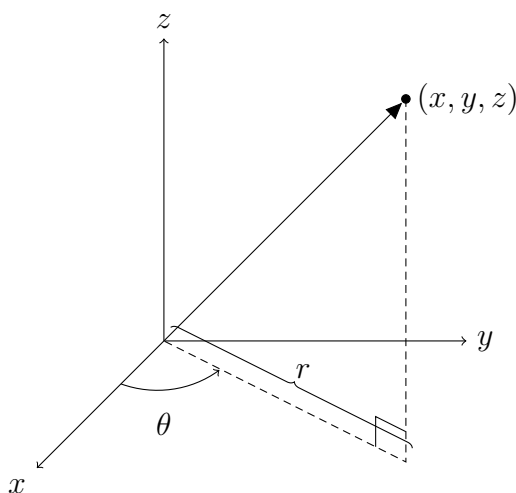
Esimerkki 8.8. Laske $\int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \frac{z^3}{\sqrt{x^2+y^2}} dz dy dx$.

Ratkaisu. Nyt $0 \leq x \leq a$ ja $-\sqrt{a^2-x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2-x^2}$. y :n ylärajalla $y \geq 0$, jolloin $y = \sqrt{a^2-x^2} \Leftrightarrow y^2 = a^2-x^2 \Leftrightarrow x^2+y^2 = a^2$. Alarajalla vastaavasti, eli integroimisjoukon $T \subset \mathbb{R}^3$ projektio xy -tasoon on a -säteinen puolikiekkö. z :n ylärajalla $z \geq 0$, jolloin $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2} \Leftrightarrow z^2 = a^2-x^2-y^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 = a^2$. T on siis a -säteisen origokeskisen pallon

neljännes. Piirrä kuva! $\sqrt{\sin^2 \phi} = \sin \phi$, koska $\sin \phi \geq 0$, kun $0 \leq \phi \leq \pi/2$, joten

$$\begin{aligned}
 & \int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \frac{z^3}{\sqrt{x^2+y^2}} dz dy dx \\
 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^a \frac{\rho^3 \cos^3 \phi}{\sqrt{\rho^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta}} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \\
 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^a \frac{\rho^5 \cos^3 \phi \sin \phi}{\sqrt{\rho^2 \sin^2 \phi}} d\rho d\phi d\theta \\
 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^a \rho^4 \cos^3 \phi d\rho d\phi d\theta \\
 &= \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \right) \left(\int_0^{\pi/2} \cos^3 \phi d\phi \right) \left(\int_0^a \rho^4 d\rho \right) \\
 &= \pi \left(\int_0^{\pi/2} \cos \phi (1 - \sin^2 \phi) d\phi \right) \frac{a^5}{5} \\
 &= \frac{\pi a^5}{5} \Big|_0^{\pi/2} \left(\sin \phi - \frac{1}{3} \sin^3 \phi \right) = \frac{2\pi a^5}{15}.
 \end{aligned}$$

8.3 Sylinterikoordinaatit



$$\begin{aligned}
 r &= \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0 \\
 0 &\leq \theta \leq 2\pi \\
 z &\in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Ilmaistaan joukon $T \subset \mathbb{R}^3$ pisteet (x, y, z) sylinterikoordinaateissa (cylindrical

coordinates):

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad (8.9)$$

missä $(r, \theta, z) \in U$. Tällöin

$$\iiint_T f(x, y, z) dV = \iiint_U f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz. \quad (8.10)$$

Siirryttäessä integroimaan sylinterikoordinaateissa $f(x, y, z)$:n lausekkeeseen on siis sijoitettava muunnokset (8.9) ja kerrottava sylinterikoordinaattikuvauksen $T(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$ Jacobin determinantin itseisarvolla (eli tilavuuden muunnossuhteella)

$$|J_T(r, \theta, z)| = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right| = r.$$

Sylinterikoordinaatteja kannattaa kokeilla tapauksissa, joissa integroimisjoukko T on sylinterisymmetrinen tai funktiossa esiintyy lauseke $x^2 + y^2 = r^2$.

Esimerkki 8.11. Laske $\iiint_T f dV$, missä $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ ja

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1, z \leq 2 - x^2 - y^2\}.$$

Ratkaisu. T on 1-säteisen sylinterin ensimmäisessä koordinaattikahdeksanneksessä oleva osa, jota rajoittaa ylhäältä pinta $z = 2 - x^2 - y^2 = 2 - r^2$. Piirrä kuva! Lisäksi $f(x, y, z) = r^2$, joten

$$\begin{aligned} \iiint_T f dV &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_0^{2-r^2} r^2 r dz dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^3(2-r^2) dr d\theta = \dots = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

9 Gaussin lause

Gaussin lause tasossa (lause 5.9) kertoo, miten tason vuo reunakäyrän yli voidaan laskea divergenssin tasointegraalina. Todistetaan vastaavanlainen tulos vuolle avaruudessa: vuo reunapinnan läpi voidaan laskea divergenssin avaruusintegraalina.

Lause 9.1 (Gaussin lause eli divergenssilause). *Olkoon $T \subset \mathbb{R}^3$ suljettu ja rajoitettu joukko, jonka reuna $S = \partial T$ on paloittain sileä suunnistuva pinta ja olkoon \mathbf{n} pinnan S ulkoinen yksikkönormaali. Jos $\mathbf{F}: T \rightarrow \mathbb{R}^3$ on jatkuvasti differentioituva, niin*

$$\iint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_T \nabla \cdot \mathbf{F} dV.$$

Korostettakoon, että **Gaussin lause soveltuu vain suljetuille pinnoille** $S = \partial T$, jotka rajoittavat sisäänsä rajoitetun joukon T . Usein merkitään

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS,$$

mikä tarkoittaa pintaintegrointia yli suljetun pinnan pois päin pinnan rajoittamasta joukosta.

Todistus. Todistetaan Gaussin lause vain tapauksessa, jossa T on sekä xy -, xz - että yz -projisoituva. Yleinen tapaus on verraten syvällinen.

Merkitään \mathbf{F} :n komponentteja $\mathbf{F} = (P, Q, R) = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$. Nyt väitteen vasen puoli voidaan kirjoittaa

$$\iint_S P\mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS + \iint_S Q\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS + \iint_S R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS$$

ja oikea puoli

$$\iiint_T \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iiint_T \frac{\partial P}{\partial x} dV + \iiint_T \frac{\partial Q}{\partial y} dV + \iiint_T \frac{\partial R}{\partial z} dV.$$

Väitteen todistamiseksi riittää siis osoittaa, että

$$\iint_S P\mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_T \frac{\partial P}{\partial x} dV, \quad (9.2)$$

$$\iint_S Q\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_T \frac{\partial Q}{\partial y} dV \quad \text{ja} \quad (9.3)$$

$$\iint_S R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_T \frac{\partial R}{\partial z} dV. \quad (9.4)$$

Aloitetaan yhtälön (9.4) oikeasta puolesta. Koska T on xy -projisoituva, se voidaan kirjoittaa muodossa

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\},$$

missä $D \subset \mathbb{R}^2$ on T :n projektio xy -tasolle. Nyt

$$\begin{aligned} \iiint_T \frac{\partial R}{\partial z} dV &= \iint_D \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) dx dy \\ &= \iint_D \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} R(x,y,z) \right) dx dy \\ &= \iint_D (R(x,y,z_2(x,y)) - R(x,y,z_1(x,y))) dx dy. \end{aligned}$$

Jatketaan käsittelemällä yhtälön (9.4) vasenta puolta. Koska T on xy -projisoituva, niin sen reuna S koostuu pohjasta S_1 , katosta S_2 ja mahdollisesti pystysuorasta pinnasta S_3 (vrt. sivun 100 kuvaan). Aina pintaa S_3 ei ole, kuten vaikkapa silloin, jos T on pallo. Pinnalla S_3 ulkoinen yksikkönormaali \mathbf{n} on xy -tason suuntainen, joten pinnalla S_3 on $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = 0$. Niinpä

$$\iint_S R \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{S_1} R \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS + \iint_{S_2} R \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Pinnan S_2 parametrisoinniksi voidaan ottaa $\mathbf{r}_2(x,y) = (x,y,z_2(x,y))$, $(x,y) \in D$, jolle yhtälöiden (7.9) mukaan

$$\mathbf{N}_2(x,y) = \left(\frac{\partial z_2}{\partial x}, \frac{\partial z_2}{\partial y}, 1 \right).$$

Tämä osoittaa ylöspäin, eli ulkoisen yksikkönormaalien \mathbf{n} suuntaan. Siten

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} R \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS &= \iint_D R(x,y,z_2(x,y)) \mathbf{k} \cdot \mathbf{N}_2 dx dy \\ &= \iint_D R(x,y,z_2(x,y)) dx dy. \end{aligned}$$

Pinnan S_1 parametrisoinniksi voidaan ottaa $\mathbf{r}_1(x,y) = (x,y,z_1(x,y))$, $(x,y) \in D$, jolle yhtälöiden (7.9) mukaan

$$\mathbf{N}_1(x,y) = \left(\frac{\partial z_1}{\partial x}, \frac{\partial z_1}{\partial y}, 1 \right).$$

Tämä osoittaa ylöspäin, eli vastakkaiseen suuntaan kuin ulkoinen yksikkönormaali \mathbf{n} . Siten laskussa käytetään normaalia $-\mathbf{N}_1$ ja saadaan

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} R \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS &= \iint_D R(x,y,z_1(x,y)) \mathbf{k} \cdot (-\mathbf{N}_1) dx dy \\ &= - \iint_D R(x,y,z_1(x,y)) dx dy. \end{aligned}$$

Olemme saaneet todistetuksi yhtälön (9.4). Yhtälöt (9.2) ja (9.3) todistetaan samaan tapaan yz - ja xz -projisoituvuutta hyödyntäen. \square

Esimerkki 9.5. Palataan esimerkkiin 7.34: laske kentän $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ vuo ulospäin sylinterin

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq a^2, -h \leq z \leq h\} \quad (a, h > 0)$$

reunapinnan S läpi.

Ratkaisu. Käytetään nyt Gaussin lausetta. $\nabla \cdot \mathbf{F} = 1 + 1 + 1 = 3$, joten

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_T \nabla \cdot \mathbf{F} dV = 3 \iiint_T dV = 3v(T) = 3 \cdot \pi a^2 \cdot 2h = 6h\pi a^2.$$

Esimerkki 9.6. Laske kentän $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y^2, z)$ vuo ulospäin koordinaattitasojen ja tason $2x + 2y + z = 6$ rajoittaman joukon T reunan ∂T läpi.

Ratkaisu. Tason $2x + 2y + z = 6$ ja koordinaattiakselien leikkauspisteiksi lasketaan $(3, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$ ja $(0, 0, 6)$ sekä ko. tason ja xy -tason leikkaussuoraksi $y = 3 - x$ (vrt. esimerkkiin 8.4). Lisäksi $\nabla \cdot \mathbf{F} = 1 + 2y + 1 = 2 + 2y$, joten

$$\iint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_T \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \int_0^3 \int_0^{3-x} \int_0^{6-2x-2y} (2 + 2y) dz dy dx = \frac{63}{2}.$$

Esimerkki 9.7. Laske kentän $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = r^2\mathbf{r}$ vuo sylinteripinnan $x^2 + y^2 = 4$, xy -tason ja tason $x + z = 6$ rajoittaman joukon T reunan S läpi sisältä ulospäin.

Ratkaisu. Käytetään Gaussin lausetta. Lasketaan ensin divergenssi tulo- ja ketjusääntöjen avulla:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F} &= \nabla(r^2) \cdot \mathbf{r} + r^2 \nabla \cdot \mathbf{r} = 2r \nabla r \cdot \mathbf{r} + 3r^2 = 2r \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{r} + 3r^2 = 5r^2 \\ &= 5(x^2 + y^2 + z^2), \end{aligned}$$

sillä $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r^2$. Sylinterikoordinaateissa $\nabla \cdot \mathbf{F} = 5(r^2 + z^2)$ ja joukkoa ylhäältä rajoittavan tason yhtälö on $z = 6 - r \cos \theta$. Niinpä

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS &= \iiint_T \nabla \cdot \mathbf{F} dV = 5 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{6-r \cos \theta} (r^2 + z^2)r dz dr d\theta \\ &= 5 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{6-r \cos \theta} (r^3 z + \frac{1}{3} r z^3) dr d\theta \\ &= 5 \int_0^{2\pi} \int_0^2 (6r^3 - r^4 \cos \theta + 72r - 36r^2 \cos \theta + 6r^3 \cos^2 \theta - \frac{1}{3} r^4 \cos^3 \theta) dr d\theta. \end{aligned}$$

Tässä kosinin parittomia potensseja sisältävien termien integraalit ovat nolli, joten

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = 5 \int_0^{2\pi} \int_0^2 (6r^3 + 72r + 6r^3 \cos^2 \theta) \, dr \, d\theta = \dots = 1800\pi.$$

Esimerkki 9.8. Laske kentän

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

vuon ulos ontosta pallosta

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

Ratkaisu. T :n reunapinta $\partial T = S_1 \cup S_2$ koostuu kahdesta osasta eli 1- ja 2-säteisistä pallopinnoista S_1 ja S_2 . Käytetään Gaussin lausetta. $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}/r$, joten

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F} &= \nabla \cdot \left(\frac{1}{r} \mathbf{r} \right) = \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \mathbf{r} + \frac{1}{r} \nabla \cdot \mathbf{r} = -\frac{1}{r^2} \nabla r \cdot \mathbf{r} + \frac{3}{r} \\ &= -\frac{1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{r} + \frac{3}{r} = -\frac{1}{r^2} \frac{r^2}{r} + \frac{3}{r} = \frac{2}{r}. \end{aligned}$$

Nablaussääntöjen sijaan voidaan käyttää myös suoraan divergenssin määritelmää:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ &= \dots = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \end{aligned}$$

Joka tapauksessa pallokoordinaateissa divergenssi on $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{2}{\rho}$ ja siten

$$\begin{aligned} \iint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \iiint_T \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_1^2 \frac{2}{\rho} \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= 2 \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^\pi \sin \phi \, d\phi \right) \left(\int_1^2 \rho \, d\rho \right) = 2 \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} = 12\pi. \end{aligned}$$

Gaussin lausetta voidaan joskus käyttää apuna myös ei-suljetun pinnan S tapauksessa:

Esimerkki 9.9. Olkoon S pallopinnan puolikas

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}.$$

Laske kentän $\mathbf{F}(x, y, z) = (3x^2 + yz, y - e^z, 3z + 2)$ vuo pinnan S läpi origosta pois päin.

Ratkaisu. Merkitään T :llä puolipalloa

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}.$$

Nyt T :n reuna koostuu pinnasta S sekä pohjakiekosta S_0 . Lasketaan ensin Gaussin lauseen avulla vuo koko reunan $S \cup S_0$ läpi. $\nabla \cdot \mathbf{F} = 6x + 1 + 3 = 6x + 4$, joten

$$\begin{aligned} \iint_{S \cup S_0} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \iiint_T \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = 6 \iiint_T x \, dV + 4 \iiint_T dV \\ &= 6 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \rho \sin \phi \cos \theta \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta + 4v(T) \\ &= 6 \left(\int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta \right) \left(\int_0^{\pi/2} \sin^2 \phi \, d\phi \right) \left(\int_0^1 \rho^3 \, d\rho \right) + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi 1^3}{3} \\ &= 0 + \frac{8\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}. \end{aligned}$$

Tässä $\iiint_T x \, dV$ oltaisiin vaihtoehtoisesti voitu perustella suoraan nolllaksi laskematta integraalia, sillä yz -tason suhteen x on pariton funktio ja T symmetrinen joukko. Pinnalla S_0 on $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$ ja $z = 0$, joten $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -2$ ja siten

$$\iint_{S_0} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = -2 \iint_{S_0} dS = -2a(S_0) = -2\pi.$$

Näin ollen kysytty vuo on

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \frac{8\pi}{3} - (-2\pi) = \frac{14\pi}{3}.$$

Johdetaan divergenssille fysikaalinen tulkinta.

Lause 9.10. Olkoon B_r \mathbf{r}_0 -keskinen r -säteinen pallo ja \mathbf{n} reunapinnan ∂B_r ulkoinen yksikkönormaali. Jos \mathbf{F} on jatkuvasti differentioituva, niin

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}_0) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{v(B_r)} \iint_{\partial B_r} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS. \quad (9.11)$$

Todistus. Luku

$$\frac{1}{v(B_r)} \iiint_{B_r} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV \quad (9.12)$$

on reaaliarvoisen funktion $\nabla \cdot \mathbf{F}$ keskiarvo pallossa B_r . Oletuksen mukaan $\nabla \cdot \mathbf{F}$ on jatkuva, joten keskiarvo (9.12) lähenee funktion arvoa $\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}_0)$, kun $r \rightarrow 0+$. Väite seuraa nyt soveltamalla Gaussin lausetta lausekkeen (9.12) integraaliin. \square

Olkoon yhtälössä (9.11) $r > 0$ pieni. Tällöin

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}_0) \approx \frac{1}{v(B_r)} \iint_{\partial B_r} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}_0)$ kertoo siten paikallisen vuon

$$\iint_{\partial B_r} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

tilavuusyksikköä kohden. Jos $\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}_0) > 0$, niin vuo on positiivinen ja kenttä virtaa pois päin pisteestä \mathbf{r}_0 . Tällöin sanotaan, että pisteessä \mathbf{r}_0 on *lähde* (*source*). Jos taas $\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}_0) < 0$, niin vuo on negatiivinen ja kenttä virtaa pisteeseen \mathbf{r}_0 päin. Tällöin sanotaan, että pisteessä \mathbf{r}_0 on *nielu* (*sink*). Jos $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ joukossa T , niin \mathbf{F} on *lähteetön* joukossa T . Vuota

$$\iint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

kutsutaan joukossa T olevien lähteiden *antoisuudeksi*.

Jos \mathbf{F} ei ole differentioituva pisteessä \mathbf{r}_0 (eli \mathbf{r}_0 on \mathbf{F} :n *singulariteetti*), niin lähteisyyttä \mathbf{r}_0 :ssa ei voida tutkia laskemalla divergenssi. Tällöin tilannetta voidaan yrittää tarkastella laskemalla antoisuus pisteen \mathbf{r}_0 sisältävässä joukossa T .

Huomautus 9.13. Asettamamme divergenssin määritelmässä (1.23) divergenssin laskemiseksi täytyy kiinnittää xyz -koordinaatisto. Yhtälö (9.11) antaa divergenssille koordinaatistoriippumattoman määritelmän.

Esimerkki 9.14. Olkoon $T = [1, 2]^3$, ts. kuutio, jonka vastakkaisina kärkipisteinä ovat $(1, 1, 1)$ ja $(2, 2, 2)$. Lasketaan virtauskentän \mathbf{F} vuo T :n reunan läpi joukosta T pois päin.

a) Kentälle $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ on $\nabla \cdot \mathbf{F} = 3$, joten

$$\iint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_T \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = 3v(T) = 3.$$

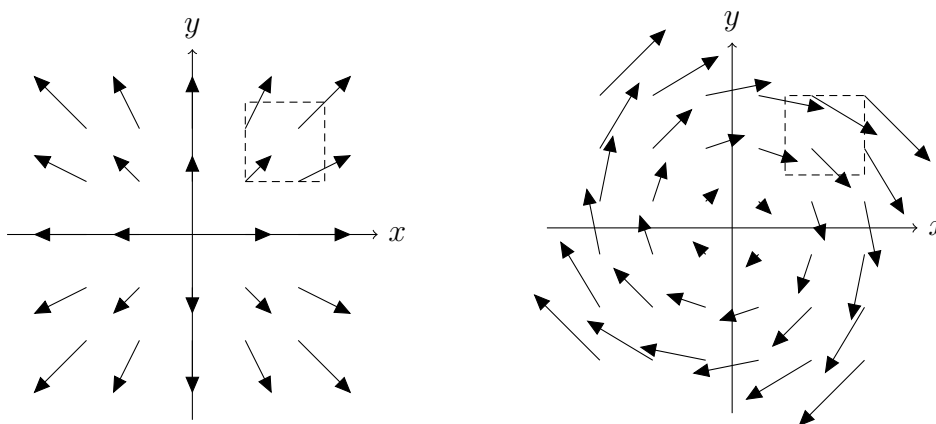
$\nabla \cdot \mathbf{F} > 0$ T :ssä, joten \mathbf{F} :llä on T :ssä lähteitä, ja virtausta tulee ulos enemmän kuin menee sisään. Vuo on positiivinen.

b) Kentälle $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ on $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, joten

$$\iint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_T \nabla \cdot \mathbf{F} dV = 0.$$

Kenttä on lähteetön, joten virtausta menee sisään yhtä paljon kuin sitä tulee ulos. Vuo on nolla.

Oheisissa kuvissa ovat em. kentät xy -tasossa. Laskemamme vuo-etu-merkki vastaa geometrista intuitiota.



Tämän luvun esimerkeissä Gaussin lausetta on käytetty teknisenä apukeino-
na vuo laskemiseksi. Gaussin lauseen tärkein merkitys on kuitenkin toimia
teoreettisena työkaluna monissa fysiikan ja tekniikan sovelluksissa, joista esi-
merkkejä seuraavassa ja luvussa 11.

Esimerkki 9.15. Olkoon joukon $T \subset \mathbb{R}^3$ reuna S paloittain sileä suunnis-
tuva pinta ($\mathbf{0} \notin S$). Laske keskeisvoimakentän

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

vuo reunan S läpi joukosta T poispäin.

Ratkaisu. Merkitään \mathbf{n} :llä pinnan S sitä yksikkönormaalialia, joka osoittaa
 T :stä poispäin. Erotellaan tapaukset $\mathbf{0} \notin T$ ja $\mathbf{0} \in T$.

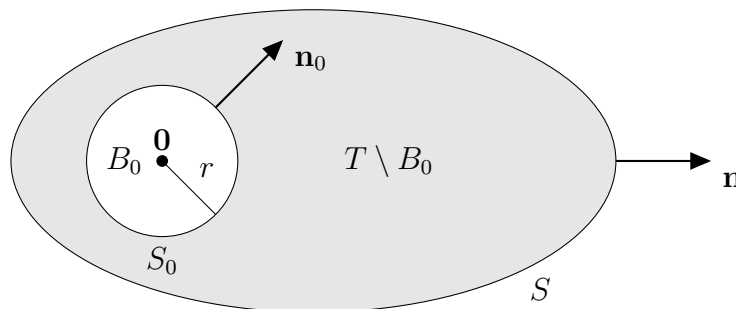
a) $\mathbf{0} \notin T$. Voidaan soveltaa Gaussin lausetta ja saadaan

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_T \nabla \cdot \mathbf{F} dV = 0,$$

sillä $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ (ks. esimerkki 1.34).

b) $\mathbf{0} \in T$. Nyt Gaussin lausetta ei voida käyttää suoraan, sillä \mathbf{F} ei ole jat-
kuvasti differentioituva joukossa T . Olkoon $B_0 \subset T$ origokeskinen pallo ja \mathbf{n}_0

sen reunapinnan S_0 origosta poispäin osoittava yksikkönormaali. Sovelletaan Gaussin lausetta joukkoon $T \setminus B_0$, jonka reuna koostuu pallon pinnasta S_0 ja pinnasta S :



$$0 = \iiint_{T \setminus B_0} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = \iint_{S_0} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{n}_0) \, dS + \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

Niinpä

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_{S_0} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_0 \, dS,$$

joten kysytty vuo on yhtäsuuri kuin vuo pallon B_0 reunapinnan läpi, joka on helppo laskea: reunalla S_0 on

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_0 = \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{r^4} = \frac{1}{r^2},$$

joten

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \frac{1}{r^2} \iint_{S_0} dS = \frac{1}{r^2} 4\pi r^2 = 4\pi.$$

Esimerkki 9.16. Olkoot T ja S kuten esimerkissä 9.15.

a) Gravitaatiokentälle $\mathbf{F} = -GMm \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ on

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \begin{cases} 0, & \text{jos } \mathbf{0} \notin T, \\ -4\pi GMm, & \text{jos } \mathbf{0} \in T. \end{cases}$$

Kentällä \mathbf{F} on siten origossa nielu, muualla kenttä on lähteetön.

b) Pistevarauksen q sähkökentälle $\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ on

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = \begin{cases} 0, & \text{jos } \mathbf{0} \notin T, \\ \frac{q}{\epsilon_0}, & \text{jos } \mathbf{0} \in T. \end{cases}$$

Kentällä \mathbf{E} on siten origossa nielu, jos $q < 0$ ja lähde, jos $q > 0$. Muualla kenttä on lähteetön.

10 Stokesin lause

Tulkitaan Greenin lauseen (lause 5.3) funktio \mathbb{R}^3 :n vektorikentäksi $\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y), Q(x, y), 0)$. Tällöin

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k},$$

joten

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

xy -tason kentälle \mathbf{F} Greenin lause voidaan siten kirjoittaa muodossa

$$\oint_{\partial R} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} \, dx \, dy. \quad (10.1)$$

Tulkitaan $R \subset \mathbb{R}^2$ \mathbb{R}^3 :n xy -tasolla olevaksi pinnaksi. Käytetään pinnalle R luonnollista parametrisointia $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, 0)$, $(x, y) \in R$, jolle $\|\mathbf{N}(x, y)\| = 1$ ja $\mathbf{n} = \mathbf{k}$. Saadaan

$$\oint_{\partial R} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

Tulos yleistyy \mathbb{R}^3 :n vektorikentille \mathbf{F} ja pinnoille S :

Lause 10.2 (Stokesin lause). *Olkoon S paloittain sileä suunnistuva pinta, jonka yksikkönormaali on \mathbf{n} , ja olkoon ∂S pinnan S :n positiivisesti suunnistettu reunakäyrä. Jos \mathbf{F} on jatkuvasti differentioituva pinnalla S , niin*

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS. \quad (10.3)$$

Tässä merkinnällä $\oint_{\partial S}$ korostetaan käyräintegroinnin tapahtuvan yli suljetun reunakäyrän positiiviseen kiertosuuntaan.

Todistus. Todistetaan Stokesin lause vain tapauksessa, jossa S on funktion $z = z(x, y)$ kuvaaja. Otetaan pinnan positiiviseksi puoleksi pinnan yläpuoli, jolloin S :lle voidaan käyttää parametrisointia $\mathbf{s}(x, y) = (x, y, z(x, y))$, $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$. Oletetaan lisäksi, että D :n reuna on sileä ja että z :lla on jatkuvat

toisen kertaluvun osittaisderivaatat. Merkitään $\mathbf{F} = (P, Q, R)$. Aloitetaan yhtälön (10.3) oikeasta puolesta. Koska

$$\mathbf{N} = \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1 \right),$$

niin (katso roottorin komponentit yhtälöstä (1.29))

$$\begin{aligned} \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS &= \iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} \, dx \, dy & (10.4) \\ &= \iint_D \left[-\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \frac{\partial z}{\partial x} - \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \frac{\partial z}{\partial y} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right] dx \, dy, \end{aligned}$$

missä kaikki osittaisderivaatat lasketaan pisteessä $(x, y, z(x, y))$.

Jatketaan käsittelemällä yhtälön (10.3) vasenta puolta. Olkoon $\mathbf{r}_2(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, reunan ∂D positiiviseen suuntaan suunnistettu sileä parametrisointi. Tällöin reunan ∂S positiiviseen suuntaan suunnistetuksi sileäksi parametrisoinniksi voidaan ottaa

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(x(t), y(t))), \quad a \leq t \leq b.$$

Soveltamalla ketjusääntöä viimeiseen komponenttiin saadaan

$$\mathbf{r}'(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right),$$

joten

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b (P, Q, R) \cdot \mathbf{r}'(t) \, dt & (10.5) \\ &= \int_a^b \left[P \frac{dx}{dt} + Q \frac{dy}{dt} + R \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) \right] dt \\ &= \int_a^b \left[\left(P + R \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{dx}{dt} + \left(Q + R \frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{dy}{dt} \right] dt \\ &\stackrel{\text{M. 2.72}}{=} \int_{\partial D} \left(P + R \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx + \int_{\partial D} \left(Q + R \frac{\partial z}{\partial y} \right) dy \\ &\stackrel{\text{Green}}{=} - \iint_D \frac{\partial}{\partial y} \left(P + R \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx \, dy + \iint_D \frac{\partial}{\partial x} \left(Q + R \frac{\partial z}{\partial y} \right) dx \, dy \\ &= \iint_D \left[-\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} - \left(\frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{\partial z}{\partial x} - R \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \left(\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial z}{\partial y} + R \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right] dx \, dy. \end{aligned}$$

Tässä integraalissa täytyy muistaa, että P , Q ja R lasketaan pisteessä $(x, y, z(x, y))$ ja siten esimerkiksi funktion $h(x, y) = P(x, y, z(x, y))$ osittaisderivaataksi x :n suhteen saadaan ketjusäännöllä

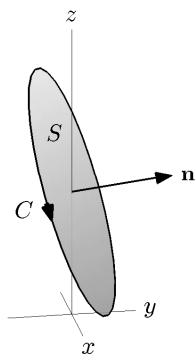
$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Väite seuraa nyt integraaleja (10.4) ja (10.5) vertaamalla. \square

Esimerkki 10.6. Laske

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

kun $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y^2, z, x)$ ja C on sylinterin $x^2 + y^2 = 1$ ja tason $2x + 2y + z = 3$ leikkauskäyrä siten, että kierretään z -akseli positiiviseen suuntaan (eli ylhäältä katsoen vastapäivään).



Ratkaisu. Käytetään Stokesin lausetta ja siirrytään integroimaan yli pinnan

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 3 - 2x - 2y, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Nyt $\mathbf{N}(x, y) = \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right) = (2, 2, 1)$ ja

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & z & x \end{vmatrix} = (-1, -1, 2y),$$

joten $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} = 2y - 4$, ja siten

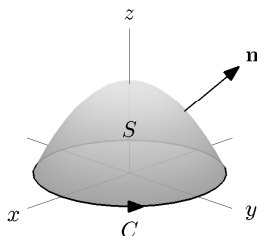
$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{\{(x,y): x^2+y^2 \leq 1\}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} dx dy \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \sin \theta r dr d\theta - 4 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r dr d\theta = 0 - 4\pi = -4\pi. \end{aligned}$$

Esimerkissä 10.6 kysytyn käyräintegraalin laskeminen suoraan käyttämättä Stokesin lausetta olisi hankalaa. Seuraava esimerkki voitaisiin laskea suoraankin. Kokeile!

Esimerkki 10.7. Laske

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS,$$

missä $\mathbf{F}(x, y, z) = (2z, x, y^2)$, S on xy -tason yläpuolella oleva paraboloidin $z = 4 - x^2 - y^2$ osa ja pinnan positiivisena puolena on pinnan yläpuoli.



Ratkaisu. Käytetään Stokesin lausetta ja siirrytään integroimaan yli S :n reunakäyrän, jolla on positiivisena parametrisointina

$$\mathbf{r}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 0), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Siten

$$\begin{aligned} \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS &= \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_0^{2\pi} (0, 2 \cos t, 4 \sin^2 t) \cdot (-2 \sin t, 2 \cos t, 0) \, dt \\ &= 4 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = 4\pi. \end{aligned}$$

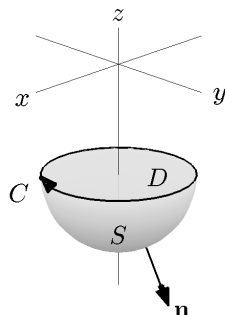
Esimerkki 10.8. Olkoon $\mathbf{F}(x, y, z) = yze^{xy}\mathbf{i} + xz(1 + e^{xy})\mathbf{j} + e^{xy}\mathbf{k}$. Laske

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS,$$

kun S on pallopinnan puolikas

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 4, z \leq -3\}$$

ja pinnan positiivisena puolena on sen alapuoli.



Ratkaisu. Käytetään Stokesin lausetta kahdesti:

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS,$$

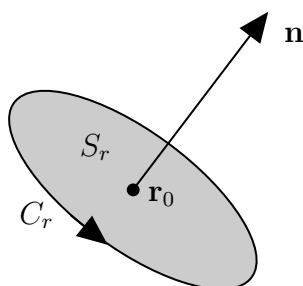
missä $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, z = -3\}$ on kiekko, jolla on S :n kanssa sama reunakäyrä. (Tässä alkuperäisen pintaintegraalin ja käyräintegraalin laskeminen suoraan on hyvin hankalaa. Kokeile!) Pinnalla D on $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$ ja $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = z = -3$, joten

$$\iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS = 3 \iint_D dS = 3a(D) = 3\pi 2^2 = 12\pi.$$

Seuraava Stokesin lauseen seuraus antaa roottorille fysikaalisen tulkinnan.

Lause 10.9. *Olkoon S_r \mathbf{r}_0 -keskinen r -säteinen kiekko \mathbb{R}^3 :ssa, joka on koh-tisuorassa yksikkövektoria \mathbf{n} vastaan ja olkoon C_r kiekon S_r (\mathbf{n} :n suhteen) positiivisesti suunnistettu reunakäyrä. Jos \mathbf{F} on jatkuvasti differentioituva, niin*

$$(\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}_0)) \cdot \mathbf{n} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{a(S_r)} \oint_{C_r} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$



Todistus. Luku

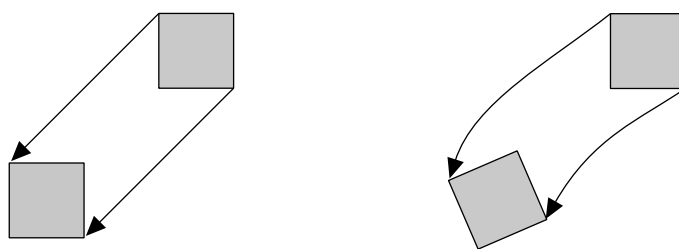
$$\frac{1}{a(S_r)} \iint_{S_r} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (10.10)$$

on reaaliarvoisen funktion $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}$ keskiarvo kiekossa S_r . Oletuksen mukaan $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}$ on jatkuva, joten keskiarvo (10.10) lähenee funktion arvoa $(\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}_0)) \cdot \mathbf{n}$, kun $r \rightarrow 0+$. Väite seuraa nyt soveltamalla Stokesin lausetta lausekkeen (10.10) integraaliin. \square

Tulkitaan \mathbf{F} virtauskentäksi (m/s), jolloin Stokesin lauseen käyräintegraali on kierto (m^2/s) käyrän C_r ympäri (ks. yhtälö (5.1)). Jos $r > 0$ on pieni, niin

$$(\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}_0)) \cdot \mathbf{n} \approx \frac{1}{a(S_r)} \oint_{C_r} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

eli $(\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}_0)) \cdot \mathbf{n}$ antaa kierron pisteessä \mathbf{r}_0 vektoria \mathbf{n} vastaan kohtisuorassa suunnassa pinta-alayksikköä kohden (1/s). Koska tämä pistetulo on vektorin $(\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}_0))$ skalaariprojektio vektorille \mathbf{n} (vrt. sivun 42 kuva), niin kierto on suurimmillaan, kun $(\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}_0))$ ja \mathbf{n} ovat samansuuntaiset. Fysiikkaalisesti $\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}_0)$ antaa suunnan, johon virtauskenttään \mathbf{F} pisteeseen \mathbf{r}_0 asetettavan pienen siipirattaan akseli olisi suunnattava, jotta ratas pyörisi mahdollisimman nopeasti. Tässä suunnassa $\|\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}_0)\| = (\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}_0)) \cdot \mathbf{n}$, eli roottorin pituus antaa kierron pinta-alayksikköä kohden. Roottori siis ilmoittaa sen suunnan \mathbf{n} , jonka ympäri kierto on suurimmillaan ja roottorin pituus kertoo pyörteisyyden voimakkuudesta. Sanotaan, että jos $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ joukossa T , niin \mathbf{F} on *pyörteetön* (*irrotational*) joukossa T . Oheisessa kuvassa havainnollistetaan virtaavan aineen pienen palasen liikettä pyörteettömässä ja pyörteellisessä virtauskentässä.



Esimerkistä 1.42 muistetaan, että tasaisen ympyräliikkeen nopeuskentän \mathbf{F} kulmanopeus on

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{F}$$

ja siten kulmanopeuden suuruus

$$\omega = \frac{1}{2} \|\nabla \times \mathbf{F}\| \quad (1/\text{s}).$$

Esimerkki 10.11. Tarkastellaan esimerkin 9.14 virtauskenttiä. Lasketaan kentän \mathbf{F} kierto xy -tasossa olevan pinnan

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x, y \leq 2, z = 0\}$$

(kuivissa katkoviivalla) reunakäyrän ympäri vastapäivään.

a) Kentälle $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ on $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, joten

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

Kenttä on pyörteetön, joten kierto reunakäyrän ympäri on nolla.

b) Kentälle $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ on $\nabla \times \mathbf{F} = -2\mathbf{k}$, joten $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = -2$ ja siten

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS = -2a(S) = -2.$$

Tässä $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} < 0$, joten reunakäyrän ympäri on kiertoa myötäpäivään.

Esimerkin 9.14 kuvista havaitaan, että laskemamme kierron etumerkki vastaa geometrista intuitiota.

Huomautus 10.12. Stokesin lause (10.3) voidaan tulkita seuraavasti: oikealla puolella summataan pintaa S vastaan kohtisuoraa kiertoa pinta-alayksikköä kohden eli funktiota $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}$ yli pinnan S . Tuloksena (yhtälön vasen puoli) saadaan kierto reunakäyrän ympäri.

Esimerkki 10.13. Olkoon

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{y\mathbf{i} - x\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$$

ja olkoon S xy -tasossa oleva (Stokesin lauseen oletukset toteuttava) pinta, yläpuoli positiivisena puolena. Osoita, että

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \begin{cases} 0, & \text{jos } \mathbf{0} \notin S, \\ -2\pi, & \text{jos } \mathbf{0} \in S. \end{cases}$$

Ratkaisu. Jos $\mathbf{0} \notin S$, niin voidaan käyttää Stokesin lausetta:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-x}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \right) \mathbf{k} = \mathbf{0},$$

joten

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

Jos $\mathbf{0} \in S$, niin Stokesin lausetta ei voida käyttää suoraan. Olkoon $S_0 \subset S$ origokeskinen R -säteinen xy -tason kiekko. Sovelletaan Stokesin lausetta pintaan $S \setminus S_0$:

$$0 = \iint_{S \setminus S_0} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \oint_{\partial S_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

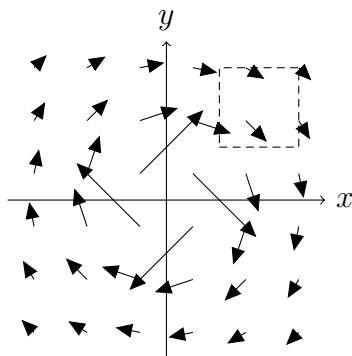
Niinpä

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \oint_{\partial S_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

joten kysytty kierto palautuu kierron laskemiseksi kiekon S_0 reunakäyrän ympäri: ∂S_0 :n eräs positiivinen parametrisointi on $\mathbf{r}(t) = (R \cos t, -R \sin t, 0)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, joten

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^2} (-R \sin t, -R \cos t, 0) \cdot (-R \sin t, -R \cos t, 0) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) \, dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Ohessa on kuva kentästä xy -tasossa. Geometrisesti on helppo uskoa, että jos $\mathbf{0} \in S$, niin syntyy kiertoa myötäpäivään. Miksi tapauksessa $\mathbf{0} \notin S$ kierto on nyt nolla, vaikka esimerkissä 10.11 samantapaisella kentällä $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ oli kiertoa myötäpäivään?



Hahmotellaan lopuksi luvussa 3.2 esitetyn lauseen 3.18 (s. 56) todistus. Lauseen mukaan tähtimäisessä alueessa vektorikenttä on konservatiivinen jos ja vain jos se on pyörteetön.

Lauseen 3.18 perustelu. ” \Rightarrow ” On olemassa potentiaalifunktio f , jolle $\mathbf{F} = \nabla f$. Lauseen 1.40 mukaan silloin $\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times \nabla f = 0$.

” \Leftarrow ” Kiinnitetään A ja $B \in D$ ja niitä D :ssä yhdistävät käyrät C_1 ja C_2 . On osoitettava, että

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että käyrät C_1 ja C_2 leikkaavat toisensa vain päätepisteissä A ja B . Koska D on tähtimäinen alue, niin käyrä $C = C_1 \cup (-C_2)$ on reunakäyrä erälle paloittain sileälle pinnalle $S \subset D$. Nyt Stokesin lauseen mukaan

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS = 0. \quad \square$$

11 Sovelluksia

Tutustutaan muutamaaan sovellukseen, joissa käytetään tällä opintojaksolla esiteltyjä matemaattisia työkaluja.

11.1 Kenttäviivat

Vektorikenttää voidaan luvun 1.1 vektorikuvien lisäksi havainnollistaa piirtämällä käyrä $\mathbf{r}(t)$, jonka tangenttivektori yhtyy jokaisessa käyrän pisteessä kenttään $\mathbf{F} = (P, Q, R)$, ts.

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)).$$

On siis ratkaistava differentiaaliyhtälöryhmä

$$\begin{cases} x'(t) = P(\mathbf{r}(t)) \\ y'(t) = Q(\mathbf{r}(t)) \\ z'(t) = R(\mathbf{r}(t)) \end{cases}$$

alkuehdolla $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$. Ratkaisu $\mathbf{r}(t)$ antaa *kenttäviivan* C . Sovelluskohteesta riippuen käytetään myös nimityksiä *voimaviiva* ja *virtausviiva* (*field line*, *flux line*, *force line*, *streamline*). Fysikaalisesti kenttäviiva on käyrä, jota pitkin virtauskentän \mathbf{F} hiukkanen liikkuu, jos se hetkellä $t = 0$ on pisteessä \mathbf{r}_0 .

Esimerkki 11.1. Selivtä kentän $\mathbf{F}(x, y) = (1, \sin x)$ kenttäviivat ja piirrä kuva kentästä ja kenttäviivoista.

Ratkaisu. Hetaan käyrä $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, jolle

$$\frac{dx}{dt} = 1 \quad \text{ja} \quad \frac{dy}{dt} = \sin x.$$

Ratkaisemalla kummastakin yhtälöstä dt saadaan

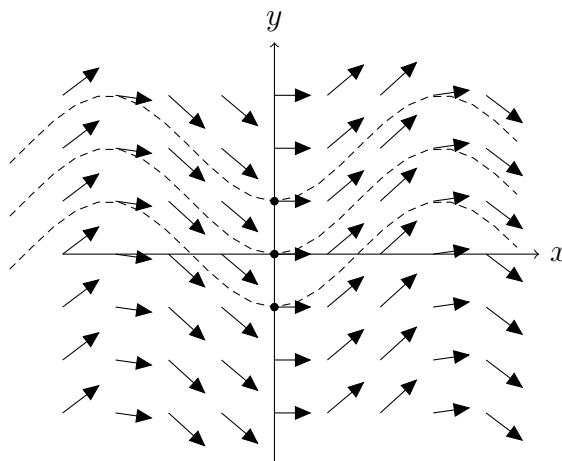
$$dx = \frac{dy}{\sin x}.$$

Separoidaan ja integroidaan:

$$\int dy = \int \sin x dx$$

$$y = -\cos x + C$$

Tällainen menettely voidaan osoittaa tässä yhteydessä luvalliseksi (vertaa tavallisen differentiaaliyhtälön ratkaisemiseen separoimalla). Esimerkiksi pisteen $(0, 0)$ kautta kulkeva kenttäviiva: $y(0) = -\cos 0 + C = -1 + C$, josta $C = 1$. Saadaan kenttäviiva $y = -\cos x + 1$. Lasketaan vastaavalla tavoin pisteiden $(0, 1)$ ja $(0, -1)$ kautta kulkevat kenttäviivat ja piirretään ne samaan kuvaan kentän \mathbf{F} kanssa. Kuvasta nähdään, miten kenttäviivat kulkevat kussakin pisteessä kenttänuolen osoittamaan suuntaan.



Esimerkki 11.2. Laske gravitaatiokentän

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -GMm \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -GMm \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

kenttäviivat.

Ratkaisu. Haetaan käyrä $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, jolle

$$\frac{dx}{dt} = -GMm \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{dy}{dt} = -GMm \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{dz}{dt} = -GMm \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

Ratkaisemalla jokaisesta yhtälöstä dt saadaan

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

Integroimalla saadaan

$$\ln|x| + C_1 = \ln|y| + C_2 = \ln|z| + C_3$$

ja edelleen eksponentioimalla

$$ax = by = cz, \quad (11.3)$$

missä $a = \pm e^{C_1}$, $b = \pm e^{C_2}$ ja $c = \pm e^{C_3}$. Kaavan (11.3) molemmat yhtälöt kuvaavat origon kautta kulkevaa tasoa. Kenttäviivat ovat näiden tasojen leikkauksia eli origon kautta kulkevia suoria. Esimerkin 1.10 perusteella tulos on odotusten mukainen.

Virtausfunktio

Tarkastellaan xy -tason pyörteetöntä virtauskenttää $\mathbf{F} = (P, Q)$. Haetaan skaalarifunktiota Ψ , jonka tasa-arvokäyrät $\Psi = c$ ovat kentän \mathbf{F} kenttäviivoja. Koska $\nabla\Psi$ on kohtisuorassa tasa-arvokäyriä vastaan, niin

$$\mathbf{F} \perp \nabla\Psi \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{F} \cdot \nabla\Psi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (P, Q) \cdot \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}, \frac{\partial\Psi}{\partial y} \right) = 0.$$

Näin käy esimerkiksi, jos

$$P = \frac{\partial\Psi}{\partial y} \quad \text{ja} \quad Q = -\frac{\partial\Psi}{\partial x}. \quad (11.4)$$

Yhtälöt (11.4) toteuttavaa funktiota Ψ kutsutaan *virtausfunktioiksi* (*stream function*). Jos virtausfunktio on olemassa, niin pyörteettömyysehto tulee muotoon

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = 0.$$

Ψ toteuttaa siten Laplacen yhtälön $\nabla^2\Psi = 0$. Yhtälöistä (11.4) huomataan, että virtaus \mathbf{F} on sitä voimakkaampi, mitä suurempi on gradientti $\nabla\Psi$, ts. mitä tiheämmässä kenttäviivat $\Psi = c$ ovat (kun c :n arvot valitaan tasavälein).

Esimerkki 11.5. Tarkastellaan xy -tason tasaista virtauskenttää $\mathbf{F} = k\mathbf{i}$, $k > 0$. Asetetaan origoon a -säteinen este $x^2 + y^2 = a^2$. Lasketaan uusi virtauskenttä \mathbf{F} virtausfunktion avulla. Ratkaistaan Laplacen yhtälö $\nabla^2\Psi = 0$ reunaehdoilla

- $\Psi = 0$ x -akselilla ja
- $\Psi = 0$ ympyrällä $x^2 + y^2 = a^2$.

Ratkaisuna saadaan (osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkaisemista ei käsitellä tällä opintojaksolla)

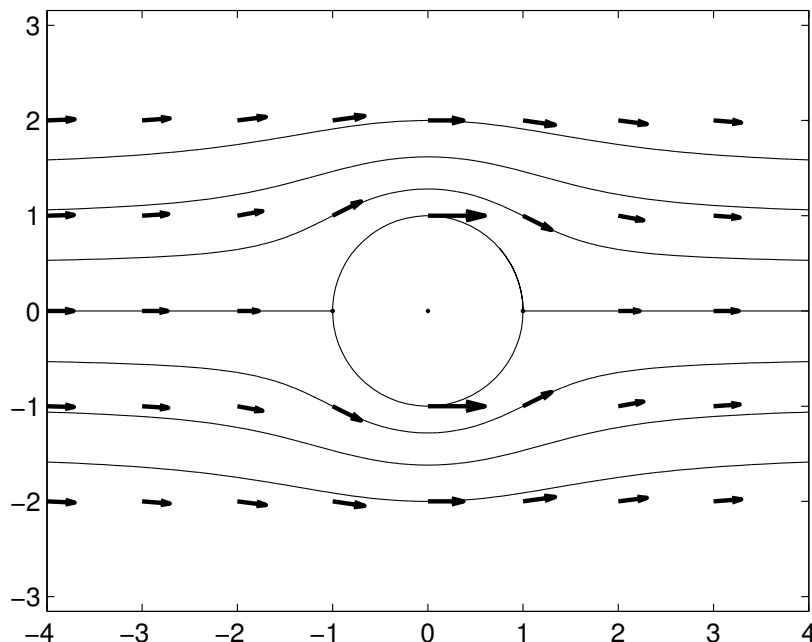
$$\Psi(x, y) = ky \left(1 - \frac{a^2}{x^2 + y^2} \right).$$

Nyt

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \mathbf{j} = k\mathbf{i} + \frac{ka^2}{(x^2 + y^2)^2} ((y^2 - x^2)\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j}).$$

Oheiseen kuvaan on piirretty (parametrien arvoilla $k = 1$ ja $a = 1$) Ψ :n tasa-arvokäyrät $\Psi = -1.5, -1.0, \dots, 1.5$ ja kentän \mathbf{F} vektoreita. Huomataan:

- Kaukana origosta ($|x|$ tai $|y|$ suuri) kenttä on likimain alkuperäinen kenttä $k\mathbf{i}$.
- Virtaus voimistuu (eli kenttäviivat ovat tiheämmässä) esteen ylä- ja alapuolella lähellä estettä.
- Pisteissä $(-1, 0)$ ja $(1, 0)$ on $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.



11.2 Jatkuvuusyhtälö

Olkoon $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$ virtausnopeus (m/s) ja $\rho = \rho(x, y, z, t)$ virtaavan aineen tiheys (kg/m³) pisteessä (x, y, z) (m) ajanhetkellä t (s). Olkoon $T \subset \mathbb{R}^3$, S sen paloittain sileä suunnistuva reunapinta ja \mathbf{n} ulkoinen yksikkönormaali. Nyt

$$\iiint_T \rho dV$$

on joukossa T olevan virtaavan aineen massa, joten

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_T \rho dV \quad (11.6)$$

on massan muutosnopeuden joukossa T (kg/s). Toisaalta $\rho\mathbf{v}$ on massan virtausnopeus (kg/m²s), joten

$$\iint_S \rho\mathbf{v} \cdot (-\mathbf{n}) dS = - \iint_S \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad (11.7)$$

on massan vuo joukon T sisälle (kg/s). Massa ei katoa, joten (11.6) ja (11.7) ovat yhtäsuuret. Fysiikassa *massansäilymislaki* voidaankin formuloida seuraavasti:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_T \rho dV = - \iint_S \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (11.8)$$

Sovelletaan nyt Gaussin lausetta massansäilymislain oikeaan puoleen ja käytetään hyväksi tietoa, että yhtälön vasemmalla puolella derivoinnin ja integroinnin järjestyksen voi tietyin oletuksin vaihtaa. Saadaan

$$\iiint_T \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \iiint_T \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) dV$$

eli

$$\iiint_T \left(\nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0.$$

Koska tämä pätee kaikilla joukoilla T , niin integroitavan funktion täytyy olla nollafunktio, ts.

$$\nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (11.9)$$

Yhtälöä (11.9) kutsutaan *jatkuvuusyhtälöksi*, joka on yhtäpitävä massansäilymislain (11.8) kanssa. Sovelluksissa lokaali versio (11.9) voi olla helpommin käsiteltävä kuin intuitiivisesti ymmärrettävämpi integraalimuoto (11.8).

11.3 Maxwellin yhtälöistä

Esimerkissä 1.43 käsiteltiin Maxwellin yhtälöitä tyhjiössä. Väliaineessa Maxwellin yhtälöt hieman mutkistuvat. Jos sähkökentän voimakkuus on \mathbf{E} (V/m) ja magneettikentän voimakkuus \mathbf{H} (A/m), niin

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon} & \text{(b)} \quad \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0 \\ \text{(c)} \quad \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} & \text{(d)} \quad \nabla \times \mathbf{H} &= \sigma \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

missä μ on väliaineen permeabiliteetti (Vs/Am), ϵ väliaineen permittiivisyys (As/Vm), ρ varaustiheys (C/m³) ja σ väliaineen sähkönjohtavuus (1/Ωm = A/Vm). Voidaan vielä merkitä $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ (virrantiheys, A/m²), $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ (sähkövuon tiheys, C/m²) ja $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ (magneettivuon tiheys, Vs/m²=T).

Integroimalla Maxwellin yhtälöt saadaan muotoihin, jotka ovat toisinaan käyttökelpoisempia kuin em. differentiaaliyhtälöt:

Esimerkki 11.10. Staattisessa (ajasta riippumattomassa) sähkömagneettisessa kentässä yhtälö (d) tulee muotoon

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} = \mathbf{J}. \quad (11.11)$$

Tarkastellaan (kuvitteellisen) pinnan S läpi menevää johdinta, jossa kulkee vakiovirta I . Lasketaan yhtälön (11.11) molempien puolien vuo pinnan S läpi:

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

Sovelletaan vasempaan puoleen Stokesin lausetta. Oikean puolen integraali on pinnan S läpi menevä virta I . Saadaan *Ampèren laki*

$$\oint_{\partial S} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = I,$$

jonka mukaan pinnan läpi menevä virta on yhtäsuuri kuin magneettikentän kierto reunakäyrän ympäri.

Esimerkki 11.12. Muokataan yhtälö (a) muotoon $\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = \rho$, ts. $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ ja integroidaan joukon $T \subset \mathbb{R}^3$ yli:

$$\iiint_T \nabla \cdot \mathbf{D} \, dV = \iiint_T \rho \, dV.$$

Sovelletaan vasempaan puoleen Gaussin lausetta. Oikean puolen integraali antaa joukossa T olevan kokonaisvarauksen Q (C). Saadaan

$$\iint_{\partial T} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, dS = Q.$$

Toisin sanoen kokonaisvaraus joukossa T on yhtäsuuri kuin reunan ∂T läpäisevä sähkövuo.

11.4 Vektorimuotoinen Gaussin lause

Määritellään vektorikentälle $\mathbf{G} = (g_1, g_2, g_3)$ integraalit

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{G} dS &= \left(\iint_S g_1 dS, \iint_S g_2 dS, \iint_S g_3 dS \right) \quad \text{ja} \\ \iiint_T \mathbf{G} dV &= \left(\iiint_T g_1 dV, \iiint_T g_2 dV, \iiint_T g_3 dV \right). \end{aligned}$$

Toisin sanoen vektorikenttä integroidaan koordinaateittain.

Lause 11.13 (Gaussin lauseen vektorimuoto). *Olkoon joukon $T \subset \mathbb{R}^3$ reuna paloittain sileä pinta S , \mathbf{n} sen ulkoinen yksikkönormaali ja f joukossa T määritelty jatkuvasti differentioituva skalaarifunktio. Tällöin*

$$\iint_S f \mathbf{n} dS = \iiint_T \nabla f dV.$$

Todistus. Olkoon $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ vakiovektori. Todetaan ensin, että

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \iiint_T \mathbf{G} dV &= a_1 \iiint_T g_1 dV + a_2 \iiint_T g_2 dV + a_3 \iiint_T g_3 dV \\ &= \iiint_T a_1 g_1 dV + \iiint_T a_2 g_2 dV + \iiint_T a_3 g_3 dV \\ &= \iiint_T (a_1 g_1 + a_2 g_2 + a_3 g_3) dV \\ &= \iiint_T \mathbf{a} \cdot \mathbf{G} dV. \end{aligned} \tag{11.14}$$

Vastaavalla tavoin nähdään, että

$$\mathbf{a} \cdot \iint_S \mathbf{G} dS = \iint_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{G} dS. \tag{11.15}$$

Lisäksi tulosäännön nojalla

$$\nabla \cdot (f \mathbf{a}) = \nabla f \cdot \mathbf{a} + f \nabla \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \nabla f.$$

Sovelletaan nyt Gaussin lausetta 9.1 vektorikentälle $\mathbf{F} = f\mathbf{a}$, käytetään kaavaa (11.14) kentälle $\mathbf{G} = \nabla f$ ja kaavaa (11.15) kentälle $\mathbf{G} = f\mathbf{n}$:

$$\begin{aligned} \iint_S f\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \iiint_T \nabla \cdot (f\mathbf{a}) \, dV \\ \Leftrightarrow \iint_S \mathbf{a} \cdot (f\mathbf{n}) \, dS &= \iiint_T \mathbf{a} \cdot \nabla f \, dV \\ \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \iint_S f\mathbf{n} \, dS &= \mathbf{a} \cdot \iiint_T \nabla f \, dV \end{aligned}$$

Väite seuraa nyt asettamalla \mathbf{a} :ksi vuorotellen \mathbf{i} , \mathbf{j} ja \mathbf{k} . □

Esimerkki 11.16. Arkhimedeeseen laki. Olkoon S nesteeseen upotetun kappaleen T paloittain sileä pinta. Olkoon nesteellä vakiotiheys ρ ja olkoon $-z$ etäisyys nesteen pinnasta tarkastelupisteeseen (neste pinnalla $z = 0$, nesteessä $z < 0$). Tällöin syvyydellä z neste kohdistaa pinta-alkioon dS paineen $p = -\rho gz$ (N/m^2 , g = putoamiskiiktyvyys). Neste paine kohdistaa pinta-alkioon dS voiman $-p\mathbf{n} \, dS$ (N), joten koko kappaleeseen kohdistuu nostevoima

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \rho g \iint_S z\mathbf{n} \, dS \stackrel{\text{L. 11.13}}{=} \rho g \iiint_T \nabla z \, dV = \rho g \mathbf{k} \iiint_T dV \\ &= \rho g v(T)\mathbf{k} = W\mathbf{k}, \end{aligned}$$

eli nostevoima suuntautuu ylöspäin ja on suuruudeltaan kappaleen syrjäyttämän nestemäärän painoinen.

12 Kertaus

Opintojakson osaamistavoitteena on tiivistetysti sanottuna oppia käyttämään käyrä- ja pintaintegraalien määritelmiä ja Gaussin ja Stokesin lausetta. Tärkeimmät kerrattavat asiat ovat siis:

- Gradientin, divergenssin ja roottorin laskeminen sekä koordinaattien x , y ja z avulla määritellyille kentille $f(x, y, z)$ ja $\mathbf{F}(x, y, z)$ että pallosymmetrisille kentille $f(\mathbf{r})$ ja $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ (luku 1).
- Käyräintegraali reaaliarvoiselle funktiolle (luku 2.6):

$$\int_C f \, ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| \, dt.$$

- Käyräintegraali vektorikentälle (luku 2.8):

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt.$$

- Kentän \mathbf{F} potentiaalifunktio f ja käyräintegraalien peruslause (luvut 3.1 ja 3.2):

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A).$$

- Erilaisten pintojen parametrisoinnit (luku 7.3).
- Pintaintegraali reaaliarvoiselle funktiolle (luku 7.4):

$$\iint_S f dS = \iint_R f(\mathbf{r}(u, v)) \|\mathbf{N}(u, v)\| du dv.$$

- Pintaintegraali vektorikentälle eli vuo (luku 7.7):

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_R \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{N}(u, v) du dv.$$

- Gaussin lause (luku 9):

$$\iint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_T \nabla \cdot \mathbf{F} dV.$$

- Stokesin lause (luku 10):

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS.$$

Lähteitä ja kirjallisuutta

- [1] R. Adams: *Calculus, a Complete Course (4th ed.)*. Addison Wesley Longman Ltd., 1999.
- [2] Anonyymi: *Peano curve*. [WWW-dokumentti]
<http://en.wikipedia.org/wiki/Peano_curve> (luettu 11.10.2012).
- [3] H. Anton, I. Bivens, S. Davis: *Calculus, Early Transcendentals (7th ed.)*. John Wiley & Sons, Inc., 2002.
- [4] A. Croft, R. Davison, M. Hargreaves: *Engineering Mathematics (3rd ed.)*. Pearson Education Limited, 2001.
- [5] C. Edwards, D. Penney: *Calculus, Early Transcendentals, Matrix Version (6th ed.)*. Prentice-Hall Inc., 2002.
- [6] G. Etgen: *Salas and Hille's Calculus: One and Several Variables (8th ed.)*. John Wiley & Sons, Inc., 1999.
- [7] S. Grossman: *Calculus (5th ed.)*. Harcourt Brace & Company, 1992.
- [8] G. James: *Advanced Modern Engineering Mathematics (3rd ed.)*. Pearson Education Limited, 2004.
- [9] A. Jeffrey: *Advanced Engineering Mathematics*. Hartcourt/Academic Press, 2002.
- [10] R. Larson, R. Hostetler, B. Edwards: *Calculus with Analytic Geometry (8th ed.)*. Houghton Mifflin Company, 2006.
- [11] A. Perttula: *Vektorianalyysi*. Opintomoniste, LECTRE, 2005.
- [12] V. Purmonen: *Differentiaali- ja integraalilaskentaa, I osa*. Luentomoniste 45, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan laitos, 2000.
- [13] V. Purmonen: *Differentiaali- ja integraalilaskentaa usean reaaliuuttujan funktioille, II osa*. Luentomoniste 48, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan laitos, 2005.
- [14] J. Stewart: *Calculus, Early transcendentals, Metric international version (6th ed.)*. Thomson Brooks/Cole, 2008.
- [15] G. Thomas, M. Weir, J. Hass, F. Giordano: *Thomas' Calculus (11th ed.)*. Pearson Education, Inc., 2005.

Hakemisto

- aaltoyhtälö, 18
- alkupiste, 23
- alue, 51
- Ampèren laki, 126
- antoisuus, 110
- Arkhimedeen laki, 128
- Arkhimedeen spiraali, 36
- avaruusintegraali, 99
- avaruuskäyrä, 23

- derivaatta, käyrän, 27
- derivaattavektori, 27
- derivoituvuus (käyrän), 27
- differentioituvuus, 9
- diffuusioyhtälö, 18
- divergenssi, 14
- divergenssilause, 104

- ellipsi, 26
- elliptinen sylinteri, 78

- Gaussin lause, 104
 - vektorimuoto, 127
- Gaussin lause tasossa, 76
- gradientti, 11
- gravitaatiokenttä, 9
 - kenttäviivat, 122
 - potentiaalienergia, 58
 - vuoto, 112
- Greenin lause, 71

- harmoninen funktio, 17
- hitausmomentti, 41
 - pinnan, 90

- integraali, 60, 62
- integroituvuus, 60, 62

- jako, 59
- janan parametrisointi, 25, 46

- jatkuva differentioituvuus, 9
- jatkuvuus, 22
- jatkuvuusyhtälö, 125

- kartio, 77
- kauttakulkupiste, 25
- kenttäviiva, 121
- kentän voimakkuus, 6
- keskeisvoimakenttä, 8
- kierto, 71
- kiihtyvyys, 28
- komponenttifunktio, 6, 22
- konservatiivinen vektorikenttä, 51, 58
- koordinaattifunktio, 6, 22
- koordinaattimurtoviiva, 47
- käyrä, 23
 - parametrisointi, 23
 - pituus, 35
- käyräintegraali
 - peruslause, 50
 - skalaarifunktion, 38, 48
 - tiestä riippumaton, 51
 - vektorikentän, 44, 49

- Laplacen lauseke, 17
- Laplacen operaattori, 17
- Laplacen yhtälö, 17, 123
- loppupiste, 23
- lähde, 110
- lämpöyhtälö, 18

- massa
 - käyrän, 37, 40
 - pinnan, 88, 90
- massakeskipiste, 41
 - pinnan, 90
- massansäilymlaki, 125
- Maxwellin yhtälöt, 21, 126
- Möbiuksen nauha, 93

- napakoordinaatit, 68
- nielu, 110
- nollajatko, 62
- nollavektori, 5
- nopeus, 28
- normaalivektori
 - pinnan, 82
- osittaisderivaatta, 9
- osittaisderivaattavektori, 81
- pallo, 78
- pallokoordinaatit, 86, 101
- pallopinta, 77, 86
- paraboloidi, 77
- paraboloidinen sylinteri, 78
- parametrisointi, 23
 - pinnan, 80
- Peanon käyrä, 30, 81
- pinta, 80
 - pinta-ala, 84
 - suljettu, 92
 - suunnistuva, 92
 - suurennessuhde, 84
- pinta-ala, 62, 84
- pintaintegraali
 - skalaarifunktion, 88
 - vektorikentän, 95
- pituus
 - vektorin, 5
- pituus (käyrän), 35
- polkuintegraali, 38
- positiivinen suunnistus, 70, 92
- potentiaali, 51
- potentiaalienergia, 58
- potentiaalifunktio, 51
- projektio, 42
- projisoituva joukko, 63, 100
- puoliakseli, 26
- pyörteisyys, 21, 118
- päänormaali, 31
- raja-arvo, 22
- reunakäyrä, 92
- Riemannin summa, 60
- roottori, 15
- ruuvikäyrä, 25
- ruuvipinta, 82, 84
- sileys
 - pinnan, 81
- sileä käyrä, 31
- skalaarifunktio, 6
- skalaarikenttä, 6
- skalaariprojektio, 42
- Stokesin lause, 113
- suljettu käyrä, 32
- suljettu pinta, 92
- suunnistus, 70
 - käyrän, 33
 - pinnan, 92
- suurennessuhde, 84
- sylinteri, 78
- sylinterikoordinaatit, 86, 104
- sylinteripinta, 77, 86
- sähkökenttä, 9
 - vuon, 112
- tangenttitaso, 82
- tangenttivektori, 28
 - pinnan, 82
- tasa-arvokäyrä, 11, 123
- tasa-arvopinta, 11
- tasokäyrä, 23
- tie, 51
- tieintegraali, 38
- tilavuus, 99
- torus, 85
- tähtimäinen alue, 55
- ulkoinen yksikkönormaali, 71, 92
- umpinainen käyrä, 32
- vastakäyrä, 33

- vauhti, 28
- vektori, 5
- vektorikenttä, 6
 - pyörteetön, 118
 - komponenttifunktio, 6
 - konservatiivinen, 51, 58
 - koordinaattifunktio, 6
 - lähteetön, 110
 - pyörteetön, 21
 - vuoksi, 95
- viipalointiperiaate, 61
- viivaintegraali, 38
- virittäjävektori, 25
- virtausfunktio, 123
- virtausviiva, 121
- voimaviiva, 121
- vuoksi, 71, 95

- yhtenäinen joukko, 51
- yksikkönormaali, 71
 - pinnan, 92
 - ulkoinen, 92
- yksikkötangenttivektori, 31
- yksinkertainen käyrä, 32